HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Anssi Leppäkoski

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Modernit opetussuunnitelmat matematiikan historian valossa

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Kesäkuu 2016	66 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassa tarkastellaan matematiikan historiallista kehitystä, uusimpia opetussuunnitelmia ja *New Math*-liikkeen ideoiden pohjalta luotuja opetussuunnitelmia. Historiaa käydään läpi aina varhaishistoriasta 1700-luvulle ja verrataan tätä matematiikan historiallista kehitystä opetussuunnitelmiin pohjautuvaan matematiikan opetuksen etenemiseen Opetushallituksen ohjeiden *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014* ja *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015* pohjalta. 1960- ja 1970-luvuilla vaikuttaneen *New Math*-liikkeen ideoiden synnyttämät opetussuunnitelmat tuovat erilaisen näkökulman matematiikan opetuksen etenemiseen lähtökohtien ollessa lähes täysin vastakohtaiset nykyisiin opetussuunnitelmiin ja matematiikan historialliseen kehitykseen verrattaessa. Suomalaisittain *New Math* tunnetaan nimellä *Uusi matematiikka* ja muistetaan kenties parhaiten joukko-opin sisällyttämisestä peruskouluun jo alaluokilta asti.

Tutkielmassa edetään ensin tarkastellen yleistä matematiikan historiaa ja kulttuurien filosofisia lähtökohtia matematiikan kehittymiselle. Puhtaasta historian tarkastelusta siirrytään opetussuunnitelmien vaiheittaiseen tutkimiseen samalla vertaillen opetussuunnitelmien mukaista etenemistä historialliseen kehitykseen. Tutkielmassa edetään lähtien peruskoulun alaluokista (1-2) siirtyen keskimmäisten vuosiluokkien (3-6) kautta yläluokille (7-9), jonka jälkeen tarkastellaan lukion opetusuunnitelmaa pääasiallisesti keskittyen pitkään oppimäärään. *New Math* -liikkeen historiaa ja vaikutusta opetussuunnitelmiin käydään läpi erillisessä kappaleessa samalla verraten tätä muutosta uusimpiin opetussuunnitelmiin ja matematiikan historialliseen kehitykseen.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Matematiikan historia, opetussuunnitelma, New Math

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

-

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Modernit opetussuunnitelmat matematiikan historian valossa

Anssi Leppäkoski

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tutkielman tavoitteena on perehtyä matematiikan historiaan ja uusimpiin versioihin peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmista, sekä vertailla miten eteneminen matematiikan kehittyessä eroaa ja yhtenee näiden välillä. Esimerkiksi montessoripedagogiikka perustuu lapsen oppimiseen oman tarkastelun ja päättelyn kautta, jolloin lapsi oppisi mahdollisimman luonnollisesti [60]. Tällainen luonnollinen oppiminen viittaa vahvasti historiallista kehitystä vastavaan etenemiseen vähintäänkin pääpiirteittäin, kun otetaan huomioon muuttuneen yhteiskunnan mukanaan tuoma erilainen lähtötilanne ja konteksti. Hyvin syin voidaan olettaa, että historiallinen kehitys on hyvin lähellä luontaisinta opetuksen etenemistä. On kuitenkin liian korkealentoista olettaa, että oppilas kykenisi täysin omin neuvoin kehittämään matemaattisen osaamisensa vaadittavalle tasolle vain kahdessatoista vuodessa, kun otetaan lukio huomioon, historiallisen kehityksen kestäessä tuhansia vuosia.

