

# Beräkning av homologigrupper med hjälp av cellulär homologi

Sebastian Björkqvist

Pro gradu-avhandling  
Handledare: Erik Elfving

Helsingfors universitet  
Matematisk-naturvetenskapliga fakulteten  
Institutionen för matematik och statistik

24.11.2014

# Innehåll

<b>Inledning</b>	<b>1</b>
<b>1 Stigar och homotopier</b>	<b>3</b>
1.1 Homotopier mellan avbildningar . . . . .	3
1.2 Stighomotopi . . . . .	4
1.3 Fundamentalgruppen . . . . .	6
1.4 Den inducerade homomorfismen . . . . .	9
<b>2 Affina rum och simplex</b>	<b>12</b>
2.1 Affina rum . . . . .	12
2.2 Simplex . . . . .	14
<b>3 Singulär homologi</b>	<b>18</b>
3.1 Homologigrupper . . . . .	19
3.2 Den inducerade homomorfismen . . . . .	24
3.3 Kedjekomplex . . . . .	28
3.4 Reducerad homologi . . . . .	33
3.5 Relativ homologi . . . . .	34
3.6 Homologiaxiom . . . . .	39
3.7 Klassiska tillämpningar . . . . .	44
<b>4 Cellkomplex</b>	<b>46</b>
4.1 Grundegenskaper . . . . .	46
4.2 Cellulär homologi . . . . .	51
4.3 Beräkning av homologigrupper . . . . .	60
<b>Beteckningar</b>	<b>68</b>
<b>Litteraturförteckning</b>	<b>69</b>

# Inledning

Inom topologi finns det ett antal fakta som intuitivt verkar självklara men som är svåra att bevisa med elementära verktyg. Ett exempel är faktumet att Euklidiska rum av olika dimension inte är homeomorfa, dvs. att  $\mathbb{R}^n$  och  $\mathbb{R}^m$  är homeomorfa om och endast om  $n = m$ ; ett annat exempel är att enhetssfärerna  $S^n$  inte är kontraktibla. Det är lätt att intuitivt övertyga sig själv om att dessa fakta måste gälla, men att formulera exakta bevis visar sig vara överraskande invecklat.

Algebraisk topologi ger oss verktyg för att kunna bevisa påståendena som gavs ovan, och även många andra intressanta och användbara resultat. Idén bakom algebraisk topologi är att med varje topologiskt rum associera en algebraisk invariant, vanligtvis en grupp. Det finns flera sätt att definiera denna invariant; i denna avhandling behandlas homologigrupper. Att vara en algebraisk invariant betyder i detta fall att homeomorfa (och även homotopiekvivalenta) rum associeras med isomorfa grupper. Därmed kan man t.ex. visa att två rum inte är homeomorfa genom att visa att deras homologigrupper inte är isomorfa.

Målet med avhandlingen är att definiera cellulär homologi och demonstrera hur man med hjälp av detta koncept tämligen enkelt kan beräkna homologigrupperna för ett antal topologiska rum. För att nå målet så definieras först s.k. singulära homologigrupper. Dessa grupper är definierade för alla topologiska rum, men att bestämma de singulära homologigrupperna för ett rum är vanligtvis inte lätt. För att underlätta beräkningarna av homologigrupper definieras cellkomplex som ger oss ett sätt att bygga upp topologiska rum induktivt med att fästa celler, dvs.  $n$ -skivor  $\bar{B}^n$  till komplexet genom att identifiera dess rand  $S^{n-1}$  med något som finns i komplexet från tidigare. Med varje cellkomplex kan man associera cellulära homologigrupper, och att beräkna de cellulära homologigrupperna för ett cellkomplex är vanligtvis mycket enklare än att beräkna de singulära homologigrupperna för samma komplex. Resultatet är ändå detsamma, eftersom det för varje cellkomplex gäller att de cellulära homologigrupperna är isomorfa med de singulära homologigrupperna.

Avhandlingen följer huvudsakligen böckerna *An Introduction to Algebraic Topology* av Joseph J. Rotman ([1]) och *Algebraic Topology* av Allen Hatcher ([2]). Kapitel 1 som behandlar homotopier följer även delvis boken *Topologia II* av Jussi Väisälä ([3]). Det andra kapitlet om affina rum och simplex följer Rotmans bok, medan kapitel 3 som behandlar singular homologi har som källa både Rotmans och Hatchers bok. Det sista kapitlet som behandlar cellkomplex och cellulär homologi följer i stora drag Hatchers bok. Både Hatchers och Rotmans bok innehåller en stor mängd intressant material som inte behandlas i denna avhandling, bl.a. simplistisk homologi, kohomologi samt högre homotopigrupper.

För att kunna följa med avhandlingen bör läsaren känna till grundläggande begrepp i abstrakt algebra (abelsk grupp, kvotgrupp, homomorfism), linjär algebra (vektorrum, linjär avbildning) och topologi (topologiskt rum, kontinuitet, homeomorfism, kvotrum). Övriga begrepp som behövs definieras i avhandlingen.

# Kapitel 1

## Stigar och homotopier

*Anmärkning.* I detta kapitel är  $X$  och  $Y$  topologiska rum ifall inte annat nämns.

### 1.1 Homotopier mellan avbildningar

**Definition 1.1.** Låt  $f, g: X \rightarrow Y$  vara kontinuerliga avbildningar. Vi säger att  $f$  är **homotopisk** med  $g$ , eller att  $f$  och  $g$  är **homotopa** (eller **homotopiska**), ifall det existerar en kontinuerlig avbildning  $h: X \times I \rightarrow Y$  för vilken det gäller att  $h(x, 0) = f(x)$  och  $h(x, 1) = g(x)$  för alla  $x \in X$ . Detta betecknas  $h: f \simeq g$ , eller kortare  $f \simeq g$ .

Ifall  $h: f \simeq g$  är en homotopi, så betecknar vi  $h_t: X \rightarrow Y$ ,  $h_t(x) = h(x, t)$  för varje  $t \in I$ . Det gäller alltså att  $h_0 = f$  och  $h_1 = g$ .

En homotopi  $h$  omvandlar därmed kontinuerligt en kontinuerlig avbildning  $f: X \rightarrow Y$  till en annan kontinuerlig avbildning  $g: X \rightarrow Y$ . Vi kan se talet  $t \in I$  som en tidsparameter. I början, dvs. vid tiden 0 sammanfaller homotopin  $h$  med avbildningen  $f$ , och i slutet, dvs. vid tiden 1 sammanfaller  $h$  med  $g$ .

**Definition 1.2.** Ifall  $f: X \rightarrow Y$  är homotopisk med en konstant avbildning så säger vi att  $f$  är **nollhomotopisk**.

**Definition 1.3.** Rummet  $X$  är **kontraktibelt** ifall den identiska avbildningen  $id_X: X \rightarrow X$  är nollhomotopisk.

**Definition 1.4.** Låt  $f, g: X \rightarrow Y$  vara kontinuerliga avbildningar och låt  $A \subset X$  vara en mängd för vilken det gäller att  $f|_A = g|_A$ . Ifall det existerar en homotopi  $h: f \simeq g$  för vilken det gäller att  $h_t|_A = f|_A = g|_A$  för alla  $t \in I$ , så säger vi att  $f$  och  $g$  är **homotopa relativt till  $A$** . Detta betecknas  $h: f \simeq g \text{ rel } A$ , eller kortare  $f \simeq g \text{ rel } A$ .

Ifall  $h: f \simeq g$  rel  $A$ , så förändrar alltså homotopin  $h$  inte på funktionen  $f$  i mängden  $A$ .

**Definition 1.5.** En kontinuerlig avbildning  $f: X \rightarrow Y$  kallas en **homotopiekvivalens** ifall det existerar en kontinuerlig avbildning  $g: Y \rightarrow X$  för vilken det gäller att  $g \circ f \simeq id_X$  och  $f \circ g \simeq id_Y$ . I detta fall säger vi att  $X$  och  $Y$  är **homotopiekvivalenta rum**. Detta betecknas  $f: X \simeq Y$ , eller kortare  $X \simeq Y$ .

**Lemma 1.6.** *Rummet  $X$  är kontraktibelt om och endast om det är homotopiekvivalent med ett enpunktsrum.*

*Bevis.* “ $\Rightarrow$ ” Antag att  $id_X \simeq c_a$ , där  $a \in X$  och  $c_a: X \rightarrow X$  är den konstanta avbildningen  $c_a(x) = a$ . Då är avbildningen  $f: X \rightarrow \{a\}$  en homotopiekvivalens, eftersom det för inklusionen  $i: \{a\} \rightarrow X$  gäller att

$$i \circ f = c_a \simeq id_X \text{ och att } f \circ i = id_{\{a\}}.$$

Därmed gäller det att  $X$  är homotopiekvivalent med enpunktsrummet  $\{a\}$ . “ $\Leftarrow$ ” Ifall  $A$  är ett enpunktsrum och det existerar avbildningar  $f: X \rightarrow A$  och  $g: A \rightarrow X$  för vilka det gäller att  $id_X \simeq g \circ f$ , så är  $X$  kontraktibelt eftersom avbildningen  $g \circ f$  är en konstant avbildning.  $\square$

Ett användbart specialfall av homotopiekvivalenser är s.k. deformationsretraktioner:

**Definition 1.7.** En **deformationsretraktion** av ett rum  $X$  till dess delrum  $A \subset X$  är en kontinuerlig avbildning  $F: X \times I \rightarrow X$  för vilken det gäller att  $F_0 = id_X$ ,  $F_1(X) = A$  och att  $F_t|_A = id_A$  för alla  $t \in [0, 1]$ . I detta fall kallas  $A$  en **deformationsretrakt** av  $X$ .

**Lemma 1.8.** *Ifall det existerar en deformationsretraktion mellan  $X$  och  $A \subset X$ , så är  $X$  och  $A$  homotopiekvivalenta.*

*Bevis.* Låt  $F: X \times I \rightarrow X$  vara avbildningen som ger oss deformationsretraktionen mellan  $X$  och  $A$ , och låt  $i: A \hookrightarrow X$  vara inklusionsavbildningen. Då gäller det att  $F_1|_A \circ i = id_A$  eftersom  $F_t|_A = id_A$  och  $F_1(X) = A$ . Avbildningen  $F$  ger oss homotopin  $i \circ F_1|_A \simeq id_X$ , alltså gäller det att  $X \simeq A$ .  $\square$

## 1.2 Stighomotopi

**Definition 1.9.** En kontinuerlig funktion  $\alpha: I \rightarrow X$  kallas en **stig** i  $X$  från punkten  $\alpha(0)$  till punkten  $\alpha(1)$ . Ifall  $\alpha(0) = \alpha(1)$  kallas  $\alpha$  en **slinga**.

Vi betecknar med  $\epsilon_x: I \rightarrow X$  den stig i  $X$  för vilket det gäller att  $\epsilon_x(t) = x$  för alla  $t \in I$ . Denna stig kallas en **konstant stig**.

**Definition 1.10.** Stigen  $\alpha^{-1}: I \rightarrow X$ ,  $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$  kallas **inversstigen** för  $\alpha$ . Inversstigen  $\alpha^{-1}$  är alltså en stig från  $\alpha(1)$  till  $\alpha(0)$ .

*Anmärkning.* Begreppet inversstig skiljer sig från begreppet inversavbildning. En stig  $\alpha: I \rightarrow X$  har alltid en inversstig  $\alpha^{-1}$ , men avbildningen  $\alpha$  behöver inte ha någon inversavbildning.

**Definition 1.11.** Antag att  $\alpha, \beta: I \rightarrow X$  är stigar för vilka det gäller att  $\alpha(1) = \beta(0)$ . Den **sammansatta stigen**  $\gamma: I \rightarrow X$  är stigen

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{då } t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t - 1), & \text{då } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Vi går alltså först igenom stigen  $\alpha$  med dubbel hastighet, och sedan igenom stigen  $\beta$ , igen med dubbel hastighet.

Stigen  $\gamma$  är kontinuerlig eftersom begränsningarna  $\gamma|_{[0,1/2]}$  och  $\gamma|_{[1/2,1]}$  är kontinuerliga, och de sammanfaller i punkten  $t = 1/2$ .

Ifall  $\alpha(1) \neq \beta(0)$  så är den sammansatta stigen ej definierad.

Mängden av stigar från punkten  $a$  till punkten  $b$  i mängden  $X$  betecknas  $\Omega(X, a, b)$ . Mängden av slingor från punkten  $a$  betecknas  $\Omega(X, a)$ .

**Definition 1.12.** Rummet  $X$  är **stigsammanhängande** ifall det för varje par  $x_0, x_1 \in X$  existerar en stig som kopplar samman paret.

**Lemma 1.13.** *Ett kontraktibelt rum är stigsammanhängande.*

*Bevis.* Antag att  $h: id_X \simeq c$ , där  $c: X \rightarrow X$  är en konstant avbildning  $c(x) = x_0$ , och låt  $a, b \in X$  vara godtyckliga punkter. Då är stigen  $\alpha: t \mapsto h(a, t)$  en stig från  $a$  till  $x_0$ , och  $\beta: t \mapsto h(b, t)$  en stig från  $b$  till  $x_0$ . Därmed är stigen  $\alpha\beta^{-1}$  en stig från  $a$  till  $b$ .  $\square$

**Sats 1.14.** *Varje stigsammanhängande rum är sammanhängande.*

*Bevis.* [3, Lause 13.23]  $\square$

**Definition 1.15.** **Stigkomponenten**  $P(x)$  av  $x \in X$  är mängden av alla punkter  $y \in X$  för vilka det existerar en stig från  $x$  till  $y$  i rummet  $X$ .

Det är lätt att se att stigkomponenterna  $\{P(x) \mid x \in X\}$  delar upp rummet  $X$  i stigsammanhängande disjunkta delrum. Ofta betecknas mängden av alla stigkomponenter med  $\{X_a \mid a \in A\}$ , där  $A$  är någon indexmängd.

**Definition 1.16.** Låt  $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$  vara stigar. Ifall det gäller att  $\alpha \simeq \beta$  rel  $\{0, 1\}$ , så säger vi att  $\alpha$  och  $\beta$  är **stighomotopa** (eller **stighomotopiska**). Detta betecknas  $\alpha \sim \beta$ . Ifall  $H: \alpha \simeq \beta$  rel  $\{0, 1\}$ , så betecknar vi  $H: \alpha \sim \beta$ .

I en stighomotopi hålls ändpunkterna på plats hela tiden. Med andra ord har en stighomotopi  $H: I^2 \rightarrow X$  följande egenskaper för alla  $s, t \in I$ :

1.  $H(s, 0) = \alpha(s)$
2.  $H(s, 1) = \beta(s)$
3.  $H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$
4.  $H(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$ .

Följande lemma säger att stighomotopi bevaras i sammansatta stigar:

**Lemma 1.17.** Antag att  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$  och  $\beta_1$  är stigar i  $X$ ,  $\alpha_0 \sim \beta_0$ ,  $\alpha_1 \sim \beta_1$  och att den sammansatta stigen  $\alpha_0\beta_0$  är definierad. Då gäller  $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$ .

*Bevis.* [3, Lause 22.3] □

Vi kan även definiera nollhomotopiska stigar på motsvarande sätt som vi definierade nollhomotopiska avbildningar:

**Definition 1.18.** Låt  $\alpha$  vara en stig i  $X$  för vilken det gäller att  $\alpha \sim \epsilon$ , dvs. att  $\alpha$  är stighomotopisk med en konstant stig. Då säger vi att  $\alpha$  är **(stig)nollhomotopisk**.

## 1.3 Fundamentalgruppen

**Definition 1.19.** Låt  $x_0 \in X$  vara någon fastslagen punkt i  $X$ . Paret  $(X, x_0)$  kallas ett **baspunktsrum**, och  $x_0$  kallas **baspunkten** för  $X$ . Ifall  $(Y, y_0)$  är ett annat baspunktsrum, betecknar vi  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  ifall det för avbildningen  $f: X \rightarrow Y$  gäller att  $f(x_0) = y_0$ . Då kallas  $f$  en **baspunktsavbildning**.

Vi kan definiera begreppet kontraktibel även för baspunktsrum:

**Definition 1.20.** Ett baspunktsrum  $(X, x_0)$  är **(baspunkts)kontraktibelt**, ifall den identiska avbildningen  $id_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$  är nollhomotopisk rel  $x_0$ .

Låt nu  $x_0 \in X$  vara någon fastslagen punkt, och antag att  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$  är slingor i  $X$ . Då är den sammansatta stigen  $\alpha\beta$  väldefinierad enligt Definition 1.11.



**Sats 1.21.** *Stighomotopi bildar en ekvivalensrelation i mängden  $\Omega(X, a, b)$  för alla punkter  $a, b \in X$ .*

*Bevis.* [2, Prop. 1.2] □

Vi kan därmed definiera kvotmängden  $\Omega(X, x_0)/\sim$ . Vi betecknar den ekvivalensklass som stigen  $\alpha$  tillhör med  $\bar{\alpha}$ , dvs.

$$\bar{\alpha} = \{\beta \in \Omega(X, x_0) \mid \beta \sim \alpha\}.$$

Kvotmängden  $\Omega(X, x_0)/\sim$  består alltså av ekvivalensklasserna  $\bar{\alpha}$ , där  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ . Vi definierar nu kompositionen av två ekvivalensklasser på följande sätt:

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}.$$

Enligt lemma 1.17 beror denna definition beror ej på valet av representanter.

**Sats 1.22.** *Kvotmängden  $\Omega(X, x_0)/\sim$  med räknesättet  $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}$  bildar en grupp.*

*Bevis.* [2, Prop. 1.3] □

Vi kan nu definiera fundamentalgruppen för ett topologiskt rum:

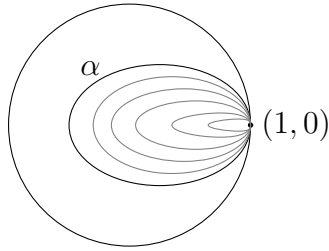
**Definition 1.23.** Kvotmängden  $\Omega(X, x_0)/\sim$  med räknesättet  $\bar{\alpha}\bar{\beta} = \overline{\alpha\beta}$  kallas **fundamentalgruppen** eller den **första homotopigruppen** för  $(X, x_0)$  och betecknas  $\pi(X, x_0)$  eller  $\pi_1(X, x_0)$ .

Vi definierar alltså fundamentalgruppen för ett baspunktsrum  $(X, x_0)$ . Neutralelementet i fundamentalgruppen är  $\overline{\epsilon_{x_0}}$ , dvs ekvivalensklassen för den konstanta stigen  $\epsilon_{x_0}$ . Vi betecknar denna kortare med  $\bar{\epsilon}$ . Inverselementet för ett element  $\bar{\alpha}$  är elementet  $\overline{\alpha^{-1}}$ .

Det visar sig att ifall rummet  $X$  är stigsammanhängande, så spelar valet på baspunkt ingen roll för fundamentalgruppen ([3, Seuraus 23.7]). I detta fall kan vi tala om fundamentalgruppen för  $X$ , vilken vi betecknar med  $\pi(X)$ .

Ifall alla slingor  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  är nollhomotopiska, så följer det att  $\pi(X, x_0) = \{\bar{\epsilon}\}$ , dvs. fundamentalgruppen är en grupp som består av bara ett element. I detta fall betecknar vi  $\pi(X, x_0) = 0$ , och säger att fundamentalgruppen är **trivial**.

**Exempel 1.24.** Vi undersöker fundamentalgruppen för baspunktsrummet  $(\bar{B}^2, (1, 0))$ , dvs. den slutna enhetsskivan i  $\mathbb{R}^2$  med baspunkten  $(1, 0)$ . Bilden nedan demonstrerar hur vi kan dra samman vilken som helst slinga  $\alpha \in$



Transformationen av  $\alpha$  till  $\epsilon_{(1,0)}$  i  $(\bar{B}^2, (1,0))$

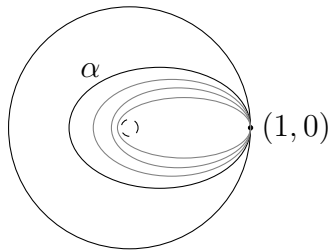
$\Omega(\bar{B}^2, (1,0))$  till den konstanta stigen  $\epsilon_{(1,0)}$  med hjälp av homotopin  $H: I^2 \rightarrow \bar{B}^2$ ,

$$H(s, t) = (1 - t)\alpha(s) + t(1, 0) = (1 - t)(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) + t(1, 0),$$

där  $\alpha_1$  och  $\alpha_2$  är projektioner av  $\alpha$ .

Vi ser därmed att fundamentalgruppen  $\pi(\bar{B}^2, (1,0))$  är trivial. Mer allmänt gäller det att alla kontraktibla baspunktsrum har en trivial fundamentalgrupp (Lemma 1.27).

**Exempel 1.25.** Vi ser nu på fallet där vi tagit bort en liten omgivning av origo från enhetsskivan  $\bar{B}^2$ , och låter igen baspunkten vara  $(1,0)$ . Då kan vi inte längre använda homotopin från föregående exempel, eftersom det i vissa fall hittas en punkt  $x$  på bilden av stigen  $\alpha$  för vilken en punkt på linjestycket mellan  $x$  och baspunkten  $(1,0)$  går igenom den lilla omgivningen av origo.



Ett försök att transformera  $\alpha$  till  $\epsilon_{(1,0)}$

Ifall vi försöker dra ihop stigen  $\alpha$  till punkten  $(1,0)$  märker vi att vi fastnar bakom origo. För att kunna dra ihop  $\alpha$  borde vi bryta stigen i något skede, men i detta fall är omvandlingen ej kontinuerlig. Vi kan därmed inte kontinuerligt omvandla  $\alpha$  till den konstanta stigen  $\epsilon_{(1,0)}$ , alltså är  $\alpha$  inte nollhomotopisk, och fundamentalgruppen är inte trivial.

