

Lisensiaatintutkimus

---

# BLD-kuvausten rajakäyttäytymisestä ja haarajoukoista.

---

Rami Luisto  
21. toukokuuta 2014

## Tiivistelmä

Työssä käsitellään geometrinen monistojen välisten BLD-kuvausten perusominaisuuksia. Erityisen mielenkiinnon kohteina ovat BLD-kuvausten rajakäyttäytyminen sekä siitä seuraavat haarajoukon komplementin säännöllisyysominaisuudet. Työn päätulos on  $L$ -BLD-kuvausten lokaalisti tasaisen rajan osoittaminen  $L$ -BLD-kuvaukseksi topologis-metrisillä tekniikoilla.

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos



|  |  |                                       |   |
|--|--|---------------------------------------|---|
| Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty   |  | Laitos — Institution — Department     |   |
| Matemaattis-luonnontieteellinen  |  | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |   |
| Tekijä — Författare — Author   |  |                                       |   |
| Rami Luisto  |  |                                       |   |
| Työn nimi — Arbetets titel — Title   |  |                                       |   |
| BLD-kuvausten rajakäyttäytymisestä ja haarajoukoista.  |  |                                       |   |
| Oppiaine — Läroämne — Subject  |  |                                       |   |
| Matematiikka   |  |                                       |   |
| Työn laji — Arbetets art — Level   |  | Aika — Datum — Month and year         | Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages |
| Lisensiaatintyö  |  | Toukokuu 2014                         | 46 s.                                   |
| Tiivistelmä — Referat — Abstract   |  |                                       |   |
| <p>Tässä työssä tutkitaan BLD-kuvausten rajakäyttäytymistä metrisillä tekniikoilla, ja näin saaduilla tuloksilla todistetaan rajoitteita BLD-kuvausten haarajoukon rakenteelle. BLD-kuvaukset määriteltiin vuonna 1988 kvasisäännöllisten kuvausten erikoistapauksena Euklidisten avaruuksien välillä (Martio-Väisälä). Koska BLD-kuvaukset ovat luonnollinen kuvausluokka ja ne voidaan määrittellä varsin yleisessä tilanteessa esimerkiksi kvasisäännöllisiin kuvauksiin verrattuna, on BLD-kuvauksia tutkittu viime vuosina erityisesti yleistettyjen monistojen yhteydessä.</p> <p><b>Määritelmä.</b> Olkoot <math>X</math> ja <math>Y</math> metrisiä avaruuksia sekä <math>L \geq 1</math>. Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus <math>f: X \rightarrow Y</math> on <math>L</math>-BLD-kuvaus, mikäli kaikille jatkuville poluille <math>\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}</math> pätee</p> $L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha).$ <p>BLD-kuvauksilla on paljon samoja ominaisuuksia kuin kvasisäännöllisillä kuvauksilla, mutta jotkin todistukset nojaavat kvasisäännöllisten kuvauksien yhteydessä sovellettavissa oleviin analyttisiin tuloksiin. Tämän johdosta tässä työssä tutkitaan mitkä BLD-kuvausten ominaisuuksista voidaan todistaa metrisin menetelmin. Tämän työn päätuloksena on todistaa seuraava BLD-kuvausten kompaktiusominaisuus topologis-metrisillä tekniikoilla.</p> <p><b>Lause.</b> <i>Kokoelma <math>\{f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f(0) = 0, f \text{ on } L\text{-BLD}\}</math> on normaaliperhe ja sisältää rajakuvauksensa lokaalisti tasaisen suppenemisen suhteen.</i></p> <p>Kuvauksen haarajoukoksi kutsutaan sitä lähtöjoukon osajoukkoa, jossa kuvaus ei ole lokaali homeomorfismi. BLD-kuvaukset ovat topologisesti haarautuvia peitekuvauksia, ja tunnettu Černavskiin-Väisälän lause 60-luvulta sanoo, että tällaisilla kuvauksilla haarajoukko on topologisesti pieni. Tämän lauseen todistus käydään työssä tarkasti lävitse. Todistus hyödyntää topologista indeksteoriaa, joka puolestaan nojaa kompaktisti kannettuun Alexander-Spanier-kohomologiaan, joiden perusominaisuudet käydään työssä lävitse. Työn päätuloksen avulla saadaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementille seuraava tulos.</p> <p><b>Lause.</b> <i>Olkoot <math>\mathcal{M}</math> ja <math>\mathcal{N}</math> Riemannin monistoja, joiden Ricci-kaarevuus on rajoitettu, sekä <math>f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}</math> BLD-kuvaus. Tällöin kuvauksen <math>f</math> haarajoukon komplementti on kvasikonvekksi alue.</i></p> |  |                                       |   |
| Avainsanat — Nyckelord — Keywords  |  |                                       |   |
| Metriinen geometria, Riemannin geometria, BLD-kuvaukset, topologinen aste, haarajoukko   |  |                                       |   |
| Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited  |  |                                       |   |
| Kumpulan tiedekirjasto   |  |                                       |   |
| Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information  |  |                                       |   |

*Annelle*

## Sisältö

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Johdanto</b>   | <b>6</b>  |
| <b>2 Perusmääritelmät ja -käsitteet</b>                         | <b>7</b>  |
| 2.1 Metriset avaruudet ja polkumetriikka . . . . .              | 8         |
| 2.2 Tärkeimpiä kuvaustyyppejä . . . . .                         | 9         |
| 2.2.1 Haarautuvat peitekuvaukset . . . . .                      | 9         |
| 2.2.2 Lipschitz tekijä -kuvaukset . . . . .                     | 10        |
| 2.2.3 Rajoitetun pituusvääristymän kuvaukset . . . . .          | 11        |
| <b>3 Kohomologia, suunnistus ja indeksit</b>                    | <b>12</b> |
| 3.1 Aleksander-Spanier -kohomologia . . . . .                   | 12        |
| 3.2 Indusoidut kuvaukset . . . . .                              | 15        |
| 3.3 Monistojen kohomologia sekä -suunnistus . . . . .           | 18        |
| 3.4 Topologinen aste sekä -indeksi . . . . .                    | 19        |
| <b>4 Haarautuvien peitekuvausten perusominaisuuksista</b>       | <b>26</b> |
| 4.1 Haarajoukon topologisista ominaisuuksista . . . . .         | 26        |
| 4.2 Haarautuvan peitekuvauksen topologisesta asteesta . . . . . | 31        |
| 4.3 Polkujen nostaminen . . . . .                               | 32        |
| <b>5 Konvergenssituloksia</b>                                   | <b>33</b> |
| 5.1 LQ- ja BLD-kuvausten konvergenssista . . . . .              | 36        |
| 5.2 Haarajoukon komplementin geometria . . . . .                | 40        |
| <b>Viitteet</b>   | <b>44</b> |

## Kiitokset

Haluan ilmaista kiitokseni ohjaajalleni dosentti Pekka Pankalle tuesta ja ohjauksesta, sekä mahdollisuudesta työskennellä keväällä 2012 Yhdysvalloissa, jossa työ on huomattavin osin valmistunut. Kiitän myös Purdue Universityä, University of Illinois at Urbana-Champaignia, sekä University of Michigania vieraanvaraisuudesta matkan aikana. Tahdon myös kiittää professoreita David Drasin, Aimo Hinkkanen, Robert Kaufman, Kai Rajala ja Jang-Mei Wu perheineen heidän osoittamastaan ystävällisyydestä ja vieraanvaraisuudesta matkan aikana.

Lisäksi tahdon kiittää työn tarkastajia, FT Pekka Alestaloa ja Professori Aimo Hinkkasta työn perusteellisesta tarkastamisesta, sekä useista hyvistä parannusehdotuksista sekä korjauksista.

# 1 Johdanto

Olkoot  $X$  ja  $Y$  kaksi metristä avaruutta ja  $\mathcal{F}$  jokin kokoelma kuvauksia avaruuksien  $X$  ja  $Y$  välillä. Kokoelmaa  $\mathcal{F}$  kutsutaan *normaaliperheeksi*, mikäli jokaiselle kokoelman  $\mathcal{F}$  jonolle  $(f_j)$  löytyy osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jotakin kuvausta  $f: X \rightarrow Y$ .

Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  kaksi Riemannin monistoa sekä  $K \geq 1$ . Kuvausta

$$f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

kutsutaan  $(K)$ -*kvasisäännölliseksi kuvaukseksi*, mikäli kuvaus  $f$  kuuluu Sobolev-luokkaan  $W_{\text{loc}}^{1,n}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  ja toteuttaa melkein kaikilla  $x \in \mathcal{M}$  epäyhtälön

$$(1) \quad \|Df(x)\|^n \leq K J_f(x),$$

missä  $\|Df(x)\|$  on tangenttikuvauksen  $Df(x): T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  operaattorinormi ja  $J_f(x)$  kuvauksen  $f$  Jacobin determinantti pisteessä  $x$ . Tunnetun Reshetnyakin lauseen [Ric93, Theorem I.4.1] nojalla kvasisäännöllinen kuvaus on joko diskreetti ja avoin kuvaus tai vakiokuvaus. Jatkuvaa, avointa ja diskreettiä kuvausta kutsutaan *haarautuvaksi peitekuvaukseksi*. Reshetnyakin lause nojaa  $A$ -harmonisten funktioiden teoriaan, jonka johdosta todistusta ei voi suoraan siirtää yleisempiin tilanteisiin, joissa määrittely- tai maalijoukkona ei ole Riemannin monisto. Lauseen [Ric93, Theorem VI.8.6.] nojalla kahden suljetun Riemannin moniston väliset  $K$ -kvasisäännölliset kuvaukset muodostavat normaali-perheen, jonka rajakuvaukset ovat edelleen  $K$ -kvasisäännöllisiä.

Artikkelissa [MV88] määritellään kvasisäännöllisten kuvausten erikoistapauksena seuraava BLD-kuvausten luokka.

**Määritelmä.** Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  Riemannin monistoja. Kvasisäännöllinen kuvaus  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  on BLD-kuvaus, mikäli on olemassa sellainen  $L \geq 1$ , että melkein kaikilla  $x \in \mathcal{M}$  pätee

$$(2) \quad L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq \|Df(x)\| \leq L,$$

jossa  $\ell(Df(x)) = \min_{|v|=1} |Df(x)v|$ .

Koska kyseessä on kvasisäännöllisten kuvauksien osakokoelma ja BLD-kuvaus ei voi olla vakio, ovat BLD-kuvaukset avoimia ja diskreettejä. Lisäksi BLD-kuvausten joukolle voidaan todistaa samanhenkisiä kompaktisuustuloksia kuin kvasisäännöllisten kuvausten joukolle, katso esimerkiksi [MV88, Theorem 4.7.]. Artikkelissa [MV88] todistetaan edelleen, että yllä oleva analyttinen määritelmä on Riemannin monistojen tapauksessa kvantitatiivisesti yhtäpitävä seuraavan metrisen määritelmän kanssa, jota työssä jatkossa käytetään BLD-kuvausten määritelmänä.

**Määritelmä.** Olkoot  $X$  ja  $Y$  metrisiä avaruuksia sekä  $L \geq 1$ . Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on  $L$ -BLD-kuvaus, mikäli kaikille jatkuville poluille  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  pätee epäyhtälöketju

$$(3) \quad L^{-1} \ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L \ell(\alpha).$$

Tunnetut todistukset määritelmien yhtäpitävyydelle nojaavat kuitenkin Reshetnyakin lauseeseen, joten niitä ei voi suoraan siirtää yleisempiin tilanteisiin, katso esimerkiksi [MV88, Theorem 2.16.(3)].

Tämän työn päätuloksena on todistaa seuraava BLD-kuvausten kompaktiusominaisuus topologis-metrisillä tekniikoilla. Seuraava lause vastaa työn lausetta 5.16, katso myös [MV88, Theorem 4.7.]. Seuraavassa merkitsemme Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  yksikkökuulaa  $B^n$ .

**Lause A.** *Kokoelma*

$$\mathcal{F} = \{f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f(0) = 0, f \text{ on } L\text{-BLD}\}$$

*on normaaliperhe.*

Kuvauksen haarajoukoksi kutsutaan sitä lähtöjoukon osajoukkoa, jossa kuvaus ei ole lokaali homeomorfismi. Työn päätuloksen avulla saadaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementille geometrisista säännöllisyyttä. Avointa ja yhtenäistä metrisen avaruuden osajoukkoa  $U$  kutsutaan *kuvasikonveksiksi alueeksi*, mikäli on olemassa sellainen vakio  $K \geq 1$ , että mitkä tahansa kaksi pistettä  $x, y \in U$  kohti löytyy sellainen polku  $\beta: [0, 1] \rightarrow U$ , jolle pätee

$$\beta(0) = x, \quad \beta(1) = y \quad \text{ja} \quad \ell(\beta) \leq Kd(x, y).$$

Seuraava lause vastaa työn lausetta 5.24 ja luonteeltaan samankaltainen lauseen [MV88, Theorem 4.25.] kanssa.

**Lause B.** *Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  Riemannin monistoja, joiden Ricci-kaarevuus on rajoitettu, sekä  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  BLD-kuvaus. Tällöin kuvauksen  $f$  haarajoukon komplementti on kuvasikonveksi alue.*

Työssä hyödynnetään kompaktisti kannettua Alexander-Spanier-kohomologiaa ja määritellään tämän avulla haarautuvan peitekuvauksen lokaali topologinen aste, joka on työssä erittäin tärkeä työkalu. Kohomologisten tekniikoiden sekä asteteorian avulla todistetaan tärkeitä haarautuvien peitekuvauksen topologisia ominaisuuksia, kuten Černavskiin ja Väisälän lause ([Väi66]), joka antaa tietoa haarautuvan peitekuvauksen haarajoukon topologisesta dimensiosta.

Topologisen asteteorian avulla haarautuvien peitekuvauksien geometrialle saadaan kvalitatiivisia rajoja. Yhdistämällä tähän BLD-kuvauksille käytössä olevia Lipschitz-analyttisiä tekniikoita, erityisesti Rademacherin lause sekä pintaalakaava, saadaan näistä rajoista kvantitatiivisia. Näiden tekniikoiden lisäksi tärkeänä apukeinona käytetään niin kutsuttujen LQ-kuvausten kompaktiusominaisuuksia. LQ-kuvausten teoriaa ei ole käytetty suoraan kirjallisuudessa BLD-kuvausten tutkimiseen, mutta lähteessä [MV88] käytetään eräässä mielessä duaalista käsitettä, katso erityisesti [MV88, Lemma 2.12].

## 2 Perusmääritelmät ja -käsitteet

Työssä käsitellään lähinnä geometrisia monistoja, niiden välisiä BLD-kuvauksia sekä näiden geometrisia ominaisuuksia. Käsitteet esitellään tässä kappaleessa tiiviisti. Ellei toisin mainita, oletetaan kaikki työssä esiintyvät kuvaukset jatkuviksi.

**Määritelmä 2.1.** Kahden topologisen avaruuden välinen kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on

- (i) *ankara*, mikäli jokaisen kompaktin joukon  $K \subset Y$  alkukuva  $f^{-1}K$  on kompakti.
- (ii) *avoin*, mikäli jokaisen avoimen joukon  $U \subset X$  kuva  $fU$  on avoin.
- (iii) *diskreetti*, mikäli jokaisen yksión  $\{y\} \subset Y$  alkukuva  $f^{-1}\{y\}$  on diskreetti joukko.

Metrisen avaruuden  $X$  avointa kuulaa merkitään  $B_X(x, r)$  tai lyhyemmin  $B(x, r)$ , mikäli taustalla olevasta metrisestä avaruudesta  $X$  ei ole epäselvyyttä. Metrisen avaruuden  $X$  osajoukon  $A$  *pullistumaa* merkitään

$$B_X(A, r) := \bigcup_{x \in A} B_X(x, r).$$

Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kuulaa merkitään  $B^n(x, r)$  ja yksikkökuulaa  $B^n(\mathbf{0}, 1)$  merkitään  $B^n$ . Topologisen avaruuden osajoukkoa kutsutaan *alueeksi*, mikäli se on avoin sekä yhtenäinen.

## 2.1 Metriset avaruudet ja polkumetriikka

Työssä tarkastellaan metrisiä avaruuksia, joiden metriikka saadaan polkujen pituuksia tutkimalla. Määritellään nyt polun pituus sekä niin kutsuttujen polkumetristen avaruuksien peruskäsitteet. Esitys seuraa oleellisesti kirjan [Gro99] kappaletta 1.

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. *Polku* on mikä tahansa jatkuva kuvaus  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ . Mikäli  $x, y \in X$  sekä pätee  $\gamma(a) = x$  ja  $\gamma(b) = y$ , niin merkitään  $\gamma: x \curvearrowright y$ .

Polun  $\gamma$  *pituuks*  $\ell(\gamma) \in [0, \infty]$  on luku

$$\sup \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})) \mid a = a_0 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Polku  $\gamma$  on *suoristuva*, mikäli polun  $\gamma$  pituus  $\ell(\gamma)$  on äärellinen. Polkua  $\gamma: x \curvearrowright y$ , jolle pätee  $\ell(\gamma) \leq Kd(x, y)$  jollain  $K \geq 1$  kutsutaan *(K-)kvasigeodeesiksi*. Mikäli polku  $\gamma: x \curvearrowright y$  on 1-kvasigeodeesi, kutsutaan sitä *geodeesiksi* ja merkitään  $\gamma: x \curvearrowright_g y$ .

Ellei toisin mainita, jatkossa jokaisen polun määrittelyväliksi oletetaan yksikköväli  $[0, 1]$ . Huomaa, että määrittelyvälin uudelleenparametrisointi  $[0, 1] \rightarrow [a, b]$  ei vaikuta polun pituuteen.

Metrinen avaruus  $X$  on *suoristuvasti yhtenäinen*, mikäli mitkä tahansa kaksi pistettä voidaan yhdistää suoristuvalla polulla eli jokaista pisteparia  $x, y \in X$  kohti löytyy sellainen polku  $\gamma: x \curvearrowright y$ , että  $\ell(\gamma) < \infty$ . Esimerkiksi kaikki euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  alueet ja yleisemmin kaikki yhtenäiset Riemannin monistot ovat suoristuvasti yhtenäisiä. Suoristuvasti yhtenäiseen metriseen avaruuteen  $X$  määritellään *polkumetriikka*  $d_\ell$  asettamalla

$$d_\ell(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma: x \curvearrowright y\} \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

On suoraviivaista tarkistaa, että  $d_\ell$  on metriikka.