Opetusuunnitelmien uudistamiselle on jatkuva tarve muuttuvan yhteiskunnan asettamien vaatimusten ja heikoiksi koettujen oppimistulosten vuoksi. Jatkuva kehitys tuottaa paremmin kyseiseen aikaan sopivia opetussuunnitelmia, mutta myös epäonnistuneita kokeiluja. Tutkielman loppupuolella tarkastelemme yhtä epäonnistuneeksi tuomittua opetussuunnitelmauudistusta kappaleessa6 ja tulevaisuuden tutkijoiden tuomittavaksi jää peruskoulu-uudistuksen jälkeisten opetussuunnitelmien onnistuminen. Nykyiset opetussuunnitelmat eivät ole ainakaan katastrofaalisia epäonnistumisia vaikka kritiikille on aihetta. Heikko oppiminen aiheuttaa yhäkin huolta, kuten vuonna 2010 *Solmu*-lehdessä julkaistusta kirjoituksesta voimme päätellä.

> Hyvästä Pisa-menestyksestä huolimatta peruskoulunsa päättävien matemaattiset tiedot ja taidot ovat varsin vaatimattomia. Murtolukujen peruslaskutoimituksia ei osata, saatetaan sekoittaa yhteenlasku ja kertolasku keskenään, laskutoimitusten suoritusjärjestys on tuntematon asia ja alkeellisimmatkin prosenttilaskut ovat ylivoimaisia. Yläkoulun oppikirjoissa ei esitetä juuri minkään

> matemaattisen väittämän perustelua, mikä on johtanut katekismusmaiseen ulkolukuun. Opitaan jäljittelemään mekaanisia suorituksia, mitkä kokeen jälkeen unohtuvat, koska sisältöä ei ole ymmärretty. [14]

Opetussuunnitelmissa ei ole asetettu tarkkaa järjestystä aiheiden läpikäymiseen ja tämä antaa suhteellisen vapaat kädet opettajalle järjestyksen valinnassa. On todennäköistä, että oman matematiikan opetuksen rakenteen luomisen sijasta opettaja käyttää hyödykseen oppikirjoja ja niiden sanelemaa järjestystä. Tässä ei sinäänsä ole vikaa, koska oppikirjojen laatijoilla on pääsääntöisesti enemmän aikaa, taitoa ja kokemusta opiskelujärjestyksen laatimiseen ja sisältöjen käsittelyn vaatimien osa-alueiden määrittämiseen. Yksittäiset sisältöalueet eivät ole keskenään yhtä laajoja ja osa vaatii enemmän aikaa kuin toiset, joten alueiden pilkkominen järkevästi vaatii tarkkaa pohdintaa. Oppikirjojen noudattama järjestys saattaa olla eri kuin valtakunnallisista opetussuunnitelmien perusteista voisi päätellä, mutta oppikirjasarjojen runsas lukumäärä ja riippumattomuus toisistaan luo niin suuren työmaan, että on aiheellista jättää sivuun oppikirjojen etenemisen tutkimus tämän tutkielman osalta.

Peruskoulun alaluokkien opetuksesta vastaa nykyisellään luokanopettaja ja vaikka he omaavat suurilta osin vahvan ammattitaidon on heidän osaamisensa rajoja kritisoitu voimakkaastikin. Varsinkin matematiikan edistyneempien aiheiden opetukseen on haluttu matematiikan aineopettaja opetuksen tasoa nostamaan.

> Uusiin opetussuunnitelmiin, lakiin ja asetukseen tulee kirjata, että peruskoulussa matematiikan opetuksen hoitavat 5. luokalta alkaen aineenopettajat. [14]