Här märker vi också varför det är väsentligt att vi i definitionen på stighomotopi kräver att start- och ändpunkten skall hållas på plats under hela

homotopin: stigarna  $\alpha$  och  $\epsilon_{(1,0)}$  nog är homotopa som avbildningar, men ej homotopa rel  $\{0, 1\}$ .

Vi noterar även att det för fundamentalgruppen inte har någon skillnad hur stor omgivningen av origo är; vi skulle nå samma resultat genom ta bort endast origo själv, eller alternativt genom att ta bort alla innerpunkter och få mängden  $S^1$ . Intuitivt sett beskriver fundamentalgruppen vissa typs "hål" i topologiska rum; den säger inget om storleken på hålet.

**Definition 1.26.** Antag att  $X$  är stigsammanhängande och att fundamentalgruppen för  $X$  är trivial, dvs. att  $\pi(X) = 0$ . Då säger vi att  $X$  är **enkelt sammanhängande**.

Följande lemma ger oss exempel på enkelt sammanhängande rum:

**Lemma 1.27.** *Ett kontraktibelt baspunktsrum  $(X, x_0)$  är enkelt sammanhängande.*

*Bevis.* Enligt lemma 1.13 är rummet  $X$  stigsammanhängande. Låt nu  $h: X \simeq c_{x_0}$  rel  $x_0$  vara en homotopi, där  $c_{x_0}$  är en konstant avbildning. Ifall  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$ , så är  $H(s, t) = h(\alpha(s), t)$  en stighomotopi  $H: \alpha \sim \epsilon_{x_0}$ . Därmed är alla slingor nollhomotopiska, och fundamentalgruppen för  $X$  är trivial.  $\square$

## 1.4 Den inducerade homomorfismen

**Definition 1.28.** Låt  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  vara en kontinuerlig baspunktsavbildning. Vi definierar **den inducerade homomorfismen**  $f_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$  på följande sätt:

Antag att  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$  är slingor. Då gäller det att  $f \circ \alpha, f \circ \beta \in \Omega(Y, y_0)$ , och det gäller att ifall  $\alpha \sim \beta$ , så är  $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$  ([3, Lause 22.11]). Därmed får vi en väldefinierad avbildning genom att avbilda ekvivalensklassen för en slinga  $\alpha \in \Omega(X, x_0)$  på ekvivalensklassen för slingan  $f \circ \alpha \in \Omega(Y, y_0)$ , dvs.

$$f_*(\bar{\alpha}) = \overline{f \circ \alpha}.$$

Vi måste dock kontrollera att den inducerade homomorfismen verkligen är en homomorfism:

**Lemma 1.29.** *Avbildningen  $f_*$  som definierades ovan är en homomorfism.*

*Bevis.* Låt  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0)$  vara slingor. Då  $0 \leq s \leq 1/2$ , så gäller det att

$$(f \circ \alpha\beta)(s) = f(\alpha\beta(s)) = f(\alpha(2s)) = (f \circ \alpha)(2s).$$

Då  $\leq 1/2 \leq s \leq 1$ , så får vi på samma sätt att  $(f \circ \alpha\beta)(s) = (f \circ \beta)(2s - 1)$ . Därmed gäller det att  $f \circ \alpha\beta = (f \circ \alpha)(f \circ \beta)$ , varav det följer att

$$f_*(\overline{\alpha\beta}) = \overline{f \circ \alpha\beta} = \overline{(f \circ \alpha)(f \circ \beta)} = f_*(\overline{\alpha})f_*(\overline{\beta}).$$

□

Den inducerade homomorfismen uppfyller följande krav:

**Sats 1.30.** a)  $(id)_* = id$ .

b) Ifall  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  och  $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$  är baspunktsavbildningar, så gäller det att  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .

*Bevis.* a) Enligt definitionen gäller det att  $id_*(\overline{\alpha}) = \overline{id \circ \alpha} = \overline{\alpha}$ .

b) Det gäller att

$$g_*(f_*(\alpha)) = g_*(\overline{f \circ \alpha}) = \overline{g \circ f \circ \alpha} = (g \circ f)_*(\alpha).$$

□

Från ovanstående sats följer det direkt att homeomorfa rum har isomorfa fundamentalgrupper: Ifall  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  är en homeomorfism och  $g: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  är dess invers, så gäller det för de inducerade homomorfismerna  $f_*$  och  $g_*$  att

$$\begin{aligned} g_* \circ f_* &= (g \circ f)_* = (id_X)_* = id_{\pi(X, x_0)} \text{ och att} \\ f_* \circ g_* &= (f \circ g)_* = (id_Y)_* = id_{\pi(Y, y_0)}, \end{aligned}$$

alltså är  $f_*$  en isomorfism från  $\pi(X, x_0)$  till  $\pi(Y, y_0)$ .

Det fina med den inducerade homomorfismen är dock att homotopiska funktioner inducerar samma homomorfism mellan fundamentalgrupperna:

**Sats 1.31.** Antag att  $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  är homotopiska rel  $x_0$ . Då gäller det att  $f_* = g_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$ .

*Bevis.* [3, Lause 23.15]

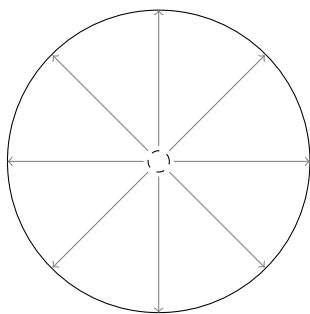
□

Det följer alltså på samma sätt som för homeomorfismer att en homotopiekvivalens  $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  inducerar en isomorfism  $f_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0)$ . Detta gäller även mer allmänt utan att vi i förväg slagit fast baspunkten i rummet  $Y$ :

**Sats 1.32.** Antag att  $f: X \rightarrow Y$  är en homotopiekvivalens. Då är  $f_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, f(x_0))$  en isomorfism.

*Bevis.* [2, Prop. 1.18] □

**Exempel 1.33.** I Exempel 1.25 undersökte vi fundamentalgruppen på enhetsskivan bort en omgivning av origo, och märkte att det för fundamentalgruppen inte har någon skillnad hur stor omgivningen är. Vi kan nu formalisera detta genom att märka att  $\bar{B}^2 \setminus \{0\}$  är homotopiekvivalent med  $S^1$ :



Homotopin  $h: f \circ i \simeq id_{\bar{B}^2 \setminus \{0\}}$

Låt  $f: \bar{B}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1, f(x) = x/|x|$ , och låt  $i$  vara inklusionen  $i: S^1 \hookrightarrow \bar{B}^2 \setminus \{0\}$ . Nu gäller det att  $i \circ f = id_{S^1}$ , och homotopin  $h: f \circ i \simeq id_{\bar{B}^2 \setminus \{0\}}$  ges av

$$h(x, t) = (1 - t)x + t \left( \frac{x}{|x|} \right).$$

Därmed följer det från Sats 1.32 och från att båda rummen är stigsammanhängande att  $\pi(S^1) = \pi(\bar{B}^2 \setminus \{0\})$ . På liknande sätt kan vi även visa att  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus U$ , där  $U$  är en liten omgivning av origo.

I Exempel 1.25 gav vi en motivering för varför  $\pi(S^1) = \pi(\bar{B}^2 \setminus \{0\})$  inte är trivial. Det går att visa att fundamentalgruppen för  $S^1$  är isomorf med  $\mathbb{Z}$ , se t.ex. [2, Thm 1.7]. I denna avhandling behandlas inte fundamentalgruppen närmare; ovanstående korta presentation finns för att ge en jämförelsepunkt till homologigrupperna som behandlas senare. Fundamentalgruppen och teorin bakom den behandlas grundligt t.ex. i kapitel 1 i Hatcher's bok Algebraic Topology ([2]).

# Kapitel 2

## Affina rum och simplex

*Anmärkning.* I detta kapitel är  $V$  ett  $\mathbb{R}$ -vektorrum ifall inte annat nämns.

### 2.1 Affina rum

**Definition 2.1.** Låt  $V$  vara ett vektorrum. En delmängd  $A \subset V$  är **affin** ifall det för varje par av distinkta punkter  $x, y \in A$  gäller att den räta linjen som bestäms av  $x$  och  $y$  innehålls i mängden  $A$ . Delmängden  $A$  är **konvex** ifall linjestycket från  $x$  till  $y$  innehålls i  $A$ .

En delmängd  $A \subset V$  är alltså affin ifall det för alla  $x, y \in A, x \neq y$  och  $r \in \mathbb{R}$  gäller att  $rx + (1 - r)y \in A$ . Delmängden  $A$  är konvex ifall vi ovan endast kräver att  $r \in [0, 1]$ . Vi noterar alltså att varje affin mängd är konvex, men att det motsatta inte nödvändigtvis gäller.

**Exempel 2.2.** Några enkla exempel på konvexa mängder är  $I^n, \mathbb{R}^n, B^n$  och  $\bar{B}^n, n \in \mathbb{N}$ . Mängden  $\mathbb{R}^n$  är även affin för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

**Lemma 2.3.** *Antag att mängden  $A \subset \mathbb{R}^n$  är konvex. Då är det topologiska rummet  $A$  kontraktibelt.*

*Bevis.* Låt  $a_0 \in A$  vara en punkt. Vi definierar homotopin

$$H: A \times I \rightarrow A, H(a, t) = ta_0 + (1 - t)a.$$

Det följer att  $id_A \simeq c_{a_0}$ , alltså är  $A$  kontraktibelt. □

Följande lemma följer direkt av definitionen på konvexa mängder:

**Lemma 2.4.** *Låt  $\{X_j : j \in J\}$  vara en samling affina (eller konvexa) delmängder av ett vektorrum  $V$ . Då är även snittet  $\cap X_j$  affint (eller konvext).*

På grund av ovanstående lemma är följande definition vettig:

**Definition 2.5.** Låt  $A \in V$  vara en godtycklig delmängd av ett vektorrum. Den minsta möjliga affina delmängden av  $V$  som innehåller  $A$  kallas  $A$ :s **affina hölje** och betecknas  $\text{aff}(A)$ . Den minsta möjliga konvexa delmängden som innehåller  $A$  kallas  $A$ :s **konvexa hölje** och betecknas  $\text{conv}(A)$ .

Vi observerar att  $A \subset \text{conv}(A) \subset \text{aff}(A)$ .

**Definition 2.6.** En **affin kombination** av punkter  $a_0, a_1, \dots, a_n$  i ett vektorrum  $V$  är en punkt

$$x = r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n,$$

där  $r_0 + r_1 + \dots + r_n = 1$ . En **konvex kombination** är en affin kombination för vilken det gäller att  $r_i \geq 0$  för alla  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Följande lemma ger oss en karakterisering av affina och konvexa höljet för en mängd:

**Lemma 2.7.** Låt  $A \subset V$ . Då gäller

$$\begin{aligned} \text{aff}(A) &= \{r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n \mid a_i \in A, r_0 + r_1 + \dots + r_n = 1\}, \text{ och} \\ \text{conv}(A) &= \{r_0 a_0 + r_1 a_1 + \dots + r_n a_n \mid a_i \in A, r_i \geq 0, r_0 + r_1 + \dots + r_n = 1\}. \end{aligned}$$

*Bevis.* [1, Thm 2.2, 2.3] □

**Definition 2.8.** En ordnad mängd  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset V$  är **affint oberoende** ifall  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_n - v_0\}$  är en linjärt oberoende delmängd av vektorrummet  $V$ .

Följande lemma ger oss ekvivalenta sätt att beskriva affint oberoende mängder:

**Lemma 2.9.** Låt  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset V$  vara en delmängd av ett vektorrum  $V$ . Då är följande påståenden ekvivalenta:

(a)  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  är affint oberoende.

(b) Ifall

$$\sum_{i=0}^n r_i v_i = 0 \text{ och } \sum_{i=0}^n r_i = 0,$$

så gäller  $r_i = 0$  för alla  $i = 0, 1, \dots, n$ .

(c) Om

$$\sum_{i=0}^n r_i v_i = \sum_{i=0}^n r_i' v_i \text{ och } \sum_{i=0}^n r_i = \sum_{i=0}^n r_i',$$

så gäller  $r_i = r_i'$  för alla  $i = 0, 1, \dots, n$ .

(d) Varje punkt i det affina höljet  $\text{aff}(\{v_0, v_1, \dots, v_n\})$  har en unik representation av formen

$$r_0 v_0 + r_1 v_1 + \dots + r_n v_n,$$

där  $\sum_{i=0}^n r_i = 1$ .

(e) Varje punkt i det konvexa höljet  $\text{conv}(\{v_0, v_1, \dots, v_n\})$  har en unik representation av formen

$$r_0 v_0 + r_1 v_1 + \dots + r_n v_n,$$

där  $\sum_{i=0}^n r_i = 1$  och  $r_i \geq 0$  för alla  $i = 0, 1, \dots, n$ .

*Bevis.* [1, Thm 2.4] □

## 2.2 Simplex

**Definition 2.10.** Låt  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset V$  vara en affint oberoende mängd i  $V$ . Dess konvexa hölje kallas ett  **$n$ -dimensionellt simplex**, eller kortare ett  **$n$ -simplex** med hörnen  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , och betecknas  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ .

**Lemma 2.11.** Varje punkt  $x$  i  $n$ -simplexet  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  har en unik representation av formen

$$x = \sum_{i=0}^n r_i v_i, \text{ där } \sum_{i=0}^n r_i = 1 \text{ och } r_i \geq 0.$$

*Bevis.* Följer av Lemma 2.9. □

**Definition 2.12.** Låt  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  vara ett  $n$ -simplex. Då är dess **barycenter** punkten

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)(v_0 + v_1 + \dots + v_n).$$



**Definition 2.13.** Låt  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  vara ett  $n$ -simplex. Den **motsatta sidan** till hörnet  $v_i$  är  $(n - 1)$ -simplexet

$$[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{j=0}^n r_j v_j \mid r_j \geq 0, \sum_{j=0}^n r_j = 1, r_i = 0 \right\}.$$

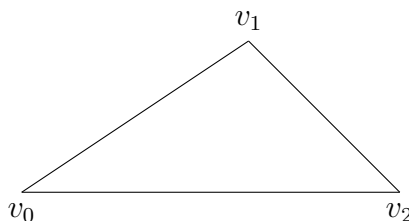
Här betyder alltså  $\hat{v}_i$  att vi lämnar bort hörnet  $v_i$ .

**Randen** av  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  är unionen av dess sidor.

**Exempel 2.14.** 1.  $[v_0]$  är ett 0-simplex bestående av en punkt  $v_0$ , som även är simplexets barycenter.

2. 1-simplexet  $[v_0, v_1] = \{tv_0 + (1 - t)v_1 \mid t \in [0, 1]\}$  är det slutna linjestycket med ändpunkterna  $v_0$  och  $v_1$ , och dess barycenter  $\frac{1}{2}(v_0 + v_1)$  är mittpunkten på linjestycket.

3. 2-simplexet  $[v_0, v_1, v_2]$  är en fylld triangel med hörnen  $v_0, v_1$  och  $v_2$ . Dess barycenter  $\frac{1}{3}(v_0 + v_1 + v_2)$  är triangelns massmedelpunkt. Den motsatta sidan till hörnet  $v_0$  är 1-simplexet  $[v_1, v_2]$ .



4. 3-simplexet  $[v_0, v_1, v_2, v_3]$  är en fylld tetraeder med hörnen  $v_0, v_1, v_2$  och  $v_3$ . Den motsatta sidan till hörnet  $v_1$  är 2-simplexet (dvs. triangeln)  $[v_0, v_2, v_3]$ .

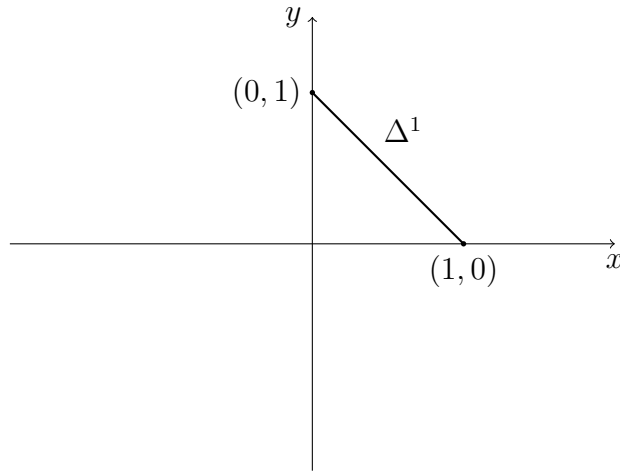
Ett enkelt exempel på ett simplex ges i följande definition. Dessa simplex kommer även att användas då vi definierar singular homologi.

**Definition 2.15.** Simplexet

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}$$

kallas för  **$n$ -standardsimplexet**.

**Definition 2.16.** En **orientering** av standardsimplexet  $\Delta^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$  är en linjär ordning på mängden av dess hörn.



1-standardsimplexet  $\Delta^1$

En orientering ger oss alltså en rundtur av hörnen. T.ex. orienteringen  $v_0 < v_1 < v_2$  i fallet  $\Delta^2$  ger oss en rundtur motsols, liksom orienteringarna  $v_1 < v_2 < v_0$  och  $v_2 < v_0 < v_1$ .

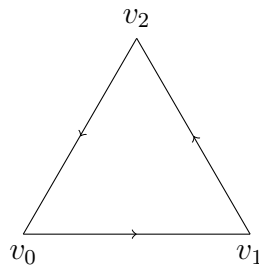
**Definition 2.17.** Givet en orientering av  $\Delta^n$  så finns det en **inducerad orientering** av dess sidor, där orienteringen för varje sida är

$$(-1)^i[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Här betyder  $-[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$  den  $i$ :te sidan med den motsatta orienteringen till den givna ordningen av hörnen (t.ex. gäller  $-[v_0, v_2] = [v_2, v_0]$ ).

Ifall vi igen ser på  $\Delta^2$  med orienteringen  $v_0 < v_1 < v_2$ , så kommer då dess nollte sida (dvs. den motsatta sidan till punkten  $v_0$ ) att ha orienteringen  $(-1)^0[\hat{v}_0, v_1, v_2] = [v_1, v_2]$ , dess första sida att ha orienteringen  $(-1)^1[v_0, \hat{v}_1, v_2] = -[v_0, v_2] = [v_2, v_0]$  och dess andra sida att ha orienteringen  $(-1)^2[v_0, v_1, \hat{v}_2] = [v_0, v_1]$ .

Här tänker vi oss alltså att ifall vi på rundturen går från  $v_i$  till  $v_j$ , skall sidan bestående av dem ha orienteringen  $[v_i, v_j]$ .



Därmed är den **orienterade randen** av  $\Delta^2$  med orienteringen  $v_0 < v_1 < v_2$  följande:

$$[\hat{v}_0, v_1, v_2] \cup -[v_0, \hat{v}_1, v_2] \cup [v_0, v_1, \hat{v}_2] = [v_1, v_2] \cup [v_2, v_0] \cup [v_0, v_1].$$

Ifall vi åt  $\Delta^n = [v_0, v_1, \dots, v_n]$ , där  $v_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, 0, \dots, 1)$  ger den kanoniska standardorienteringen  $v_0 < v_1 \dots < v_n$ , så kan vi definiera dess orienterade rand mer allmänt:

**Definition 2.18.** Den **orienterade randen** av  $\Delta^n$  är

$$\bigcup_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Till sist ser vi på avbildningar mellan affina mängder:

**Definition 2.19.** Låt  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$  vara en affint oberoende mängd i  $\mathbb{R}^m$ , och låt  $A$  vara dess affina hölje. En **affin avbildning**  $T : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  (för något  $k \geq 1$ ) är en avbildning som uppfyller villkoret

$$T \left( \sum_{i=0}^n r_i v_i \right) = \sum_{i=0}^n r_i T(v_i).$$

Restriktionen av  $T$  till simplexet  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  kallas även en affin avbildning.

Affina avbildningar bevarar alltså affina kombinationer, och därmed även konvexa kombinationer. Ifall  $A$  är det affina höljet av en affint oberoende mängd  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , är det klart att en affin avbildning från  $A$  bestäms av hur den avbildar punkterna  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ . Om vi begränsar oss till ett simplex, så bestäms avbildningen alltså av hur den avbildar hörnen. Vi uttrycker detta i form av en sats:

**Sats 2.20.** Låt  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  vara ett  $n$ -simplex,  $[w_0, w_1, \dots, w_m]$  vara ett  $m$ -simplex, och  $f : \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \rightarrow [w_0, w_1, \dots, w_m]$  vara en godtycklig funktion. Då existerar det en entydig affin avbildning  $T : [v_0, v_1, \dots, v_n] \rightarrow [w_0, w_1, \dots, w_m]$  för vilken det gäller att  $T(v_i) = f(v_i)$  för alla  $i = 0, 1, \dots, n$ .