Jos suoristuvasti yhtenäisen metrisen avaruuden polkumetriikka on avaruuden alkuperäinen metriikka, avaruutta kutsutaan *polkumetriseksi avaruudeksi*. Jos jokaista pisteparia  $x, y \in X$  kohti on olemassa geodeesi  $\gamma: x \overset{g}{\rightsquigarrow} y$ , avaruutta  $X$  sanotaan *geodeettiseksi avaruudeksi*. Olkoon  $A \subset \mathcal{M}$  polkumetrinen moniston  $\mathcal{M}$  osajoukko. Jos on olemassa sellainen vakio  $K \geq 1$ , että jokainen pistepari  $x, y \in A$  voidaan yhdistää polulla  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ , jonka pituus on enintään  $Kd(x, y)$ , niin joukkoa  $A$  sanotaan  *$K$ -kvasikonveksiksi*. Joukko  $A$  on *melkein  $K$ -kvasikonveksi*, jos se on  $(K + \varepsilon)$ -kvasikonveksi kaikilla  $\varepsilon > 0$ . Huomaa, että metrisen avaruus on geodeettinen (vast. polkumetrinen) avaruus, jos ja vain jos se on (vast. melkein) 1-kvasikonveksi avaruus.

Seuraava lause tunnetaan nimellä Hopf-Rinowin lause. Todistus löytyy lähteestä [Gro99, Hopf-Rinow Theorem, s. 9].

**Lause 2.3** (Hopf-Rinowin lause). *Olkoon  $(X, d)$  täydellinen suoristuvasti yhtenäinen metrisen avaruus. Tällöin polkumetrinen avaruus  $(X, d_\ell)$  on geodeettinen avaruus ja kaikki sen suljetut kuulat ovat kompakteja.*

**Määritelmä 2.4.** Polkumetristä avaruutta, joka on lisäksi monisto sanotaan *metriseksi monistoksi*.

**Määritelmä 2.5.** Metrisellä monistolla  $\mathcal{M}$  on *rajoitettu geometria*, mikäli on olemassa sellaiset positiiviset vakiot  $R$  ja  $L$ , että kaikilla pisteillä  $x \in \mathcal{M}$  on olemassa  $L$ -bilipschitz -kuvaus

$$g: B_{\mathcal{M}}(x, R) \rightarrow B^n(\mathbf{0}, R),$$

joka kuvaa pisteen  $x$  origoon. Haluttaessa korostaa vakioita sanotaan, että geometria on  $(L, R)$ -rajoitettu. Kyseisiä kuulaympäristön ja kuvauksen muodostamia pareja  $(B_{\mathcal{M}}(x, R), g)$  kutsutaan  $(L, R)$ -kartoiksi.

Geometria on *infinitesimaalisesti bilipschitz-euklidinen*, mikäli jokaista lukua  $L > 1$  kohti on olemassa luku  $R(L)$  siten, että geometria on  $(L, R(L))$ -rajoitettu.

Huomaa, että rajoitetun geometrian monistot ovat täydellisiä. Toisaalta kaikilla täydellisillä Riemannin monistoilla, joiden Ricci-kaarevuus on ylhäältä rajoitettu, on infinitesimaalisesti rajoitettu geometria, katso esimerkiksi [LF73, 2.2.].

**Määritelmä 2.6.** *Geometrisen monisto* on polkumetrinen monisto, jolla on rajoitettu geometria.

## 2.2 Tärkeimpiä kuvaustyypppejä

Seuraavaksi käydään läpi tärkeimpiä työssä käytettyjä kuvaustyypppejä sekä joi-tain niiden perusominaisuuksia.

### 2.2.1 Haarautuvat peitekuvaukset

**Määritelmä 2.7.** Olkoot  $X$  ja  $Y$  topologiaisia avaruuksia. Kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on *haarautuva peitekuvaus*, mikäli se on jatkuva, avoin ja diskreetti.

Mikäli pisteellä  $x \in X$  on olemassa sellainen ympäristö  $U$ , että rajoittuma  $f|_U$  on injektio, niin kuvauksen  $f$  sanotaan olevan lokaali injektio pisteessä  $x$ .

**Lause 2.8.** Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$   $n$ -ulotteisia monistoja. Jatkuva avoin kuvaus  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  on lokaali homeomorfismi pisteessä  $x \in \mathcal{M}$ , jos ja vain jos  $f$  on pisteessä  $x$  lokaali injektio.

*Todistus.* Homeomorfismi on aina injektio, joten mikäli kuvaus  $f$  on pisteessä  $x \in \mathcal{M}$  lokaali homeomorfismi, on se myös lokaali injektio pisteessä  $x$ .

Oletetaan että pisteellä  $x \in \mathcal{M}$  on sellainen ympäristö  $U$ , että rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow fU$  on injektio. Koska kuvaus  $f$  oletettiin avoimeksi, on rajoittuma myös avoin kuvaus. Rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow fU$  on täten jatkuvana avoimena bijektiona homeomorfismi ja väite on todistettu.  $\square$

**Määritelmä 2.9.** Kuvauksen  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarajoukko  $B_f \subset \mathcal{M}$  on niiden lähtömoniston pisteiden joukko, joissa kuvaus  $f$  ei ole lokaali homeomorfismi.

Suoraan määritelmästä seuraa, että haarajoukko on aina suljettu. Myöhemmin kappaleessa 4.1 näytetään, että kahden  $n$ -ulotteisen moniston välisen haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa.

### 2.2.2 Lipschitz tekijä -kuvaukset

**Määritelmä 2.10.** Olkoot  $X$  ja  $Y$  metrisiä avaruuksia. Kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  on ( $L$ -) Lipschitz tekijä -kuvaus, mikäli on olemassa sellainen vakio  $L \geq 1$ , että kaikilla  $x \in X$  ja  $r \in \mathbb{R}_+$  pätee

$$(4) \quad B_Y(f(x), L^{-1}r) \subset fB_X(x, r) \subset B_Y(f(x), Lr).$$

Jatkossa ( $L$ -) Lipschitz tekijä -kuvauksia kutsutaan lyhyesti ( $L$ -) LQ -kuvauksiksi. Lyhenne "LQ" tulee sanoista *Lipschitz Quotient*. LQ-kuvausten määritelmä sekä niiden perusominaisuudet löytyvät esimerkiksi lähteestä [BJL<sup>+</sup>99]. Jatkossa käytetään myös seuraavaa relatiivista määritelmää.

**Määritelmä 2.11.** Olkoot  $X$  ja  $Y$  metrisiä avaruuksia ja  $A \subset X$  avoin joukko. Kuvaus  $f: A \rightarrow Y$  on ( $L$ -)LQ-kuvaus joukon  $A$  suhteen, mikäli kaikilla  $x \in A$  pätee

$$B_Y(f(x), L^{-1}r) \subset fB_X(x, r) \subset B_Y(f(x), Lr)$$

kaikilla  $r \in \mathbb{R}_+$ , joilla on voimassa  $B_X(x, r) \subset A \subset X$ .

Jonkin joukon suhteen määriteltä LQ-kuvausta kutsutaan jatkossa myös relatiiviseksi LQ-kuvaukseksi. Huomaa, että relatiivisen LQ-kuvauksen määritelmässä tarkastellaan *ainoastaan* kuulia, jotka sisältyvän annettuun joukkoon. Suoraan määritelmän perusteella (relatiiviset) LQ-kuvaukset ovat aina avoimia. Kirjataan tämä tulos lemmaksi myöhempää käyttöä varten.

**Lemma 2.12.** Olkoot  $X$  metrisen avaruus ja  $A \subset X$  avoin joukko. Tällöin LQ-kuvaus  $f: A \rightarrow Y$  joukon  $A$  suhteen on avoin kuvaus.

### 2.2.3 Rajoitetun pituusvääristymän kuvaukset

**Määritelmä 2.13.** Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  polkumetrisiä monistoja. Jatkuva, avoin ja diskreetti kuvaus  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  on  $(L-)$ rajoitetun pituusvääristymän kuvaus, mikäli on olemassa sellainen vakio  $L \geq 1$ , että kaikilla poluilla  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  pätee

$$(5) \quad L^{-1}\ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L\ell(\alpha).$$

Jatkossa rajoitetun pituusvääristymän kuvauksia kutsutaan BLD-kuvauksiksi. Lyhenne BLD tulee sanoista *Bounded Length Distortion*. BLD-kuvausten määritelmä ja perusominaisuudet löytyvät esimerkiksi lähteestä [MV88].

Huomaa, että polkujen pituusepäyhtälö (5) vaaditaan *kaikilta* poluilta eikä pelkästään suoristuvilta poluilta. Tässä työssä käytettävä määritelmä on sama kuin määritelmä 0.1. artikkelissa [HR02]. Tilanteessa, jossa kuvaus on muotoa  $G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , missä  $G$  on euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  alue, on määritelmä yhtäpitävä myös artikkelissa [MV88] käytetyn analyttisen määritelmän kanssa kuten kyseisessä artikkelissa todistetaan ([MV88, Theorem 2.16.(3)]).

Mikäli polkujen pituusepäyhtälö (5) vaadittaisiin vain suoristuvilta poluilta, saataisiin aikaan eri luokka kuvauksia, sillä esimerkiksi identtinen kuvaus Heisenbergin ryhmältä kolmiulotteiselle euklidiselle avaruudelle ei ole BLD-kuvaus, mutta se toteuttaa epäyhtälön (5) kaikilla suoristuvilla poluilla, kuten seuraava esimerkki osoittaa.

**Esimerkki 2.14.** Määritellään Heisenbergin ryhmä  $\mathbb{H}^3$  asettamalla kolmiulotteiseen euklidiseen avaruuteen  $\mathbb{R}^3$  normi

$$\|(x, y, t)\|_{\mathbb{H}} = \sqrt[4]{(x^2 + y^2)^2 + t^2} \quad \text{kaikilla } (x, y, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Identtinen kuvaus  $\text{id}: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ei ole BLD-kuvaus, sillä esimerkiksi polulle

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3, \quad \alpha(t) = (0, 0, t),$$

pätee

$$\begin{aligned} \ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha) &= \sup \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})) \mid a = a_0 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \sqrt{|a_j - a_{j+1}|} \mid a = a_0 < \dots < a_k = b, k \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

mutta  $\ell_{\mathbb{R}^3}(\text{id} \circ \alpha) = 1$ .

Toisaalta suora lasku osoittaa, että  $\|(x, y, t)\| \leq \|(x, y, t)\|_{\mathbb{H}^3}$  kaikilla  $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$ , joten identtinen kuvaus  $\text{id}: \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  on lokaalisti 1-Lipschitz. Näin ollen kaikille poluille  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3$  pätee  $\ell_{\mathbb{R}^3}(\text{id} \circ \alpha) \leq \ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha)$ . Lisäksi huomataan, että yhtälön [CDPT07, (2.19), p.20] nojalla suoristuvalla polulla  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^3$  pätee

$$\ell_{\mathbb{H}^3}(\alpha) = \ell_{\mathbb{R}^2}(\text{pr}_1 \circ \alpha, \text{pr}_2 \circ \alpha).$$



sekä kuvaus  $\delta^p: \Phi^p(X) \rightarrow \Phi^{p+1}(X)$  asettamalla

$$\delta^p \phi(x_0, \dots, x_p) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \phi(x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_p).$$

Kun  $p < 0$ , asetetaan  $\Phi^p(X) = \{0\}$  sekä määritellään  $\delta^p: \Phi^p(X) \rightarrow \Phi^{p+1}(X)$  kaavalla  $\phi \mapsto 0$ .

Joukon  $\Phi^p(X)$  alkioita kutsutaan avaruuden  $X$  *p-funktioiksi* ja ne muodostavat luonnollisella tavalla vaihdannaisen ryhmän. Huomionarvoista on, ettei niiltä vaadita mitään jatkuvuusomaisuuksia, ainoastaan kuvajoukon äärellisyys. Suora lasku osoittaa, että  $\delta^{p+1} \circ \delta^p$  on nollakuvaus.

Annetun  $p$ -funktion  $\phi \in \Phi^p(X)$  *kantaja*  $\text{spt}(\phi)$  koostuu niistä pisteistä  $x \in X$ , joiden jokaisella ympäristöllä  $U$  pätee, että rajoittuma  $\phi|_{U^{p+1}}$  ei ole nollakuvaus. Huomaa, että  $p$ -funktion  $\phi: X^{p+1} \rightarrow \mathbb{Z}$  kantaja on määritelty avaruudessa  $X$  eikä funktion  $\phi$  määrittelyjoukossa  $X^{p+1}$ . (Pois lukien tapauksessa  $p = 0$ , jolloin kyseessä on 'tavallinen' kantaja.)

**Lemma 3.2.** *Kaikille  $p$ -funktioille  $\phi, \xi \in \Phi^p(X)$  ovat voimassa seuraavat ominaisuudet:*

- (a)  $\text{spt}(\delta^p \phi) \subset \text{spt}(\phi)$ ,
- (b)  $\text{spt}(\phi + \xi) \subset \text{spt}(\phi) \cup \text{spt}(\xi)$ , ja
- (c) *joukko  $\text{spt}(\phi)$  on suljettu.*

*Todistus.* Olkoon  $x \in \text{spt}(\delta^p \phi)$  ja olkoon  $U$  pisteen  $x$  mielivaltainen ympäristö. Koska rajoittuma  $(\delta^p \phi)|_{U^{p+2}}$  ei kantajan määritelmän nojalla ole nollakuvaus, on olemassa sellainen piste  $(y_0, \dots, y_{p+1}) \in U^{p+2}$ , että  $(\delta^p \phi)(y_0, \dots, y_{p+1}) \neq 0$ . Koska

$$(\delta^p \phi)(y_0, \dots, y_{p+1}) = \sum_{j=0}^p \phi(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \neq 0,$$

niin jollakin  $j \in \{0, \dots, p+1\}$  on välttämättä voimassa

$$\phi(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \neq 0.$$

Edelleen pätee  $(y_0, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_{p+1}) \in U^{p+1}$ , joten rajoittuma  $\phi|_{U^{p+1}}$  ei ole nollakuvaus. Koska ympäristö  $U$  oli mielivaltainen, pätee  $x \in \text{spt}(\phi)$  ja väite (a) on todistettu.

Olkoot  $\phi, \xi \in \Phi^p(X)$  ja  $U$  avoin joukko. Väite (b) seuraa siitä, että jos rajoittuma  $(\phi + \xi)|_{U^{p+1}}$  on epätriviaali, niin jommankumman rajoittumista  $\phi|_{U^p}$  tai  $\xi|_{U^p}$  on välttämättä oltava epätriviaali.

Olkoon  $\phi \in \Phi^p(X)$  ja  $x \in \mathbb{C}\text{spt}(\phi)$ . Tällöin on olemassa pisteen  $x$  sellainen ympäristö  $U$ , että rajoittuma  $\phi|_{U^{p+1}}$  on nollakuvaus. Erityisesti kaikilla pisteillä  $y \in U$  pätee, että rajoittuma  $\phi|_{U^{p+1}}$  on nollakuvaus. Täten on voimassa  $U \subset \mathbb{C}\text{spt}(\phi)$ , joten joukko  $\text{spt}(\phi)$  on suljettu avoimen joukon komplementtina. Tämä todistaa väitteen (c).  $\square$

Kantajan avulla voidaan määritellä *lokaalisti triviaalien  $p$ -funktioiden joukko*

$$\Phi_0^p(X) = \{\phi \in \Phi^p(X) \mid \text{spt}(\phi) = \emptyset\},$$

sekä *kompaktisti kannettujen  $p$ -funktioiden joukko*

$$\Phi_c^p(X) = \{\phi \in \Phi^p(X) \mid \text{spt}(\phi) \text{ kompakti} \}.$$

**Määritelmä 3.3.** Olkoon  $X$  lokaalisti kompakti topologinen avaruus. Kaikilla  $p = 0, 1, \dots$  määritellään *avaruuden  $X$   $p$ -koketjujen joukko*

$$C^p(X) = \Phi^p(X) / \Phi_0^p(X)$$

sekä *avaruuden  $X$  kompaktisti kannatettujen  $p$ -koketjujen joukko*

$$C_c^p(X) = \Phi_c^p(X) / \Phi_0^p(X).$$

*Huomautus 3.4.* Huomaa, että (kompaktisti kannatettujen)  $p$ -koketjujen määritelmän johdosta kyseiset koketjut tarvitsee määritellä vain lokaalisti. Tarkemmin ilmaistuna, mikäli  $\mathcal{U}$  on avaruuden  $X$  avoin peite ja  $\phi \in \Phi^p(X)$  on  $p$ -funktio jolle pätee, että  $\phi(x_0, \dots, x_p) = 0$  aina kun on olemassa sellainen  $U \in \mathcal{U}$ , että  $x_0, \dots, x_p \in U$ , niin tällöin  $\phi \in \Phi_0^p(X)$ . Erityisesti  $p$ -koketjun määrittelemiseksi riittää määritellä  $p$ -funktio jonkin avaruuden  $X$  avoimen peitteen  $\mathcal{U}$  alkioiden  $U$  karteesisissa tuloissa  $U^{p+1}$ .

Kirjataan tämän huomion seuraus lemmaksi myöhempää käyttöä varten.

**Lemma 3.5.** *Olkoon  $\phi \in \Phi^p(X)$ . Mikäli  $\{U_1, \dots, U_k\}$  on kokoelma erillisiä avoimia avaruuden  $X$  osajoukkoja, joille pätee  $\text{spt}(\phi) \subset \bigcup_{j=1}^k U_j$ , niin tällöin*

$$[\phi] = \left[ \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi \right]$$

*joukossa  $C^p(X)$ .*

*Todistus.* Merkitään

$$\psi := \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi.$$

Olkoon ensin  $x \in \mathbb{L}\text{spt}(\phi)$ . Tällöin on olemassa sellainen ympäristö  $V \ni x$ , että rajoittuma  $\phi|_{V^{p+1}}$  on nollakuvaus. Nyt pätee

$$(\phi - \psi)|_{V^{p+1}} = \phi|_{V^{p+1}} - \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1}} \cdot \phi|_{V^{p+1}} = 0,$$

joten  $x \in \mathbb{L}\text{spt}(\phi - \psi)$ .

Olkoon seuraavaksi  $x \in \text{spt}(\phi)$ . Tällöin jollain  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  pätee  $x \in U_{j_0}$ . Nyt pätee

$$(\phi - \psi)|_{U_{j_0}^{p+1}} = \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} - \sum_{i=1}^k \chi_{U_i^{p+1} \cap U_{j_0}^{p+1}} \cdot \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} = \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} - \phi|_{U_{j_0}^{p+1}} = 0,$$

joten  $x \in \mathbb{L}\text{spt}(\phi - \psi)$ .

Täten  $\text{spt}(\phi - \psi) = \emptyset$  ja väite on todistettu.  $\square$

Lemman 3.2 nojalla kaikilla  $p \in \mathbb{Z}$  pätee

$$\delta^p(\Phi_0^p(X)) \subset \Phi_0^{p+1}(X) \quad \text{sekä} \quad \delta^p(\Phi_c^p(X)) \subset \Phi_c^{p+1}(X).$$

Täten kuvaus  $\delta^p: \Phi^p(X) \rightarrow \Phi^{p+1}(X)$  indusoi hyvinmääritellyt kuvaukset

$$d^p: C^p(X) \rightarrow C^{p+1}(X) \quad \text{sekä} \quad d_c^p: C_c^p(X) \rightarrow C_c^{p+1}(X),$$

joille pätee  $d^{p+1} \circ d^p = 0$  ja  $d_c^{p+1} \circ d_c^p = 0$ . Edelleen voidaan määritellä avaruuden  $X$  (kompaktisti kannatetut) kohomologiaryhmät.