Luku 2

Historiasta

Historiaan perehdytään pääasiassa Carl B. Boyerin teoksen [5][6] pohjalta ja matematiikan historiaan viittaava teksti nojaa vahvasti teokseen. Alkuun on syytä käydä läpi hieman eri kulttuurien matematiikan erityispiirteitä ja historiallisia käännekohtia, jotta historiallinen kehitys aukeaa oikeassa kontekstissaan. Matematiikan juuret ovat kaukana historiassa, joten se mitä tiedetään varhaisesta dokumentoidusta ja varsinkin dokumentoimattomasta matematiikan kehityksestä on vähintäänkin epävarmaa. Muutenkin historian tutkimukseen ja tulkintoihin tutustuttaessa täytyy pitää mielessä tieteenhaaran riippuvuus kertojasta eikä näin täysin varmaa tietoa ole varsinkaan, kun uppoudutaan kauas historiaan. Tästä huolimatta monia matematiikan kehityksen käännekohtia on pystytty ajoittamaan hyvinkin tarkasti säilyneiden dokumenttien perusteella ja varsinkin Kaksoisvirranmaasta on säilynyt erittäin paljon matemaattista tekstiä sisältäviä kirjoituksia. Helleeneiden varhainen matematiikka, vaikka onkin pääasiassa ajalta egyptiläisten ja babylonialaisten kukoistuksen jälkeen, on pääosin dokumentoimatonta, koska tieto välittyi pääasiassa verbaalisesti. Tämän lisäksi suurin osa helleenien harvoista varhaisista teksteistä on ajan saatossa kadonnut tai tuhoutunut. Myöskään ei tiedetä paljonko kulttuureiden välistä tiedonvaihtoa on ollut. Esimerkiksi ei tiedetä kehittivätkö egyptiläiset ja babylonialaiset matematiikkaansa toisistaan riippumatta. Vaikka Egyptin matematiikka olikin suuri harppaus aiemmasta, niin usein sen uranuurtavuutta on liioiteltu. Egyptiläiset eivät käyttäneet formaalia matemaattista esitystä vaan nojattiin erikoistapauksiin joita sovellettiin tilanteen mukaan ja vaikka viitteitä edistynempään matematiikan tutkimukseen onkin, niin pääasiassa lähes kaikki tuntemamme Egyptin valtakunnan aikainen matematiikka on suoraan käytännön tarpeeseen kehitettyä. Kaksoisvirranmaasta on säilynyt huomattavasti enemmän kirjoitettua matemaattista aineistoa kuin Egyptistä ja babylonialaisten matematiikka vahvasti vaikuttaa olleen kehittyneempää. Kaksoisvirranmaan laakson kulttuuri oli kehityksessä Egyptin sivilisaation tasolla. Geometrisiä kuvioita käytettiin kotien ja temppeleiden koristeluun. Käytetty nuolenpääkirjoitus on ehkä varhaisin kirjoituksen muoto (noin 5000 eaa) ja todennäköisesti myös Egyptin hieroglyfejä vanhempi. Kaksoisvirranmaan kirjoituksessa sama sana saatettiin esittää monella eri tapaa ja muutenkin kirjoitus oli hyvin vaihtelevaa aina Hammurabin dynastiaan (1800-1600eaa) asti. Samoihin aikoihin kaksoisvirranmaassa käytetty kuusikymmenjärjestelmä sulautui ja vakiintui modernien kulttuurien kymmenjärjestelmäksi. Kuusikymmenjärjestelmä on kuitenkin säilynyt nykypäivään asti muun muassa ajan (1 min = 60 s) ja kulman (1 kierros = 6x60 astetta) mittaamisessa.

Esihelleeniseltä ajalta ei ole säilynyt todisteita todistusten tarpeellisuudesta tai loogisiin periaatteisiin liittyvää tarkastelua. Suuri osa esihelleenisestä matematiikasta oli hyvin käytännönläheistä ja abstraktin matematiikan puute näkyy selkeästi. Käytännönläheisyys selittyy toimeentulon varmistamisella, joka on ymmärrettävää, joskin myös "viihdematematiikkaa" on vähäisen vapaa-ajan puitteissa esiintynyt. Autolykhokseksen (~360-290 eaa [48]) käsialaa on tiettävästi vanhin säilynyt kreikkalainen matemaattinen kirjoitus, joka on selkeä, mutta ei sinäänsä merkittävä teos. Teoksen oppikirjamaisuudesta voidaan päätellä, että todennäköisesti sen julkaisun aikoihin (~320 eaa) Kreikassa oli jo käytössä laajasti geometrian oppikirjoja.