*Bevis.* Definiera  $T \left( \sum_{i=0}^n r_i v_i \right) = \sum_{i=0}^n r_i f(v_i)$ , där  $\sum_{i=0}^n r_i v_i$  är en konvex kombination. Eftersom den konvexa kombinationen är unik för alla punkter i  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  enligt Lemma 2.9, så är funktionen entydig.  $\square$

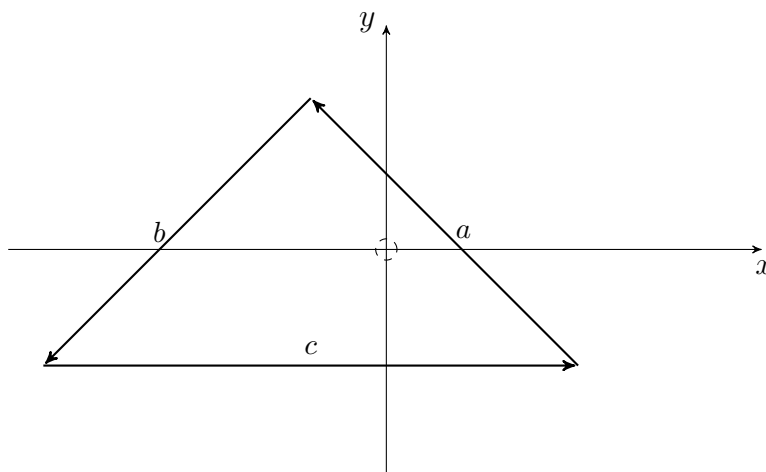
# Kapitel 3

## Singulär homologi

*Anmärkning.* I detta kapitel är  $X$  och  $Y$  topologiska rum, och avbildningar mellan rummen är kontinuerliga ifall inte annat nämns.

Tanken med singulär homologi är liknande som idén bakom fundamentalgruppen: man strävar efter att associera med ett topologiskt rum  $X$  en grupp som beskriver rummets egenskaper. I stället för att använda slingor och dess ekvivalensklasser ser man nu på kontinuerliga avbildningar från standardsimplex  $\Delta^n$  till rummet  $X$ . Idén är att undersöka ifall rummet i fråga har "hål". Med avsaknaden av "hål" menar vi här att ifall vi har en rand av dimensionen  $n - 1$  (som består av en union av  $(n - 1)$ -simplex), så borde det i rummet finnas ett  $n$ -simplex som begränsas av denna rand.

Som exempel kan vi betrakta rummet  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , dvs. det euklidiska planet bort origo.



På bilden ovan ser vi 1-simplexerna  $a$ ,  $b$  och  $c$  som bildar en endimensionell (orienterad) rand. Ifall  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  inte hade något hål, så borde nu dessa simplex

vara randen för 2-simplexet, dvs. den fyllda triangeln, de begränsar, men eftersom origo saknas, existerar ingen sådan fylld triangel i  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Detta betyder att  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  har ett endimensionellt hål. Naturligtvis ifall vi tagit bort t.ex. en liten omgivning av origo så skulle samma resonemang gälla, dvs. storleken på hålet har inte betydelse, utan vi bryr oss endast om dimensionen på randen. Hålet är alltså endimensionellt eftersom randen vi konstruerade består av 1-simplex.

Märk likheten mellan detta exempel och det tidigare exemplet 1.25 där vi undersökte fundamentalgruppen av  $\bar{B}^2 \setminus \{0\}$ . I båda fallen undersöker vi ifall rummet har hål.

Ifall vi istället betraktar rummet  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  med 1-simplexerna a, b och c som på bilden, märker vi att detta rum inte har ett endimensionellt hål eftersom vi kan "töja upp" ett 2-simplex (dvs. en fylld triangel) så att den inte rör origo men ändå är begränsad av 1-simplexerna a, b och c.

### 3.1 Homologigrupper

Vi tar oss nu an uppdraget att formalisera begreppen som ovan presenterades på en intuitiv nivå.

**Definition 3.1.** Låt  $X$  vara ett topologiskt rum. Ett **singulärt n-simplex** i  $X$  är en kontinuerlig avbildning  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ .

I definitionen ovan syftar ordet singular på att bilden av  $\Delta^n$  inte längre behöver se ut som ett simplex i  $X$ ; den kan t.ex. skära sig själv. Det enda kravet är att avbildningen  $\sigma$  är kontinuerlig.

**Definition 3.2.** Låt  $X$  vara ett topologiskt rum. För varje  $n \geq 0$  definierar vi  $S_n(X)$  att vara den fria abelska gruppen vars bas är alla singulära n-simplex i  $X$ . Dessutom definierar vi att  $S_{-1}(X) = 0$ . Elementen av  $S_n(X)$  kallas **singulära n-kedjor** i  $X$ .

Med den fria abelska gruppen vars bas är alla singulära n-simplex menar vi här den grupp som vi får ifall vi tar formella summor

$$n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + \cdots + n_k\sigma_k, n_i \in \mathbb{Z}$$

av element  $\sigma_i$  i mängden av singulära n-simplex. Vi kräver även att endast en ändlig mängd av de singulära n-simplexerna skall ha en koefficient olika noll. Det är lätt att se att mängden av alla dessa formella summor bildar en abelsk grupp. Neutralelementet är den tomma summan, och inverselementet fås genom att ta den additiva inversen för varje koefficient.

Vårt nästa steg är att definiera randen för det singulära  $n$ -simplexet  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ . För att kunna göra detta behöver vi först en annan definition.

**Definition 3.3.** För varje  $n$  och  $i$  definierar vi att **avbildningen för den  $i$ :te sidan** i standardsimplexet  $\Delta^n$  är den affina avbildningen

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^n: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$$

som avbildar noderna  $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  på noderna  $\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$  på följande sätt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^n: (r_0, \dots, r_{n-1}) &\mapsto (0, r_0, \dots, r_{n-1}), \\ \varepsilon_i^n: (r_0, \dots, r_{n-1}) &\mapsto (r_0, \dots, r_{i-1}, 0, r_i, \dots, r_{n-1}), \text{ om } i \geq 1. \end{aligned}$$

**Definition 3.4.** Antag att  $n \geq 0$ . **Randen** för det singulära  $n$ -simplexet  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  är avbildningen

$$\delta_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i^n) \in S_{n-1}(X).$$

Dessutom låter vi  $\delta_0 \sigma = 0$ .

Randen för  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  är alltså en summa av avbildningar  $\Delta^{n-1} \rightarrow X$ . Varje avbildning i summan fås som en sammansatt avbildning av  $\sigma$  och  $\varepsilon_i^n$ . Vi märker att definitionen på randen av singulära  $n$ -simplex är liknande som definitionen på den orienterade randen för  $n$ -simplex (Definition 2.18). Man kan se den tidigare randdefinitionen som en motivering för denna definition.

**Lemma 3.5.** *För varje topologiskt rum  $X$  och varje  $n \geq 0$  existerar det en unik homomorfism*

$$\delta_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

för vilken det gäller att

$$\delta_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i^n)$$

för varje singulärt  $n$ -simplex  $\sigma$  i  $X$ .

*Bevis.* Vi noterar att avbildningarna  $\sigma \circ \varepsilon_i^n: \Delta^{n-1} \rightarrow X$  är generatorer för den fria abelska gruppen  $S_{n-1}(X)$ . Därmed får vi den efterfrågade avbildningen genom att använda definitionen på  $\delta_n \sigma$  och utvidga den till en homomorfism.  $\square$

**Definition 3.6.** Homomorfismerna  $\delta_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  kallas **randoperatorer**.

Naturligtvis beror funktionen  $\delta_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  även på rummet  $X$ , men detta betecknas vanligtvis inte, eftersom det oftast är klart från sammanhanget vilket rum man behandlar.

**Definition 3.7.** Följden

$$\cdots \rightarrow S_n(X) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\delta_1} S_0(X) \xrightarrow{\delta_0} 0$$

kallas det **singulära komplexet** av  $X$ . Det betecknas  $(S_*(X), \delta)$ , eller kortare  $S_*(X)$ .

**Lemma 3.8.** Om  $k < j$ , så gäller det för avbildningarna för sidorna i standardsimplexet att diagrammet

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{n-1} & \xrightarrow{\varepsilon_{j-1}^n} & \Delta_n \\ \downarrow \varepsilon_k^n & & \downarrow \varepsilon_k^{n+1} \\ \Delta_n & \xrightarrow{\varepsilon_j^{n+1}} & \Delta_{n+1} \end{array}$$

kommuterar, dvs. att

$$\varepsilon_j^{n+1} \varepsilon_k^n = \varepsilon_k^{n+1} \varepsilon_{j-1}^n: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_{n+1}.$$

*Bevis.* Eftersom båda funktionerna är affina räcker det att märka att båda funktionerna avbildar noderna  $e_i$  på samma sätt för alla  $0 \leq i \leq n-1$ .  $\square$

**Sats 3.9.** För alla  $n \geq 0$  gäller det att  $\delta_n \delta_{n+1} = 0$ .

*Bevis.* [1, Thm 4.6]  $\square$

**Definition 3.10.** Gruppen av **singulära n-cykler**, som betecknas  $Z_n(X)$ , är  $\text{Ker } \delta_n$ , och gruppen av **singulära n-rander**, som betecknas  $B_n(X)$ , är  $\text{Im } \delta_{n+1}$ .

**Lemma 3.11.**  $Z_n(X)$  och  $B_n(X)$  är normala delgrupper av  $S_n(X)$  för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* Eftersom  $\delta_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  och  $\delta_{n+1}: S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X)$  är homomorfismer enligt Lemma 3.5, gäller det att  $\text{Ker } \delta_n \leq S_n(X)$  och att  $\text{Im } \delta_{n+1} \leq S_n(X)$ , alltså är  $Z_n(X)$  och  $B_n(X)$  delgrupper av  $S_n(X)$ .

Eftersom  $S_n(X)$  är en fri abelsk grupp, så är den naturligtvis kommutativ, och därmed är både  $Z_n(X)$  och  $B_n(X)$  normala delgrupper.  $\square$

**Följdsats 3.12.** För alla rum  $X$  och för alla  $n \geq 0$  gäller det att

$$B_n(X) \subset Z_n(X) \subset S_n(X).$$

*Bevis.* Lemma 3.11 ger oss att  $Z_n(X) \subset S_n(X)$ , alltså måste vi endast visa att  $B_n(X) \subset Z_n(X)$ .

Antag alltså att  $b \in B_n(X)$ . Då existerar enligt definitionen ett  $a \in S_{n+1}(X)$  för vilket det gäller att  $b = \delta_{n+1}a$ . Då gäller det att  $\delta_n b = \delta_n \delta_{n+1}a = 0$  enligt Sats 3.9, alltså gäller det att  $b \in Z_n(X)$ .  $\square$

Därmed är  $B_n(X)$  även en normal delgrupp av  $Z_n(X)$ .

Vi har nu alltså lyckats definiera cykler och rander i godtyckliga topologiska rum  $X$ . För att hitta "hål" i ett rum, måste vi hitta cykler som inte är rander, eftersom alla rander trivialt är cykler enligt vad vi bevisat ovan. Denna insikt fungerar som en motivering för följande definition:

**Definition 3.13.** För alla  $n \geq 0$  är den  $n$ :te **singulära homologigruppen** av det topologiska rummet  $X$  kvotgruppen

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \frac{\text{Ker } \delta_n}{\text{Im } \delta_{n+1}}.$$

Talet  $n$  kallas **dimensionen** för homologigruppen  $H_n(X)$ , och sidoklassen  $z_n + B_n(X)$ , där  $z_n$  är en  $n$ -cykel, kallas **homologiklassen** för cykeln  $z_n$  och betecknas  $[z_n]$ .

Enligt Lemma 3.11 och Följdsats 3.12 är  $H_n(X)$  väldefinierad för alla  $n \geq 0$ .

Vi ser nu på några grundegenskaper för de singulära homologigrupperna:

**Sats 3.14.** Låt  $\{X_a \mid a \in A\}$  vara mängden av stigkomponenterna för rummet  $X$ . Då gäller det för varje  $n \geq 0$  att

$$H_n(X) \cong \bigoplus_a H_n(X_a).$$

*Homologigrupperna för  $X$  beror alltså endast på homologigrupperna för dess stigkomponenter.*

*Bevis.* [1, Thm 4.13]  $\square$

**Sats 3.15.** Låt  $X$  vara ett icke-tomt stigsammanhängande rum. Då gäller det att  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

*Bevis.* [1, Thm 4.14 (i)]  $\square$



Den nollte homologigruppen beskriver alltså antalet stigkomponenter i ett rum:

**Följdsats 3.16.** *För alla rum  $X$  gäller det att  $H_0(X)$  är en direkt summa av kopior av  $\mathbb{Z}$ , en kopia för varje stigkomponent.*

*Bevis.* Följer av Satserna 3.14 och 3.15. □

Vi kan nu fullständigt karakterisera homologigrupperna för ett enpunktsrum. Detta resultat kallas dimensionsaxiomet; orsaken till detta namn blir senare klart.

**Sats 3.17.** *Ifall  $X$  är ett enpunktsrum, så gäller det att  $H_n(X) = 0$  för alla  $n > 0$ , och att  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Bevis.* För varje  $n \geq 0$  existerar det exakt ett singulärt  $n$ -simplex  $\sigma_n: \Delta^n \rightarrow X$ , nämligen den konstanta avbildningen. Därmed gäller det att  $S_n(X)$  är en fri abelsk grupp med en generator, dvs. isomorf med  $\mathbb{Z}$ . För randoperatorn gäller nu att

$$\delta_n \sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma_n \circ \varepsilon_i^n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1},$$

dvs. den är en summa av  $n+1$  termer. Eftersom tecknen alternerar är summan 0 för udda  $n$  och  $\sigma_{n-1}$  för jämna  $n$  då  $n > 0$ , vilket innebär att  $\delta_n$  är konstant för udda  $n$  och en isomorfism för jämna  $n$ .

Vi antar nu att  $n > 0$ , och ser på nedanstående följd:

$$S_{n+1}(X) \xrightarrow{\delta_{n+1}} S_n(X) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}(X)$$

Ifall  $n$  är jämnt, så är  $\delta_n$  en isomorfism, alltså har den en trivial kärna, vilket betyder att  $Z_n(X) = 0$ . Därmed gäller det att  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = 0$ .

Om  $n$  är udda, så gäller det att  $\delta_n = 0$ , och därmed att  $S_n(X) = \text{Ker } \delta_n = Z_n(X)$ . Eftersom  $\delta_{n+1}$  är en isomorfism så är  $B_n(X) = \text{Im } \delta_{n+1} = S_n(X)$ , alltså är  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = 0$ .

Påståendet  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  följer av Sats 3.15, eftersom ett enpunktsrum naturligtvis har exakt en stigkomponent, nämligen rummet självt. □

En avbildning  $f: I \rightarrow X$  till ett topologiskt rum  $X$  kan betraktas både som en stig och som ett singulärt 1-simplex. Dessutom ifall  $f$  är en slinga så är  $f$  även en cykel eftersom  $\delta(f) = f(1) - f(0) = 0$ . Det är därmed inte överraskande att det existerar ett klart samband mellan fundamentalgruppen  $\pi(X, x_0)$  och den första homologigruppen  $H_1(X)$ :

**Sats 3.18.** *Vi kan skapa en homomorfism  $h: \pi(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$  genom att betrakta slingor som singulära 1-simplex. Ifall  $X$  är stigsammanhängande så inducerar  $h$  en isomorfism från abelianiseringen av  $\pi(X, x_0)$  till  $H_1(X)$ .*

*Bevis.* [2, Thm 2A.1] □

## 3.2 Den inducerade homomorfismen

Som nästa steg definierar vi den inducerade homomorfismen för singulär homologi. Tanken är att precis som i fallet för fundamentalgruppen att med hjälp av en kontinuerlig avbildning  $f: X \rightarrow Y$  inducera en homomorfism  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  för alla  $n \geq 0$ . Denna kan sedan utnyttjas på liknande sätt som den inducerade homomorfismen för fundamentalgruppen.

Antag alltså att  $f: X \rightarrow Y$  är en kontinuerlig funktion mellan två topologiska rum. Vi börjar med att först definiera en homomorfism  $S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  på följande sätt:

Ifall  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  är ett  $n$ -simplex i  $X$ , så är  $f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$  ett  $n$ -simplex i  $Y$ . Eftersom  $n$ -simplexerna bildar baser för både  $S_n(X)$  och  $S_n(Y)$ , kan vi definiera en homomorfism  $f_\#: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  för varje  $n \geq 0$  enligt följande:

$$f_\#(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} (f \circ \sigma), \text{ där } r_{\sigma} \in \mathbb{Z}.$$

Här betyder beteckningen  $\sum_{\sigma}$  summan över alla  $n$ -simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  i basen för  $S_n(X)$ .

Vi kan lätt visa att  $f_\#$  kommuterar med sammansättning av funktioner:

**Lemma 3.19.** *Antag att  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: Y \rightarrow Z$  är kontinuerliga. Då gäller det för alla  $n \geq 0$  att*

(a)  $id_\# = id: S_n(X) \rightarrow S_n(X)$

(b)  $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#: S_n(X) \rightarrow S_n(Z)$

*Bevis.* Låt  $x = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \in S_n(X)$  vara godtycklig.

(a) Det gäller att

$$id_\#(\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} (id \circ \sigma) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma.$$

(b) Nu gäller det att

$$(g \circ f)_\# \left( \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} ((g \circ f) \circ \sigma),$$

och att

$$(g_{\#} \circ f_{\#}) \left( \sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma \right) = g_{\#} \left( \sum_{\sigma} r_{\sigma} (f \circ \sigma) \right) = \sum_{\sigma} r_{\sigma} (g \circ (f \circ \sigma)).$$

□

Homomorfismen  $f_{\#}$  kommuterar även med randoperatoren  $\delta_n$ :

**Lemma 3.20.** *Antag att  $f: X \rightarrow Y$  är kontinuerlig. Då gäller  $\delta_n f_{\#} = f_{\#} \delta_n$  för alla  $n \geq 0$ , dvs. diagrammet*

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(X) \\ \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\ S_n(Y) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

*kommuterar.*

Ifall man vill specificera funktionerna  $\delta_n$  och  $f_{\#}$  noggrannare, så får villkoret i lemmat formen  $\delta_n^X f_{\#}^n = f_{\#}^{n-1} \delta_n^Y$ . Lemmat säger alltså att det inte har någon skillnad i vilken ordning vi använder randoperatoren  $\delta_n$  och homomorfismen  $f_{\#}$ ; resultatet är lika i båda fallen.

*Bevis.* Det räcker naturligtvis att beräkna båda funktionerna för en godtycklig generator  $\sigma \in S_n(X)$ . Nu gäller det enligt definitionerna på randoperatoren  $\delta_n$  och på homomorfismen  $f_{\#}$  att

$$\delta_n f_{\#}(\sigma) = \delta_n(f\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f\sigma) \varepsilon_i^n,$$

och att

$$f_{\#} \delta_n(\sigma) = f_{\#} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \varepsilon_i^n \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i f(\sigma \varepsilon_i^n).$$

□

Ifall vi har en mängd avbildningar  $\{f_{\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y) \mid n \geq 0\}$  som uppfyller kravet  $\delta_n f_{\#} = f_{\#} \delta_n$  för alla  $n \geq 0$  kallas mängden en **kedjeavbildning** mellan de singulära komplexen  $S_*(X)$  och  $S_*(Y)$ . Enligt Lemma 3.20 inducerar alltså varje kontinuerlig avbildning  $f: X \rightarrow Y$  en kedjeavbildning.

För att kunna definiera den inducerade homomorfismen måste vi ännu kontrollera att  $f_{\#}$  avbildar ränder på ränder och cykler på cykler:

**Lemma 3.21.** *Antag att  $f: X \rightarrow Y$  och att  $n \geq 0$ . Då gäller det att*

$$f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$$

och att

$$f_{\#}(Z_n(X)) \subset Z_n(Y).$$

*Bevis.* Antag att  $b \in B_n(X)$ . Då existerar ett  $c \in S_{n+1}(X)$  för vilket det gäller att  $b = \delta_{n+1}(c)$ . Därmed gäller det enligt Lemma 3.20 att

$$f_{\#}(b) = f_{\#}(\delta_{n+1}(c)) = \delta_{n+1}(f_{\#}(c)) \in \text{Im } \delta_{n+1} = B_n(Y).$$

Antag nu att  $z \in Z_n(X)$ . Då gäller det att  $\delta_n(z) = 0$ , och därmed följer det igen enligt Lemma 3.20 att

$$\delta_n f_{\#}(z) = f_{\#}(\delta_n(z)) = f_{\#}(0) = 0,$$

dvs.  $f_{\#}(z) \in \text{Ker } \delta_n = Z_n(Y)$ . □

**Definition 3.22.** Antag att  $f: X \rightarrow Y$  är en kontinuerlig avbildning. Vi definierar **den inducerade homomorfismen**  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  som den inducerade avbildningen som avbildar homologiklasser i  $H_n(X)$  på homologiklasser i  $H_n(Y)$ , dvs. för varje  $z_n \in Z_n(X)$  gäller det att

$$f_*: z_n + B_n(X) \mapsto f_{\#}(z_n) + B_n(Y).$$

Vi måste nu kontrollera att  $f_*$  är väldefinierad. Enligt Lemma 3.21 är bilden av cykeln  $z_n$  i  $X$  en cykel  $f_{\#}(z_n)$  i  $Y$ , alltså ligger avbildade punkter i målmängden.

Vi bör även kontrollera att avbildningen inte beror på valet av representanten av sidoklassen. Antag alltså att vi har en annan representant  $z'_n$  av homologiklassen  $[z_n] = z_n + B_n(X)$ . Då gäller det att  $z'_n = z_n + b_n$  för något  $b_n \in B_n(X)$ . Därmed gäller det att

$$\begin{aligned} f_{\#}(z'_n) + B_n(Y) &= f_{\#}(z_n + b_n) + B_n(Y) = f_{\#}(z_n) + f_{\#}(b_n) + B_n(Y) \\ &= f_{\#}(z_n) + B_n(Y), \end{aligned}$$

där det sista steget följer av att  $f_{\#}(B_n(X)) \subset B_n(Y)$  enligt Lemma 3.21.

Funktionen  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  är alltså väldefinierad.