**Määritelmä 3.6.** Olkoon  $X$  lokaalisti kompakti topologinen avaruus. Kaikilla  $p \in \mathbb{Z}$  määritellään avaruuden  $X$  asteen  $p$  Aleksander-Spanier -kohomologiaryhmä

$$H^p(X) = \text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1})$$

sekä avaruuden  $X$  kompaktisti kannatettu asteen  $p$  Aleksander-Spanier -kohomologiaryhmä

$$H_c^p(X) = \text{Ker}(d_c^p) / \text{Im}(d_c^{p-1}).$$

Jatkossa kirjoitelman paino on kompaktisti kannatetussa Alexander-Spanier -kohomologiassa.

### 3.2 Indusoidut kuvaukset

Olkoot  $X$  ja  $Y$  kaksi lokaalisti kompaktia topologista avaruutta. Kuvaus  $f: X \rightarrow Y$  indusoi kaikilla  $p \in \mathbb{Z}$  kuvauksen

$$f^b: \Phi^p(Y) \rightarrow \Phi^p(X), \quad (f^b\phi)(x_0, \dots, x_p) = \phi(f(x_0), \dots, f(x_p)).$$

Suora lasku osoittaa, että  $\delta^p \circ f^b = f^b \circ \delta^p$ . Mikäli kuvaus  $f$  on jatkuva, niin pätee  $f^b\Phi_0^p(Y) \subset \Phi_0^p(X)$  ja voidaan määritellä kuvaus

$$f^\sharp: C^p(Y) \rightarrow C^p(X) \quad \text{kaavalla} \quad f^\sharp([\phi]) = [f^b\phi].$$

Tämä indusoi edelleen kuvauksen

$$f^*: H^p(Y) \rightarrow H^p(X), \quad \text{kun asetetaan} \quad f^*([\xi]) = [f^\sharp\xi],$$

sillä suora lasku osoittaa, että  $f^\sharp \circ d^p = d^p \circ f^\sharp$ . Mikäli kuvaus on myös ankara, on voimassa  $f^b\Phi_c^p(Y) \subset \Phi_c^p(X)$  ja voidaan määritellä edelleen kuvaus

$$f^\sharp: C_c^p(Y) \rightarrow C_c^p(X) \quad \text{kaavalla} \quad f^\sharp([\phi]) = [f^b\phi].$$

Myös tämä indusoi kuvauksen

$$f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X), \quad \text{kun asetetaan} \quad f^*([\xi]) = [f^\sharp\xi],$$

sillä suora lasku osoittaa taas, että  $f^\sharp \circ d_c^p = d_c^p \circ f^\sharp$ .

Seuraava lause osoittaa, että Alexander-Spanier -kohomologian määritelmä on homotopiainvariantti. Lauseen todistus löytyy lähteestä [Mas78, Theorem 1.11.]

**Lause 3.7.** *Olkoot  $f$  ja  $g$  kaksi ankaraa jatkuvaa kuvausta topologisten avaruudelta  $X$  avaruudelle  $Y$ . Mikäli on olemassa homotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  kuvausten  $f$  ja  $g$  välillä, joka on kuvauksena ankara, niin indusoidut kuvaukset  $f^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$  ja  $g^*: H_c^p(Y) \rightarrow H_c^p(X)$  ovat samat kaikilla  $p \in \mathbb{Z}$ .*

Seuraavaksi määritellään lokaalisti kompaktien avaruuksien avointen- sekä suljettujen osajoukkojen inklusioiden indusoidut kuvaukset. Kaikilla  $B \subset X$  asetetaan

$$Q^p(X, B) = \{u \in C_c^p(X) \mid \text{spt}(u) \subset X \setminus B\}.$$

Olkoon  $U \subset X$  epätyhjä avoin joukko sekä  $A = X \setminus U$ . Inklusio  $\iota_{A,X}: A \rightarrow X$  on jatkuva ja se nähdään helposti ankaraksi kuvaukseksi. Tämän johdosta inklusio  $\iota_{A,X}$  indusoi aiemman huomion nojalla homomorfismit

$$\iota_{A,X}^\sharp: C_c^p(X) \rightarrow C_c^p(A) \quad \text{sekä} \quad \iota_{A,X}^*: H_c^p(X) \rightarrow H_c^p(A).$$

Inklusio  $\iota_{U,X}: U \rightarrow X$  puolestaan on myös jatkuva, mutta ei yleensä ankara. Tämän johdosta inklusio  $\iota_{U,X}$  ei yleensä indusoi kuvausta joukkojen  $C_c^p(X)$  ja  $C_c^p(U)$  välille. Se kuitenkin indusoi kuvauksen

$$\iota_{U,X}^\sharp: C^p(X) \rightarrow C^p(U),$$

joka selvästi toteuttaa ehdon  $\iota_{U,X}^\sharp Q^p(X, A) \subset C_c^p(U)$ . Enemmänkin pätee, ja voidaan todistaa seuraava lemma, joka on lähteestä [Mas78, Lemma 1.3].

**Lemma 3.8.** *Kuvaus*

$$(\iota_{U,X}^\sharp)|_{Q^p(X,A)}: Q^p(X, A) \rightarrow C_c^p(U)$$

*on isomorfismi.*

*Todistus.* Merkitään todistuksessa rajoittumaa

$$\xi := (\iota_{U,X}^\sharp)|_{Q^p(X,A)}: Q^p(X, A) \rightarrow C_c^p(U).$$

Aloitetaan näyttämällä, että rajoittuma  $\xi$  on injektio. Olkoon  $\phi \in \Phi^p(X)$  sellainen, että  $[\phi] \in Q^p(X, A)$  ja  $\xi([\phi]) = [\iota_{U,X}^\flat \phi] = \Phi_0^p(X)$ . Tällöin jokaisesta pisteestä  $x \in X$  kohti löytyy sellainen ympäristö  $V$ , että  $(\iota_{U,X}^\flat \phi)|_{V^{p+1}}$  on nollakuvaus. Valitaan mielivaltaiselle pisteelle  $x \in U$  tällainen ympäristö  $V$  ja merkitään  $W := U \cap V$ . Nyt

$$0 = (\iota_{U,X}^\flat \phi)|_{W^{p+1}} = (\phi \circ (\iota_{U,X})^{p+1})|_{W^{p+1}} = \phi|_{W^{p+1}},$$

joten  $U \subset \mathbb{C}\text{spt}(\phi)$ . Toisaalta  $p$ -funktion  $\phi$  valinnan nojalla  $\text{spt}(\phi) \subset U$ , joten  $\text{spt}(\phi) = \emptyset$ . Erityisesti  $\phi \in \Phi_0^p(U)$ . Täten kuvaus  $\xi$  on injektio.

Osoitetaan seuraavaksi, että rajoittuma  $\xi$  on surjektio. Olkoon  $\psi \in \Phi_c^p(U)$  ja määritellään  $\phi \in \Phi^p(X)$  asettamalla

$$(6) \quad \phi(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} \psi(x_0, \dots, x_p), & \text{kun } x_0, \dots, x_p \in U, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Selvästi pätee  $\text{spt}(\phi) \subset \text{spt}(\psi) \subset U$  ja lisäksi joukko  $\text{spt}(\phi)$  on kompaktin joukon  $\text{spt}(\psi)$  suljettuna osajoukkona kompakti, joten  $[\phi] \in Q^p(X, A)$ . Suora lasku osoittaa, että  $\xi([\phi]) = [\psi]$  ja rajoittuma  $\xi$  on surjektio.  $\square$



Joukko  $Q^p(X, A)$  on ryhmän  $C_c^p(X)$  aliryhmä. Merkitään inklusiota

$$r: Q^p(X, A) \hookrightarrow C_c^p(X)$$

ja määritellään kaavioon

$$\begin{array}{ccc} Q^p(X, A) & \xrightarrow{r} & C_c^p(X) \\ \iota_{U,X}^\# \downarrow \simeq & \nearrow & \\ C_c^p(U) & & \end{array}$$

perustuen homomorfismi

$$\sigma_{U,X}: C_c^p(U) \rightarrow C_c^p(X), \quad \sigma_{U,X} = r \circ (\iota_{U,X}^\#|_{Q^p(X,A)})^{-1}.$$

Tämä kuvaus indusoi edelleen kuvauksen

$$\tau_{U,X}: H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(X).$$

**Lemma 3.9.** *Olkoon  $X$  topologinen avaruus sekä  $U \subset V \subset X$  avoimia joukkoja. Tällöin  $\tau_{U,X} = \tau_{V,X} \circ \tau_{U,V}$ .*

*Todistus.* Merkitään

$$\begin{aligned} r_1: Q^p(X, X \setminus U) &\hookrightarrow C_c^p(X), \\ r_2: Q^p(V, V \setminus U) &\hookrightarrow C_c^p(V) \quad \text{ja} \\ r_3: Q^p(X, X \setminus V) &\hookrightarrow C_c^p(X), \end{aligned}$$

sekä asetetaan

$$\begin{aligned} i_1 &= (\iota_{U,X}^\#|_{Q^p(U, X \setminus U)})^{-1}, \\ i_2 &= (\iota_{U,V}^\#|_{Q^p(U, V \setminus U)})^{-1} \quad \text{ja} \\ i_3 &= (\iota_{V,X}^\#|_{Q^p(V, X \setminus V)})^{-1}. \end{aligned}$$

Homomorfismien  $\tau_{U,X}$ ,  $\tau_{U,V}$  sekä  $\tau_{V,X}$  määritelmien perusteella ne ovat muotoa

$$\tau_{U,X} = [\tau'_{U,X}], \quad \tau_{U,V} = [\tau'_{U,V}] \quad \text{ja} \quad \tau_{V,X} = [\tau'_{V,X}],$$

missä

$$\tau'_{U,X} = r_1 \circ i_1, \quad \tau'_{U,V} = r_2 \circ i_2, \quad \text{ja} \quad \tau'_{V,X} = r_3 \circ i_3.$$

Seuraavassa kaaviossa  $s_2: Q^p(X, X \setminus U) \rightarrow Q^p(X, X \setminus V)$  on inklusiokuvaus ja kuvaus  $s_1: Q^p(V, V \setminus U) \rightarrow Q^p(X, X \setminus V)$  määritellään luonnollisesti edustajien kautta kuten kaavassa (6).

$$\begin{array}{ccccc} Q^p(X, X \setminus U) & \xrightarrow{s_2} & Q^p(X, X \setminus V) & \xrightarrow{r_3} & C_c^p(X) \\ \uparrow s_1 & & \uparrow i_3 & \nearrow \tau'_{V,X} & \\ Q^p(V, V \setminus U) & \xrightarrow{r_2} & C_c^p(V) & & \\ \uparrow i_2 & \nearrow \tau'_{U,V} & & & \\ C_c^p(U) & & & & \end{array}$$



Kaikille suunnistetun moniston alueille  $U$  annetaan inklusion  $\iota: U \hookrightarrow \mathcal{M}$  indusoima suunnistus  $\tau_{U,\mathcal{M}}^{-1}(\mu_{\mathcal{M}})$ . Huomaa, että  $\tau_{U,\mathcal{M}}^{-1}(\mu_{\mathcal{M}})$  on ryhmän  $H_c^n(U)$  virittäjä, sillä  $\tau_{U,\mathcal{M}}$  on isomorfismi ja erityisesti suunnistuvan moniston alueet ovat suunnistuvia.

*Huomautus 3.14.* Koska euklidinen avaruus  $\mathbb{R}^n$  ja kaikki sen alueet ovat suunnistuvia lemmän 3.11 nojalla, niin tarkastelemalla karttaympäristöjä nähdään, että jokainen monisto on lokaalisti suunnistuva. Tämä takaa sen, että mielivaltaisella monistolla voidaan käyttää tässä kappaleessa suunnistuville monistoille todistettavia tuloksia lokaalisti.

### 3.4 Topologinen aste sekä -indeksi

Suunnistettujen  $n$ -monistojen  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  välisten avoimien kuvausten  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  asteteorian määrittelemiseksi on tarpeellista tutkia niiden kompaktisti kannatettujen kohomologioiden välille indusoiduista kuvauksista  $f^*: H_c^n(\mathcal{N}) \rightarrow H_c^n(\mathcal{M})$ . Vain ankarat kuvaukset indusoivat tällaisia kuvauksia, joten tässä kappaleessa keskitytään tutkimaan millaisiin joukkoihin rajoittumalla avoimen kuvauksen rajoittumasta saadaan ankara kuvaus. Kappaleen kaikki monistot oletetaan yhtenäisiksi.

Mikäli  $f: (\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mu_{\mathcal{N}})$  on jatkuva ankara kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä, niin pätee  $f^*\mu_{\mathcal{N}} = k\mu_{\mathcal{M}}$  jollain  $k \in \mathbb{Z}$ . Tätä lukua  $k$  kutsutaan kuvauksen  $f$  *asteeksi*  $\deg f$ . Kuvaus  $f$  on *suunnistuksen säilyttävä*, mikäli  $\deg f \geq 0$ . Mikäli  $\deg f < 0$ , niin kuvaus  $f: (\mathcal{M}, -\mu_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mu_{\mathcal{N}})$  on suunnistuksen säilyttävä. Näin ollen riittää tarkastella suunnistuksen säilyttäviä kuvauksia.

*Huomautus 3.15.* Huomaa, että alueen suunnistuksen määritelmän perusteella pätee, että mikäli  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  on suunnistuksen säilyttävä ja  $U \subset \mathcal{M}$  on sellainen alue, että  $f|_U: U \rightarrow fU$  on ankara kuvaus, niin  $f|_U$  on suunnistuksen säilyttävä kuvaus. Tämä seuraa siitä, että annetussa tilanteessa pätee

$$(f|_U)^*(\mu_{fU}) = (f|_U)^*\tau_{fU,\mathcal{N}}(\mu_{\mathcal{N}}) = \tau_{U,\mathcal{M}}(f^*\mu_{\mathcal{N}}) = (\deg f)\mu_{\mathcal{M}}.$$

Työssä tutkitaan lähinnä kahden moniston välillä määritellyn avoimen kuvauksen  $f$  lokaaleja ominaisuuksia. Valitsemalla lähtömonistosta karttaympäristö  $U$ , jonka kuva  $fU$  sisältyy moniston  $\mathcal{N}$  karttaympäristöön voidaan rajoittumaan siirtymällä olettaa, että  $f|_U: U \rightarrow fU$  on kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä. Kuvaus  $f|_U$  ei kuitenkaan välttämättä indusoi kuvausta kompaktisti kannatettujen kohomologioiden välille, sillä sen ei tarvitse olla ankara kuvaus. Seuraava lemma antaa ehdon milloin rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow fU$  on ankara ja siten indusoi kuvauksen  $(f|_U)^*: H_c^k(fU) \rightarrow H_c^k(U)$ . Tulos on lemmaksi muotoiltu huomio lähteestä [Väi66, p. 5].

**Lemma 3.16.** *Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  yhtenäisiä monistoja ja  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  jatkuva avoin kuvaus,  $U \subset \mathcal{M}$  prekompakti alue ja  $V \subset \mathcal{N}$  alue, joka toteuttaa ehdon  $fU \cap V \neq \emptyset$ . Tällöin rajoittuma*

$$f|_{(U \cap f^{-1}V)}: U \cap f^{-1}V \rightarrow V$$

*on ankara, jos ja vain jos pätee  $V \cap f\partial U = \emptyset$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että  $V \cap f\partial U = \emptyset$ . Osoitetaan, että kuvaus  $f|_{U \cap f^{-1}V}$  on ankara tekemällä vastaoletus, että alkukuva  $(f|_{U \cap f^{-1}V})^{-1}K$  ei ole kompakti jollain kompaktilla joukolla  $K \subset V$ . Tällöin on olemassa sellainen jono  $(x_n)$  joukossa  $(f|_{U \cap f^{-1}V})^{-1}K$ , jolle pätee  $x_n \rightarrow x_0 \in \partial U$ . Tästä seuraa, että  $f(x_n) \rightarrow f(x_0) \in f\partial U$ . Näin ollen on voimassa  $f(y_0) \in V \cap f\partial U$ . Tämä on ristiriita, joten rajoittuma  $f|_{U \cap f^{-1}V}$  on ankara kuvaus.

Oletetaan seuraavaksi, että pätee  $V \cap f\partial U \neq \emptyset$  ja olkoon  $x$  jokin tämän joukon piste. Olkoon  $r > 0$  sellainen säde, että  $\overline{B}(x, r) \subset V$ . Valitaan  $y \in \partial U \cap f^{-1}\{x\}$ . Joukko  $f|_{(U \cap f^{-1}V)}^{-1}(\overline{B}(x, r))$  ei ole kompakti, jolloin kuvaus  $f|_{(U \cap f^{-1}V)}$  ei ole ankara.

Tämä todistaa väitteen.  $\square$

**Korollaari 3.17.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  jatkuva avoin kuvaus ja  $U \subset \mathcal{M}$  prekompakti alue. Tällöin kuvaus*

$$f|_{(U \cap f^{-1}V)}: U \cap f^{-1}V \rightarrow V$$

*on ankara jokaisella joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponentilla  $V$ .*

Jokainen joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  alue  $W$  sisältyy johonkin komponenttiin  $V$ . Tällöin myös kuvaus

$$f|_{(U \cap f^{-1}W)}: U \cap f^{-1}W \rightarrow W$$

on ankara. Prekompaktia aluetta  $V \subset \mathcal{N} \setminus f\partial U$  kutsutaan  $(f, U)$ -kelvolliseksi alueeksi ja pisteen  $y \in \mathcal{N}$  ympäristöä, joka on kelvollinen alue,  $(f, U)$ -kelvolliseksi ympäristöksi. Pistettä  $y \in \mathcal{N}$ , jolla on olemassa  $(f, U)$ -kelvollinen ympäristö, kutsutaan  $(f, U)$ -kelvolliseksi pisteeksi. Huomaa, että piste  $y$  on  $(f, U)$ -kelvollinen, jos ja vain jos pätee  $y \notin f\partial U$ . Jatkossa, jos  $V \subset \mathcal{N}$  on  $(f, U)$ -kelvollinen alue, merkitään  $V^{-1} := U \cap f^{-1}V$  merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Rajoittuman voi muodostaa myös lähtien maalimoniston alueesta.