Esihelleenien käyttämä attikalainen numeromerkintä oli roomalaisia numeroita vastaava lukujen merkintätapa. Poikkeuksena oli, ettei viidellekymmenelle ja viidellesadalle ollut omia merkkejä vaan ne saatiin yhdistämällä viittä ja kymmentä, tai viittä ja sataa kuvaavat merkit. Toinen helleenien käyttämä numeromerkintä oli joonialainen numeromerkintä, joka kehittyi jopa 700-500 eaa, mutta jonka käyttö yleisty vasta noin 200 eaa. Joonialaisessa numeromerkinnässä jokaista lukua 1-9, jokaista kymmenen monikertaa 10-90 ja jokaista sadan monikertaa 100-900 vastasi oma merkki. Lukuja kuvaamaan käytettiin pääasiassa aakkosia (24 aakkosten kirjainta + 3 vanhempaa merkkiä). Joonialaisessa numeromerkinnässä oli osittaisessa käytössä paikkamerkintä. Koska paikkamerkinnälle ei ollut tarvetta kun merkittiin lukuja 1-999 ei paikkajärjestelmä yleistynyt, mutta sitä käytettiin silti kun merkittiin nelinumeroisia lukuja, jolloin tuhannen monikertoja merkittiin samoilla symboleilla kuin lukuja 1-9. Murtoluvuista käytössä olivat vain yksikkömurtoluvut, joita merkittiin lisäämällä luvun perään heittomerkki. Monet tulokset varhaisesta kreikkalaisesta matematiikasta liitetään Thalekseen (noin 624-548 eaa) ja Pythagoraaseen (noin 580-500 eaa). Vaikka nämä henkilöt ilmaistaan monen matemaattisen tuloksen isinä, varmasti ei voida sanoa mitään helleenien alkuaikojen matematiikasta, koska varsinaista dokumentaatiota ajalta ei ole vaan tieto on periytynyt pääasiassa sanallisesti. Kreikkalaiset pystyivät matkustamaan Egyptiin ja Kaksoisvirranmaahan, joista he omaksuivat paljon omaan matematiikkaansa ja näin nopeuttivat kehitystään matematiikan alalla. Monet nykyään helleenien mukaan nimetyt lauseet tunnettiin siis Kaksoisvirranmaassa jo ennen helleenien matematiikan kukoistuskautta. Nuolenpääkirjoituksella kirjoitettu teksti säilyi hyvin savitauluissa verrattuna muualla käytettyyn pergamenttiin ja papyrukseen. Matemaattisen kehityksen keskus siirtyi Kaksoisvirranmaasta Kreikkaan arviolta noin 600 eaa.

Pythagoraan matemaattiseen ajatteluun kehittyi mahdollisesti Aasian ajattelijoiden vaikutuksesta syvällisempi filosofinen puoli, jolloin filosofinen pohdiskelu ja matemaattiset tarkastelut kietoituivat tiukasti yhteen. Kaikki Pythagoraan keksinnöiksi mielletyt matemaattiset editysaskeleet eivät todennäköisesti ole hänen omasta kynästään vaan suuri osa on todennäköisemmin hänen oppilaidensa oivalluksia. Pythagoraaseen ja hänen oppilaisiinsa viitataan yhteisnimityksellä pythagoralaiset. Pythagoralaiset olivat todennäköisesti ensimmäiset, jotka merkittävässä mittakaavassa tarkastelivat matematiikkaa puhtaasti filosofisessa ja abstraktissa kontekstissa ilman suoranaisia käytännön soveltamisen tarpeita.