Vi kan nu bevisa motsvarande egenskaper för den inducerade homomorfismen för singular homologi som vi gjorde för fundamentalgruppen (Sats 1.30):

**Sats 3.23.** *För den inducerade homomorfismen gäller följande för alla  $n \geq 0$ :*

a)  $id_* = id: H_n(X) \rightarrow H_n(X)$

b) Om  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: Y \rightarrow Z$  är kontinuerliga funktioner, så gäller det att

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Z).$$

*Bevis.* Låt  $[z_n] = z_n + B_n(X)$  vara en godtycklig homologiklass i  $H_n(X)$ .

a) Det gäller att

$$id_*(z_n + B_n(X)) = id_{\#}(z_n) + B_n(X) \stackrel{L3.19}{=} z_n + B_n(X).$$

b) Vi ser att

$$(g \circ f)_*(z_n + B_n(X)) = (g \circ f)_{\#}(z_n) + B_n(Z) \stackrel{L3.19}{=} g_{\#}(f_{\#}(z_n)) + B_n(Z),$$

och att

$$(g_* \circ f_*)(z_n + B_n(X)) = g_*(f_{\#}(z_n + B_n(X))) = g_{\#}(f_{\#}(z_n)) + B_n(Z).$$

□

Från ovanstående sats följer det precis som i fallet för fundamentalgruppen att en homeomorfism inducerar en isomorfism mellan homologigrupperna:

**Följdsats 3.24.** *Antag att  $f: X \rightarrow Y$  är en homeomorfism. Då är den inducerade homomorfismen  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  en isomorfism.*

*Bevis.* Bevisas på motsvarande sätt som för den inducerade homomorfismen för fundamentalgruppen. □

### 3.3 Kedjekomplex

Tidigare i detta kapitel definierade vi det singulära komplexet  $(S_*(X), \delta)$  för det topologiska rummet  $X$  (Definition 3.7), och med hjälp av  $(S_*(X), \delta)$  definierade vi de singulära homologigrupperna  $H_n(X)$  (Definition 3.13). Definitionen på det singulära komplexet beror naturligtvis på rummet  $X$ , men definitionen på  $H_n(X)$  bygger endast på algebra. Det visar sig att vi kan definiera homologigrupper för allmänna följder av abelska grupper och homomorfismer, vilket senare kommer att visa sig vara mycket användbart.

**Definition 3.25.** Ett **kedjekomplex** är en följd av abelska grupper och homomorfismer

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} S_n \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1} \longrightarrow \cdots, n \in \mathbb{Z},$$

där  $\delta_n \delta_{n+1} = 0$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Homomorfismen  $\delta_n$  kallas **randavbildningen av graden  $n$** , och gruppen  $S_n$  kallas **termen av graden  $n$** . Kedjekomplexet betecknas  $(S_*, \delta)$ , eller kortare  $S_*$ .

Det singulära komplexet  $(S_*(X), \delta)$  är ett exempel på ett kedjekomplex, om vi låter alla grupper som motsvarar negativa index vara triviala.

Vi noterar även att villkoret  $\delta_n \delta_{n+1} = 0$  är ekvivalent med villkoret

$$\text{Im } \delta_{n+1} \subset \text{Ker } \delta_n.$$

**Definition 3.26.** En följd av två homomorfismer  $f: A \rightarrow B$  och  $g: B \rightarrow C$  är **exakt** vid  $B$  ifall  $\text{Im } f = \text{Ker } g$ .

**Definition 3.27.** En följd av abelska grupper och homomorfismer

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} S_n \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

är **exakt** ifall den är exakt vid  $S_n$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ , dvs. om det gäller att  $\text{Im } \delta_{n+1} = \text{Ker } \delta_n$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ .

En **kort exakt följd** är en exakt följd av formen

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0.$$

**Lemma 3.28.** *En följd*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

*är en kort exakt följd om och endast om*

- 1)  $i$  är injektiv
- 2)  $j$  är surjektiv
- 3)  $\text{Im } i = \text{Ker } j$ .

*Bevis.* 1)  $i$  är injektiv  $\Leftrightarrow \text{Ker } i = \text{Im } 0 = 0$ .

2)  $j$  är surjektiv  $\Leftrightarrow \text{Im } j = \text{Ker } 0 = C$ .

3) Följer av definitionen.

□

**Lemma 3.29.** *Antag att*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

är en kort exakt följd. Då gäller det att  $iA \cong A$  och  $B/iA \cong C$ .

*Bevis.* Eftersom  $i$  är injektiv, följer det direkt att  $iA \cong A$ . Enligt den första isomorfin gällande  $B/\text{Ker } p \cong \text{Im } p$ . Av surjektiviteten på  $p$  följer det att  $\text{Im } p = C$ , och eftersom följden är exakt gäller det att  $\text{Ker } p = \text{Im } i = iA$ , dvs. det gäller att  $B/iA \cong C$ . □

Vi kan för kedjekomplex definiera cykler, rander och homologigrupper på motsvarande sätt som för singulära komplex (se Definition 3.10 och 3.13):

**Definition 3.30.** Antag att  $(S_*, \delta)$  är ett kedjekomplex. Gruppen  $\text{Ker } \delta_n$  kallas gruppen av **n-cykler** och betecknas  $Z_n(S_*, \delta)$ . Gruppen  $\text{Im } \delta_{n+1}$  kallas gruppen av **n-rander** och betecknas  $B_n(S_*, \delta)$ .

Den **n:te homologigruppen** av komplexet  $(S_*, \delta)$  är gruppen

$$H_n(S_*, \delta) = \frac{Z_n(S_*, \delta)}{B_n(S_*, \delta)}.$$

På motsvarande sätt som för singulära homologigrupper gäller det att ifall  $z_n \in Z_n(S_*, \delta)$ , kallas sidoklassen  $z_n + B_n(S_*, \delta)$  för homologiklassen av  $z_n$  och betecknas  $[z_n]$ .

Vi observerar att ett komplex  $(S_*, \delta)$  är exakt om och endast om  $H_n(S_*, \delta) = 0$  för alla  $n \geq 0$ . Detta gäller eftersom  $Z_n(S_*, \delta) = B_n(S_*, \delta)$  om och endast om  $\text{Im } \delta_{n+1} = \text{Ker } \delta_n$ . Därmed berättar homologigrupperna oss hur mycket ett komplex skiljer sig från en exakt följd, och därför kallas en exakt följd även ett **acykliskt komplex**.

**Definition 3.31.** Låt  $(S'_*, \delta')$  och  $(S_*, \delta)$  vara godtyckliga kedjekomplex. En **kedjeavbildning**  $f: (S'_*, \delta') \rightarrow (S_*, \delta)$  är en följd av homomorfismer  $\{f_n: S'_n \rightarrow S_n\}$  för vilken diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S'_{n+1} & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & S'_n & \xrightarrow{\delta'_n} & S'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1} & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & S_n & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommuterar, dvs.  $\delta_n f_n = f_{n-1} \delta'_n$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ . Homomorfismen  $f_n$  kallas **termen av grad  $n$** .

I det förra stycket visade vi (Lemma 3.20) att en kontinuerlig funktion  $f: X \rightarrow Y$  inducerar en kedjeavbildning  $f_{\#}^n: S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$  mellan de singulara komplexen  $S_*(X)$  och  $S_*(Y)$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ , och av detta följer det att kedjeavbildningen  $f_{\#}^n$  inducerar en homomorfism  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  för alla  $n \in \mathbb{N}$  (se Lemma 3.21 och Definition 3.22).

Beviset på att den inducerade homomorfismen är väldefinierad bygger endast på att  $f_{\#}^n$  är en kedjeavbildning, och därmed gäller det även att en kedjeavbildning  $f: (S'_*, \delta') \rightarrow (S_*, \delta)$  mellan allmänna kedjekomplex inducerar en homomorfism  $f_*: H_n(S'_*, \delta') \rightarrow H_n(S_*, \delta)$  för alla  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definition 3.32.** Låt  $S'_*, S_*$  och  $\bar{S}_*$  vara kedjekomplex, och låt  $f: S'_* \rightarrow S_*$  samt  $g: S_* \rightarrow \bar{S}_*$  vara kedjeavbildningar. Följden

$$0 \longrightarrow S'_* \xrightarrow{f} S_* \xrightarrow{g} \bar{S}_* \longrightarrow 0.$$

av kedjekomplex och kedjeavbildningar kallas en **kort exakt följd** ifall följden

$$0 \longrightarrow S'_n \xrightarrow{f_n} S_n \xrightarrow{g_n} \bar{S}_n \longrightarrow 0.$$

är exakt för varje  $n \in \mathbb{Z}$ .

Enligt Lemma 3.29 gäller det i ovanstående definition att  $S'_n \subset S_n$  och att  $\bar{S}_n = S_n/S'_n$  för varje  $n \in \mathbb{Z}$ . Därmed kan vi tolka den korta exakta följden i varje dimension  $n \in \mathbb{Z}$  som följden

$$0 \longrightarrow S'_n \xrightarrow{f_n} S_n \xrightarrow{g_n} S_n/S'_n \longrightarrow 0.$$

Ifall vi i samma diagram kombinerar kedjekomplexen  $S'_*, S_*$  och  $\bar{S}_*$  samt den korta exakta följden mellan dem får vi följande kommuterande diagram:



$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & S'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & S_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & \bar{S}_{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta'_{n+1} & & \downarrow \delta_{n+1} & & \downarrow \bar{\delta}_{n+1} \\
0 & \longrightarrow & S'_n & \xrightarrow{f_n} & S_n & \xrightarrow{g_n} & \bar{S}_n \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta'_n & & \downarrow \delta_n & & \downarrow \bar{\delta}_n \\
0 & \longrightarrow & S'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & S_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & \bar{S}_{n-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Målet är nu att visa att en kort exakt följd av kedjekomplex inducerar den långa exakta följd

$$\dots \longrightarrow H_n(S'_*) \xrightarrow{f_*} H_n(S_*) \xrightarrow{g_*} H_n(\bar{S}_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(S'_*) \longrightarrow \dots,$$

där avbildningen  $\delta: H_n(\bar{S}_*) \rightarrow H_{n-1}(S'_*)$  kallas **randoperatorn** eller **randavbildningen** inducerad av denna följd. Vi börjar med att definiera avbildningen  $\delta$ :

Låt  $z \in \bar{S}_n$  vara en godtycklig cykel (dvs.  $z \in \text{Ker } \bar{\delta}_n$ ). Eftersom vi behandlar en kort exakt följd av kedjekomplex så är avbildningen  $g_n: S_n \rightarrow \bar{S}_n$  surjektiv, alltså existerar det ett element  $y \in S_n$  för vilket det gäller att  $g_n(y) = z$ . Vi ser att elementet  $\delta_n(y) \in S_{n-1}$  ligger i  $\text{Ker } g_{n-1}$  eftersom det gäller att

$$g_{n-1}(\delta_n(y)) = \bar{\delta}_n(g_n(y)) = \bar{\delta}_n(z) = 0, \text{ ty } z \in \text{Ker } \bar{\delta}_n.$$

Därmed finns det ett  $x \in S'_{n-1}$  för vilket det gäller att  $f_{n-1}(x) = \delta_n(y)$ , eftersom det av exaktheten följer att  $\text{Ker } g_{n-1} = \text{Im } f_{n-1}$ . Detta element  $x$  är unikt p.g.a. att  $f_{n-1}$  är en injektion. Dessutom gäller det att  $x$  är en cykel: Vi ser först att

$$f_{n-2}(\delta'_{n-1}(x)) = \delta_{n-1}(f_{n-1}(x)) = \delta_{n-1}(\delta_n(y)) = 0.$$

Eftersom  $f_{n-2}$  är injektiv så följer det att  $\delta'_{n-1}(x) = 0$ , alltså gäller det att  $x \in \text{Ker } \delta'_{n-1}$ . Vi kan därmed definiera avbildningen  $\delta: H_n(\bar{S}_*) \rightarrow H_{n-1}(S'_*)$  genom att avbilda homologiklassen av  $z$  på homologiklassen av  $x$ , dvs.  $\delta([z]) = [x]$ .

**Lemma 3.33.** *Den ovan specificerade avbildningen  $\delta: H_n(\bar{S}_*) \rightarrow H_{n-1}(S'_*)$  är väldefinierad och en homomorfism.*

*Bevis.* Då vi konstruerade avbildningen  $\delta$  valde vi tre punkter:  $x \in S'_{n-1}$ ,  $y \in S_n$  och  $z \in \bar{S}_n$ . Vi kontrollerar nu att valet på dessa punkter inte inverkar på avbildningen.

- Valet på elementet  $x$  bestäms entydigt av  $\delta_n(y)$  och därmed av valet på  $y$  eftersom  $f_{n-1}$  är en injektion.
- Ifall vi i stället för  $y \in S_n$  väljer ett annat element  $y' \in S_n$  måste det gälla att  $g_n(y) = z = g_n(y')$ , alltså gäller det att  $y - y' \in \text{Ker } g_n = \text{Im } f_n$ . Därmed existerar det ett element  $x' \in S'_n$  för vilket det gäller att  $f_n(x') = y - y'$ , alltså ersätts  $y$  av elementet  $y + f_n(x')$ . Av detta följer det att

$$\begin{aligned} \delta_n(y + f_n(x')) &= \delta_n(y) + \delta_n(f_n(x')) \\ &= f_{n-1}(x) + f_{n-1}(\delta'_n(x')) \\ &= f_{n-1}(x + \delta'_n(x')). \end{aligned}$$

Vi ser alltså att ersätts  $x$  av elementet  $x + \delta'_n(x')$  som ligger i samma homologiklass som  $x$ .

- Om  $z$  ersätts av ett annat element i samma homologiklass måste det vara av typen  $z + \bar{\delta}_{n+1}(z')$  för något  $z' \in \bar{S}_{n+1}$ . Eftersom  $g_{n+1}$  är surjektiv så gäller det att  $z' = g_{n+1}(y')$  för något  $y' \in S_{n+1}$ . Därmed ser vi att

$$\begin{aligned} z + \bar{\delta}_{n+1}(z') &= z + \bar{\delta}_{n+1}(g_{n+1}(y')) \\ &= g_n(y) + g_n(\delta_{n+1}(y')) \\ &= g_n(y + \delta_{n+1}(y')). \end{aligned}$$

Elementet  $y$  ersätts alltså av elementet  $y + \delta_{n+1}(y')$ , och det följer att  $\delta_n(y + \delta_{n+1}(y')) = \delta_n(y) + \delta_n(\delta_{n+1}(y')) = \delta_n(y)$ . Därmed förändras inte elementet  $\delta_n(y)$  och ej heller elementet  $x$ .

För att visa att  $\delta$  är en homomorfism antar vi först att  $\delta([z]) = [x]$  via elementet  $y \in S_n$  och att  $\delta([z']) = [x']$  via elementet  $y' \in S_n$ . Då gäller det att

$$g_n(y + y') = g_n(y) + g_n(y') = z + z'$$

och att

$$\delta_n(y + y') = \delta_n(y) + \delta_n(y') = f_{n-1}(x) + f_{n-1}(x') = f_{n-1}(x + x').$$

Därmed följer det att  $\delta([z] + [z']) = [x] + [x'] = \delta([z]) + \delta([z'])$ . □

**Sats 3.34.** *Följden*

$$\dots \longrightarrow H_n(S'_*) \xrightarrow{f_*} H_n(S_*) \xrightarrow{g_*} H_n(\bar{S}_*) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(S'_*) \longrightarrow \dots$$

är exakt.

*Bevis.* [2, Thm 2.16] □

## 3.4 Reducerad homologi

Vi visade tidigare (Sats 3.17) att de singulära homologi grupperna för enpunktsrummet  $X = \{x\}$  är triviala ifall  $n > 0$ , men att  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . I vissa fall är det lättare att behandla en sådan homologi där alla homologi grupper för enpunktsrummet är triviala. Ett sätt att göra detta på är följande:

**Definition 3.35.** De reducerade homologi grupperna för rummet  $X$  är homologi grupperna för det utökade komplexet

$$\dots \rightarrow S_n(X) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}(X) \rightarrow \dots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\delta_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0,$$

där homomorfismen  $\epsilon: S_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  definieras enligt  $\epsilon(\sum n_\sigma \sigma) = \sum n_\sigma$ . De reducerade homologi grupperna betecknas  $\tilde{H}_n(X)$ , och det gäller att

$$\tilde{H}_n(X) = \frac{\text{Ker } \delta_n}{\text{Im } \delta_{n+1}} \cong H_n(X)$$

för alla  $n > 0$ , samt att

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\text{Ker } \epsilon}{\text{Im } \delta_1}.$$

*Anmärkning.* För varje 1-simplex  $\sigma: \Delta^1 \rightarrow X$  gäller det att

$$\epsilon(\delta_1(\sigma)) = \epsilon((\sigma \circ \varepsilon_0^1) - (\sigma \circ \varepsilon_1^1)) = 1 - 1 = 0,$$

alltså är komplexet ovan ett kedjekomplex (se Definition 3.25). Därmed är de reducerade homologi grupperna väldefinierade.

**Lemma 3.36.** För enpunktsrummet  $X = \{x\}$  gäller det att  $\tilde{H}_n(X) = 0$  för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* Vi har redan visat (Sats 3.17) att  $H_n(X) = \tilde{H}_n(X) = 0$  för alla  $n > 0$ . Det räcker alltså att visa att  $\tilde{H}_0(X) = 0$ .

I beviset på Sats 3.17 konstaterade vi att randoperatoren  $\delta_n$  är konstant ifall  $n$  är udda; därmed gäller det att  $\text{Im } \delta_1 = 0$ . Eftersom det endast existerar ett 0-simplex  $\sigma: \Delta^0 \rightarrow X$ , nämligen den konstanta avbildningen  $c_x$ , så gäller det att  $S_0(X) \cong \mathbb{Z}$ , och vi ser att avbildningen  $\epsilon: n_\sigma \sigma \mapsto n_\sigma$  en isomorfism. Därmed gäller det att  $\text{Ker } \epsilon = 0$ , och slutligen att

$$\tilde{H}_0(X) = \frac{\text{Ker } \epsilon}{\text{Im } \delta_1} = \text{Ker } \epsilon = 0.$$

□

Mer allmänt gäller det följande:

**Sats 3.37.** Ifall  $X$  är ett topologiskt rum, så gäller det att

$$H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X),$$

för alla  $n > 0$ , och att

$$H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

*Bevis.* [4, Lemma 4.3.1]

□

## 3.5 Relativ homologi

**Definition 3.38.** Ifall  $X$  är ett topologiskt rum och  $A$  är ett delrum av  $X$  betecknar vi detta par med  $(X, A)$  och kallar det för ett **(topologiskt) par**. Notera att ett baspunktsrum (Definition 1.19) även kan ses som ett topologiskt par.

En avbildning  $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  mellan de topologiska paren  $(X, A)$  och  $(Y, B)$  är en avbildning  $f: X \rightarrow Y$  för vilken det gäller att  $f(A) \subset B$ .

En **(topologisk) trippel**  $(X, A, B)$  består av ett rum  $X$  och dess delrum  $B \subset A \subset X$ .

Förrän vi går in på definitionen på relativ homologi så noterar vi att ifall  $(X, A)$  är ett topologiskt par, så kan  $S_n(A)$  på ett naturligt sätt ses som en delgrupp av  $S_n(X)$ . Elementen i basen av  $S_n(A)$  är  $n$ -simplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow A$ , och dessa kan ses som element av  $S_n(X)$  av typen  $i \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow X$ , där  $i$  är inklusionen  $A \hookrightarrow X$ .

**Definition 3.39.** Låt  $(X, A)$  vara ett topologiskt par. Vi definierar  $S_n(X, A)$  att vara kvotgruppen

$$S_n(X, A) = \frac{S_n(X)}{S_n(A)}.$$

Med andra ord är alla kedjor i  $A$  triviala i  $S_n(X, A)$ .

Vi märker att eftersom det för randoperatoren  $\delta_n: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  gäller att  $\delta_n(S_n(A)) \subset S_{n-1}(A)$  för alla  $n \in \mathbb{N}$  så inducerar den kvotrandoperatoren

$$\bar{\delta}_n: S_n(X, A) \rightarrow S_{n-1}(X, A),$$

där

$$\bar{\delta}_n(x_n + S_n(A)) = \delta_n(x_n) + S_{n-1}(A)$$

för alla  $n \in \mathbb{N}$ . Eftersom det gäller för den vanliga randoperatoren gäller att  $\delta_n \delta_{n+1} = 0$ , så gäller det på motsvarande sätt för kvotrandoperatoren att  $\bar{\delta}_n \bar{\delta}_{n+1} = 0$ .

**Definition 3.40.** Det **relativa kedjekomplexet**  $S_*(X, A)$  för paret  $(X, A)$  är

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\bar{\delta}_{n+1}} S_n(X, A) \xrightarrow{\bar{\delta}_n} S_{n-1}(X, A) \longrightarrow \cdots$$

Eftersom  $\bar{\delta}_n \bar{\delta}_{n+1} = 0$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ , är detta verkligen ett kedjekomplex ifall vi fyller ut alla negativa index med triviala gruppen.

**Definition 3.41.** De **relativa homologi**grupperna  $H_n(X, A)$  för paret  $(X, A)$  är homologi

$$H_n(X, A) = \frac{\text{Ker } \bar{\delta}_n}{\text{Im } \bar{\delta}_{n+1}}.$$

Vi ser att ett element i  $H_n(X, A)$  representeras av en relativ cykel  $x_n \in S_n(X)$  för vilken det gäller att  $\delta(x_n) \in S_{n-1}(A)$ . En relativ cykel  $x_n$  är trivial om den är en relativ rand, dvs. om  $x_n = \delta(x_{n+1}) + a_n$  där  $x_{n+1} \in S_{n+1}(X)$  och  $a_n \in S_n(A)$ .