**Lemma 3.18.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  jatkuva avoin kuvaus ja  $V \subset \text{Im}(f)$  prekompakti alue. Tällöin kuvaus  $f|_U: U \rightarrow V$  on ankara jokaisella joukon  $\mathcal{M} \setminus f^{-1}\partial V$  prekompaktilla komponentilla  $U$  jolle pätee  $fU \cap V \neq \emptyset$ . Erityisesti tällöin on voimassa  $f\partial U = \partial fU$ .*

*Todistus.* Huomataan ensin, että yhtenäisyyden nojalla  $fU \subset V$ . Toisaalta on voimassa  $\partial U \subset f^{-1}\partial V$ , joten pätee

$$(8) \quad f\partial U \subset f f^{-1}\partial V \subset \partial V.$$

Rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow V$  on surjektio, koska muuten joukon  $U$  reunapiste kuvautuisi joukon  $V$  sisäpisteelle, mikä on mahdotonta kaavan (8) nojalla. Erityisesti on voimassa  $\partial V \subset \partial fU$ . Täten siis

$$f\partial U \subset \partial V \subset \partial fU.$$

Koska  $f$  on avoin kuvaus, niin  $\partial fU \subset f\partial U$ . Täten pätee  $f\partial U = \partial fU$ .

Väitteen ensimmäinen osa seuraa nyt lemmasta 3.16 ja tiedosta  $f\partial U = \partial fU$ .  $\square$

Jatkossa prekompaktia aluetta  $U \subset \mathcal{M}$  kutsutaan *normaalialueeksi kuvauksen  $f$  suhteen*, mikäli pätee  $f\partial U = \partial fU$ . Tällöin alue  $fU$  on  $(f, U)$ -kelvollinen alue ja erityisesti rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow fU$  on ankara. Pisteiden ympäristöä, joka on normaalialue kutsutaan luonnollisesti *normaaliympäristöksi*. Jokaisella lähtömoniston  $\mathcal{M}$  pisteellä  $x$  on mielivaltaisen pieniä prekompakteja normaaliympäristöjä, kun kuvaus  $f$  on haarautuva peitekuvaus. Tämä seuraa lemmän 3.18 nojalla siitä, että kuvaus  $f$  ei ole diskreetti mikäli jollain pisteellä  $x$  on sellainen ympäristökanta  $\{U_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ , että kaikilla  $j \in \mathbb{N}$  on voimassa  $\partial U_j \cap f^{-1}\{f(x)\} \neq \emptyset$ .

Seuraavaksi määritellään kuvaukselle erilaisia lokaaleja aste-, sekä indeksikäsittelyitä, jotka toimivat tässä työssä eräinä tärkeimpinä työkaluina haarautuvien peitekuvausten ja BLD-kuvausten lokaalien topologisten ominaisuuksien tutkimisessa.

Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  avoin jatkuva kuvaus ja  $U \subset \mathcal{M}$  sellainen alue, että  $f|_U: U \rightarrow fU$  on suunnistuksen säilyttävä ankara kuvaus. Kaikilla  $(f, U)$ -kelvollisilla alueilla  $V$  kuvaus

$$(9) \quad (\tau_{V^{-1}, U}) \circ (f|_{V^{-1}})^*: H_c^n(V) \rightarrow H_c^n(U)$$

on muotoa  $m\mu_V \mapsto km\mu_U$  jollain  $k \in \mathbb{Z}$ . Koska kuvaus  $f|_U$  on suunnistuksen säilyttävä, niin luku  $k$  on ei-negatiivinen.

*Huomautus 3.19.* Myöhemmin lauseessa 4.6 todistetaan, että yllä olevassa tilanteessa  $k \neq 0$ , eli että suunnistuksen säilyttävillä haarautuvilla peitekuvauksilla on epätriviaali aste.

**Määritelmä 3.20.** Kaavan (9) kuvaukseen liittyvää vakiota  $k$  kutsutaan *kuvauksen  $f$  topologiseksi asteeksi ympäristön  $V$  suhteen* ja sitä merkitään

$$\mu(V, f, U) := k.$$

Olkoot  $V_1$  ja  $V_2$  kaksi  $(f, U)$ -kelvollista aluetta, joilla on yhteisiä pisteitä. Valitaan alue  $W \subset V_1 \cap V_2$  ja muodostetaan kaavio

$$\begin{array}{ccc} & & H_c^n(V_1) \\ & \nearrow (f|_{V_1})^* & \uparrow \tau_{W, V_1} \\ H_c^n(U) & \xrightarrow{(f|_W)^*} & H_c^n(W) \\ & \searrow (f|_{V_2})^* & \downarrow \tau_{W, V_2} \\ & & H_c^n(V_2) \end{array}$$

joka kommutoi lemmän 3.9 todistuksen nojalla. Nyt havaitaan, että pätee

$$\mu(V_1, f, U) = \mu(W, f, U) = \mu(V_2, f, U),$$

sillä alueiden inkluusiot ovat alueen suunnistuksen määritelmän perusteella suunnistuksen säilyttäviä kuvauksia ja niiden kohomologiaan indusoivat kuvaukset isomorfismeja lemmän 3.13 nojalla. Täten  $(f, U)$ -kelvollisen alueen  $V$  valinta joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponentin sisältä ei vaikuta lukuun  $k$ . Jokainen  $(f, U)$ -kelvollinen piste  $y$  kuuluu yksikäsitteiseen joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponenttiin, joten kuvauksen  $f$  aste pisteessä  $y$  voidaan määritellä seuraavasti.

**Määritelmä 3.21.** Olkoot  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  avoin jatkuva kuvaus ja  $U \subset \mathcal{M}$  sellainen prekompakti alue, että  $f|_U: U \rightarrow fU$  on suunnistuksen säilyttävä ankara kuvaus. Olkoon  $y \in \mathcal{N}$   $(f, U)$ -kelvollinen piste ja  $W \subset \mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponentti joka sisältää pisteen  $y$ . Kuvauksen  $f$  topologinen aste pisteessä  $y$  määritellään asettamalla

$$\mu(y, f, U) = \mu(W, f, U).$$

Suoraan määritelmästä seuraa, että kuvaus  $y \mapsto \mu(y, f, U)$  on vakio jokaisessa joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponentissa.

Tärkein topologisen indeksin käsittelyyn työssä käytettävistä tuloksista on seuraava, jonka antamaa kaavaa (10) ympäristöjen topologiselle asteelle kutsutaan jatkossa summakaavaksi.

**Lause 3.22.** *Olkoot  $U_0$  alue,  $f: U_0 \rightarrow \mathcal{N}$  jatkuva avoin kuvaus,  $U_1, \dots, U_k \subset U_0$  erillisiä avoimia joukkoja ja  $V \subset \mathcal{N}$  alue, joka on  $(f, U_j)$ -kelvollinen jokaisella  $j = 0, 1, \dots, k$  ja jolle pätee*

$$(f^{-1}V) \cap U_0 \subset \bigcup_{j=1}^k U_j.$$

Tällöin topologinen aste  $\mu(V, f, U_0)$  voidaan laskea kaavalla

$$(10) \quad \mu(V, f, U_0) = \sum_{j=1}^k \mu(V, f, U_j).$$

*Todistus.* Merkitään  $V_j^{-1} := U_j \cap f^{-1}V$ , kun  $j = 0, \dots, k$ . Nyt asteen määritelmän nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \mu(V, f, U_0)\mu_{U_0} &= (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \circ (f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left( (f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \right). \end{aligned}$$

Lemman 3.5 nojalla pätee

$$(\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left( (f|_{V_0^{-1}})^* \mu_V \right) = \sum_{j=1}^k (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left( (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right)$$

ja kaikilla  $j = 1, \dots, k$  on voimassa

$$\begin{aligned} (\tau_{V_0^{-1}, U_0}) \left( (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right) &= (\tau_{V_j^{-1}, U_0}) \left( (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \right) \\ &= (\tau_{V_j^{-1}, U_0}) \circ (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{U_j, U_0}) \circ (\tau_{V_j^{-1}, U_j}) \circ (f|_{V_j^{-1}})^* \mu_V \\ &= (\tau_{U_j, U_0}) \mu(V, f, U_j) \mu_{U_j} \\ &= \mu(V, f, U_j) \tau_{U_j, U_0}(\mu_{U_j}) \\ &= \mu(V, f, U_j) \mu_{U_0}. \end{aligned}$$

Täten pätee

$$\mu(V, f, U_0)\mu_{U_0} = \sum_{j=1}^k \mu(V, f, U_j)\mu_{U_0}.$$

Tämä todistaa väitteen. □

Tarkastelemalla alueen topologisen asteen sijasta pisteen topologista astetta saadaan seuraava muotoilu äskeisestä lauseesta. Myös kaavaa (11) kutsutaan työssä summakaavaksi.

**Korollaari 3.23.** *Olkoot  $U_0$  alue,  $f: U_0 \rightarrow \mathcal{N}$  avoin jatkuva kuvaus,  $U_1, \dots, U_k \subset U_0$  erillisiä avoimia joukkoja ja  $y \in \mathcal{N}$  piste, joka on  $(f, U_j)$ -kelvollinen piste kaikilla  $j = 0, 1, \dots, k$  ja jolle pätee  $f^{-1}\{y\} \cap U_0 \subset \bigcup_{j=1}^k U_j$ . Tällöin saadaan yhtälö*

$$(11) \quad \mu(y, f, U_0) = \sum_{j=1}^k \mu(y, f, U_j).$$

Olkoot  $A_1$  ja  $A_2$  alueita suunnistetun moniston  $\mathcal{M}$  alueessa  $U$  ja oletetaan, että  $x \in A_1 \cap A_2$  on piste, jolle pätee

$$\overline{A_j} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\},$$

missä  $j \in \{1, 2\}$ . Tällöin  $x$  on sekä  $(f, A_1)$ - että  $(f, A_2)$ -kelvollinen ja korollaarin 3.23 perusteella

$$\mu(f(x), f, A_1) = \mu(f(x), f, U) = \mu(f(x), f, A_2).$$

Aste  $\mu(f(x), f, U)$  ei siis riipu ympäristöstä  $U$ , jos pätee  $x \in U$  ja

$$\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\}.$$

Tällainen ympäristö löytyy aina, kun kuvaus on diskreetti ja avoin. Täten voidaan antaa seuraava määritelmä.

**Määritelmä 3.24.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä sekä  $x \in \mathcal{M}$ . Kuvauksen  $f$  lokaali indeksi  $i(x; f)$  pisteessä  $x$  on aste  $\mu(f(x), f, U)$ , kun  $U$  on pisteen  $x$  prekompakti ympäristö, jolle pätee:*

- (i) Rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow fU$  on suunnistuksen säilyttävä kuvaus kahden suunnistetun moniston välillä.
- (ii) Piste  $x$  on  $(f, U)$ -kelvollinen ja toteuttaa ehdon  $\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x)\} = \{x\}$ .

**Määritelmä 3.25.** *Kahden suunnistetun moniston  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  välistä haarautuvaa peitekuvausta  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  sanotaan *suunnistuksen säilyttäväksi*, mikäli kaikilla  $x \in \mathcal{M}$  pätee  $i(x; f) \geq 0$ .*

Soveltamalla summakaavaa (11) tilanteessa, jossa ympäristöt  $U_j$ ,  $j \geq 1$ , ovat kuten määritelmässä 3.24, saadaan seuraava korollaari.

**Korollaari 3.26.** *Oletetaan korollaarin 3.23 oletuksien lisäksi, että joukoille  $U_j$  pätee*

$$\#(\overline{U_j} \cap f^{-1}\{y\}) \leq 1.$$

Tällöin on voimassa

$$(12) \quad \mu(y, f, U_0) = \sum_{z \in f^{-1}\{y\}} i(z; f).$$

Kaavaa (12) kutsutaan *indeksikaavaksi*.

Myöhempiä tuloksia varten otetaan käyttöön vielä yksi indeksikäsite, joka on luonteeltaan aikaisempia geometrisempi.

**Määritelmä 3.27.** Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  avoin diskreetti kuvaus kahden moniston välillä ja  $U \subset \mathcal{M}$  joukko. Kuvauksen  $f$  *geometrinen aste pisteen  $y \in \mathcal{N}$  suhteen joukossa  $U$*  on

$$N(y, f, U) = \#(U \cap f^{-1}\{y\}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Lisäksi merkitään  $N(f, U) := \sup_{x \in U} N(f(x), f, U)$ .

Indeksikaava (12) laskee pisteen  $y$  topologisen asteen  $\mu(y, f, U)$  summana lokaaleista indekseistä  $i(\cdot; f)$  ylitse joukon, joka antaa pisteen  $y$  geometrisen asteen  $N(y, f, U)$ . Myöhemmin lemmassa 4.7 saadaan tämän huomion avulla lokaali äärellinen yläraja haarautuvan peitekuvauksen lokaalille multiplisiteetille.

Seuraava lemma kertoo, että funktioina lokaali indeksi ja geometrinen aste käyttäytyvät komplementaarisella tavalla.

**Lemma 3.28.** *Olko  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä ja  $U \subset \mathcal{M}$  prekompakti alue. Tällöin*

(a) *kuvaus  $x \mapsto i(x; f)$  on ylhäältä puolijatkua, ja*

(b) *kuvaus  $x \mapsto N(f(x), f, U)$  on alhaalta puolijatkua.*

*Todistus.* Olko  $x_0 \in \mathcal{M}$  ja  $(x_n)$  jono, joka suppenee kohti pistettä  $x_0$ . Todistetaan, että tällöin on voimassa

$$(13) \quad i(x_0; f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} i(x_n; f).$$

Olko  $U$  pisteen  $x_0$  normaaliympäristö, jolle pätee  $\overline{U} \cap f^{-1}\{f(x_0)\} = \{x_0\}$ . Nyt on voimassa  $i(x_0; f) = \mu(f(x_0), f, U)$ , ja on olemassa sellainen  $n_0 > 0$ , että pätee  $x_n \in U$  kaikilla  $n \geq n_0$ . Kaikilla  $n \geq n_0$  saadaan epäyhtälöketju

$$i(x_0; f) = \mu(f(x_0), f, U) = \mu(f(x_n), f, U) = \sum_{z \in U \cap f^{-1}\{f(x_n)\}} i(z; f) \geq i(x_n; f).$$

Tämä todistaa epäyhtälön (13), josta puolestaan seuraa, että kuvaus  $x \mapsto i(x; f)$  on ylhäältä puolijatkua.

Todistetaan seuraavaksi kohta (b). Koska joukko  $U$  on prekompakti, niin geometrinen aste  $N(f(x_0), f, U)$  on äärellinen. Täten voidaan valita erilliset ympäristöt  $U_0, \dots, U_k$  joukon  $U \cap f^{-1}\{f(x_0)\}$  pisteille  $\{y_0, \dots, y_k\}$ . Olkoon

$$V := U_0 \cap f^{-1} \bigcap_j fU_j.$$

Tällöin kaikilla pisteillä  $x \in V$  pätee epäyhtälö

$$N(f(x), f, U) \geq N(f(x_0), f, U).$$

Tämä todistaa väitteen. □



Kappaleen viimeisinä tuloksina tarkastellaan topologisen indeksin rajakäyt-  
täytymisestä.

**Lemma 3.29.** *Olkoot  $U, W \subset \mathbb{R}^n$  sellaisia prekompakteja alueita, että  $\overline{U} \subset W$ , ja olkoot  $f, g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$  avoimia jatkuvia kuvauksia, jolle pätee  $fU \cap gU \neq \emptyset$ . Olkoon  $V \subset fU \cap gU$  avoin joukko, joka toteuttaa ehdon*

$$(14) \quad \min(d(V, f\partial U), d(V, g\partial U)) \geq 2\|f - g\|_\infty.$$

Tällöin  $V$  on sekä  $(f, U)$ - että  $(g, U)$ -kelvollinen alue ja pätee

$$\mu(V, f, U) = \mu(V, g, U).$$

*Todistus.* Oletuksista seuraa suoraan, että  $V$  on sekä  $(f, U)$ -kelvollinen että  $(g, U)$ -kelvollinen alue. Olkoon  $F: U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$  janahomotopia

$$(x, t) \mapsto tf(x) + (1 - t)g(x).$$

Ehdon (14) perusteella pätee

$$V \cap F\partial(U \times I) = \emptyset.$$

Täten kuvaus  $F|_{F^{-1}V \cap U \times I}$  on ankara. Nyt lauseen 3.7 perusteella

$$(\tau_{U \cap f^{-1}V, U}) \circ (f|_{f^{-1}V \cap U})^* = (\tau_{U \cap g^{-1}V, U}) \circ (g|_{f^{-1}V \cap U})^*,$$

eli erityisesti pätee  $\mu(V, f, U) = \mu(V, g, U)$  kuten haluttiin.  $\square$

Seuraava lause on luonteeltaan eräänlainen Hurwitzin lause.

**Lause 3.30.** *Olkoon  $(f_j)$  jono haarautuvia peitekuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joka sup-  
penee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti haarautuvaa peitekuvausta  $g: B^n \rightarrow$   
 $\mathbb{R}^n$ . Tällöin kaikilla pisteillä  $x_0 \in B^n$  pätee*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(g(x_0), f_j, U) = \mu(g(x_0), g, U),$$

missä  $U$  on pisteen  $x_0$  normaaliympäristö kuvauksen  $g$  suhteen, jolle pätee  $\overline{U} \subset B^n$ .

*Todistus.* Olkoot  $x_0 \in B^n$  ja  $U$  sellainen pisteen  $x_0$  normaaliympäristö kuvauksen  $g$  suhteen, että on voimassa  $\overline{U} \subset B^n$ . Tällöin pätee  $R := d(g(x_0), g\partial U) > 0$ . Olkoon  $j_0$  niin suuri, että epäyhtälö  $\|g - f_j\|_\infty < \frac{R}{4}$  on voimassa kaikilla  $j \geq j_0$ . Nyt saadaan epäyhtälöt

$$d(g(x_0), f_j\partial U) \geq \frac{3R}{2} \quad \text{ja} \quad d(f_j(x_0), g(x_0)) \leq \frac{R}{4}$$

kaikilla  $j \geq j_0$ . Tästä seuraa, että kaikilla  $j \geq j_0$  pätee  $B(g(x_0), \frac{3R}{4}) \subset f_j U$ . Täten avoin joukko

$$V := B\left(g(x_0), \frac{R}{4}\right)$$

on  $(g, U)$ -kelvollinen ja  $(f_j, U)$ -kelvollinen kaikilla  $j \geq j_0$ . Lemman 3.29 perusteella kaikilla  $j \geq j_0$  pätee yhtälö  $\mu(V, g, U) = \mu(V, f_j, U)$ . Tämä todistaa väitteen, sillä pisteet  $f_j(x_0)$  ja  $g(x_0)$  sisältyvät joukkoon  $V$  kaikilla  $j \geq j_0$ .  $\square$

## 4 Haarautuvien peitekuvausten perusominaisuuksista

Tässä luvussa todistetaan muutamia aputuloksia haarautuvien peitekuvausten perusominaisuuksista.