> Kaikkiin asioihin voidaan liittää luku; sillä mitään ei voi kuvitella tai tietää ilman lukua. - Filolaos [5, s.94]

Edellinen lainaus näyttää olleen pythagoralaisen koulukunnan periaate, jota sovellettiin muun muassa musiikin lakien muodostukseen. Pythagoralaiset pyrkivät löytämään luonnosta (mm. taivaankappaleista) säännönmukaisuuksia ja harmonisesti järjestyneitä kokonaisuuksia. Vaikka monet pythagoralaisten ideat tuntuvat kaukaahaetuilta, koska he kehittivät huomattavan määrän erilaisia lukujen ominaisuuksiin liittyviä säännönmukaisuuksia, joilla ei ollut useinmiten mitään käytännön sovelluksia. Silti nämä yritykset selittää maailmaa matematiikan avulla kiihdyttivät merkittävästi matematiikan ja tieteen kehitystä.

Helleenit jakoivat 400-300 eaa matematiikan kahdeksi erilliseksi opiksi: käytännönläheiseen laskemiseen, logistiikkaan, joka oli hyvin hyödyllistä kaupankäynnin kannalta ja pythagoralaisten edustamaan filosofiseen matematiikan pohdintaan, aritmetiikka. Käytännössä siis laskento ja matematiikka olivat melkeinpä eri tieteenalat. Sankarikauden (∼400 eaa-) Kreikan tieteessä korostui älyllinen uteliaisuus ja suurimpana motiivina oli halu tietää, joka poikkesi aiemmasta käytännön sovelluksien motivoimasta ajattelusta. Teoreettisilla ongelmilla kuten ympyrän neliöimisellä oli iso rooli matematiikassa ja harppi-viivain -todistukset olivat keskeinen osa geometriaa. Yli 2200 vuotta myöhemmin osoitettiin, ettei kaikkia kreikkalaisia mietityttäneitä ongelmia voi edes todistaa harpilla ja viivaimella. Tästä huolimatta nämäkin ongelmat motivoivat kehittämään matematiikkaa merkittävällä menestyksellä. Kreikasta ei ole tältäkään aikakaudelta säilynyt käytännössä yhtään dokumenttia, joten monet tiedot perustuvat myöhemmille kreikkalaisille teksteille. Keskeisiä aikakauden matematiikan piirteitä olivat: alojen ja suhteiden taitavat muutokset, aritmetiikan arvostus yli geometrian ja vastakkainasettelut eri matemaatikoiden ja koulukuntien välillä.

Monet kreikkalaisten matemaatikoiden filosofiset pohdinnat toimivat yllättävän usein innoittajina joskus jopa huomattavasti myöhemmin kehitettyihin matematiikan keksintöihin. Sokrates (∼470-399 eaa), joka oli pääasiassa kiinnostunut vain matematiikan filosofisesta puolesta, pohti muun muassa lukujen ja laskutoimitusten ongelmia, kuten miksi

$1+1$ muuttuu luvuksi 2. Tämän kaltaiset pohdinnat ovat keskeisiä esimerkiksi tuhansia vuosia myöhemmin kehittyneessä joukko-opissa.

Zenonin paradoksit ovat huomionarvoinen esimerkki kreikkalaisten filosofisesta matematiikan pohdinnasta. Paradoksit loi Zenon Elealainen ($\sim$450 eaa) tarkoituksenaan kumota pythagoralaisten uskomus, että avaruus ja aika koostuvat pisteistä. Toisin sanoen Zenon pyrki osoittamaa eräänlaisen jatkuvuuden olemassaolon. Paradokseja tarkasteltaessa on syytä ottaa huomioon, ettei modernia äärettömyyskäsitystä ollut ja ensimmäiset varsinaiset infinitesimaalitutkimukset ovat vasta Arkhimedeen (287-212 eaa [50]) käsialaa. Paradoksit:

Dikotomia Kappaleen on kuljettava aina puolimatkaan ennen kuin voi kulkea koko matkan. Sen on siis myös kuljettava neljännesmatkaan ja sitä ennen kahdeksasosa matkaan ja niin edelleen. Tällöin kappaleen on siis kuljettava äärettömän monen pisteen kautta äärellisessä ajassa, eli pythagoralaisten oletuksilla liike on mahdoton.