De relativa homologi

**Sats 3.42.** Låt  $\{X_i \mid i \in I\}$  vara mängden av stigkomponenterna för rummet  $X$ , och låt  $(X, A)$  vara ett par. Då gäller det för varje  $n \geq 0$  att

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_i H_n(X_i, A \cap X_i).$$

*Bevis.* [1, Thm 5.13] □

Följande sats kopplar samman de relativa homologigrupperna  $H_n(X, A)$  med  $H_n(X)$  och  $H_n(A)$  via en lång exakt följd. Satsen kallas exakthetsaxiomet; orsaken till namnet blir klart senare. Notera att detta är det andra "axiomet" vi presenterar. Tidigare bevisade vi redan dimensionsaxiomet (Sats 3.17).

**Sats 3.43.** *De relativa homologigrupperna  $H_n(X, A)$  för paret  $(X, A)$  kopplas samman med homologigrupperna  $H_n(X)$  och  $H_n(A)$  via den långa exakta följden*

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0.$$

*Bevis.* Tanken här är att visa att vi i fallet av relativ homologi kan uppfylla definitionen för en kort exakt följd av kedjekomplex. Då vi har gjort detta så följer resultatet direkt av arbetet vi gjorde i stycke 3.3.

Låt oss beteckna med  $i_n$  inklusionen  $S_n(A) \hookrightarrow S_n(X)$  och med  $j_n$  kvotavbildningen  $S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)$ . Vi ser att diagrammen

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(A) & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & S_n(A) & \xrightarrow{\delta'_n} & S_{n-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{n+1} & & \downarrow i_n & & \downarrow i_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & S_n(X) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

och

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & S_n(X) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow j_{n+1} & & \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_{n+1}} & S_n(X, A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_n} & S_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommuterar p.g.a. definitionen på randoperatorerna  $\delta'$ ,  $\delta$  och  $\bar{\delta}$ , alltså är  $i = \{i_n: S_n(A) \rightarrow S_n(X)\}$  och  $j = \{j_n: S_n(X) \rightarrow S_n(X, A)\}$  kedjeavbildningar enligt Definition 3.31.

Därtill gäller det för varje  $n \in \mathbb{N}$  att följden

$$0 \longrightarrow S_n(A) \xrightarrow{i_n} S_n(X) \xrightarrow{j_n} S_n(X, A) \longrightarrow 0$$

är exakt för alla  $n \in \mathbb{N}$  enligt Lemma 3.28 eftersom  $i_n$  är injektiv,  $j_n$  är surjektiv och  $\text{Im } i_n = \text{Ker } j_n$ .

Därmed är följden

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{j} S_*(A) \longrightarrow 0$$

en kort exakt följd av kedjekomplex och kedjeavbildningar enligt Definition 3.32, och resultatet följer av Sats 3.34. □

Enligt Definition 3.35 är de reducerade homologigrupperna för  $A$  och  $X$  homologigrupperna av följderna

$$\cdots \rightarrow S_n(X) \xrightarrow{\delta'_n} S_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X) \xrightarrow{\delta'_1} S_0(X) \xrightarrow{\epsilon'} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

och

$$\cdots \rightarrow S_n(A) \xrightarrow{\delta_n} S_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(A) \xrightarrow{\delta_1} S_0(A) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Eftersom det per definition gäller att  $S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A)$  och eftersom det klart gäller att  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$ , så fås de reducerade relativa homologigrupperna  $\tilde{H}_n(X, A)$  som homologigrupperna av följden

$$\cdots \rightarrow S_n(X, A) \xrightarrow{\bar{\delta}_n} S_{n-1}(X, A) \rightarrow \cdots \rightarrow S_1(X, A) \xrightarrow{\bar{\delta}_1} S_0(X, A) \xrightarrow{\bar{\epsilon}} 0 \rightarrow 0,$$

alltså gäller det att  $\tilde{H}_n(X, A) = H_n(X, A)$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ . Därtill kan vi utöka den korta exakta följden av kedjekomplexen

$$0 \longrightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{j} S_*(A) \longrightarrow 0$$

med den korta exakta följden

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0$$

i dimensionen -1, varefter vi på motsvarande sätt som i Sats 3.43 kan konstruera den långa exakta följden

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(A) &\xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_1(X, A) &\xrightarrow{\delta} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ovanstående exakta följd ger oss ett alternativt sätt att karakterisera reducerade homologigrupper som homologigrupper för baspunktsrum (jämför med Definition 1.23 på fundamentalgruppen):

**Sats 3.44.** För paret  $(X, x_0)$  där  $x_0 \in X$  gäller det att  $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$  för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* Vi betraktar den långa exakta följderna för reducerade homologigrupper för paret  $(X, x_0)$ :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(x_0) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, x_0) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(x_0) \rightarrow \cdots$$

Eftersom  $\tilde{H}_n(x_0) = 0$  för alla  $n \geq 0$  enligt Lemma 3.36, så följer det av exaktheten på följderna att  $H_n(X, x_0) \cong \tilde{H}_n(X)$  för alla  $n \geq 0$ .  $\square$

En enkel generalisering av den långa exakta följderna för paret  $(X, A)$  är den långa exakta följderna av trippeln  $(X, A, B)$ :

**Sats 3.45.** Låt  $(X, A, B)$  vara en topologisk trippel. Då existerar det en lång exakt följd

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_n(A, B) &\xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_0(A, B) &\xrightarrow{i_*} H_0(X, B) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

*Bevis.* Denna följd induceras av kedjeavbildningarna  $i = \{i_n: S_n(A, B) \rightarrow S_n(X, B)\}$  och  $j = \{j_n: S_n(X, B) \rightarrow S_n(X, A)\}$ , för vilka det gäller att

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(A, B) & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & S_n(A, B) & \xrightarrow{\delta'_n} & S_{n-1}(A, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{n+1} & & \downarrow i_n & & \downarrow i_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X, B) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & S_n(X, B) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(X, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

och

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X, B) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & S_n(X, B) & \xrightarrow{\delta_n} & S_{n-1}(X, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow j_{n+1} & & \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & S_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_{n+1}} & S_n(X, A) & \xrightarrow{\bar{\delta}_n} & S_{n-1}(X, A) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

samt av de korta exakta följderna

$$0 \longrightarrow S_n(A, B) \xrightarrow{i_n} S_n(X, B) \xrightarrow{j_n} S_n(X, A) \longrightarrow 0.$$

$\square$



## 3.6 Homologiaxiom

Vi har tidigare i detta kapitel presenterat två satser som vi kallat "axiom", nämligen dimensionsaxiomet och exakthetsaxiomet. Dessa två satser tillhör de s.k. **homologiaxiomen**, även kända som Eilenberg–Steenrod-axiomen. Dessa axiom, som presenteras nedan, beskriver de fundamentala egenskaperna för homologiogrupper. Bortskärningsaxiomet och homotopiaxiomet bevisas ej i denna avhandling; bevisen på dessa hittas t.ex. i Hatcher's bok Algebraic Topology ([2]).

**Sats 3.46.** (*Bortskärningsaxiomet*) Ifall  $(X, A)$  är ett topologiskt par och  $U$  är en delmängd av  $X$  för vilken  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ , så inducerar inklusionen  $i: (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$  en isomorfism

$$i_*: H_n(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow H_n(X, A)$$

för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* [2, Thm 2.20] □

**Sats 3.47.** (*Dimensionsaxiomet*) Ifall  $X$  är ett enpunktsrum, så är  $H_n(X) = 0$  för alla  $n > 0$ .

*Bevis.* Se Sats 3.17. □

**Sats 3.48.** (*Homotopiaxiomet*) Ifall  $f: X \rightarrow Y$  och  $g: X \rightarrow Y$  är homotopiska avbildningar, så inducerar de samma homomorfism

$$f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

för alla  $n \geq 0$ . Detta påstående är egentligen ett specialfall av det mer allmänna påståendet som gäller för avbildningar mellan par:

Ifall  $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$  är homotopiska avbildningar mellan paren  $(X, A)$  och  $(Y, B)$ , så gäller det att

$$f_* = g_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$$

för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* [2, Thm 2.10, 2.19] □

**Sats 3.49.** (*Exakthetsaxiomet*) Ifall  $(X, A)$  är ett topologiskt par, så existerar det en exakt följd

$$\cdots \rightarrow H_n(A) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X, A) \rightarrow 0.$$

*Bevis.* Se Sats 3.43. □

Satserna ovan kallas axiom eftersom de är egenskaper som homologiteorier för topologiska rum har gemensamt. Därmed ifall man bevisar något utgående från homologiaxiomen, så gäller de bevisade satserna för alla homologiteorier som uppfyller axiomen. Hittills har vi endast behandlat singulär homologi och bevisat eller hänvisat till bevis på alla av axiomen, men det finns även andra homologiteorier (t.ex. cellulär homologi som vi behandlar i nästa kapitel) som uppfyller homologiaxiomen. Notera även att vi i dimensionsaxiomet inte tar ställning till den nollte homologigruppen  $H_0(X)$  för enpunktsrummet  $X = \{x_0\}$ . Detta beror på att vi vill att homologiaxiomen skall gälla även för reducerade homologiteorier.

Vi kan lätt med hjälp av homologiaxiomen bevisa några viktiga resultat:

**Följdsats 3.50.** *Antag att  $X$  och  $Y$  är homotopiekvivalenta. Då gäller det att  $H_n(X) \cong H_n(Y)$  för alla  $n \geq 0$ .*

*Bevis.* Detta visas precis på samma sätt som för fundamentalgruppen (se stycke 1.4) med hjälp av homotopixiomet och Sats 3.23. □

**Följdsats 3.51.** *För ett kontraktibelt rum  $X$  gäller det att  $H_n(X) = 0$  för alla  $n > 0$  och att  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . Uttryckt i reducerad homologi betyder detta att  $\tilde{H}_n(X) = 0$  för alla  $n \geq 0$ .*

*Bevis.* Eftersom ett rum är kontraktibelt om och endast om det är homotopiekvivalent med ett enpunktsrum (Lemma 1.6) så gäller det enligt Följdsats 3.50 att  $H_n(X) \cong H_n(\{x_0\})$  för alla  $n \geq 0$ . Därmed gäller det enligt dimensionsaxiomet att  $H_n(X) = 0$  för alla  $n > 0$  och enligt Sats 3.17 att  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ .

Påståendet om de reducerade homologigrupperna följer av Sats 3.37. □

Speciellt gäller det att konvexa rum har triviala homologigrupper i alla positiva dimensioner.

**Definition 3.52.** Låt  $X$  vara ett topologiskt rum och  $x \in X$  vara en punkt. De **lokala homologigrupperna** av rummet  $X$  vid punkten  $x$  är grupperna  $H_n(X, X \setminus \{x\})$ .

Följande sats ger en motivering för namnet lokal homologigrupp:

**Sats 3.53.** *Låt  $X$  vara ett topologiskt rum,  $x \in X$  vara en punkt och  $U \subset X$  vara en omgivning av  $x$ . Då gäller det för alla  $n \geq 0$  att*

$$H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong H_n(U, U \setminus \{x\}).$$

*Bevis.* Vi betecknar  $A = \mathbb{C}U$ . Då är  $A$  sluten i  $X$  (eftersom  $U$  är öppen), och det gäller att  $\bar{A} = A \subset X \setminus \{x\} = \text{int}(X \setminus \{x\})$ . Därmed följer det av bortskärningsaxiomet att inklusionen  $(X \setminus A, (X \setminus \{x\}) \setminus A) \hookrightarrow (X, X \setminus \{x\})$  inducerar isomorfismen  $H_n(X \setminus A, (X \setminus \{x\}) \setminus A) \cong H_n(X, X \setminus \{x\})$  för alla  $n \geq 0$ . Resultatet följer av att  $(X \setminus A, (X \setminus \{x\}) \setminus A) = (U, U \setminus \{x\})$ .  $\square$

Vårt nästa steg är att visa att vi i exakthetsaxiomet i vissa fall kan ersätta de relativa homologigrupperna  $H_n(X, A)$  med de absoluta homologigrupperna  $H_n(X/A)$  för kvotrummet  $X/A$ . Vi börjar med en definition:

**Definition 3.54.** Ett topologiskt par  $(X, A)$  kallas ett **gott par** ifall  $A$  är en sluten delmängd av  $X$  som är en deformationsretrakt av någon omgivning  $V$  i  $X$ .

**Sats 3.55.** *Ifall  $(X, A)$  är ett gott par, så existerar det en lång exakt följd*

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_n(X/A) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots \rightarrow \tilde{H}_0(X/A) \rightarrow 0,$$

där  $i$  är inklusionen  $A \hookrightarrow X$  och  $j$  är kvotavbildningen  $X \rightarrow X/A$ .

*Bevis.* Tanken är att konstruera en isomorfism  $H_n(X, A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ . Vi gör detta i två steg: först konstruerar vi en isomorfism  $H_n(X, A) \cong H_n(X/A, A/A)$  och sedan en isomorfism  $H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ .

Eftersom  $(X, A)$  är ett gott par så existerar det en öppen mängd  $U \subset X$  för vilken det gäller att  $A$  är en deformationsretrakt av  $V$ . Vi betraktar nu det kommutativa diagrammet

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, V) & \xleftarrow{i_*} & H_n(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q'_* & & \downarrow \bar{q}_* \\ H_n(X/A, A/A) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(X/A, V/A) & \xleftarrow{i'_*} & H_n(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A), \end{array}$$

där avbildningarna  $i$  och  $i'$  är inklusioner,  $q$ ,  $q'$  och  $\bar{q} = q|_{X \setminus A}$  är kvotavbildningar och  $j$  samt  $j'$  kommer från konstruktionen på den långa exakta följden för tripplarna  $(X, V, A)$  och  $(X/A, V/A, A/A)$ . Vårt mål är att visa att avbildningen  $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$  är en isomorfism. Vi börjar med att notera följande:

- Avbildningen  $i_*$  är en isomorfism enligt bortskärningsaxiomet, eftersom  $\bar{A} = A \subset V = \text{int}(V)$ .
- Även avbildningen  $i'_*$  är en isomorfism enligt bortskärningsaxiomet; här uppfylls kravet i satsen trivialt eftersom  $A/A$  är en enpunktsmängd.

- $j_*$  är en isomorfism, eftersom homologigrupperna  $H_n(V, A)$  i den långa exakta följderna för trippeln  $(X, V, A)$  är triviala. Detta beror på att en deformationsretraktion från  $V$  till  $A$  inducerar en homotopiekvivalens  $(V, A) \simeq (A, A)$ , och därmed gäller det enligt homotopixiomot att  $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$ .
- $j'_*$  är en isomorfism på grund av samma orsak som  $j_*$  eftersom en deformationsretraktion från  $V$  till  $A$  inducerar en deformationsretraktion från  $V/A$  till  $A/A$ .
- $\bar{q}_*$  är en isomorfism p.g.a. att avbildningen  $\bar{q}$  är en homeomorfism (den är den homeomorfa begränsningen av  $q$  till komplementet av  $A$ ).

Eftersom diagrammet är kommutativt, så gäller det att

$$q'_* \circ i_* = i'_* \circ \bar{q}_* \implies q'_* = i'_* \circ \bar{q}_* \circ i_*^{-1},$$

alltså är  $q'_*$  en isomorfism eftersom den är en sammansättning av isomorfismer. Därtill följer det av kommutativiteten på diagrammet att

$$j'_* \circ q_* = q'_* \circ j_* \implies q_* = (j'_*)_*^{-1} \circ q'_* \circ j_*,$$

alltså är även  $q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$  en isomorfism.

Eftersom  $A/A$  är ett enpunktsrum så gäller det att  $H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$  enligt Sats 3.44.

Därmed kan vi i den långa exakta följderna av reducerade homologigrupper för paret  $(X, A)$  ersätta grupperna  $H_n(X, A)$  med grupperna  $\tilde{H}_n(X/A)$ , och beviset är klart.  $\square$

Vi har nu de verktyg som behövs för att fullständigt karakterisera homologigrupperna för enhetssfären  $S^n$ :

**Sats 3.56.** För enhetssfären  $S^n$  gäller det att

$$\tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{om } k = n \\ 0, & \text{om } k \neq n. \end{cases}$$

*Bevis.* Vi betraktar i fallet  $n > 0$  den långa exakta följderna i Sats 3.55 för det goda paret  $(\bar{B}^n, S^{n-1})$ :

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_k(\bar{B}^n) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_k(\bar{B}^n/S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{k-1}(\bar{B}^n) \rightarrow \cdots$$

Eftersom  $\bar{B}^n$  är konvext, så gäller det att  $\tilde{H}_k(\bar{B}^n) = 0$  enligt Följdsats 3.51. Därmed följer det av exaktheten att  $\tilde{H}_k(\bar{B}^n/S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ . Eftersom  $\bar{B}^n/S^{n-1} \approx S^n$ , så gäller det alltså att  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$ . Genom att upprepa ovanstående process induktivt kommer vi alltså fram till följande resultat:

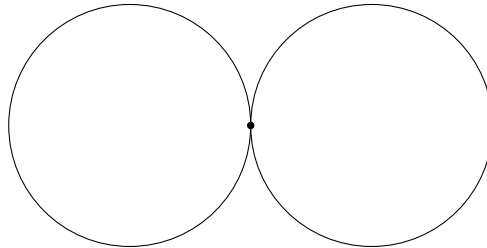
- $k > n$ :  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-n}(S^0)$
- $k = n$ :  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_0(S^0)$
- $k < n$ :  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_0(S^{n-k})$

Eftersom  $S^0 = \{-1, 1\}$  består av två diskreta punkter, så gäller det enligt Sats 3.14, Sats 3.37 och Följdsats 3.51 att  $\tilde{H}_k(S^0) = 0$  för alla  $k > 0$  och att  $\tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ . Därmed gäller det att  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_{k-n}(S^0) = 0$  ifall  $k > n$  och att  $\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ .

P.g.a. att  $S^{n-k}$  är stigsammanhängande ifall  $k < n$  så gäller det att  $\tilde{H}_0(S^{n-k}) = 0$  enligt Sats 3.15 och Sats 3.37, varav det följer att  $\tilde{H}_k(S^n) \cong \tilde{H}_0(S^{n-k}) = 0$  om  $k < n$ .  $\square$

Till sist ser vi hur man kan beräkna homologigrupperna för s.k. enpunktsunioner:

**Definition 3.57.** Låt  $\{(X_a, x_a) \mid a \in A\}$  vara en samling baspunktsrum. **Enpunktsunionen**  $\vee_a X_a$  är kvotrummet av den disjunkta unionen  $\sqcup_a X_a$  där alla baspunkter  $x_a$  identifieras med samma punkt.



Enpunktsunionen  $S^1 \vee S^1$

**Följdsats 3.58.** Låt  $\vee_a X_a$  vara en enpunktsunion. Ifall alla par  $(X_a, x_a)$  är goda par, så inducerar inklusionerna  $i_a: X_a \rightarrow \vee_a X_a$  isomorfismen

$$\bigoplus_a i_{a*}: \bigoplus_a \tilde{H}_n(X_a) \cong \tilde{H}_n(\vee_a X_a)$$

för alla  $n \geq 0$ .

*Bevis.* Vi betecknar  $(X, A) = (\sqcup_a X_a, \sqcup_a \{x_a\})$ . Eftersom reducerad homologi är detsamma som homologi relativt till en baspunkt (Sats 3.44), så gäller det att  $H_n(X, A) = \bigoplus_a \tilde{H}_n(X_a)$  p.g.a. att alla  $X_a$  är disjunkta. Därmed följer resultatet precis som i beviset på Sats 3.55 av att avbildningen  $q_*: H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) = \tilde{H}_n(\vee_a X_a)$  är en isomorfism.  $\square$

### 3.7 Klassiska tillämpningar

Vi avslutar detta kapitel med att presentera några klassiska tillämpningar av de resultat vi har visat.

**Sats 3.59.** *Det existerar ingen retraktion  $r: \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$  för något  $n \geq 1$ .*

*Bevis.* Ifall  $r: \bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$  är en retraktion så gäller det att  $r \circ i = id_{S^{n-1}}$ , där  $i$  är inklusionen  $S^{n-1} \hookrightarrow \bar{B}^n$ . Detta betyder att kompositionen

$$\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_{n-1}(\bar{B}^n) \xrightarrow{r_*} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$$

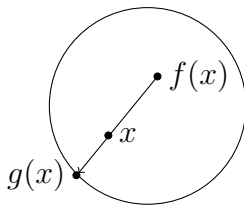
är den identiska avbildningen  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ . Detta är omöjligt eftersom både  $i_*$  och  $r_*$  måste vara triviala avbildningar p.g.a. att  $\tilde{H}_{n-1}(\bar{B}^n) = 0$ .  $\square$

**Sats 3.60.** (*Brouwers fixpunktsats*) *Varje kontinuerlig avbildning  $f: \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$  där  $n \geq 1$  har en fixpunkt, dvs. en punkt  $x \in \bar{B}^n$  för vilken det gäller att  $f(x) = x$ .*

*Bevis.* Antag att det existerar en avbildning  $f: \bar{B}^n \rightarrow \bar{B}^n$  för vilken det gäller att  $x \neq f(x)$  för alla  $x \in \bar{B}^n$ . För varje  $x \in \bar{B}^n$  betraktar vi halvlinjen

$$L_x = \{f(x) + t(x - f(x)) \mid t \geq 0\},$$

dvs. halvlinjen som startar i  $f(x)$  och låter  $g(x)$  vara den unika punkten som tillhör mängden  $L_x \cap S^{n-1}$ , dvs. den unika punkten var halvlinjen och randen på  $\bar{B}^n$  skär varandra.