### 4.1 Haarajoukon topologisista ominaisuuksista

Tässä kappaleessa todistetaan, että haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi monistoa lokaalisti missään pisteessä. Tulos todistettiin alunperin lähteessä [Čer64], mutta todistusta yksinkertaistettiin noin vuosi myöhemmin lähteessä [Väi66]. Tuloksesta seuraa erityisesti, että haarajoukon komplementti on suoristuvasti yhtenäinen polkumetrisillä monistoilla. Haarajoukon ominaisuuksien todistukset seuraavat pääosin lähdeettä [Väi66].

Haarajoukon sisäpisteettömyys on luonteeltaan geometrinen ominaisuus ja suoraviivainen todistaa.

**Lemma 4.1.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä ja  $x \in B_f$ . Tällöin pisteen  $x$  jokaiselle normaaliympäristölle  $U$ , jolle pätee  $N(f, U) < \infty$  on voimassa*

$$N(f(x), f, U) < N(f, U) < \infty.$$

*Todistus.* Olkoon  $U$  jokin pisteen  $x$  normaaliympäristö, jolle pätee  $N(f, U) < \infty$ . Tehdään vastaoletus, että pisteen  $x \in B_f$  kuvalla  $f(x)$  olisi maksimaalinen geometrinen aste alueessa  $U$ . Valitaan erilliset ympäristöt  $U_j \subset U$  joukon

$$f^{-1}\{f(x)\} \cap U$$

pisteille  $x_1, \dots, x_k$ . Voidaan olettaa, että  $x_1 = x$ . Merkitään

$$V = U_1 \cap f^{-1}\left(\bigcap_j fU_j\right).$$

Tällöin kaikilla  $y \in V$  pätee  $U_j \cap f^{-1}\{f(y)\} \neq \emptyset$  kaikilla  $j = 1, \dots, k$ . Koska pisteen  $x$  geometrinen indeksi on maksimaalinen, pätee  $N(f(y), f, V) = 1$  kaikilla  $y \in V$ . Täten kuvaus  $f|_V$  on injektio ja siten lokaali homeomorfismi pisteessä  $x$ , mikä on ristiriita.  $\square$

**Lause 4.2.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä. Tällöin joukolla  $B_f$  ei ole sisäpisteitä.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että joukko  $B_f$  sisältää prekompaktin avoimen joukon  $V$ . Koska kuvaus  $f$  on diskreetti ja ympäristö  $V$  prekompakti, niin kaikilla  $x \in V$  on voimassa  $N(f(x), f, V) < \infty$ . Joukko  $V$  voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j,$$

missä joukot

$$V_j := \{x \in V \mid N(f(x), f, V) \leq j\}$$

ovat suljettuja lemmän 3.28 nojalla. Täten Bairen lauseen nojalla on olemassa sellainen  $j_0 \in \mathbb{N}$ , että joukolla  $V_{j_0}$  on sisäpisteitä. Valitaan tämän joukon  $V_{j_0}$  sisältä jokin normaaliympäristö  $U$ . Koska pätee  $N(f, U) \leq j < \infty$ , niin kuvaus  $z \mapsto N(z, f, U)$  saavuttaa joukossa  $U$  suurimman arvonsa. Tämä on ristiriidassa lemmän 4.1 kanssa. Joukolla  $B_f$  ei siis ole sisäpisteitä.  $\square$

Seuraavaksi todistetaan, ettei haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko voi separoida lähtömonistoa missään pisteessä, eli että kaikilla pisteillä  $p \in B_f$  ja alueilla  $D \ni p$  joukko  $D \setminus B_f$  on yhtenäinen. Todistuksen ideana on näyttää, että jos haarajoukko separoi moniston  $\mathcal{M}$  lokaalisti jossain pisteessä, niin löytyy alue  $D$  ja haarajoukon sulkeuman sellainen osajoukko  $A$ , että  $D \setminus A$  koostuu kahdesta komponentista, jotka  $f$  kuvaa homeomorfishesti samalle alueelle  $D'$ . Tällöin joukko  $A \cap D$  kuvautuu alueen  $D'$  reunalle vaikka se sisältää välttämättä alueen  $D$  sisäpisteen. Tämä on mahdotonta, sillä kuvaus  $f|_D$  on avoin kuvaus.

Aloitetaan todistamalla muutama aputuloks. Seuraava lemma todistuksineen on lähteestä [Väi66, Lemma 5.2.].

**Lemma 4.3.** *Olko  $U_1, U_2 \subset \mathcal{M}$  erillisiä alueita, joille pätee  $\partial U_1 = \partial U_2$  ja  $\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \neq \mathcal{M}$ . Tällöin ei ole olemassa homeomorfismia  $f: \overline{U_1} \rightarrow \overline{U_2}$ , jolle pätee  $f|_{\partial U_1} = \text{id}$ .*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus: on olemassa homeomorfismi  $f: \overline{U_1} \rightarrow \overline{U_2}$ , jolle pätee  $f|_{\partial U_1} = \text{id}$ .

Korollarin 3.10 nojalla jono

$$\dots \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial(U_1 \cup U_2)) \xrightarrow{d} H_c^n(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H_c^n(\overline{U_1 \cup U_2}) \longrightarrow \dots$$

on eksakti ja lemmän 3.13 nojalla  $H_c^n(\overline{U_1 \cup U_2}) = 0$ . Koska alueet  $U_1$  ja  $U_2$  ovat erillisiä, mutta niillä on sama reuna, niin pätee  $\partial U_1 = \partial(U_1 \cup U_2)$ . Tästä saadaan eksakti jono

$$\dots \longrightarrow H_c^{n-1}(\overline{U_1 \cup U_2}) \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial U_1) \xrightarrow{d} H_c^n(U_1 \cup U_2) \longrightarrow 0,$$

josta seuraa, että homomorfismi  $d$  on surjektio.

Korollarin 3.10 nojalla jonot

$$\dots \longrightarrow H_c^{n-1}(\partial U_i) \xrightarrow{d_i} H_c^n(U_i) \longrightarrow H_c^n(\overline{U_i}) \longrightarrow H_c^{n+1}(\partial U_i) \longrightarrow \dots,$$

missä  $i \in \{1, 2\}$ , ovat eksakteja. Kuvauksen  $f$  rajoittuma joukkoon  $U_1$  määrittelee homeomorfismin  $g = f|_{U_1}: U_1 \rightarrow U_2$ . Täten saadaan kommutiiva kaavio

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{d_1} & H_c^n(U_1) \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow g^* \\ H_c^{n-1}(\partial U_2) & \xrightarrow{d_2} & H_c^n(U_2), \end{array}$$

missä kuvaus  $g^*$  on isomorfismi. Erityisesti  $d_1 = g^* \circ d_2$ .

Koska alueet  $U_1$  ja  $U_2$  ovat erillisiä, niin joukko  $U_i$  on suljettu avaruudessa  $U_1 \cup U_2$ , jolloin inklusio  $\iota_i: U_i \hookrightarrow U_1 \cup U_2$  indusoi homomorfismin

$$\iota_i^*: H_c^n(U_1 \cup U_2) \rightarrow H_c^n(U_i),$$

kun  $i \in \{1, 2\}$ . Täten saadaan aikaan kaksi kommutoivaa kaaviota

$$\begin{array}{ccc} H_c^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{d} & H_c^n(U_1 \cup U_2) \\ & \searrow d_i & \downarrow \iota_i^* \\ & & H_c^n(U_i), \end{array}$$

missä  $i \in \{1, 2\}$ . Koska alueet  $U_1$  ja  $U_2$  ovat erillisiä, niin ryhmä  $H_c^n(U_1 \cup U_2)$  on isomorfinen ryhmän  $H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$  kanssa ja kuvaus

$$(\iota_1^* \oplus \iota_2^*): H_c^n(U_1 \cup U_2) \rightarrow H_c^n(U_1) \oplus H_c^n(U_2)$$

on isomorfismi. Näin ollen

$$d(a) = (d_1(a), d_2(a)) = (g^* \circ d_2(a), d_2(a)).$$

Tämä on ristiriita, sillä homomorfismi  $d$  on surjektio, mutta se ei voi saada arvoja jotka ovat muotoa  $(b, 0)$ , missä  $b \neq 0$ . Täten väite on todistettu.  $\square$

**Lemma 4.4.** *Olko  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  suunnistettuja monistoja sekä  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  suljettu haarautuva peitekuvaus, jolle pätee  $N(f, \mathcal{M}) < \infty$ . Olkoon lisäksi  $A \subset \mathcal{M}$  suljettu joukko, jolle  $\mathcal{M} \setminus A$  on epäyhtenäinen ja kaikilla  $x \in A$  on voimassa  $N(f(x), f, \mathcal{M}) = 1$ . Tällöin jokainen joukon  $\mathcal{M} \setminus A$  komponentti  $U$  kuvautuu surjektiivisesti jollekin joukon  $\mathcal{N} \setminus fA$  komponentille  $V$ . Rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow U$  on tällöin suljettu kuvaus ja kaikilla  $y \in V$  on voimassa  $\mu(y, f, U) = \pm 1$ .*

*Todistus.* Koska  $f$  on jatkuva ja  $f^{-1}fA = A$ , sisältyy jokainen joukon  $\mathcal{M} \setminus A$  komponentti  $U$  johonkin joukon  $\mathcal{N} \setminus fA$  komponenttiin  $V$ . Olkoon  $E$  joukon  $U$  suljettu osajoukko. Tällöin pätee  $E = \overline{E} \cap U$ , missä sulkeuma  $\overline{E}$  otetaan moniston  $\mathcal{M}$  suhteen. Oletuksista seuraa, että kuvaus  $f$  on suljettu, joten joukko  $f\overline{E} \cap V$  on suljettu komponentissa  $V$ . Selvästi on voimassa  $fE \subset f\overline{E} \cap V$ . Lisäksi pätee  $V \cap fA = \emptyset$ , joten on voimassa  $f\overline{E} \cap V \subset fE$ . Täten joukko  $fE = f\overline{E} \cap V$  on suljettu komponentissa  $V$ , eli kuvaus  $f|_U: U \rightarrow V$  on suljettu. Koska kuvaus  $f$  on avoin, pätee  $fU = V$ , eli rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow V$  on myös surjektio. Surjektiivisena haarautuvana peitekuvauksena, jolle pätee  $N(f, U) < \infty$ , rajoittuma  $f|_U: U \rightarrow V$  on ankara kuvaus.

Osoitetaan seuraavaksi, että rajoittuma  $f|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \partial V$  on homeomorfismi. Koska  $N(f(x), f, \mathcal{M}) = 1$  kaikilla  $x \in A$ , niin rajoittuma  $f|_A$  on injektio. Koska  $\partial U \subset A$ , niin myös rajoittuma  $f|_{\partial U}$  on injektio. Täten riittää näyttää, että rajoittuma  $f|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \partial V$  on surjektio, sillä se on tällöin bijektiivinen avoin ja suljettu jatkuva kuvaus ja täten homeomorfismi. Koska pätee

$$V \cap f\partial U \subset V \cap fA = \emptyset,$$

niin on voimassa  $f\partial U \subset \partial V$ . Toisaalta, koska  $f$  on suljettu ja  $fU = V$ , niin  $f\overline{U} = \overline{V}$ . Täten

$$\partial V = f\overline{U} \setminus fU \subset f\partial U.$$

Täten  $f\partial U = \partial V$  ja rajoittuma  $f|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \partial V$  on homeomorfismi.

Väitteen  $\mu(y, f, U) = \pm 1$  todistamiseksi kaikilla  $y \in V$  riittää osoittaa, että rajoittuman  $g := f|_U: U \rightarrow V$  indusoima kuvaus  $g^*: H_c^n(V) \rightarrow H_c^n(U)$  on surjektio, sillä surjektiivinen homomorfismi  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  on välttämättä isomorfismi. Merkitään  $h := f|_{\partial U}: \partial U \rightarrow \partial V$ . Yhdistämällä pitkään eksaktiin jonoon (7) kuvausten  $g$  sekä  $h$  indusoimat homomorfismit saadaan seuraava kommutoiva kaavio:

$$\begin{array}{ccccc} H_c^{n-1}(\partial U) & \xrightarrow{d} & H_c^n(U) & \longrightarrow & H_c^n(\overline{U}) \\ h^* \uparrow & & g^* \uparrow & & \\ H_c^{n-1}(\partial V) & \longrightarrow & H_c^n(V) & & \end{array}$$

Lemman 3.13 nojalla pätee  $H_c^n(\overline{U}) = 0$ , joten kuvaus  $d$  on surjektio. Koska kaavio kommutoi ja kuvaus  $h^*$  on homeomorfismin indusoimana kuvauksena isomorfismi, on kuvaus  $g^*$  välttämättä surjektio. Tämä todistaa väitteen.  $\square$

Todistetaan seuraavaksi tämän kappaleen päätulos.

**Lause 4.5.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä. Tällöin kuvauksen  $f$  haarajoukko  $B_f$  ei separoi lokaalisti lähtömonistoa  $\mathcal{M}$  missään pisteessä.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus: joukko  $B_f$  separoi moniston  $\mathcal{M}$  lokaalisti jossain pisteessä. Tällöin on olemassa moniston  $\mathcal{M}$  prekompakti alue  $X$ , jonka haarajoukko  $B_f$  separoi lokaalisti jossain pisteessä. Erityisesti joukko

$$S_f = \{x \in X \cap B_f \mid \text{joukko } B_f \text{ separoi alueen } X \text{ lokaalisti pisteessä } x\}$$

on epätyhjä. Olkoon  $S$  joukon  $S_f$   $X$ -sulkeuma, eli  $S = \overline{S_f} \cap X$ .

Koska  $X$  on prekompakti, niin pätee  $N(f(x), f, X) < \infty$  kaikilla  $x \in X$ . Suljettu joukko  $S$  voidaan esittää numeroituvana yhdisteenä

$$S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j,$$

missä joukot

$$S_j := \{x \in S \mid N(f(x), f, V) \leq j\}$$

ovat suljettuja lemmän 3.28 nojalla. Täten Bairen lauseen nojalla on olemassa sellainen  $j_0 \in \mathbb{N}$ , että joukolla  $S_{j_0}$  on sisäpisteitä joukon  $S$  suhteen. Täten on olemassa sellainen alue  $G \subset X$ , että joukolla  $A := G \cap S \subset S_{j_0}$  on sisäpisteitä joukon  $S$  suhteen ja erityisesti pätee  $N(x, f, G) \leq j_0$  kaikilla  $x \in S$ .

Voidaan siis valita piste  $x_1 \in A$ , jonka geometrinen indeksi  $N(f(x_1), f, G)$  on maksimaalinen joukossa  $A$ . Olkoon nyt  $f^{-1}\{f(x_1)\} = \{x_1, \dots, x_j\}$ . Valitaan pisteille  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, j\}$  erilliset ympäristöt  $V_i$  ja merkitään

$$V := V_1 \cap f^{-1}\left(\bigcap_i fV_i\right).$$

Nyt on voimassa  $N(f(x_1), f, V) = 1$ . Koska pisteellä  $x_1$  on maksimaalinen geometrinen indeksi joukossa  $A$ , niin  $N(f(x), f, V) = 1$  pätee kaikilla  $x \in A \cap V$ ; vertaa lemmän 4.1 todistus.

Joukko  $A \cap V =: A'$  sisältää määritelmänsä nojalla pisteen  $p$ , jossa joukko  $A'$  separoi joukon  $G$  lokaalisti. Olkoon siis  $D \subset G$  pisteen  $p$  sellainen yhtenäinen normaaliympäristö kuvauksen  $f$  suhteen, että  $D \setminus A'$  on epäyhtenäinen. Nyt voidaan soveltaa lemmaa 4.4, jonka mukaan kuvaus  $f$  rajoittuu homeomorfismiksi joukossa  $A'$  ja kuvaa kaikki joukon  $D \setminus A'$  komponentit homeomorfisesti joukon  $fD \setminus f(D \cap A')$  komponenteille.

Koska piste  $p$  kuuluu haarajoukkoon, niin kuvaus  $f|_D$  ei voi olla pisteessä  $p$  lokaalisti injektiivinen lauseen 2.8 nojalla. Täten löytyy kaksi joukon  $D \setminus A'$  komponenttia  $U_1$  ja  $U_2$ , joiden kuvajoukot  $fU_1$  ja  $fU_2$  leikkaavat. Koska lemmän 4.4 nojalla kuvaus  $f$  kuvaa joukon  $D \setminus A'$  komponentit homeomorfisesti joukon  $fD \setminus fA'$  komponenteille, ovat kuvajoukot  $fU_1$  ja  $fU_2$  välttämättä samat. Lisäksi koska kuvauksen  $f$  rajoittuma joukkoon  $A'$  on homeomorfismi, on kuvaus

$$(f|_{\overline{U_2 \cap D}})^{-1} \circ (f|_{\overline{U_1 \cap D}}): \overline{U_1 \cap D} \rightarrow \overline{U_2 \cap D}$$

myös homeomorfismi, jonka rajoittuma reunalle on identtinen kuvaus. Täten lemmän 4.3 nojalla alueet  $U_1$  ja  $U_2$  ovat ainoat joukon  $D \setminus A'$  komponentit.

Tämä on ristiriita, sillä nyt joukossa  $fD \setminus f(D \cap A')$  on vain yksi komponentti, jolle alueet  $U_i$  kuvautuvat homeomorfisesti. Erityisesti alueen  $D$  sisäpisteisiin sisältyvä joukko  $A \cap D$  kuvautuu alueen  $fD$  reunalle, mikä on mahdotonta, koska kuvaus  $f|_U$  on avoin.  $\square$

### Haarajoukon kuvan topologisista ominaisuuksista

Haarautuvan peitekuvauksen haarajoukon kuva on myöskin sisäpisteetön eikä separoi monistoa lokaalisti. Tätä tulosta ei käytetä jatkossa, mutta seuraavassa käydään läpi väitteen todistus. Mikäli  $X$  on topologinen avaruus, niin avaruuden  $X$  *kohomologiseksi dimensioksi* (kohomologiateorian  $H^*(\cdot)$  suhteen) sanotaan pienintä lukua  $k \in \mathbb{N}$ , jolle pätee  $H^{j+1}(K) = 0$  kaikilla  $j \geq k$  ja kaikilla kompakteilla joukoilla  $K \subset X$ .