Konstruktionen på avbildningen  $g$

Då är  $g$  en kontinuerlig avbildning  $\bar{B}^n \rightarrow S^{n-1}$  för vilken det gäller att  $g(x) = x$  för alla  $x \in S^{n-1}$ , alltså är  $g$  en retraktion. Detta är inte möjligt enligt Sats 3.59, alltså kan avbildningen  $f$  inte existera.  $\square$

**Sats 3.61.**  $\mathbb{R}^n$  är inte homeomorft med  $\mathbb{R}^m$  ifall  $n \neq m$ .

*Bevis.* Antag att  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  är en homeomorfism, och låt  $f': \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$  vara homeomorfismen  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ . Det gäller att  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq S^{n-1}$  via deformationsretraktionen  $x \mapsto x/|x|$ , och på liknande sätt kan vi visa att  $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\} \simeq S^{m-1}$ . Därmed eftersom  $f'$  är en homeomorfism så gäller det att  $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0) \cong \tilde{H}_{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{m-1})$ . Eftersom  $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  så måste det gälla att  $\tilde{H}_{n-1}(S^{m-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Detta gäller endast ifall  $n - 1 = m - 1$ , alltså följer det att  $n = m$ .  $\square$

Ovanstående sats har följande generalisering:

**Sats 3.62.** *Låt  $U \subset \mathbb{R}^n$  och  $V \subset \mathbb{R}^m$  vara icke-tomma öppna mängder. Ifall det existerar en homeomorfism  $f: U \rightarrow V$  så gäller det att  $n = m$ .*

*Bevis.* Låt  $x \in U$  vara någon punkt. Enligt Sats 3.53 gäller det att  $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_k(U, U \setminus \{x\})$ , och eftersom  $\mathbb{R}^n$  är kontraktibelt så följer det från den långa exakta följden för reducerade homologigrupperna för paret  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  att  $H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ . Eftersom det dessutom gäller att  $\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1})$  p.g.a. att  $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \simeq S^{n-1}$  så ser vi att  $H_k(U, U \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$  om  $k = n$ ; annars är den trivial.

På liknande sätt kan vi visa att  $H_k(V, V \setminus \{f(x)\}) \cong \mathbb{Z}$  ifall  $k = m$  och annars trivial. Eftersom  $f$  är en homeomorfism så inducerar den isomorfismen  $f_*: H_k(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_k(V, V \setminus \{f(x)\})$  för alla  $k \geq 0$ , alltså måste det gälla att  $n = m$ .  $\square$

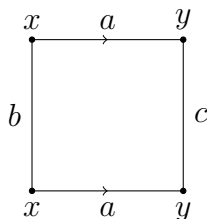
# Kapitel 4

## Cellkomplex

*Anmärkning.* I detta kapitel är  $X$  och  $Y$  topologiska rum, och avbildningar mellan rummen är kontinuerliga ifall inte annat nämns.

### 4.1 Grundegenskaper

Ett välkänt sätt att konstruera cylindern  $S^1 \times I$  är att identifiera två parallella sidor på en kvadrat.



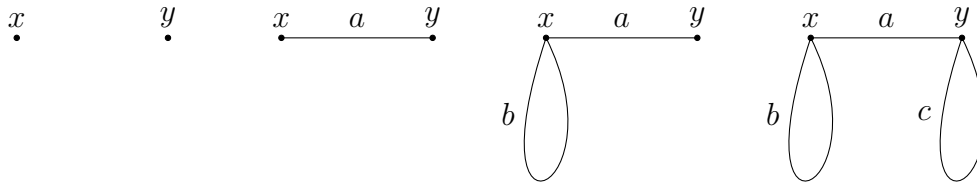
Fastän kvadraten själv naturligtvis har fyra hörn, så har vi åt hörnen endast gett två olika namn  $x$  och  $y$ . Detta är vettigt eftersom hörnen  $x$  och  $y$  kommer att identifieras i samband med att sidorna  $a$  identifieras.

Vi ser alltså att cylindern egentligen består av två punkter  $x$  och  $y$ , tre linjestycken (dvs. kopior av enhetsintervallet  $I$ )  $a$ ,  $b$  och  $c$  samt innerpunkterna av kvadraten  $I^2$ . Vi kan därmed bygga upp cylindern stegvis på följande sätt:

Vi börjar med att lägga till två punkter  $x$  och  $y$ . Efter det lägger vi till ett linjestycke  $a$  som går från  $x$  till  $y$ , varefter vi lägger till linjestycket  $b$  som är en slinga som startar i  $x$  och linjestycket  $c$  som är en slinga som startar i  $y$ . Till sist spänner vi upp kvadraten  $I^2$  kring skelettet vi just skapade.

Under varje steg i konstruktionen ovan såg vi till att randen på den nya delen vi lade till identifierades med någon tidigare del av konstruktionen,





Konstruktionen av 1-skelettet för cylindern  $S^1 \times I$

medan innerpunkterna tillade något nytt. Som nästa steg generaliserar vi detta sätt att konstruera rum:

**Definition 4.1.** Ett **cellkomplex** eller **CW-komplex**  $X$  skapas induktivt på följande sätt:

- 1) Börja med en diskret mängd, dvs. en mängd punkter  $X^0$ . Punkterna i  $X^0$  kallas 0-celler och betecknas  $\varepsilon_0^k$ .
- 2) Skapa induktivt **n-skelettet**  $X^n$  från  $X^{n-1}$  genom att sätta till en godtycklig mängd  $n$ -celler på följande sätt: Ta den slutna enhetsskivan  $\bar{B}_k^n$  och fäst den till  $X^{n-1}$  med en kontinuerlig avbildning  $\phi_k: S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ .  $X^n$  är alltså kvotrummet som fås då enhetsskivorna  $\bar{B}_k^n$  fästs till  $X^{n-1}$  med identifikationen  $x \sim \phi_k(x)$ . Innerpunkterna  $B_k^n$  av de fästa enhetsskivorna kallas  $n$ -celler och betecknas  $\varepsilon_k^n$ , och för dem gäller det att  $\varepsilon_k^n \subset X^n$ .
- 3) Om konstruktionen avslutas efter ändligt många steg  $n$  så får vi ett rum  $X = X^n$ . Vi kan även fortsätta processen i oändligt många steg och få rummet  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ . I det senare fallet ger vi åt  $X$  den svaga topologin: En mängd  $U \subset X$  är öppen (eller sluten) om och endast om  $U \cap X^n$  är öppen (eller sluten) för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

Ifall vi ser på  $X^n$  endast som en mängd är den en disjunkt union  $X^{n-1} \sqcup_k \bar{B}_k^n$  av  $X^{n-1}$  och de slutna enhetsskivorna  $\bar{B}_k^n$ . Sin topologi får den via identifikationerna  $x \sim \phi_k(x)$ .

Varje  $n$ -cell  $\varepsilon_k^n$  har en kontinuerlig **karakteristisk avbildning**  $\Phi_k: \bar{B}_k^n \rightarrow X$  som utvidgar avbildningen  $\phi_k$  och är en homeomorfism från innerpunkterna  $B_k^n$  till  $\varepsilon_k^n$ .

Med hjälp av de karakteristiska avbildningarna kan topologin för cellkomplexet  $X$  även beskrivas på följande sätt:

**Lemma 4.2.** *En mängd  $A \subset X$  i ett cellkomplex  $X$  är öppen (eller sluten) om och endast om Urbilden  $\Phi_k^{-1}(A)$  är öppen (eller sluten) i  $\bar{B}_k^n$  för alla karakteristiska avbildningar  $\Phi_k$ .*

*Bevis.* Vi bevisar påståendet för öppna mängder; samma bevis fungerar för slutna mängder.

“ $\Rightarrow$ ” Ifall  $A \subset X$  är öppen, så är alla Urbilder  $\Phi_k^{-1}(A)$  öppna eftersom avbildningarna  $\Phi_k$  är kontinuerliga.

“ $\Leftarrow$ ” Antag att  $\Phi_k^{-1}(A)$  är öppen i  $\bar{B}_k^n$  för alla  $\Phi_k$ . Vi bevisar påståendet med induktion:

- 1)  $A \cap X^0$  är öppen i  $X^0$  eftersom  $X^0$  är en diskret mängd.
- 2) Antag nu att  $A \cap X^{n-1}$  är öppen i  $X^{n-1}$ . Eftersom  $\Phi_k^{-1}(A)$  är öppen i  $\bar{B}_k^n$  för alla  $\Phi_k$ , måste  $A \cap X^n$  vara öppen i  $X^n$  eftersom  $X^n$  har kvottopologin. Därmed är  $A$  öppen i  $X$  eftersom  $X$  har den svaga topologin.

□

Vi kan alltså även betrakta cellkomplexet  $X$  som kvotrummet av  $\sqcup_{n,k} \bar{B}_k^n$  med identifikationerna som fås från avbildningarna  $\phi_k$ .

**Definition 4.3. Dimensionen** av cellkomplexet  $X$  är det minsta talet  $n \in \mathbb{N}$  för vilket det gäller att  $X = X^n$ . Detta tal  $n$  betecknas  $\dim X$ . Ifall inget sådant tal  $n \in \mathbb{N}$  existerar, så säger vi att  $X$  har **oändlig dimension**.

**Definition 4.4.** Ett delrum  $A \subset X$  av ett cellkomplex är ett **delkomplex** ifall följande villkor gäller:

- i)  $A$  är en union av celler av  $X$ .
- ii) Det slutna höljet av varje cell i  $A$  innehålls i  $A$ .

Paret  $(X, A)$  kallas i detta fall ett **CW-par**.

Ett delkomplex av ett cellkomplex är även själv ett cellkomplex, eftersom det av det andra villkoret följer att det för varje cell  $\varepsilon_k^n$  av  $A$  gäller att bilden av den fästade avbildningen  $\phi_k$  innehålls i  $A$ . Dessutom sammanfaller topologin  $A$  får av cellstrukturen med relativtopologin från  $X$ , eftersom vi induktivt ser att topologierna sammanfaller för alla  $n$ -skelett  $A^n = A \cap X^n$ .

Av definitionen följer direkt att skeletten  $X^n$  är delkomplex av  $X$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ , och även att  $X^k$  är ett delkomplex av  $X^n$  för alla  $k \leq n$ .

**Lemma 4.5.** *Ett delkomplex  $A$  av ett cellkomplex  $X$  är slutet i  $X$ .*

*Bevis.* Vi visar först att  $X^{n-1}$  är sluten i  $X^n$  för varje  $n \in \mathbb{N}_+$ : Låt  $\varepsilon_k^m$  vara en cell i  $X$ . Ifall  $m < n$ , så gäller det att  $\Phi_k^{-1}(X^{n-1}) = \bar{B}_k^m$ , och  $\bar{B}_k^m$  är naturligtvis sluten i sig själv. Om  $m = n$ , så ser vi att  $\Phi_k^{-1}(X^{n-1}) = \partial\bar{B}_k^n$ , som är sluten i  $\bar{B}_k^n$ . Därmed är  $X^{n-1}$  sluten i  $X^n$  enligt Lemma 4.2. Av detta följer även att  $X^m$  är sluten i  $X$  för alla  $m \in \mathbb{N}$ .

Vi bevisar nu det egentliga påståendet med induktion:

- 1)  $A \cap X^0$  är sluten i  $X^0$  eftersom  $X^0$  är en diskret mängd.
- 2) Antag att  $A \cap X^{n-1}$  är sluten i  $X^{n-1}$  (och därmed även sluten i  $X^n$ ) och låt  $\varepsilon_k^m$  vara en godtycklig cell i  $X$ , och låt  $\Phi_k$  vara dess karakteristiska avbildning. Vi måste undersöka tre fall:
  - a)  $m < n$ : Eftersom cellen är av lägre dimension än  $n$ , gäller det att  $\Phi_k^{-1}(A^n) = \Phi_k^{-1}(A^{n-1})$  är sluten i  $\bar{B}_k^m$  p.g.a. induktionsantagandet.
  - b)  $m = n$  och  $\varepsilon_k^n$  är en cell i  $A$ : Här gäller det att  $\Phi_k^{-1}(A^n) = \bar{B}_k^n$ .
  - c)  $m = n$  och  $\varepsilon_k^n$  är inte en cell i  $A$ : Eftersom  $\varepsilon_k^n$  inte är en cell i  $A$ , kan den skära  $A^n$  bara i det lägre skelettet  $A^{n-1}$ . Därmed ser vi att  $\Phi_k^{-1}(A^n) = \Phi_k^{-1}(A^{n-1})$  är sluten i  $\bar{B}_k^n$ , eftersom  $A^{n-1}$  är sluten i  $X^{n-1}$ , som i sin tur är sluten i  $X^n$ .

Vi har alltså visat att  $\Phi_k^{-1}(A^n)$  sluten i  $\bar{B}_k^m$  för alla celler  $\varepsilon_k^m$  där  $m \leq n$ , dvs.  $A^n$  är sluten i  $X^n$ . Därmed är  $A$  sluten i  $X$ .

□

**Lemma 4.6.** *En union  $A$  av celler i  $X$  som är sluten i  $X$  är ett delkomplex av  $X$ .*

*Bevis.* Låt  $\varepsilon_k^n$  vara en godtycklig cell i  $A$ . Eftersom  $A = \bar{A}$ , så gäller det att  $\bar{\varepsilon}_k^n \subset \bar{A} = A$ , dvs.  $A$  innehåller det slutna höljet av sina celler. Därmed är  $A$  ett delkomplex av  $X$ . □

Vi kunde alltså även definiera delkomplex som en union av celler som är en sluten delmängd.

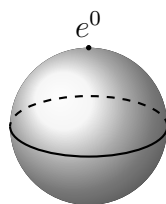
**Sats 4.7.** *CW-paret  $(X, A)$  är ett gott par ifall delkomplexet  $A$  inte är tomt.*

*Bevis.* [2, Prop. A.5] □

Nedan är några konkreta exempel på cellkomplex:

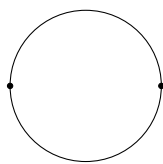
**Exempel 4.8.** a) Uppbyggnaden av cylindern som vi gick igenom ovan bildar ett cellkomplex med två 0-celler, tre 1-celler och en 2-cell.

- b) Genom att göra en liten modifikation på konstruktionen av cylindern kan vi skapa Möbiusbandet. Det räcker att linjestyckena  $b$  och  $c$  går från  $x$  till  $y$  i stället för att vara slingor. Möbiusbandet består då precis som cylindern av två 0-celler, tre 1-celler och en 2-cell, men identifikationerna är ej likadana.
- c) Enhetssfären  $S^n$  kan byggas upp av en 0-cell  $e^0$  och en  $n$ -cell  $e^n$  genom att identifiera hela randen  $\partial\bar{B}^n = S^{n-1}$  med punkten  $e^0$ . Denna konstruktion är ekvivalent med att betrakta  $S^n$  som kvotrummet  $\bar{B}^n/\partial\bar{B}^n$ .



Cellstrukturen av enhetssfären  $S^2$

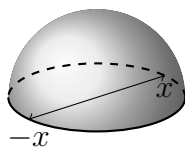
- d) En annan cellstruktur av sfären  $S^n$  är följande: Vi börjar med två 0-celler (dvs. punkter) som bildar  $S^0$ , och konstruerar sedan  $S^1$  genom att fästa två 1-celler till 0-skelettet  $S^0$ . Den ena 1-cellen bildar den norra halvcirkeln och den andra den södra halvcirkeln. Vi kan fortsätta denna konstruktion och induktivt konstruera  $S^k$  från  $S^{k-1}$  med hjälp av två  $k$ -celler varav den ena bildar den norra halvklotet och den andra den södra halvklotet. Genom att upprepa konstruktionen för varje  $k \in \{1, \dots, n\}$  får vi till slut konstruerat  $S^n$  som ett cellkomplex. Fördelen med denna struktur är att  $S^k$  är  $k$ -skelettet av  $S^n$  för varje  $k < n$  och därmed kan de fästade avbildningarna väljas att vara den identiska avbildningen i varje steg.



Alternativ cellstruktur av  $S^1$

- e) Det reella projektiva  $n$ -rummet  $\mathbb{R}P^n$  är kvotrummet  $S^n/\{x, -x\}$ , dvs. det rum som fås då man identifierar antipodalpunkterna  $x$  och  $-x$  på enhetssfären  $S^n$ . Vi kan visualisera konstruktionen på följande sätt: Vi väljer först punkterna på norra halvklotet som representanter för de par  $\{x, -x\}$  för vilka  $x$  inte ligger på ekvatorn  $S^{n-1}$ . Kvar har vi då det övre

halvklotet (som är homeomorft med  $\bar{B}^n$ ). För att slutföra konstruktionen måste vi identifiera antipodalpunkterna på dess rand  $S^{n-1}$ , men ifall vi identifierar antipodalpunkterna på  $S^{n-1}$  så får vi per definition  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Vi kan därmed konstruera  $\mathbb{R}P^n$  från  $\mathbb{R}P^{n-1}$  genom att fästa  $n$ -cellen  $e^n$  till  $\mathbb{R}P^{n-1}$  med kvotprojektionerna  $\phi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ . Med hjälp av induktion det följer att  $\mathbb{R}P^n$  har cellstrukturen  $e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$  med en  $i$ -cell för varje  $i \leq n$ .



Konstruktionen av det projektiva planet  $\mathbb{R}P^2$

Det existerar även en naturlig produktcellstruktur av två cellkomplex  $X$  och  $Y$ . Produkten består av cellerna  $\varepsilon_k^n \times \varepsilon_l^m$  där  $\varepsilon_k^n$  löper över cellerna i  $X$  och  $\varepsilon_l^m$  löper över cellerna i  $Y$ . Cellen  $\varepsilon_k^n \times \varepsilon_l^m$  har dimensionen  $n + m$ ; detta är lätt att förstå ifall vi tänker cellerna som  $n$ -kuber istället för  $n$ -sfärer. Den karakteristiska avbildningen för  $\varepsilon_k^n \times \varepsilon_l^m$  är produktavbildningen  $\Phi_k \times \Phi_l$ , där  $\Phi_k$  och  $\Phi_l$  är de karakteristiska avbildningarna för cellerna  $\varepsilon_k^n$  och  $\varepsilon_l^m$ . Topologin för produktkomplexet sammanfaller inte i alla fall med topologin för produkten  $X \times Y$ , men ifall någondera av komplexen  $X$  och  $Y$  är ändliga så är topologierna lika ([2, Thm A.6]).

**Exempel 4.9.** Vi kan ge en enkel cellstruktur åt rummet  $S^n \times S^n$  genom att använda oss av den cellstruktur för  $S^n$  som består av en 0-cell och en  $n$ -cell. Då kommer produktkomplexet att ha en 0-cell, två  $n$ -celler och en  $2n$ -cell.

## 4.2 Cellulär homologi

Cellulär homologi är ett effektivt sätt att beräkna homologi grupperna för cellkomplex. Definitionen på de cellulära homologi grupperna bygger på följande begrepp:

**Definition 4.10.** Låt  $f: S^n \rightarrow S^n$  vara en kontinuerlig avbildning där  $n > 0$ . Den inducerade homomorfismen  $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  är då en homomorfism  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  enligt Sats 3.56, alltså är den av formen  $f_*(a) = da$  för något heltal  $d \in \mathbb{Z}$  som beror endast på avbildningen  $f$ . Detta tal  $d$  kallas **graden** på  $f$  och betecknas  $\text{deg } f$ .

**Lemma 4.11.** För graden gäller följande:

- 1)  $\deg id_{S^n} = 1$ .
- 2)  $\deg f = 0$  ifall  $f$  inte är surjektiv.
- 3) Ifall  $f \simeq g$  så gäller  $\deg f = \deg g$ .
- 4)  $\deg f \circ g = \deg f \cdot \deg g$ .
- 5)  $\deg f = \pm 1$  ifall  $f$  är en homotopiekvivalens.
- 6)  $\deg f = -1$  om  $f$  är en reflexion av  $S^n$ , dvs. en avbildning som håller  $S^{n-1}$  på plats och byter plats på norra och södra hemisfären.
- 7) Antipodalavbildningen  $-1: S^n \rightarrow S^n$  som byter tecken på varje koordinat har graden  $(-1)^{n+1}$ .

*Bevis.* Vi bevisar de fem första påståendena. Bevisen för de två sista hittas i [2, s. 134].

- 1) Gäller eftersom  $id_* = id$ .
- 2) Om  $f$  ej är surjektiv, så hittas det en punkt  $x_0 \in S^n \setminus f(S^n)$ , och då kan vi skriva  $f$  som kompositionen  $S^n \rightarrow S^n \setminus \{x_0\} \hookrightarrow S^n$ . Eftersom  $S^n \setminus \{x_0\}$  är kontraktibelt gäller det att  $H_n(S^n \setminus \{x_0\}) = 0$ , och därmed är  $\deg f = 0$ .
- 3) Om  $f \simeq g$  så gäller  $f_* = g_*$  enligt homotopixiomet, och därmed följer det att  $\deg f = \deg g$ .
- 4) Följer av att  $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ .
- 5) Eftersom  $f$  är en homotopiekvivalens så existerar det en avbildning  $g: S^n \rightarrow S^n$  för vilken det gäller att  $(f \circ g)_* \simeq id$ , alltså gäller det enligt föregående påstående att  $\deg f \cdot \deg g = \deg f \circ g = \deg id = 1$ . Eftersom  $\deg f \in \mathbb{Z}$ , så måste det gälla att  $\deg f = \pm 1$ .

□

Ett behändigt sätt att beräkna graden för avbildningar  $f: S^n \rightarrow S^n$  i många fall är följande: Antag att det existerar en punkt  $y \in S^n$  för vilken det gäller att Urbilden  $f^{-1}(y)$  innehåller ändligt många punkter  $x_1, \dots, x_k$ . Låt  $U_1, \dots, U_k$  vara disjunkta omgivningar till punkterna i Urbilden. Då gäller det att  $f(U_i \setminus \{x_i\}) \subset S^n \setminus \{y\}$  för alla  $i$ , och vi kan konstruera följande kommuterande diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
& & H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & & \\
& \swarrow i_x & \downarrow k_i & \searrow f'_* & \\
H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{p_i} & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f''_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \\
& \swarrow j_x & \uparrow j & & \uparrow j_y \\
& & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n)
\end{array}$$

I ovanstående diagram är avbildningarna  $i_x, k_i$  och  $p_i$  inducerade av inklusioner medan avbildningarna  $j, j_x$  och  $j_y$  är kvotavbildningar. Avbildningarna  $f_*, f'_*$  samt  $f''_*$  induceras av  $f$ . Vi märker att flera av avbildningarna är isomorfismer:

- Att  $i_x$  en isomorfism följer av Sats 3.53.
- Även avbildningen  $j_x$  är en isomorfism. Detta ser vi genom att betrakta den långa exakta följderna för paret  $(S^n, S^n \setminus \{x_i\})$ :

$$\begin{aligned}
\cdots \rightarrow H_n(S^n \setminus \{x_i\}) &\rightarrow H_n(S^n) \xrightarrow{j_x} H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) \\
&\rightarrow H_{n-1}(S^n \setminus \{x_i\}) \rightarrow \cdots
\end{aligned}$$

Eftersom  $S^n \setminus \{x_i\}$  är kontraktibelt gäller det enligt Sats 3.51 att  $H_n(S^n \setminus \{x_i\}) = H_{n-1}(S^n \setminus \{x_i\}) = 0$ , och därmed följer det av exaktheten på följderna att  $j_x: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\})$  är en isomorfism.

- Därtill är  $j_y$  en isomorfism, vilket följer på samma sätt som ovan av att betrakta den exakta följderna för paret  $(S^n, S^n \setminus \{y\})$ .

Det gäller via ovanstående isomorfismer att alla av grupperna i diagrammet förutom den mittersta gruppen  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$  är isomorfa. För att konstruera dessa börjar vi med att välja en generator i gruppen  $H_n(S^n)$  och betecknar den 1. Vi ser att  $H_n(S^n) \cong H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  via isomorfismen  $j_x \circ i_x^{-1}$ . Dessutom betecknar vi  $j_x(1) = 1_x \in H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\})$  för generatoren i  $H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\})$  och  $1_{ux} = i_x^{-1}(j_x(1)) \in H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  för generatoren i  $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$ . Eftersom  $i_x$  induceras av en inklusion och  $j_x$  av en kvotavbildning är det naturligt att beteckna generatorerna med talet 1. Därtill slår vi för generatoren i  $H_n(S^n, S^n \setminus \{y\})$  fast beteckningen  $1_y = j_y(1) \in H_n(S^n, S^n \setminus \{y\})$ ; valet att beteckna generatoren med talet 1 är igen naturligt p.g.a. att  $j_y$  induceras av kvotavbildningen. Via dessa isomorfismer är både  $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  och  $H_n(S^n, S^n \setminus \{y\})$  isomorfa med  $\mathbb{Z}$ , alltså är  $f'_*$  en homomorfism  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , och därmed är den av formen  $f'_*(a) = d_i a$

för något  $d_i \in \mathbb{Z}$ . Detta tal  $d_i$  kallas den **lokala graden** av  $f$  vid punkten  $x_i$  och betecknas  $\deg f|_{x_i}$ . Vi märker att den lokala graden är väldefinierad eftersom talet  $d_i$  är entydigt p.g.a. valet på generatorerna.

Vi kan reducera gradberäkningar till beräkning av lokala grader med hjälp av nedanstående sats:

**Sats 4.12.** *Antag att  $f: S^n \rightarrow S^n$  är en kontinuerlig avbildning, och låt  $y \in S^n$  vara en punkt vars Urbild  $f^{-1}(y)$  består av en ändlig mängd punkter  $\{x_1, \dots, x_k\}$ . Då gäller det för graden på  $f$  att*

$$\deg f = \sum_{i=1}^k \deg f|_{x_i}.$$

*Bevis.* Vi visar först att det i diagrammet ovan gäller att  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \cong \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$ . Enligt bortskärningsaxiomet gäller det att  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \cong H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i (U_i \setminus \{x_i\}))$ . Detta ser vi genom att beteckna  $B = \mathbb{C}(\bigcup_i U_i)$ ; då gäller det att  $B = \bar{B} \subset S^n \setminus f^{-1}(y) = \text{int}(S^n \setminus f^{-1}(y))$ , och därmed följer det av bortskärningsaxiomet att

$$H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y)) \cong H_n(S^n \setminus B, (S^n \setminus f^{-1}(y)) \setminus B) = H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i (U_i \setminus \{x_i\})).$$

Isomorfismen  $H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i (U_i \setminus \{x_i\})) \cong \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$  ges av Sats 3.42 eftersom omgivningarna  $U_i$  är disjunkta. Eftersom det gäller att  $H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \cong \mathbb{Z}$  så är  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$  alltså en direkt summa av  $k$  kopior av  $\mathbb{Z}$ . Avbildningen  $k_i$  är inklusionen till den  $i$ :te termen av  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$  och avbildningen  $p_i$  är projektionen från den  $i$ :te termen av  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$ .

Vi konstaterade tidigare att alla grupper i diagrammet förutom den mittersta gruppen  $H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(y))$  är isomorfa med  $\mathbb{Z}$ . Därmed följer det av kommutativiteten av den lägre triangeln att  $p_i(j(1)) = j_x(1) = 1_x$ , alltså följer det att  $j(1) = (1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^k k_i(1)$ . Kommutativiteten av den övre högra triangeln ger sedan att

$$f'_*(k_i(1)) = f'_*(1) = \deg f|_{x_i},$$

alltså vidare att  $f''_*(\sum_{i=1}^k k_i(1)) = \sum_{i=1}^k \deg f|_{x_i}$ . Slutligen följer det av kommutativiteten av den lägre triangeln att

$$\deg f = f_*(1) = j_y(f_*(1)) = f''_*(j(1)) = f''_*(\sum_{i=1}^k k_i(1)) = \sum_{i=1}^k \deg f|_{x_i}.$$

□



**Exempel 4.13.** Ifall det existerar en punkt  $y \in S^n$  för vilken Urbilden  $f^{-1}(y)$  består av endast en punkt  $x$ , så gäller det att  $\deg f = \deg f|_x$ . Ifall  $f$  dessutom avbildar omgivningen  $U$  av  $x$  homeomorft in i omgivningen  $V$  av  $y$  så gäller det enligt Lemma 4.11 att  $\deg f = \pm 1$ .

**Exempel 4.14.** Ifall vi ser  $S^1$  som en delmängd av det komplexa planet  $\mathbb{C}$  kan vi definiera avbildningen  $f: S^1 \rightarrow S^1$ ,  $f(z) = z^k$  (vi använder alltså oss av multiplikation av komplexa tal). Denna avbildning har graden  $k$ : I fallet  $k = 0$  är detta klart eftersom  $f$  då är konstant, och därmed inte surjektiv. Dess grad är alltså 0 enligt Lemma 4.11.

Antag nu att  $k > 0$ . Vi märker att det för varje  $y \in S^1$  gäller att  $f^{-1}(y)$  består av  $k$  punkter  $x_1, \dots, x_k$ , och  $f$  är en lokal homeomorfism nära varje av dessa punkter eftersom den töljer ut cirkelbågen med en faktor  $k$ . Denna uttjning kan elimineras genom att lokalt trycka ihop området kring varje  $x_i$ , och denna deformation ändrar inte den lokala graden. Därmed är den lokala graden  $\deg f|_{x_i}$  den samma som för en rotation av  $S^1$ . En rotation är en homeomorfism, så dess grad är samma som den lokala graden vid vilken som helst punkt enligt föregående exempel, alltså gäller det att dess grad är 1 eftersom en rotation är homotopisk med den identiska avbildningen. Därmed gäller det att  $\deg f|_{x_i} = 1$  och att  $\deg f = k$ .

Påståendet för fallet  $k < 0$  följer genom att funktionssammansättningen  $-1 \circ f$ , där  $-1: S^1 \rightarrow S^1$  är avbildningen  $z \mapsto z^{-1}$  som har graden  $-1$  enligt Lemma 4.11.

För att kunna definiera cellulär homologi behöver vi ännu följande resultat om de singulära homologi grupperna för cellkomplex:

**Lemma 4.15.** *Låt  $X$  vara ett cellkomplex. Då gäller det att*

- 1)  $H_n(X^n, X^{n-1})$  är en fri abelsk grupp vars bas har lika många element som det finns  $n$ -celler i  $X$ . Därtill gäller det att  $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$  ifall  $k \neq n$ .
- 2)  $H_k(X^n) = 0$  för  $k > n$ . Speciellt gäller det att ifall  $X$  är av ändlig dimension så är  $H_k(X) = 0$  för alla  $k > \dim X$ .
- 3) Inklusionen  $i: X^n \hookrightarrow X$  inducerar en isomorfism  $i_*: H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$  ifall  $k < n$ .

*Bevis.* Vi bevisar lemmat endast för cellkomplex med ändlig dimension. Det fullständiga beviset för komplex med oändlig dimension finns i [2, Lemma 2.34].

- 1) Enligt Sats 4.7 är  $(X^n, X^{n-1})$  ett gott par, och  $X^n/X^{n-1}$  är en enpunktsunion av sfärer  $S^n$ , en för varje  $n$ -cell i  $X$ . Därmed följer resultatet av Följdsats 3.58 och av Sats 3.56.

2) Vi betraktar den långa exakta följderna av paret  $(X^n, X^{n-1})$ :

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n) \rightarrow H_k(X^n, X^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

Ifall  $k$  inte är  $n$  eller  $n-1$ , så är  $H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) = H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$  enligt föregående påstående, alltså följer det av exaktheten på följderna att  $H_k(X^{n-1}) \cong H_k(X^n)$ . Därmed ifall  $k > n$  så kan vi genom att induktivt upprepa ovanstående argument för paren  $(X^m, X^{m-1})$  där  $1 \leq m \leq n$  visa att  $H_k(X^n) \cong H_k(X^{n-1}) \cong \cdots \cong H_k(X^1) \cong H_k(X^0)$ . Eftersom  $X^0$  är en diskret mängd, så gäller det att  $H_k(X^0) = 0$ .

3) Genom att betrakta den långa exakta följderna av paret  $(X^n, X^{n-1})$  då  $k < n$  kan vi på motsvarande sätt som ovan visa att  $H_k(X^n) \cong H_k(X^{n+1}) \cong \cdots \cong H_k(X^{n+m})$  för alla  $m \in \mathbb{N}$ . Eftersom vi antog att  $X$  har ändlig dimension så gäller det att  $X = X^{n+m}$  för något  $m \in \mathbb{N}$ , alltså att  $H_k(X^n) \cong H_k(X)$  ifall  $k < n$ .

□

Vi kan med hjälp av ovanstående lemma definiera de cellulära homologi-grupperna för cellkomplexet  $X$  med hjälp av de långa exakta följderna för paren  $(X^{n+1}, X^n)$ ,  $(X^n, X^{n-1})$  och  $(X^{n-1}, X^{n-2})$ . Genom att kombinera följderna

(4.16)

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n(X^{n+1}) \rightarrow H_n(X^{n+1}, X^n) \rightarrow \cdots,$$

(4.17)

$$\cdots \rightarrow H_n(X^{n-1}) \rightarrow H_n(X^n) \xrightarrow{j_n} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \rightarrow \cdots$$

och

$$(4.18) \quad \cdots \rightarrow H_{n-1}(X^{n-2}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots$$

kan vi skapa följderna

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots,$$

där  $d_{n+1} = j_n \circ \delta_{n+1}$  och  $d_n = j_{n-1} \circ \delta_n$ . Denna följd är ett kedjekomplex eftersom

$$d_n \circ d_{n+1} = j_{n-1} \circ (\delta_n \circ j_n) \circ \delta_{n+1} = j_{n-1} \circ 0 \circ \delta_{n+1} = 0,$$

där det näst sista steget gäller p.g.a. exaktheten av följderna 4.17.

**Definition 4.19.** De **cellulära homologi**grupperna  $H_n^{CW}(X)$  för cellkomplexet  $X$  är homologi

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \xrightarrow{d_{n+1}} H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{d_n} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \rightarrow \cdots .$$

Ovanstående kedjekomplex kallas det **cellulära kedjekomplexet** för  $X$ .

Det fina med de cellulära homologi

**Sats 4.20.** För cellkomplexet  $X$  gäller det att  $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$  för alla  $n \in \mathbb{N}$ .

*Bevis.* Låt  $n \geq 0$  vara givet. Vi måste alltså visa att  $H_n(X) \cong \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$ . Vi noterar först att det i följd

$$\frac{H_n(X^n)}{\text{Im } \delta_{n+1}} \cong H_n(X).$$

4.17 gäller det enligt Lemma 4.15 att  $H_n(X^{n-1}) = 0$ , alltså är avbildningen  $j_n$  injektiv p.g.a. exaktheten. Därmed gäller det att  $j_n(\text{Im } \delta_{n+1}) \cong \text{Im } (j_n \circ \delta_{n+1}) = \text{Im } d_{n+1}$ . Dessutom avbildar  $j_n$  mängden  $H_n(X^n)$  isomorft på  $\text{Im } j_n = \text{Ker } \delta_n$ .

För följd

$$H_n(X) \cong \frac{H_n(X^n)}{\text{Im } \delta_{n+1}} \cong \frac{\text{Ker } \delta_n}{\text{Im } d_{n+1}} \cong \frac{\text{Ker } d_n}{\text{Im } d_{n+1}} \cong H_n^{CW}(X).$$

□

**Följdsats 4.21.** För homologi

- 1)  $H_n(X) = 0$  ifall  $X$  inte har några  $n$ -celler.
- 2)  $H_n(X)$  genereras av högst lika många element som det finns  $n$ -celler i  $X$  (ifall antalet  $n$ -celler är ändligt).

3) Ifall  $X$  inte har några celler i varken dimensionen  $n-1$  eller dimensionen  $n+1$  så gäller det att  $H_n(X)$  är en fri abelsk grupp vars bas har lika många element som det finns  $n$ -celler i  $X$ .

*Bevis.* 1) Ifall  $X$  inte har några  $n$ -celler så är  $H_n(X^n, X^{n-1}) = 0$  enligt Lemma 4.15, alltså måste även  $H_n(X) = \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1}$  vara trivial.

2) Antag att  $X$  har  $k$  stycken  $n$ -celler. Enligt Lemma 4.15 är  $H_n(X^n, X^{n-1})$  en fri abelsk grupp som genereras av  $k$  element. Därmed kan delgruppen  $\text{Ker } d_n$  genereras av högst  $k$  element, och naturligtvis gäller det samma för kvotgruppen  $\text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} \cong H_n(X)$ .

3) Ifall  $X$  saknar celler i dimensionerna  $n-1$  och  $n+1$  så kommer randavbildningarna  $d_n$  och  $d_{n+1}$  att vara triviala, och därmed gäller det att  $H_n(X) \cong \text{Ker } d_n / \text{Im } d_{n+1} = H_n(X^n, X^{n-1})/0 = H_n(X^n, X^{n-1})$ . Resultatet följer då igen av Lemma 4.15.

□

**Exempel 4.22.** Vi beräknar med hjälp av ovanstående följsats homologi-grupperna för  $S^n \times S^n$  ifall  $n > 1$ . I Exempel 4.9 konstaterade vi att  $S^n \times S^n$  har en 0-cella, två  $n$ -celler och en  $2n$ -cell. Därmed ifall  $n > 1$  har dimensionerna  $n-1$  och  $n+1$  samt  $2n-1$  och  $2n+1$  inga celler, alltså gäller det att  $H_n(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  och  $H_{2n}(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Eftersom  $n > 1$  har komplexet inga 1-celler varav det följer att  $H_0(S^n \times S^n) \cong \mathbb{Z}$ . Därmed är homologi-grupperna

$$H_k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{om } k = 0 \text{ eller } 2n, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{om } k = n, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Allmänt kan man beskriva randavbildningen  $d_n$  för det cellulära kedjekomplexet på följande sätt:

**Sats 4.23.** Randavbildningen  $d_n: H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  för det cellulära kedjekomplexet avbildar  $n$ -celler  $\varepsilon_k^n$  på följande sätt:

- $n = 1$ :  $d_1(\varepsilon_k^1) = \varepsilon_{\phi_k(1)}^0 - \varepsilon_{\phi_k(0)}^0$ .
- $n > 1$ :  $d_n(\varepsilon_k^n) = \sum_l d_{kl} \varepsilon_l^{n-1}$ , där  $d_{kl}$  är graden på avbildningen  $S_k^{n-1} \xrightarrow{\phi_k} X^{n-1} \xrightarrow{q_l} S_l^{n-1}$ . I kompositionen är  $\phi_k$  den avbildning som fäster  $n$ -cellen  $\varepsilon_k^n$  till  $X^{n-1}$ , medan  $q_l$  är kvotavbildningen som kollapsar  $X^{n-1} \setminus \varepsilon_l^{n-1}$  till en punkt. Summan  $\sum_l$  löper över alla  $(n-1)$ -celler som möts av bilden av den fästade avbildningen  $\phi_k$  av cellen  $\varepsilon_k^n$ .

Vi identifierar här cellerna  $\varepsilon_k^n$  och  $\varepsilon_l^{n-1}$  med generatorer för motsvarande fria abelska grupperna  $H_n(X^n, X^{n-1})$  och  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  i det cellulära kedjekomplexet. Eftersom  $d_n$  är en homomorfism beskriver detta funktionen entydigt. I fallet  $n = 1$  motsvarar cellerna  $\varepsilon_{\phi_k(1)}^0$  och  $\varepsilon_{\phi_k(0)}^0$  generatorer i gruppen  $H_0(X^0, X^{-1}) = H_0(X^0)$ , ty  $X^{-1} = \emptyset$ .

*Bevis.* Vi noterar först att eftersom bilden på avbildningen  $\phi_k$  som fäster cellen  $\varepsilon_k^n$  är kompakt (p.g.a. att  $S^{n-1}$  är kompakt), så möter den endast ändligt många  $(n-1)$ -celler  $\varepsilon_l^{n-1}$  ([2, Prop. A.1]). Därmed är summan  $\sum d_{kl}\varepsilon_l^{n-1}$  ändlig.

Låt oss nu betrakta det kommuterande diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
H_n(\bar{B}_k^n, S_k^{n-1}) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{H}_{n-1}(S_k^{n-1}) & \xrightarrow{\Delta_{kl*}} & \tilde{H}_{n-1}(S_l^{n-1}) \\
\downarrow \Phi_{k*} & & \downarrow \phi_{k*} & & \uparrow q_{l*} \\
H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\delta'} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\
& \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & \swarrow f & \\
& & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & & 
\end{array}$$

som innehåller följande avbildningar:

- $\Phi_{k*}$  induceras av karakteristiska avbildningen  $\Phi_k$  för cellen  $\varepsilon_k^n$ , medan  $\phi_{k*}$  induceras av den fästade avbildningen  $\phi_k$  för  $\varepsilon_k^n$ .
- $\delta$  och  $\delta'$  är randavbildningar i den långa exakta följderna för reducerade homologigrupper för paren  $(\bar{B}_k^n, S_k^{n-1})$  och  $(X^n, X^{n-1})$ . Dessutom är avbildningen  $\delta$  en isomorfism; detta följer av att homologigrupperna för  $\bar{B}_k^n$  är triviala.
- $j_{n-1}$  är en avbildning i den långa exakta följderna för reducerade homologigrupper för paret  $(X^{n-1}, X^{n-2})$ .
- $q_*$  induceras av kvotavbildningen  $q: X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ .
- $q_{l*}$  induceras av avbildningen  $q_l: X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow S_l^{n-1}$  som kollapsar mängden  $X^{n-1} \setminus \varepsilon_l^{n-1}$  till en punkt. Det resulterande kvotrummet  $X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus \varepsilon_l^{n-1})$  bildar då en sfär  $S^{n-1}$  (på motsvarande sätt som konstruktionen  $S^{n-1} = \bar{B}^{n-1}/S^{n-2}$ ) som identifieras med  $S_l^{n-1}$  via den karakteristiska avbildningen  $\Phi_l$ .
- Avbildningen  $f$  är isomorfismen som konstrueras i beviset av Sats 3.55.

- Slutligen induceras avbildningen  $\Delta_{kl*}$  av avbildningen  $\Delta_{kl} = q_l \circ q \circ \phi_k$ .  $\Delta_{kl}$  är alltså kompositionen  $S_k^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow S_l^{n-1}$  som nämnades i satsen.

Avbildningen  $\Phi_{k*}$  tar generatoren  $x \in H_n(\bar{B}_k^n, S_k^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  till generatoren av den kopian av  $\mathbb{Z}$  i  $H_n(X^n, X^{n-1})$  som motsvarar cellen  $\varepsilon_k^n$ . För enkelhetens skull betecknar vi denna generator med  $\varepsilon_k^n$ , dvs.  $\Phi_{k*}(x) = \varepsilon_k^n$ . Med dessa beteckningar följer det alltså av kommutativiteten av den vänstra halvan av diagrammet att  $d_n(\varepsilon_k^n) = j_{n-1}(\phi_{k*}(\delta(x))) \in H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ . Ifall vi identifierar generatorerna av kopiorna på  $\mathbb{Z}$  i  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$  med  $(n-1)$ -cellerna  $\varepsilon_l^{n-1}$  så kan vi skriva

$$d_n(\varepsilon_k^n) = j_{n-1}(\phi_{k*}(\delta(x))) = \sum a_l \varepsilon_l^{n-1},$$

där summan löper över de  $(n-1)$ -celler som möter bilden av  $\varepsilon_k^n$  i avbildningen  $\phi_{k*}$ . Vi vet inte ännu något om koefficienterna  $a_l$ ; vi tar i bruk denna summabeteckning endast för att göra de påföljande stegen av beviset klarare.