Koska haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa, niin lauseen [Bor60, I.4.9.b] nojalla sen kohomologinen dimensio Alexander-Spanier-kohomologian suhteen on enintään  $n-2$ . Koska sekä Alexander-Spanier-, että Čech-kohomologia ovat kummatkin lyhdekohomologioita ([War83, Chapter 5]), niin tuloksen [War83, Corollary, s. 184] nojalla kohomologinen dimensio Alexander-Spanier -kohomologian suhteen on sama kuin kohomologinen dimensio Čech-kohomologian suhteen. Edelleen kohomologinen dimensio Čech-kohomologian suhteen on haarajoukon tilanteessa lähteen [Eng78, s. 95] nojalla sama kuin peitedimensio, joka puolestaan yhtyy topologiseen dimensioon lauseen [Eng78, Proposition 1.6.9.] nojalla. Erityisesti siis haarajoukon topologinen dimensio  $\dim_{\mathcal{T}}(B_f)$  on enintään  $n-2$ .

Koska on voimassa  $\dim_{\mathcal{T}}(B_f) \leq n-2$ , niin lauseen [CH60, Lemma 2.1.] nojalla pätee  $\dim_{\mathcal{T}}(fB_f) \leq n-2$ . Topologisen dimension määritelmästä seuraa, että joukolla  $fB_f$  ei täten ole sisäpisteitä, ja soveltamalla lausetta [HW41, Theorem IV.4., s. 48] huomataan, ettei haarajoukon kuva separoi lokaalisti maalimonistoa.

## 4.2 Haarautuvan peitekuvauksen topologisesta asteesta

Käyttämällä edellisessä kappaleessa haarajoukolle todistettuja ominaisuuksia saadaan lisää tietoa haarautuvien peitekuvauksen geometriasta.

**Lause 4.6.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun  $n$ -moniston välillä,  $U \subset \mathcal{M}$  prekompakti epätyhjä alue ja  $V \subset \mathcal{N}$   $(f, U)$ -kelvollinen alue. Tällöin  $\mu(V, f, U) > 0$ .*

*Todistus.* Merkitään  $g := f|_U: U \rightarrow fU$ . Kappaleen 4.1 huomioiden nojalla tiedetään, että joukko  $fB_f \subset \mathcal{N}$  on sisäpisteeton eikä separoi monistoa  $\mathcal{N}$  lokaalisti. Koska ympäristö  $U$  on prekompakti ja joukko  $B_f$  on suljettu, niin joukko  $f[B_f \cap \overline{U}]$  on kompaktin joukon kuvana suljettu. Tästä seuraa, että joukko  $gB_g$  on suljettu joukossa  $fU$ . Lisäksi kuvauksen topologista astetta pisteen suhteen määriteltäessä huomattiin, että  $(f, U)$ -kelvollisen alueen  $V$  valinta joukon  $\mathcal{N} \setminus f\partial U$  komponentin sisältä ei vaikuta topologiseen asteeseen. Täten voidaan olettaa, että  $V \cap gB_g = \emptyset$ . Edelleen voidaan olettaa, että alue  $V$  on sellainen, että kuvauksen  $g$  rajoittuma joukon  $g^{-1}V$  mihin tahansa komponenttiin  $U_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , on homeomorfismi.

Nyt kaavan (10) nojalla aste  $\mu(V, f, U)$  voidaan laskea homeomorfisten rajoittumien  $f|_{U_j}: U_j \rightarrow V$  asteiden summana. Homeomorfismien topologinen aste on  $\pm 1$  ja koska haarajoukko ei separoi lokaalisti lähtöjoukkoa, ei aste voi vaihtaa merkkiä. Täten  $\mu(V, f, U) \geq 1$ , sillä kuvaus oletettiin suunnistuksen säilyttäväksi, ja väite on todistettu.  $\square$

Yhdistämällä lause 4.6 sekä summakaava (11) nähdään, että suunnistuksen säilyttävälle kuvaukselle pätee seuraava lemma, joka antaa yhteyden haarautuvan peitekuvauksen topologian ja geometrian välille.

**Lemma 4.7.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  suunnistuksen säilyttävä haarautuva peitekuvaus kahden suunnistetun moniston välillä. Mikäli  $U \subset \mathcal{M}$  on alue, niin pätee*

$$\mu(f(x), f, U) \geq N(f(y), f, U) \quad \text{ja} \quad \mu(f(x), f, U) \geq i(x; f),$$

*kun  $f(x)$  on  $(f, U)$ -kelvollinen piste. Jos lisäksi  $N(f(x), f, U) = 1$ , niin*

$$\mu(f(x), f, U) = i(x; f).$$

*Toisaalta, jos  $i(x; f) = 1$  pätee kaikilla  $x \in f^{-1}\{y\} \cap U$ , niin on voimassa  $\mu(y, f, U) = N(y, f, U)$ .*

Seuraavaksi karakterisoidaan haarautuvan peitekuvauksen haarajoukko indeksin avulla.

**Lemma 4.8.** *Piste  $x$  kuuluu suunnistuksen säilyttävän haarautuvan peitekuvauksen  $f$  haarajoukkoon, jos ja vain jos pätee  $i(x; f) > 1$ .*

*Todistus.* Koska kuvaus  $f$  on avoin, niin lauseen 2.8 perusteella  $f$  on pisteessä  $x$  lokaali homeomorfismi, jos ja vain jos se on pisteessä  $x$  lokaali injektio.

Oletetaan ensin, ettei kuvaus  $f$  ole lokaali injektio pisteessä  $x$ . Tällöin kaikilla  $x \in B_f \cap U$  pätee lemmän 4.7 nojalla

$$\mu(f(x), f, U) = \mu(y, f, U) \geq N(y, f, U) \geq 2,$$

kun  $y$  on pisteen  $f(x)$   $(f, U)$ -kelvollisessa ympäristössä oleva piste, jolla on enemmän kuin yksi alkukuva. Toisaalta, jos  $f$  on lokaali homeomorfismi jossain pisteen  $x$  ympäristössä  $U$ , niin  $f|_U: U \rightarrow fU$  indusoi isomorfismin  $H_c^n(fU) \rightarrow H_c^n(U)$ . Tällöin  $fU$  on triviaalisti  $(f, U)$ -kelvollinen ympäristö pisteelle  $f(x)$ , joten pätee  $\mu(f(x), f, U) = 1$ .

Tämä todistaa väitteen.  $\square$

Yhdistämällä lemmän 4.8 ja lemmän 4.7 huomiot nähdään, että kaikilla  $y \notin fB_f$  pätee

$$\mu(y, f, U) = N(y, f, U),$$

kun  $y$  on  $(f, U)$ -kelvollinen piste. Koska kappaleen 4.1 nojalla haarajoukon kuva on sisäpisteetön, pätee haarautuvalle peitekuvaukselle

$$(15) \quad \mu(y, f, U) = \sup_{z \in V} N(z, f, U),$$

kun  $V$  on pisteen  $y$  mikä tahansa  $(f, U)$ -kelvollinen ympäristö.

Seuraava korollaari seuraa välittömästi yhdistämällä lause 3.30 ja lemma 4.8.

**Korollaari 4.9.** *Olkoon  $(f_j)$  jono haarautuvia peitekuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti haarautuvaa peitekuvausta  $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Mikäli kuulan  $B^n$  suppenevalle jonolle  $(x_n)$  pätee  $x_j \in B_{f_j}$  äärettömän monella  $j \in \mathbb{N}$ , niin*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j \in B_g.$$

### 4.3 Polkujen nostaminen

Tässä kappaleessa todistetaan BLD-kuvauksiin liittyviä polunnosto-ominaisuuksia. BLD-kuvauksilla voi nimittäin nostaa polkuja hieman peitekuvausten tapaan: erona peitekuvauksiin on kuitenkin se, ettei nostojen tarvitse olla yksikäsitteisiä. Olkoon  $t > 0$  ja  $\Delta_t$  kumpi tahansa väleistä  $[0, t)$  tai  $[0, t]$ .

**Määritelmä 4.10.** Olkoot  $\mathcal{M}$  monisto,  $0 < s \leq t$ , sekä  $\gamma: [0, t] \rightarrow \mathcal{M}$ . Polku  $\alpha: \Delta_s \rightarrow \mathcal{M}$  on polun  $\gamma$  nosto pisteestä  $x \in f^{-1}\{a\}$ , jos pätee  $f \circ \alpha = \gamma|_{\Delta_s}$  ja  $\alpha(0) = x$ .

Nosto  $\alpha: \Delta_s \rightarrow \mathcal{M}$  on *maksimaalinen*, mikäli ei ole olemassa polun  $\gamma$  nostoa  $\alpha': \Delta_{s'} \rightarrow \mathcal{M}$ , jolle pätee  $\alpha'|_{\Delta_s} = \alpha$  kun  $\Delta_s \subsetneq \Delta_{s'}$ .

**Määritelmä 4.11.** Olkoot  $x_1, \dots, x_k \in f^{-1}\{a\}$  erillisiä pisteitä. Kokoelmaa polkuja  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  on sanotaan *maksimaaliseksi kokoelmaksi polun  $\gamma$  nostoja pisteistä  $\{x_1, \dots, x_k\}$* , mikäli

- (i) jokainen polku  $\alpha_j$  on polun  $\gamma$  maksimaalinen nosto jostain pisteestä  $x_i$ ,
- (ii) kaikilla  $j$  on voimassa  $\#\{j \mid \alpha_j(0) = x_i\} = i(x_i; f)$ ,
- (iii) kaikilla  $x \in \mathcal{M}$  ja kaikilla  $t$  on voimassa  $\#\{j \mid \alpha_j(t) = x\} \leq i(x; f)$ .

Seuraava lause on kirjan [Ric93] lause 3.22. Todistus perustuu polkujen lokaaliin nostamiseen ja päätekniikkana käytetään induktiota pisteiden lokaalin indeksin suhteen.



**Lause 4.12.** *Olkoon  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarautuva peitekuvaus kahden moniston välillä,  $a$  ja  $b$  moniston  $\mathcal{N}$  kaksi pistettä ja  $\gamma: a \curvearrowright b$  polku. Tällöin millä tahansa kokoelmalla erillisiä pisteitä  $\{x_1, \dots, x_k\} \subset f^{-1}\{a\}$  on olemassa maksimaalinen kokoelma nostoja.*

**Korollaari 4.13.** *Olkoot  $\mathcal{M}$  täydellinen polkumetrinen monisto,  $\mathcal{N}$  monisto,  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  BLD-kuvaus,  $\gamma: a \curvearrowright b$  polku, joka yhdistää kaksi moniston  $\mathcal{N}$  pistettä sekä  $x \in f^{-1}\{a\}$ . Tällöin on olemassa polun  $\gamma$  maksimaalinen nosto  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ , jolle pätee  $\tilde{\gamma}(0) = x$  ja  $f \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ .*

*Todistus.* Väite seuraa siitä, että lähtömoniston ollessa täydellinen, on maksimaalisen noston määrittelyjoukon oltava suljettu väli. Toisaalta suljetulla välillä määriteltävä polun nostoa voidaan jatkaa lauseen 4.12 nojalla, joten korollaarin tilanteessa maksimaalinen nosto toteuttaa halutut ehdot.  $\square$

Korollaarissa 4.13 mainittua nostoa kutsutaan jatkossa *täydelliseksi nostoksi*.

## 5 Konvergenssituloksia

Tässä kappaleessa todistetaan BLD-kuvausten rajakäyttäytymiseen liittyviä tuloksia. Korollaarina saadaan lause, jonka mukaan BLD-kuvauksen haarajoukon komplementti on aina kvasikonvekssi alue.

Rajakuvauksien olemassaolon osoittamiseksi käytetään Arzelà-Ascolin lausetta. Lauseen muotoilua varten määritellään, että kokoelma  $\mathcal{F}$  kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on *yhtäjatkuva*, mikäli jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen luku  $\delta > 0$ , että  $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$  kaikilla  $f \in \mathcal{F}$  ja  $x, y \in B^n$ , joilla pätee  $d(x, y) < \delta$ .

**Lause 5.1** (Arzela-Ascolin lauseen erikoistapaus). *Olkoon  $\mathcal{F}$  yhtäjatkuva kokoelma kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joille pätee*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_\infty < \infty.$$

*Tällöin jokaisella kokoelman  $\mathcal{F}$  jonolla  $(f_n)$  on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti joukon  $\mathcal{F}$  kuvausta.*

*Todistus.* Todistus tilanteessa, jossa kuvaukset ovat metriseltä avaruudelta kompleksilukujen joukolle löytyy lähteestä [Rud87, Theorem 11.28]. Todistus on identtinen tilanteessa  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $\square$

Todistuksissa tarvitaan muutamia Lipschitz-analyttisiä perustuloksia, jotka seuraavaksi esitellään. Seuraavan lauseen todistus löytyy esimerkiksi kirjasta [Hei05, Theorem 3.1.].

**Lause 5.2** (Rademacherin lause). *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -Lipschitz kuvaus. Tällöin kuvaus  $f$  on differentioitua melkein kaikkialla. Erityisesti kuvauksen  $f$  Jacobin determinantti  $J_f$  on määritelty melkein jokaisessa pisteessä ja  $|J_f(x)| \leq L^n$  melkein kaikilla  $x \in B^n$ .*

Seuraava tulos on nimeltään Lipschitz-kuvausten pinta-alakaava. Lause todistuksineen löytyy esimerkiksi lähteestä [EG92, Theorem 1, p. 96].

**Lause 5.3.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -Lipschitz kuvaus. Tällöin jokaiselle mitalliselle joukolla  $A \subset B^n$  pätee*

$$\int_A |J_f| = \int_{fA} N(y, f, A) dm(y).$$

Seuraavan lemmän todistus seuraa lauseen [Ric93, 4.14 Proposition (b)] todistusta Lipschitz-analyysin hengessä.

**Lemma 5.4.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  haarautuva peitekuvaus, joka on Lipschitz. Niissä kuvauksen  $f$  haarajoukon pisteissä  $x \in B_f$ , joissa kuvaus  $f$  on differentioituva, pätee  $J_f(x) = 0$ .*

*Todistus.* Oletetaan, että  $x_0$  on piste, jossa kuvaus  $f$  on differentioituva ja pätee  $J_f(x_0) \neq 0$ . Olkoon  $r > 0$  sellainen, että

$$B_r := B(x_0, r) \subset B^n$$

ja  $N(f(x_0), f, \overline{B}_r) = 1$ . Koska  $f(x_0) \notin f\partial\overline{B}_r$ , niin on voimassa

$$c := d(f(x_0), \partial f B_r) > 0.$$

Tällöin kaikilla  $t \in [0, 1]$  ja  $\mathbf{v} \in B(0, \frac{c}{2L})$  pätee

$$\begin{aligned} d\left(\frac{f(x_0 + t\mathbf{v}) - f(x_0)}{t}, 0\right) &= \left\| \frac{f(x_0 + t\mathbf{v}) - f(x_0)}{t} \right\| = \frac{\|f(x_0 + t\mathbf{v}) - f(x_0)\|}{|t|} \\ &\leq \frac{L\|t\mathbf{v}\|}{|t|} = L\|\mathbf{v}\| < L\frac{c}{2L} < c. \end{aligned}$$

Lisäksi kuvaukset

$$g_j: B_r \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto \frac{f(x_0 + j^{-1}\mathbf{v}) - f(x_0)}{j^{-1}}$$

suppenevat tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti rajakuvausta  $\mathbf{v} \mapsto Df(x_0)\mathbf{v}$ , joten lemmän 3.30 nojalla jollain  $j \in \mathbb{N}$  pätee, että kuvauksilla

$$\mathbf{v} \mapsto Df(x_0)\mathbf{v} \quad \text{ja} \quad \mathbf{v} \mapsto g_j(\mathbf{v})$$

on sama lokaali indeksi origossa. Lisäksi kuvauksen  $g_j$  indeksi origossa on sama kuin kuvauksen  $f$  indeksi pisteessä  $x_0$ .

Oletuksen  $J_f(x_0) \neq 0$  nojalla  $i(0; Df(x_0)) = \pm 1$ , sillä lineaarinen bijektio on aina homeomorfismi. Näin ollen  $i(x_0; f) = 1$ , sillä kuvaus  $f$  on suunnistuksen säilyttävä. Erityisesti  $x_0 \notin B_f$  lemmän 4.8 perusteella ja väite on todistettu.  $\square$

**Lemma 5.5.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  haarautuva peitekuvaus, joka on Lipschitz. Tällöin*

$$m(f B_f) = 0.$$

*Todistus.* Lemman 5.4 nojalla BLD-kuvauksen Jacobin determinantti on nolla niissä haarajoukon pisteissä, joissa se on määritelty. Täten pinta-alakaavan nojalla on voimassa

$$m(f B_f) \leq \int_{f B_f} N(y, f, B_f) dy = \int_{B_f} |J_f| = 0.$$

Tämä todistaa väitteen.  $\square$

Polkujen nostamisen sekä pinta-alakaavan avulla voidaan rajoittaa BLD-kuvauksen geometrista astetta. Seuraava lause todistuksineen on lähteestä [MV88, Theorem 4.12.]

**Lause 5.6.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -BLD -kuvaus. Tällöin kaikilla  $r \in (0, 1)$  on voimassa*

$$N(f, B^n(0, r)) \leq L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

*Todistus.* Voidaan olettaa, että  $f(0) = 0$ . Todistetaan, että mielivaltaisella  $y \in \mathbb{R}^n$  pätee

$$N(y, f, B^n(0, r)) \leq L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

Kuula  $B^n(0, r)$  on prekompakti, joten joukko  $f^{-1}\{y\} \cap B^n(0, r)$  on äärellinen, koska kuvaus  $f$  on diskreetti. Merkitään

$$\{x_1, \dots, x_k\} := f^{-1}\{y\} \cap B^n(0, r),$$

missä  $k = N(y, f, B^n(0, r))$ . Asetetaan  $b = L^{-1}(1-r)$  ja määritellään jokaisella  $e \in S^{n-1}$  polku

$$\beta_e: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \beta_e(t) = te.$$

Olkoon  $\{\alpha_e^1, \dots, \alpha_e^m\}$  polun  $\beta_e$  maksimaalinen kokoelma nostoja pisteistä

$$\{x_1, \dots, x_k\}$$

jokaisella  $e \in S^{n-1}$ . Nyt jokaisella  $e \in S^{n-1}$  ja kaikilla  $j = 1, \dots, m$  pätee

$$\ell(\alpha_e^j) \leq L\ell(f \circ \alpha_e^j) \leq L\ell(\beta_e) = 1-r.$$

Tästä seuraa, että nostot  $\alpha_e^j$  ovat täydellisiä, sillä kullakin on positiivinen etäisyys yksikkökuulan  $B^n$  reunaan.

Maksimaalisen kokoelman ominaisuuksista seuraa, että jokaisella

$$z \in B^n(0, b) \setminus f B_f$$

pätee  $N(z, f, B^n) \geq m \geq k$ . Soveltamalla pinta-alakaavaa sekä tietoa  $m(f B_f) = 0$  saadaan

$$\begin{aligned} \int_{B^n} |J_f(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} N(z, f, B^n) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus f B_f} N(z, f, B^n) dz \\ &\geq km(B^n(0, b)) \\ &= km(B^n)b^n. \end{aligned}$$

Koska  $|J_f(x)| \leq L^n$  melkein kaikilla  $x \in B^n$ , niin pätee

$$k \leq L^n b^{-n} = L^{2n}(1-r)^{-n}.$$

Tämä todistaa väitteen. □

## 5.1 LQ- ja BLD-kuvausten konvergenssista

Tässä luvussa todistetaan yksi tämän työn päätuloksista: jos  $(f_j)$  on jono  $L$ -BLD -kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joille pätee  $f_j(0) = 0$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$ , niin jonolla  $(f_j)$  on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti  $L$ -BLD -kuvausta  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Lokaalisti tasaisesti suppeneva osajono löydetään soveltamalla Arzela-Ascolin lausetta. Tämän jälkeen osoitetaan, että rajakuvaus on suunnistuksen säilyttävä diskreetti  $L$ -LQ -kuvaus ja todistetaan, että diskreetti LQ-kuvaus on BLD-kuvaus. Viimeksi mainittua tulosta kirjoittaja ei ole nähnyt mainittavan kirjallisuudessa.

Tässä kappaleessa LQ-kuvaus  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on LQ-kuvaus joukon  $B^n \subset \mathbb{R}^n$  suhteen.

*Huomautus 5.7.*  $L$ -LQ -kuvaus on aina avoin  $L$ -Lipschitz -kuvaus. On avoin kysymys onko LQ-kuvaus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diskreetti kuvaus, kun  $n \geq 3$ . (Katso esimerkiksi [BJL<sup>+</sup>99].) Tästä seuraisi tässä kappaleessa todistettavien lauseiden 5.8 sekä 5.14 nojalla, että BLD-kuvausten ja LQ-kuvausten luokat ovat samat.

**Lause 5.8.** *Olkoon  $\mathcal{M}$  täydellinen polkumetrinen monisto,  $A \subset \mathcal{M}$  ja  $f: A \rightarrow \mathcal{N}$   $L$ -BLD -kuvaus. Tällöin  $f$  on joukon  $A$  suhteen  $L$ -LQ-kuvaus.*

*Todistus.* Olkoon  $B^n(x, r)$  kuula, joka sisältyy joukkoon  $A$ . Väite

$$fB^n(x, r) \subset B^n(f(x), Lr)$$

seuraa siitä, että  $L$ -BLD -kuvaus on aina  $L$ -Lipschitz kuvaus.

Inklusio

$$B^n(f(x), L^{-1}r) \subset fB^n(x, r)$$

riittää todistaa sellaisille pisteille  $x \in A$  ja säteille  $r > 0$ , joille pätee, että  $\overline{B}^n(x, r) \subset A$ . Tämä seuraa siitä, että tällöin kaikilla  $r_0 > 0$ , joilla on voimassa  $B^n(x, r_0) \subset A$ , pätee

$$B^n(f(x), L^{-1}r_0) = \bigcup_{0 < r < r_0} B^n(f(x), L^{-1}r) \subset \bigcup_{0 < r < r_0} fB^n(x, r) \subset fB^n(x, r_0).$$

Tehdään vasta oletus, että on olemassa sellainen piste  $x_0 \in A$  sekä säde  $r_0 > 0$ , että  $\overline{B}^n(x_0, r_0) \subset A$ , mutta

$$B^n(f(x_0), L^{-1}r_0) \not\subset fB^n(x_0, r_0).$$

Tällöin on olemassa piste  $z \in \partial fB^n(x_0, r_0)$ , jolle pätee, että  $d(z, f(x_0)) < L^{-1}r_0$ . Olkoon  $0 < \varepsilon < L^{-1}r_0 - d(z, f(x_0))$ , valitaan geodeesi  $\alpha: f(x_0) \xrightarrow{\mathcal{G}} z$ , asetetaan

$$t_0 = \sup\{t \mid [0, \alpha(t)] \subset fB^n(x_0, r_0)\}$$

ja merkitään  $z_0 := \alpha(t_0)$ .

Valitaan rajoittumalle  $\alpha|_{[0, t_0]}$  täydellinen nosto  $\beta$  pisteestä  $x_0$  ja jatketaan se poluksi  $\gamma: [0, t_0] \rightarrow \mathcal{M}$ . Nyt  $\gamma(t_0) \in \partial B(x_0, r_0)$ , sillä kuvaus  $f$  on avoin. Kyseinen polku  $\gamma$  yhdistää siis pisteen  $x_0$  kuulan  $B(x_0, r_0)$  reunaan, mutta polun  $\gamma$  pituus on

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \ell(\beta) \leq L\ell(f \circ \beta) = L\ell(\alpha) = Ld(z_0, f(x_0)) \\ &\leq Ld(z, f(x_0)) < LL^{-1}r_0 = r_0, \end{aligned}$$

eli  $\ell(\gamma) < r_0$ . Tämä on ristiriita, sillä kuulan  $B(x_0, r_0)$  keskipisteen etäisyys reunasta on  $r_0$ . Väite on täten todistettu.  $\square$

Lauseesta 5.8 saadaan pääteltyä myös seuraava fakta.

**Korollaari 5.9.** *Olko  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$  polkumetrisiä monistoja sekä  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  BLD-kuvaus. Jos monisto  $\mathcal{M}$  on täydellinen, niin kuvaus  $f$  on surjektio.*

**Lause 5.10.** *Olko  $(f_j)$  jono  $L$ -LQ -kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Mikäli jono  $(f_j)$  suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , niin rajakuvaus  $f$  on  $L$ -LQ.*

*Todistus.* Rajakuvaus  $f$  on  $L$ -Lipschitz, sillä se on  $L$ -Lipschitz -kuvausten lokaalisti tasainen raja. Erityisesti on voimassa  $fB(x, r) \subset B(f(x), Lr)$  kaikilla  $x \in B^n$  ja  $r > 0$ .

Olko  $x_0 \in B^n$  ja  $r \in (0, 1 - \|x_0\|)$ . Todistetaan, että kaikilla  $0 < r' < r$  pätee

$$fB(x_0, r) \supset B(f(x_0), L^{-1}r').$$

Olko  $y \in B(f(x_0), L^{-1}r')$ . Tasaisen suppenemisen perusteella on olemassa sellainen  $k_0 \in \mathbb{N}$ , että kaikilla  $k \geq k_0$  on voimassa

$$y \in B(f_k(x_0), L^{-1}r') \subset f_k B(x_0, r').$$

Täten jokaisella  $k \geq k_0$  voidaan kiinnittää piste

$$x_k \in B(x_0, r') \cap f_k^{-1}\{y\}.$$

Jonolle  $(x_k)$  löytyy kompaktisuuden perusteella osajono joka suppenee kohti pistettä

$$z \in \overline{B}(x_0, r') \subset B(x_0, r).$$

Rajakuvauksen jatkuvuuden perusteella on voimassa  $f(z) = y$ , joten

$$fB(x_0, r) \supset B(f(x_0), L^{-1}r').$$

Väite on täten todistettu.  $\square$

Seuraava lemma on lähteestä [Ric93, Lemma 8.8.].

**Lemma 5.11.** *Olko  $(f_j)$  jono  $L$ -Lipschitz-kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta. Tällöin suppenevan jonon Jacobin determinantit suppenevat heikosti kohti rajakuvauksen Jacobin determinanttia.*

**Propositio 5.12.** *Olko  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -LQ -kuvaus. Tällöin*

$$m(B_f) = 0.$$

*Todistus.* Tehdään vastaoletus,  $m(B_f) > 0$ . Valitaan haarajoukon tiheyspiste  $x_0$ , ja olko  $r_j \in \mathbb{R}_+$ ,  $j \in \mathbb{N}$  sellaisia lukuja, joille pätee

$$\frac{m(B_f \cap B(x_0, r_j))}{m(B(x_0, r_j))} > (1 - j^{-1}).$$

Tällöin kuvaukset

$$f_j: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_j(x) = \frac{f(x_0 + r_j x) - f(x_0)}{r_j},$$

ovat sellaisia  $L$ -LQ -kuvauksia, että on voimassa  $m(B_{f_j}) > 1 - j^{-1}$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$ . Lauseiden 5.1 ja 5.8 sekä lemmän 5.10 nojalla jonolla  $(f_j)$  on osajono, joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti  $L$ -LQ -kuvausta  $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Koska niissä haarajoukon  $B_{f_j}$  pisteissä  $x$ , joissa BLD-kuvauksen Jacobin determinantti on määritelty, pätee  $J_{f_j}(x) = 0$ , niin erityisesti kaikilla  $j \in \mathbb{N}$  on voimassa

$$m(J_{f_j}^{-1}\{0\}) \geq m(B_{f_j}) > 1 - j^{-1}.$$

Täten lemmän 5.11 nojalla  $J_g(x) = 0$  melkein kaikilla  $x \in B^n$ . Toisaalta pinta-alakaavan nojalla

$$0 < m(B^n(0, L^{-1})) \leq m(gB^n) \leq \int_{gB^n} N(y, g, B^n) dy = \int_{B^n} |J_g| = 0.$$

Tämä on ristiriita ja väite on todistettu. □

Jatkossa merkitään

$$\ell(Df(x)) := \min_{|v|=1} |Df(x)v|,$$

kun  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on Lipschitz-kuvaus.

Seuraava lemma on lähteestä [MV88, Lemma 2.15.]

**Lemma 5.13.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -Lipschitz-kuvaus, jolle pätee*

$$L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq |Df(x)| \leq L \quad \text{ja} \quad J_f(x) \geq 0$$

*melkein kaikilla  $x \in B^n$ . Tällöin kaikilla poluilla  $\alpha: [0, 1] \rightarrow B^n$  on voimassa*

$$L^{-1} \ell(\alpha) \leq \ell(f \circ \alpha) \leq L \ell(\alpha).$$

Seuraava lause on muokattu versio lauseesta [MV88, Theorem 2.16].

**Lause 5.14.** *Olkoon  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   $L$ -LQ -kuvaus. Jos  $f$  on diskreetti, niin  $f$  on  $L$ -BLD.*

*Todistus.* Haarajoukon määritelmästä seuraa, että  $B^n \setminus B_f$  on avoin joukko. Lisäksi diskreetti LQ-kuvaus on haarautuva peitekuvaus, joten kappaleen 4.1 nojalla haarajoukko on sisäpisteetön eikä separoi lähtömonistoa  $B^n$  lokaalisti.

Proposition 5.12 nojalla kuvaus  $f$  on melkein kaikkialla lokaalisti  $L$ -bilipschitz, sillä homeomorfinen  $L$ -LQ-kuvaus on  $L$ -bilipschitz-kuvaus. Tätten melkein kaikkialla pätee, että

$$L^{-1} \leq \ell(Df(x)) \leq |Df(x)| \leq L.$$

Soveltamalla lemmän 5.4 todistusta nähdään, että kaikissa pisteissä  $x \in B^n$  joissa kuvauksen  $f$  Jacobin determinantti on määritelty, pätee  $i(x; f) = \text{sign } J_f(x)$ . Koska haarajoukko ei separoi lähtömonistoa  $B^n$  lokaalisti, ei topologinen indeksi

$i(\cdot; f)$  vaihda merkkiä haarajoukon komplementissa. Täten myöskään kuvauksen  $f$  Jacobin determinantti ei vaihda merkkiään positiivimittaisessa joukossa. Erityisesti pätee  $J_f(x) \geq 0$  ( $J_f(x) \leq 0$ ) melkein kaikilla  $x \in B^n$  mikäli kuvaus  $f$  on suunnistuksen säilyttävä (kääntävä). Täten lemmän 5.13 nojalla kuvaus  $f$  toteuttaa BLD-kuvausten määritelmässä esiintyvän epäyhtälön (5) (sivulla 11). Nyt kuvaus  $f$  on  $L$ -BLD -kuvaus, sillä se on oletuksen mukaan diskreetti, LQ-kuvauksena avoin kuvaus ja lemmän 5.13 nojalla toteuttaa polkujen pituuksiin liittyvän epäyhtälön.  $\square$

Lauseen 5.14 soveltamista varten osoitetaan, että BLD-kuvausten jonon lokaalisti tasainen raja on diskreetti kuvaus.

**Lause 5.15.** *Olkoon  $(f_j)$  jono  $L$ -BLD -kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joille pätee  $f_j(0) = 0$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$  ja jotka suppenevat tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Tällöin rajakuvaus  $f$  on diskreetti.*

*Todistus.* Tehdään vasta oletus, että kuvaus  $f$  ei ole diskreetti. Tällöin on olemassa sellainen piste  $y \in \mathbb{R}^n$ , että joukolla  $f^{-1}\{y\}$  on kasautumispiste  $x_0 \in B^n$ . Voidaan olettaa, että  $x_0 = 0$  ja  $f(0) = 0$ .

Koska kuulassa  $B^n(0, \frac{1}{2})$  on äärettömän monta pisteen 0 alkukuvaa, niin jokaisella  $k \in \mathbb{N}$  on olemassa säde  $r_k > 0$  sekä sellaiset pisteet  $x_1, \dots, x_k \in f^{-1}\{y\}$ , että kuulat  $B^n(x_j, r_k)$  ovat erillisiä ja  $B^n(x_j, r_k) \subset B^n(0, \frac{1}{2})$ , kun  $j = 1, \dots, k$ . Valitaan  $\varepsilon = \frac{r_k}{4L}$  ja sellainen indeksi  $j_0$ , että  $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon$ . Tällöin kaikilla  $j \in 1, \dots, k$  pätee  $f_{j_0}(x_j) \in B^n(0, \varepsilon)$ . Koska kuvaus  $f_{j_0}$  on  $L$ -LQ, niin erillisten kuulien  $B^n(x_j, r_k)$  kuvajoukkojen leikkaus

$$\bigcap_{j=1}^k f_{j_0} B^n(x_j, r_k)$$

on epätyhjä. Erityisesti kuvaukselle  $f_{j_0}$  pätee siis

$$N(f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \geq N(0, f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \geq k.$$

Toisaalta lauseen 5.6 nojalla

$$N(f_{j_0}, B^n(0, \frac{1}{2})) \leq L^{2n} 2^{-n},$$

josta seuraa ristiriita valitsemalla  $k > L^{2n} 2^{-n}$ . Väite on täten todistettu.  $\square$

**Lause 5.16.** *Olkoon  $(f_j)$  jono  $L$ -BLD -kuvauksia  $B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joille pätee  $f_j(0) = 0$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$ . Tällöin on olemassa jonon  $(f_j)$  osajono  $(g_j)$  joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti  $L$ -BLD -kuvausta  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

*Todistus.* Koska kuvaukset  $f_j$  ovat  $L$ -Lipschitz -kuvauksia, niin perhe  $\{f_j \mid j \in \mathbb{N}\}$  on yhtäjatkuva. Täten Arzela-Ascolin lauseen perusteella on olemassa jonon  $(f_j)$  osajono  $(g_j)$  joka suppenee tasaisesti kompakteissa joukoissa kohti jatkuvaa kuvausta  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Koska lauseen 5.8 perusteella  $L$ -BLD -kuvaukset ovat aina  $L$ -LQ -kuvauksia, niin lauseen 5.10 nojalla kuvaus  $f$  on  $L$ -LQ. Lisäksi lauseen 5.15 nojalla  $f$  on diskreetti. Nyt lauseen 5.14 nojalla kuvaus  $f$  on  $L$ -BLD -kuvaus ja väite on todistettu.  $\square$

## 5.2 Haarajoukon komplementin geometria

Tässä kappaleessa todistetaan, että BLD-kuvauksen haarajoukon komplementti on kvasikonvekksi alue, kun lähtö- ja maalimonisto ovat geometrisia monistoja. Väite ja sen todistus on mukailtu versio artikkelin [MV88] tuloksista, joka puolestaan nojaa osittain lähteeseen [Väi88].

**Määritelmä 5.17.** Olkoon  $c \geq 1$ . Metrinen avaruuden  $X$  osajoukko  $A$  on  $c$ -*pullea*, jos kaikilla  $x \in A$  ja  $r \in (0, \text{diam}(A))$  on olemassa sellainen piste  $z \in \overline{B}(x, r)$ , että on voimassa  $B(z, \frac{r}{c}) \subset A$ .

**Lause 5.18.** *Olko  $n \geq 2$  ja  $L \geq 1$ . Tällöin on olemassa sellainen vakio  $c := c(n, L)$ , että jokaisella  $L$ -BLD -kuvauksella  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  joukko  $B^n \setminus B_f$  on  $c$ -pullea.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että jokaisella  $j \geq 0$  on olemassa sellainen  $L$ -BLD -kuvaus  $f_j: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , että joukko  $B^n \setminus B_{f_j}$  ei ole  $j$ -pullea. Tällöin joukko  $B_{f_j}$  on  $\frac{2}{j}$ -täysi joukossa  $B^n$ , eli pätee

$$\overline{B}^n(B_{f_j}, \frac{2}{j}) \cap B^n = B^n.$$

Täten jokaisella  $j$  löytyy sellainen piste  $a_j \in B^n \setminus B_{f_j}$  ja säde  $r_j \in (0, 2)$ , että kaikille  $z \in \overline{B}^n(a_j, r_j)$  pätee  $d(z, B_{f_j}) \leq \frac{2r_j}{j}$ . Merkitään  $a'_j = (1 - \frac{r_j}{2})a_j$ , jolloin pätee

$$B^n(a'_j, \frac{r_j}{2}) \subset B^n(0, r_{f_j}) \cap B^n(a_j, r_j).$$

Nyt kuvausten

$$g_j: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g_j(x) = \frac{r_j}{2} \left( f_j(a'_j + \frac{2}{r_j}x) - f(a'_j) \right)$$

haarajoukoille pätee  $d(z, B_{g_j}) \leq 4j^{-1}$  kaikilla  $j$  ja kaikilla  $z \in B^n$ . Lauseen 5.16 perusteella jonolla  $g_j$  on osajono  $h_j$  joka suppenee kohti  $L$ -BLD -kuvausta  $h: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Korollaarin 4.9 mukaan kuvausten  $h_j$  haarajoukot suppenevat pisteittäin kohti kuvauksen  $h$  haarajoukkoa. Lisäksi jokaisella  $z \in B^n$  pätee  $d(z, B_h) \leq 4j^{-1}$  kaikilla  $j$ . Näin ollen  $B_h$  on koko  $B^n$ , sillä haarajoukko  $B_h$  on suljettu kuulassa  $B^n$ . Tämä on ristiriita, sillä haarajoukolla ei voi olla sisäpisteitä.  $\square$

**Määritelmä 5.19.** Olkoon  $c \geq 1$ . Metrinen avaruuden kuulat  $B(x_1, r_1)$  ja  $B(x_2, r_2)$  muodostavat  $c$ -*parin*, mikäli pätee

- (a)  $\frac{1}{2}r_1 \leq r_2 \leq 2r_1$  ja
- (b)  $d(x_1, x_2) \leq 4c \max(r_1, r_2)$ .