Kommutativiteten av den nedre högra triangeln av diagrammet ger  $j_{n-1} = f \circ q_*$ , alltså får vi att  $j_{n-1}(\phi_{k*}(\delta(x))) = f(q_*(\phi_{k*}(\delta(x))))$ . Eftersom  $f$  är en isomorfism kan vi identifiera varje element  $\varepsilon_l^{n-1}$  i summan  $\sum a_l \varepsilon_l^{n-1}$  med motsvarande element i gruppen  $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$ ; vi betecknar dessa element på samma sätt som elementen i  $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$ .

Avbildningen  $q_{l*}$  är en projektion av  $\tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2})$  på den kopian av  $\mathbb{Z}$  som motsvarar  $(n-1)$ -cellen  $\varepsilon_l^{n-1}$ . Därmed kan vi identifiera  $q_{l*}(\varepsilon_l^{n-1})$  med  $\varepsilon_l^{n-1}$ , medan det för övriga  $(n-1)$ -celler  $\varepsilon_m^{n-1}$  gäller att  $q_{l*}(\varepsilon_m^{n-1}) = 0$ . Därmed gäller det för varje  $(n-1)$ -simplex  $\varepsilon_l^{n-1}$  att

$$a_l \varepsilon_l^{n-1} = q_{l*}(q_*(\phi_{k*}(\delta(x)))) = (q_{l*} \circ q_* \circ \phi_{k*})(\delta(x)),$$

alltså fås varje koefficient  $a_l$  som graden för avbildningen  $q_{l*} \circ q_* \circ \phi_{k*} = \Delta_{kl*}$ , vilket ger oss formeln vi skulle bevisa.  $\square$

### 4.3 Beräkning av homologigrupper

I detta stycke använder vi de verktyg som presenterades i föregående stycke för att beräkna homologigrupperna för en del av de cellkomplex som definierades i början av detta kapitel.

**Exempel 4.24.** Vi börjar med att beräkna de cellulära homologigrupperna för  $S^n$  med cellstrukturen som gavs i Exempel 4.8d, dvs. den struktur som har två  $k$ -celler för alla  $0 \leq k \leq n$ . Vi gör detta för att demonstrera att

homologigrupperna för ett rum inte beror på cellstrukturen; detta följer av Sats 4.20.

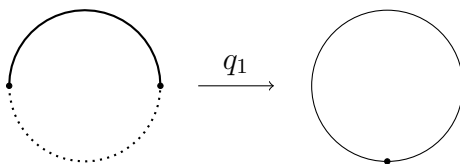
Vi märker direkt att  $H_k(S^n) = 0$  för alla  $k > n$  eftersom dessa dimensioner inte har några celler. För att bestämma de övriga homologigrupperna låter vi nu  $1 < k \leq n$  vara godtyckligt. Cellstrukturen vi valde innehåller två  $k$ -celler varav den ena bildar det norra halvklotet och den andra det södra halvklotet. Vi betecknar dessa med  $\varepsilon_1^k$  och  $\varepsilon_2^k$ . Eftersom  $(k-1)$ -skelettet i detta fall är  $S^{k-1}$  så kan vi definiera de fästade avbildningarna  $\phi_1, \phi_2: S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$  att vara den identiska avbildningen. Eftersom de fästade avbildningarna är lika gäller det alltså att  $d_k(\varepsilon_1^k) = d_k(\varepsilon_2^k)$ . Det räcker alltså att bestämma koefficienterna i summan

$$d_k(\varepsilon_1^k) = d_{11}\varepsilon_1^{k-1} + d_{12}\varepsilon_2^{k-1},$$

där  $\varepsilon_1^{k-1}$  och  $\varepsilon_2^{k-1}$  är  $(k-1)$ -cellerna som bildar norra och södra halvklotet av  $S^{k-1}$  och koefficienterna  $d_{11}$  samt  $d_{12}$  fås som graderna för avbildningarna

$$S^{k-1} \xrightarrow{id} S^{k-1} \xrightarrow{q_1} S^{k-1} \text{ samt } S^{k-1} \xrightarrow{id} S^{k-1} \xrightarrow{q_2} S^{k-1}.$$

Vi noterar först att avbildningen  $q_2$  fås med hjälp av en reflexion från avbildningen  $q_1$  eftersom den ena fäller samman norra halvklotet till en punkt medan den andra fäller samman södra halvklotet till en punkt. Därmed gäller det enligt Lemma 4.11 att  $\deg q_2 = -\deg q_1$ . Eftersom  $d_{11}$  är graden av  $q_1 \circ id$  och  $d_{12}$  är graden av  $q_2 \circ id$  så gäller det att  $d_{11} = -d_{12}$ . Vi mär-



Avbildningen  $q_1$  som kollapsar den södra halvan (ritad som punkter) av  $S^1$  till en punkt

ker dessutom att avbildningen  $q_1$  avbildar punkter i det norra halvklotet på sig själv, alltså hittar vi en punkt  $y \in S^{k-1}$  för vilken det gäller att  $q_1^{-1}(y)$  består av en punkt  $x$ , och dessutom har  $x$  en omgivning  $U$  som  $q_1$  avbildar homeomorft. Därmed är graden för  $q_1$  (dvs. graden för  $d_{11}$ ) samma som dess lokala grad vid punkten  $x$ , och den lokala graden är  $\pm 1$  enligt Lemma 4.11. Det gäller alltså att  $d_{11} = \pm 1$  och att  $d_{12} = -d_{11}$ ; p.g.a. symmetrin kan vi beteckna  $d_{11} = 1$  och  $d_{12} = -1$ . Det gäller alltså att

$$d_k(\varepsilon_1^k) = d_k(\varepsilon_2^k) = \varepsilon_1^{k-1} - \varepsilon_2^{k-1},$$

och för ett godtyckligt element i  $H_k(X^k, X^{k-1})$  gäller det då att

$$d_k(a\varepsilon_1^k + b\varepsilon_2^k) = ad_k(\varepsilon_1^k) + bd_k(\varepsilon_2^k) = (a+b)(\varepsilon_1^{k-1} - \varepsilon_2^{k-1}).$$

Ifall vi använder oss av att  $H_l(X^l, X^{l-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  för alla  $0 \leq l \leq n$  och tänker cellerna som generatorer för kopiorna av  $\mathbb{Z}$  så kan vi beteckna resultatet ovan som

$$d_k(a, b) = (a+b, -(a+b)).$$

Av detta ser vi att

$$\text{Ker } d_k = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \text{ och att } \text{Im } d_k = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

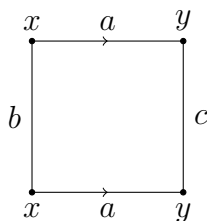
Eftersom  $1 < k \leq n$  valdes godtyckligt så följer det att  $\text{Ker } d_k = \text{Im } d_{k+1}$  ifall  $1 < k < n$ , alltså gäller det att  $H_k(S^n) = 0$  för alla  $1 < k < n$ .

I fallet  $k = n$  gäller det att  $\text{Im } d_{n+1} = 0$  eftersom det inte existerar några  $(n+1)$ -celler, alltså gäller det att  $H_n(S^n) \cong \text{Ker } d_n \cong \mathbb{Z}$  via isomorfismen  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Ker } d_k, f(x) = (x, -x)$ .

Ifall  $k = 1$  så är  $d_1(\varepsilon_1^1) = d_1(\varepsilon_2^1) = \varepsilon_1^0 - \varepsilon_2^0$ , alltså gäller det att  $\text{Ker } d_1 = \text{Im } d_2$ , dvs. att  $H_1(S^n) = 0$  ifall  $n > 1$ .

Slutligen gäller det för den nollte homologigruppen att  $H_0(S^n) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \text{Im } d_1 = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) / \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ , utom i fallet  $S^0$  då  $\text{Im } d_1 = 0$  och det gäller därmed att  $H_0(S^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

**Exempel 4.25.** Vi beräknar de cellulära homologigrupperna för cylindern  $X = S^1 \times I$ . Cylindern kan konstrueras på följande sätt som redan presenterades i början av detta kapitel:



Cylindern har alltså två 0-celler  $x$  och  $y$ , tre 1-celler  $a$ ,  $b$  och  $c$  samt en 2-cell som vi betecknar med  $t$ . Vi ser alltså direkt att  $H_k(S^1 \times I) = 0$  för alla  $k > 2$ . För att bestämma de övriga homologigrupperna analyserar vi randavbildningarna  $d_1$  och  $d_2$ . För  $d_1$  gäller det att

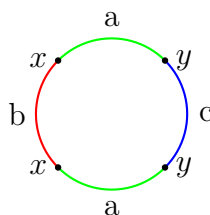
$$\begin{aligned} d_1(a) &= y - x, \\ d_1(b) &= x - x = 0, \text{ och} \\ d_1(c) &= y - y = 0. \end{aligned}$$



Därmed gäller det att  $\text{Ker } d_1 = \{(0, n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$  och att  $\text{Im } d_1 = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Detta betyder att

$$H_0(S^1 \times I) = \frac{\text{Ker } d_0}{\text{Im } d_1} = \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}\}} \cong \mathbb{Z}.$$

Vi betraktar nu avbildningen  $d_2$  med hjälp av följande bild:



Randen  $S^1$  på 2-cellen  $t$  uppdelad i 1-cellerna  $a, b$  och  $c$

Vi betecknar med  $q_a, q_b$  och  $q_c$  avbildningarna som kollapsar allt i 1-skelettet förutom  $a, b$  och  $c$  till en punkt. Från figuren ovan ser vi då att vi får avbildningen  $S^1 \xrightarrow{\phi_t} X^1 \xrightarrow{q_b} S^1$  från avbildningen  $S^{m-1} \xrightarrow{\phi_t} X^1 \xrightarrow{q_c} S^1$  via en spegling av cirkeln. Enligt Lemma 4.11 har en spegling graden  $-1$ , och därmed gäller det att  $\deg q_b \circ \phi_t = -\deg q_c \circ \phi_t$ . Dessutom ser vi att kompositionen  $q_b \circ \phi_t$  har en punkt  $y \in S^1$  (på högra delen av cirkeln) som har endast en punkt  $x$  i sin Urbild, och avbildningen är en lokal homeomorfism kring  $x$ . Detta betyder att  $\deg q_b \circ \phi_t = \pm 1$ , och därmed att  $d_{tb} = \pm 1$  och att  $d_{tc} = -d_{tb}$ ; p.g.a. symmetrin kan vi beteckna  $d_{tb} = 1$  och  $d_{tc} = -1$ .

För att beräkna koefficienten  $d_{ta}$ , dvs. graden för avbildningen  $q_a \circ \phi_t$  så märker vi att t.ex. nordpolen  $y = (0, 1) \in S^1$  har en Urbild  $(q_a \circ \phi_t)^{-1}(y)$  som består av två punkter  $x_1$  och  $x_2$  varav den ena ligger på norra sidan av ekvatorn och den andra på södra sidan av ekvatorn. Båda av dessa punkterna har en omgivning i vilken  $q_a \circ \phi_t$  är en lokal homeomorfism, alltså gäller det för lokala graderna att  $\deg (q_a \circ \phi_t)|_{x_i} = \pm 1$  för  $i \in \{1, 2\}$ . Vi märker även att den ena lokala avbildningen fås av den andra via en reflexion av  $S^1$  som byter plats på norra och södra halvcirkeln; därmed gäller det att  $\deg (q_a \circ \phi_t)|_{x_1} = \pm 1$  och att  $\deg (q_a \circ \phi_t)|_{x_2} = -\deg (q_a \circ \phi_t)|_{x_1}$ . Det följer alltså av Sats 4.12 att  $d_{ta} = \deg q_a \circ \phi_t = 1 - 1 = 0$ .

Med hjälp av ovanstående beräkningar ser vi att det för avbildningen  $d_2$  gäller att  $d_2(t) = d_{ta}a + d_{tb}b + d_{tc}c = b - c$ , alltså gäller det att  $\text{Ker } d_2 = 0$

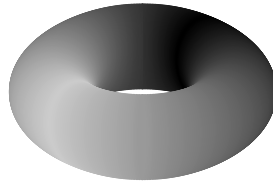
och att  $\text{Im } d_2 = \{(0, n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Av detta följer det slutligen att

$$H_2(S^1 \times I) = \frac{\text{Ker } d_2}{\text{Im } d_3} = \frac{0}{0} = 0 \quad \text{och att}$$

$$H_1(S^1 \times I) = \frac{\text{Ker } d_1}{\text{Im } d_2} = \frac{\{(0, n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}}{\{(0, n, -n) \mid n \in \mathbb{Z}\}} \cong \mathbb{Z}.$$

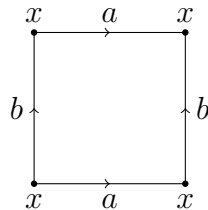
Det gäller alltså att  $H_k(S^1 \times I) \cong \mathbb{Z}$  om  $k = 0, 1$  och  $H_k(S^1 \times I) = 0$  ifall  $k > 2$ .

**Exempel 4.26.** I Exempel 4.22 beräknade vi homologi-grupperna för produktrummet  $S^n \times S^n$  för alla  $n > 1$ . För att komplettera detta exempel beräknar vi nu homologi-grupperna för  $S^1 \times S^1$ , dvs. för torusen:



Toruset  $S^1 \times S^1$

Ett välkänt sätt att bygga upp toruset  $S^1 \times S^1$  är att identifiera motsatta sidorna på en kvadrat med varandra:

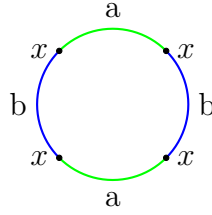


Cellstrukturen för  $X = S^1 \times S^1$  har därmed en 0-cell  $x$ , två 1-celler  $a$  och  $b$  samt en 2-cell som vi betecknar med  $t$ . Därmed gäller det att  $H_k(S^1 \times S^1) = 0$  för alla  $k > 2$ , och det räcker att undersöka randavbildningarna  $d_1$  och  $d_2$ . Eftersom det i komplexet finns endast en 0-cell  $x$ , så gäller det att

$$d_1(a) = x - x = 0, \quad \text{och}$$

$$d_1(b) = x - x = 0.$$

Randavbildningen  $d_1$  är alltså trivial, och därmed gäller det att  $\text{Im } d_1 = 0$  och att  $\text{Ker } d_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , alltså följer det att  $H_0(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}/\text{Im } d_1 \cong \mathbb{Z}$ .



Randen  $S^1$  på 2-cellen  $t$  uppdelad i 1-cellerna  $a$  och  $b$

För att undersöka randavbildningen  $d_2$  så betecknar vi såsom i föregående exempel med  $q_a$  och  $q_b$  avbildningarna som kollapsar allt i 1-skelettet förutom  $a$  och  $b$  till en punkt, och märker att avbildningen  $q_a$  i detta exempel motsvarar avbildningen  $q_a$  i föregående exempel där vi beräknade homologi-grupperna för cylindern  $S^1 \times I$ . Vi kan alltså igen beräkna koefficienten  $d_{ta}$ , dvs. graden för avbildningen  $q_a \circ \phi_t$  som summan av två lokala grader som är motsatta, alltså gäller det att  $d_{ta} = 1 - 1 = 0$ . På motsvarande sätt kan vi beräkna koefficienten  $d_{tb}$  som summan av två lokala grader  $q_b \circ \phi_t|_{x_1}$  och  $q_b \circ \phi_t|_{x_2}$ . Den ena fås igen via en spegling av den andra, alltså är de lokala graderna motsatta och det följer att  $d_{tb} = 0$ . Detta betyder att även avbildningen  $d_2$  är trivial, alltså följer det att  $\text{Ker } d_2 = \mathbb{Z}$  och att  $\text{Im } d_2 = 0$ . Därmed gäller det att

$$H_2(S^1 \times S^1) = \frac{\text{Ker } d_2}{\text{Im } d_3} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z} \quad \text{och att}$$

$$H_1(S^1 \times S^1) = \frac{\text{Ker } d_1}{\text{Im } d_2} \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

För torusen  $S^1 \times S^1$  gäller alltså att  $H_k(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}$  ifall  $k = 0, 2$ ,  $H_k(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  om  $k = 1$  och  $H_k(S^1 \times S^1) = 0$  ifall  $k > 2$ . Därmed gäller resultatet vi kom fram till i Exempel 4.22 även i fallet  $n = 1$ , alltså kan vi sammanställa resultaten från dessa två exempel: För alla  $n \geq 1$  gäller det att

$$H_k(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{om } k = 0 \text{ eller } 2n, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{om } k = n, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Detta exempel demonstrerar även det allmänna resultatet att ifall alla randavbildningar i ett kedjekomplex är triviala, så kommer dess homologi-grupper att vara isomorfa med grupperna  $S_n$  i kedjekomplexet för alla  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Exempel 4.27.** I Exempel 4.8e definierade vi en cellstruktur för det reella projektiva rummet  $\mathbb{R}P^n$ . Denna cellstruktur innehåller en  $k$ -cell för varje  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , vilket betyder att grupperna  $H_k(X^k, X^{k-1})$  i det cellulära

kedjekomplexet är isomorfa med  $\mathbb{Z}$  för alla  $0 \leq k \leq n$ . Den fästade avbildningen för cellen  $\varepsilon^k$  är avbildningen  $\phi: S^{k-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{k-1}$  som identifierar antipodalpunkterna på  $S^{k-1}$ . För att bestämma avbildningen  $d_k$  så måste vi därmed bestämma graden på avbildningen

$$S^{k-1} \xrightarrow{\phi} \mathbb{RP}^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2} = S^{k-1},$$

där  $q$  är kvotavbildningen som fäller samman  $\mathbb{RP}^{k-2}$  till en punkt. Ifall vi väljer en punkt  $y \in \mathbb{RP}^{k-1}/\mathbb{RP}^{k-2}$  så märker vi att Urbilden  $(q \circ \phi)^{-1}(y)$  består av två punkter  $x_+$  och  $x_-$ . Den ena punkten ligger i det norra halvklotet  $S_+^{k-1}$  av  $S^{k-1}$  och den andra i det södra halvklotet  $S_-^{k-1}$  av  $S^{k-1}$ . Vi ser även att avbildningen  $q \circ \phi$  är en homeomorfism med graden 1 ifall vi begränsar den till  $S_+^{k-1}$  eller  $S_-^{k-1}$ , och den ena homeomorfismen kan omvandlas till den andra via antipodalavbildningen av  $S^{k-1}$  som har graden  $(-1)^k$ . Därmed fås graden av  $q \circ \phi$  som summan av de lokala graderna  $(q \circ \phi)|_{x_+}$  och  $(q \circ \phi)|_{x_-}$ , dvs.

$$\deg q \circ \phi = \deg (q \circ \phi)|_{x_+} + \deg (q \circ \phi)|_{x_-} = 1 + (-1)^k.$$

Graden är alltså 0 om  $k$  är udda och 2 ifall  $k$  är jämnt, vilket betyder att  $d_k(\varepsilon^k) = 0$  om  $k$  är udda och  $d_k(\varepsilon^k) = 2\varepsilon^{k-1}$  ifall  $k$  är jämnt. Detta betyder att det cellulära kedjekomplexet av  $\mathbb{RP}^n$  är

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ifall  $n$  är udda, och

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \dots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ifall  $n$  är jämnt. Ifall  $k < n$  och  $k$  är udda så följer det att

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k+1}} = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_2,$$

och om  $k = n$  och  $n$  är udda så får vi

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k+1}} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}.$$

Om  $0 < k \leq n$  och  $k$  är jämnt så gäller det att

$$H_k(\mathbb{RP}^n) = \frac{\text{Ker } d_k}{\text{Im } d_{k+1}} = \frac{0}{0} = 0.$$

I fallet  $k = 0$  gäller det att

$$H_0(\mathbb{R}P^n) = \frac{\text{Ker } d_0}{\text{Im } d_1} = \frac{\mathbb{Z}}{0} = \mathbb{Z}.$$

Genom att slå samman dessa resultat får vi slutligen att

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{om } k = 0 \text{ eller } k = n \text{ udda,} \\ \mathbb{Z}_2, & \text{om } 0 < k < n \text{ och } k \text{ udda,} \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

# Beteckningar

$X \approx Y$	homeomorfa rum
$G \cong H$	isomorfa grupper
$f \simeq g$	homotopiska funktioner
$\alpha \sim \beta$	stighomotopi
$X \simeq Y$	homotopiekvivalenta rum
$i: A \hookrightarrow X$	inklusionsavbildning
$c_{x_0}$	konstant avbildning $c: x \mapsto x_0$
$f _A$	begränsning av $f$ till mängden $A$
$\bar{A}$	slutna höljet av $A$
$\text{int}(A)$	mängden av innerpunkter av $A$
$\partial A$	randen av $A$
$X \sqcup Y$	disjunkta unionen av $X$ och $Y$
$X \vee Y$	enpunktsunionen av $X$ och $Y$
$X \setminus A$	element som tillhör $X$ men inte $A$
$X/A$	kvotrummet där $A$ är en punkt
$\text{Ker } f$	kärnan av homomorfismen $f$
$\text{Im } f$	bilden av homomorfismen $f$
$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid  x  = 1\}$	enhetssfären
$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid  x  < 1\}$	öppna enhetsskivan
$\bar{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid  x  \leq 1\}$	slutna enhetsskivan
$I = [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$	enhetsintervallet

# Litteraturförteckning

- [1] Rotman, Joseph J. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer, 1988.
- [2] Hatcher, Allen *Algebraic Topology*. Cambridge University press, 2002.
- [3] Väisälä, Jussi *Topologia II*. Limes ry, 2005.
- [4] Spanier, Edwin *Algebraic Topology*. McGraw-Hill, 1966.