Seuraava tulos on artikkelista [Väi88, Lemma 2.14].

**Lause 5.20.** *Olkoon  $A \subset X$  metrinen avaruuden  $c$ -pullea osajoukko ja olko  $a$  ja  $b$  joukon  $A$  kaksi pistettä, joiden etäisyyttä merkitään  $d(a, b) = r > 0$ . Tällöin on olemassa sellaiset joukon  $A$  jonot  $(a_j)$  ja  $(b_j)$ , joille pätee*



(a)  $d(a_j, a) \leq 2^{-j}r$  ja  $d(b_j, b) \leq 2^{-j}r$  kaikilla  $j \geq 0$ ,

(b) Pari  $(B_1, B'_1)$  sekä parit  $(B_j, B_{j+1})$  ja  $(B'_j, B'_{j+1})$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$  ovat  $c$ -pareja, missä

$$B_j := B(a_j, 2^{-j} \frac{r}{c}) \quad \text{ja} \quad B'_j := B(b_j, 2^{-j} \frac{r}{c}),$$

(c)  $B_j, B'_j \subset A$  kaikilla  $j \in \mathbb{N}$ .

*Todistus.* Muodostetaan jono  $(a_j)$ , jonon  $(b_j)$  konstruktio on identtinen. Olkoon  $j \in \mathbb{N}$ . Koska joukko  $A$  on  $c$ -pullea, niin kuulasta  $\overline{B}(a, 2^{-j}r)$  löytyy piste  $a_j$ , jolle pätee  $B(a_j, 2^{-j} \frac{r}{c}) \subset A$ . Selvästi on voimassa  $d(a_j, a) \leq 2^{-j}r$  ja  $d(b_j, b) \leq 2^{-j}r$  kaikilla  $j$ .

Näytetään seuraavaksi, että  $(B_1, B'_1)$  ja  $(B_j, B_{j+1})$  ovat  $c$ -pareja. Koska jonon  $(a_j)$  ja  $(b_j)$  jäsenet ovat symmetrisessä asemassa, niin samalla todistuksella myös  $(B'_j, B'_{j+1})$  muodostaa  $c$ -parin jokaisella  $j \in \mathbb{N}$ .

Huomataan, että on voimassa

$$d(a_1, b_1) \leq d(a_1, a) + d(a, b) + d(b, b_1) \leq \frac{r}{2} + r + \frac{r}{2} = 4 \frac{r}{2} \leq 4c \max(\frac{r}{2c}, \frac{r}{2c}).$$

Koska kuulien  $B_1$  ja  $B'_1$  säteiden suhde on tasan 1, pari  $(B_1, B'_1)$  on  $c$ -pari. Jonon  $(a_j)$  pisteille pätee, että

$$\begin{aligned} d(a_j, a_{j+1}) &\leq d(a_j, a) + d(a, a_{j+1}) \\ &\leq 2^{-j}r + 2^{-j-1}r \\ &= (2^{-j}r)(1 + \frac{1}{2}) \\ &\leq 4c \max(\frac{r}{2^j c}, \frac{r}{2^{j+1} c}) \end{aligned}$$

ja kuulien säteiden suhde sisältyy väliin  $[\frac{1}{2}, 2]$ . Täten myös pari  $(B_j, B_{j+1})$  on  $c$ -pari jokaisella  $j \in \mathbb{N}$ . Lisäksi kuulajonojen määritelmän perusteella pätee  $B_j \cup B'_j \subset A$ .  $\square$

*Huomautus 5.21.* Edellisen lauseen antamaa ominaisuutta käytetään artikkelissa [HK95] niin sanotun ketjuehdon määrittelyyn.

Seuraava lemma todistuksineen on muokattu versio artikkelista [Väi88, Theorem 2.15.].

**Lemma 5.22.** *Olkkoon  $\mathcal{M}$  metrinen avaruus ja  $D \subset \mathcal{M}$   $c$ -pullea osajoukko. Jos jokaisen  $c$ -parin*

$$(B(x_1, r_1), B(x_2, r_2))$$

*keskipisteet  $x_1$  ja  $x_2$  voidaan yhdistää  $K$ -kvasigeodeesilla, niin  $D$  on  $2K$ -kvasikonveksi.*

*Todistus.* Olkoot  $a, b \in D$  ja  $r := d(a, b) > 0$ . Olkoot  $(a_j)$  ja  $(b_j)$  lauseen 5.20 antamat jonot. Oletuksen perusteella kaikilla  $j \geq 1$  voidaan valita  $K$ -kvasigeodeesit

$$\alpha_j: [2^{-j} - 1, 2^{-j+1} - 1] \rightarrow D, \quad \beta_j: [2 - 2^{-j+1}, 2 - 2^{-j}] \rightarrow D$$

sekä  $\gamma: [0, 1] \rightarrow D$ , missä

$$\alpha_j: a_j \rightsquigarrow a_{j+1}, \quad \beta_j: b_j \rightsquigarrow b_{j+1} \quad \text{ja} \quad \gamma: a_1 \rightsquigarrow b_1.$$

Määritellään

$$\sigma_j: [2^{-j} - 1, 2 - 2^{-j}] \rightarrow D$$

asettamalla

$$\sigma_j(t) = \begin{cases} \overleftarrow{\alpha}_j(t), & \text{kun } t \in [2^{-j} - 1, 2^{-j+1} - 1] \\ \gamma(t), & \text{kun } t \in [0, 1] \\ \beta_j(t), & \text{kun } t \in [2 - 2^{-j+1}, 2 - 2^{-j}]. \end{cases}$$

Muodostetaan  $\sigma: [-1, 2] \rightarrow D$  asettamalla

$$\sigma(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j(t).$$

Nyt saadaan epäyhtälöketju

$$\begin{aligned} \ell(\sigma) &= \sum_{j \geq 1} \ell(\alpha_j) + \ell(\gamma) + \sum_{j \geq 1} \ell(\beta_j) \\ &\leq \sum_{j \geq 1} Kd(a_j, a_{j+1}) + Kd(a_1, b_1) + \sum_{j \geq 1} Kd(b_j, b_{j+1}) \\ &\leq K \left( \sum_{j \geq 1} 2^{-j} r + r + \sum_{j \geq 1} 2^{-j} r \right) \\ &= 2Kr = 2Kd(a, b), \end{aligned}$$

Joten alue  $D$  on  $2K$ -kvasikonvekksi.  $\square$

**Lause 5.23.** *On olemassa sellainen vakio  $K := K(n, L)$ , että kaikilla  $L$ -BLD-kuvauksilla  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  joukko  $B^n \setminus B_f$  on  $K$ -kvasikonvekksi.*

*Todistus.* Palautetaan aluksi mieleen, että koska joukko  $B_f$  on sisäpisteetön ja suljettu eikä separoi lokaalisti lähtömonistoa lauseen 4.5 nojalla, on joukko  $B^n \setminus B_f$  suoristuvasti yhtenäinen.

Tehdään vasta oletus, että jokaisella  $j \geq 1$  on olemassa  $L$ -BLD-kuvaus

$$f_j: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sekä pisteet  $a_j, b_j \in B^n \setminus B_{f_j}$ , joita ei voi yhdistää haarajoukon ulkopuolella polulla, jonka pituus olisi alle  $2jd(a_j, b_j)$ .

Tällöin jokaisella  $j \geq 1$  voidaan valita sellainen jono  $(x_1^j, \dots, x_i^j)$  haarajoukon komplementin pisteitä, että peräkkäisten pisteiden välinen etäisyys on enintään puolet kummankaan pisteen etäisyydestä reunaan ja

$$\sum_{k=1}^{i-1} d(x_k^j, x_{k+1}^j) < 2d(a_j, b_j).$$

Tutkimalla tällaisten jonojen peräkkäisiä pisteitä voidaan olettaa, että on voimassa inklusio

$$B^n(a_j, 2d(a_j, b_j)) \subset B^n$$

kaikilla  $j \geq 1$ . Lisäksi lemmän 5.22 perusteella riittää tutkia haarajoukon  $B_{f_j}$  komplementtiin sisältyvien  $c$ -parien keskipisteitä, sillä lauseen 5.18 perusteella haarajoukon komplementti on aina  $c := c(L, n)$ -pullea. Täten voidaan olettaa, että pätee

$$B_j \cap B_{f_j} = \emptyset, \quad \text{missä} \quad B_j := B^n(a_j, \frac{2}{c}d(a_j, b_j)).$$

Olkoon nyt  $T_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suunnistuksen säilyttävä affiini isometria, joka vie pisteen  $a_j$  origoon ja pisteen  $b_j$  pisteelle  $\frac{c-1}{2}$  sekä  $S_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  affiini kuvaus

$$S_j(x) = 2d(a_j, b_j)(x - f(a_j))$$

Määritellään kuvaukset

$$h_j: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h_j = S_j \circ f|_{B_j} \circ (T_j|_{B_j})^{-1}.$$

Kuvaukset  $h_j$  ovat edelleen  $L$ -BLD-kuvauksia, kuvaavat origon origolle, ja pisteitä 0 ja  $\frac{c-1}{2}$  ei voi yhdistää haarajoukon ulkopuolella polulla, jonka pituus olisi alle  $j$ .

Nyt lauseen 5.16 perusteella jonolla  $(h_j)$  on osajono  $(g_j)$  joka suppenee tassisesti kompakteissa joukoissa kohti  $L$ -BLD -kuvausta  $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Koska kumpikaan pisteistä 0 tai  $\frac{c-1}{2}$  ei kuulu joukkoon  $B^n(B_{g_j}, \frac{1}{2c})$  millään  $j \geq 1$ , niin ne eivät kuulu myöskään kuvauksen  $g$  haarajoukkoon lauseen 3.30 perusteella. Joukko  $B^n \setminus B_g$  on suoristuvasti yhtenäinen, joten on olemassa suoristuva polku  $\alpha: [0, 1] \rightarrow B^n \setminus B_g$ ,  $\alpha: 0 \curvearrowright \frac{c-1}{2}$ .

Seuraavaksi näytetään, että on olemassa sellainen indeksi  $j_0$ , että kaikilla  $j \geq j_0$  pätee  $|\alpha| \cap B_{g_j} = \emptyset$ . Jos mielivaltaisen suurilla  $j$  pätsisi  $|\alpha| \cap B_{g_j} \neq \emptyset$ , niin korollarin 4.9 nojalla  $x_0 \in |\alpha| \cap B_g$ , mikä on mahdotonta. Löytyy siis haluttu  $j_0$ .

Näin ollen suoristuva polku  $\alpha$  yhdistää pisteet 0 ja  $\frac{c-1}{2}$  haarajoukon  $B_{g_j}$  ulkopuolella kaikilla  $j \geq j_0$ . Tämä on ristiriita ja väite on todistettu.  $\square$

**Lause 5.24.** *Olkoot  $\mathcal{M}$  ja  $\mathcal{N}$   $n$ -ulotteisia geometrisia monistoja ja  $L \geq 1$ . Tällöin on olemassa sellainen vakio  $K \geq 1$ , että jokaisen  $L$ -BLD-kuvauksen  $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  haarajoukon komplementti on  $K$ -kvasikonvekksi.*

*Todistus.* Olkoot  $a, b \in \mathcal{M} \setminus B_f$  ja  $\gamma: a \curvearrowright b$ . Olkoot  $C'$  ja  $R'$  sellaiset vakiot, että monistolla  $\mathcal{N}$  on  $(C', R')$ -rajoitettu geometria. Valitaan sellainen luku  $C$ , että moniston  $\mathcal{M}$  geometria on  $(C, R)$ -rajoitettu jollain  $R < \frac{R'}{L}$ . Tällöin moniston  $\mathcal{M}$  jokainen  $(C, R)$ -kartta kuvautuu moniston  $\mathcal{N}$  jonkin  $(C', R')$ -kartan sisään kuvauksessa  $f$ .

Valitaan nyt välin  $[0, 1]$  sellainen jako

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_k = 1,$$

että epäyhtälö  $d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})) < \frac{R}{2}$  on voimassa kaikilla  $j = 0, \dots, k-1$ . Tällöin erityisesti kuula

$$B_{\mathcal{M}}(\gamma(a_j), 2d(\gamma(a_j), \gamma(a_{j+1})))$$

sisältyy aina johonkin  $(C, R)$ -karttaan kaikilla  $j = 0, \dots, k-1$ . Olkoon  $\delta > 0$  ja  $\varepsilon \in (0, (2k)^{-1}(1 + \delta))$ . Valitaan jokaisella  $j = 0, \dots, k$  pisteet

$$x_j \in B_{\mathcal{M}}(\gamma(a_j), \varepsilon) \setminus B_f.$$

Voidaan olettaa, että  $\varepsilon$  on niin pieni, että jokaisella  $j = 0, \dots, k-2$  pisteet  $x_j$  ja  $x_{j+1}$  sisältyvät samaan  $(C, R)$ -karttaan.

Konjugoimalla sekä skaalaamalla kuvaus  $f$  lokaalisti  $(C, R)$ - ja  $(C', R')$ -karttoihin liittyvillä  $C$ - ja  $C'$ -bilipschitz-karttakuvauksilla  $\phi_C$  ja  $\phi_{C'}$  saadaan  $(CC'L)$ -BLD-kuvaus

$$\tilde{f}: B^n \rightarrow B^n(0, C'LR), \quad \tilde{f}(x) = \phi_{C'} \circ f \circ \phi_C^{-1} \left( \frac{C}{R}x \right).$$

Lauseen 5.23 perusteella  $B^n \setminus B_{\tilde{f}}$  on melkein  $K(C'CL, n)$ -kvasikonvekksi. Olkoon  $j \in \{0, \dots, k-1\}$ . Tällöin voidaan pisteet  $\phi_C(x_j)$  ja  $\phi_C(x_{j+1})$  yhdistää polulla  $\gamma_j: [0, 1] \rightarrow B^n \setminus B_{\tilde{f}}$ , jonka pituus on enintään

$$(K(CC'L, n) + \delta)d(\phi_C(x_j), \phi_C(x_{j+1})).$$

Polku  $\gamma_j$  kulkee erityisesti joukon  $B_{\tilde{f}}$  komplementissa, joten se voidaan siirtää kuvauksen  $\phi_C^{-1}$  avulla poluksi  $\beta_j: x_j \curvearrowright x_{j+1}$ , jolle pätee  $|\beta_j| \cap B_f = \emptyset$  ja saadaan

$$\begin{aligned} \ell(\beta_j) &\leq C\ell(\gamma_j) \\ &\leq C(K(CC'L, n) + \delta)d(\phi_C(x_j), \phi_C(x_{j+1})) \\ &\leq C^2(K(CC'L, n) + \delta)d(x_j, x_{j+1}). \end{aligned}$$

Luvun  $\varepsilon$  valinnan nojalla on voimassa

$$\sum_{j=0}^{k-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq 2(1 + \varepsilon)kd(a, b) \leq (1 + \delta)d(a, b),$$

joten polkujen  $\beta_j$  ketjulle  $\beta = \beta_1 * \dots * \beta_k$  pätee

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \sum_{j=0}^{k-1} \ell(\beta_j) = (C^2(K(CC'L, n) + \delta)) \sum_{j=0}^{k-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &\leq C^2(K(CC'L, n) + \delta)(1 + \delta)d(a, b). \end{aligned}$$

Täten haarajoukon komplementti on melkein  $C^2K(CC'L, n)$ -kvasikonvekksi.  $\square$

*Huomautus 5.25.* Mikäli monistot ovat myös infinitesimaalisesti bilipschitz-euklidisia, niin lauseessa 5.24 luvut  $C$  ja  $C'$  voidaan valita mielivaltaisen lähelle lukua 1, jolloin saadaan tulos, jonka mukaan haarajoukon komplementti on melkein  $K^*(L, n)$ -kvasikonveksiksi, missä

$$K^*(L, n) := \inf_{L' > L} K(L', n),$$

ja  $K(L, n)$  on  $L$ -BLD -kuvausten  $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  haarajoukkojen komplementtien optimaalinen kvasikonveksisuusvakio.

Konjekturoimme, että  $K^*(L, n) = K(L, n)$  kaikilla  $L \geq 2$  ja  $n \geq 2$ . Konjekturoimme lisäksi, että itse asiassa pätee  $K(L, n) = 1$  kaikilla  $L \geq 2$  ja  $n \geq 2$ .

## Viitteet

- [BJL<sup>+</sup>99] S. Bates, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, and G. Schechtman. Affine approximation of Lipschitz functions and nonlinear quotients. *Geom. Funct. Anal.*, 9(6):1092–1127, 1999.
- [Bor60] Armand Borel. *Seminar on transformation groups*. With contributions by G. Bredon, E. E. Floyd, D. Montgomery, R. Palais. Annals of Mathematics Studies, No. 46. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1960.
- [CDPT07] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [Čer64] A. V. Černavskiĭ. Finite-to-one open mappings of manifolds. *Mat. Sb. (N.S.)*, 65 (107):357–369, 1964.
- [CH60] Philip T. Church and Erik Hemmingsen. Light open maps on  $n$ -manifolds. *Duke Math. J.*, 27:527–536, 1960.
- [EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [Eng78] Ryszard Engelking. *Dimension theory*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Translated from the Polish and revised by the author, North-Holland Mathematical Library, 19.
- [Gro99] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, volume 152 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Based on the 1981 French original [MR0682063 (85e:53051)], With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [Hei05] Juha Heinonen. *Lectures on Lipschitz analysis*, volume 100 of *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics*. University of Jyväskylä, Jyväskylä, 2005.
- [HK95] Piotr Hajłasz and Pekka Koskela. Sobolev meets Poincaré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(10):1211–1215, 1995.
- [HR02] Juha Heinonen and Seppo Rickman. Geometric branched covers between generalized manifolds. *Duke Math. J.*, 113(3):465–529, 2002.
- [HW41] Witold Hurewicz and Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Mathematical Series, v. 4. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.
- [LF73] Jacqueline Lelong-Ferrand. Invariants conformes globaux sur les variétés riemanniennes. *J. Differential Geometry*, 8:487–510, 1973.

- [Mas78] William S. Massey. *Homology and cohomology theory*. Marcel Dekker Inc., New York, 1978. An approach based on Alexander-Spanier cochains, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 46.
- [Mas91] William S. Massey. *A basic course in algebraic topology*, volume 127 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [MV88] Olli Martio and Jussi Väisälä. Elliptic equations and maps of bounded length distortion. *Math. Ann.*, 282(3):423–443, 1988.
- [Ric93] Seppo Rickman. *Quasiregular mappings*, volume 26 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [Väi66] Jussi Väisälä. Discrete open mappings on manifolds. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No.*, 392:10, 1966.
- [Väi88] Jussi Väisälä. Uniform domains. *Tohoku Math. J. (2)*, 40(1):101–118, 1988.
- [War83] Frank W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983. Corrected reprint of the 1971 edition.