Akhilleus Akhilleus kilpailee etumatkan saaneen kilpikonnan kanssa. Hänen on siis aina saavuttava aina ensin siihen pisteeseen, missä kilpikonna tarkasteltaessa oli. Tällöin kuitenkin kilpikonna on ehtinyt jo liikkua eteenpäin ja sama toistuu uudelleen ja uudelleen, joka johtaa samaan lopputulokseen kuin edellinen paradoksikin.

Nuoli Lentävä nuoli on jokaisena yksittäisenä ajanhetkenä paikallaan levossa, joten liike on illuusio.

Stadion Paradoksissa tutkitaan kolmea kappaletta A (paikallaan), B (liikkeessä oikealle) ja C (liikkeessä vasemmalle). Tarkastellaan kappaleiden käyttäytymistä kun siirrytään ajassa pienin olemassaoleva ajanhetki eteenpäin. Nyt kappale B on siirtynyt pykälän oikealla suhteessa kappaleeseen A ja kappale C on siirtynyt pykälän vasemmalle suhteessa kappaleeseen A. Ongelma on, että tällöin kappale C on siirtynyt kaksi pykälää vasemmalle suhteessa kappaleeseen B, jolloin on olemassa vielä pienintä hetkeä puolet pienempi hetki, jossa kappale C on siirtynyt yhden pykälän vasemmalle suhteessa kappaleeseen B. Siis pienintä ajanhetkeä ei ole olemassa.

Paradoksit, vaikka vaikuttavatkin leikkimielisiltä, muuttivat huomattavasti kreikkalaisten lähestymistä matematiikan ongelmiin ja vaikuttivat myöhempiin tuotoksiin. Esimerkiksi Eukleideen teoksessa *Stoikheia* (lat. *Elementa*) lukujen ja "yksiköiden" tilalla käsiteltiin janoja, joilla jatkuvuutta on selkeämpi kuvata.

Kreikassa kehittynyt ja sieltä Rooman valtakuntaan periytynyt "Seitsemän vapaata taidetta" ovat länsimaisen kasvatusperinteen pohja, johon nykyinen koulurakenteemme yhäkin osin pohjaa. Vapaat taiteet olivat oppiaineita, jotka koostuivat Arkhytaan kvadriumista

- aritmetiikka
- geometria
- musiikki
- astronomia

ja triviumista

- kielioppi
- retoriikka (puhumisen taito)
- Zenonin dialektiikka (filosofinen keskustelu ja paradoksit)

Noin vuonna 150 jaa matematiikan tutkimuksen pääpaino siirtyi matematiikan sovelluksiin (tähtitiede, maantiede, optiikka ja mekaniikka) teoreettisen matematiikan jäädessä taka-alalle. Todennäköisenä syynä siirtymään oli matematiikan tutkimuksen kehittyminen tarpeettoman teoreettiseksi ja filosofiseksi käytännön tarpeen unohtuessa.

Roomalaiset eivät juurikaan kehittäneet teoreettisempia tieteitä, vaan keskityttiin käytäntöön kuten lääketieteeseen ja maatalouteen. Kreikan matematiikan uusi nousu käynnistyi noin vuonna 100 ja katsotaan päättyneeksi Ateenan filosofisten koulukuntien sulkemiseen vuonna 529. Koulukuntien sulkemisen jälkeen filosofit ja matemaatikot siirtyivät itään. Matematiikan kehitys pysähtyi Euroopassa keskiajalle tultaessa.

Kiinan ja Intian kulttuurit ovat Niilin ja kaksoisvirran maan kulttuureita nuorempia, mutta Kreikan ja Rooman kulttuureita vanhempia. Varhaisimmat säilyneet kiinalaiset teokset ovat *Tšou Pei Suan Tšing* ja *Tšiu-tšang suan-su*. Vuosien 1046—256 eaa välille ajoitettu, mutta todennäköisesti lähempänä vuotta 256 eaa koottu ja vielä noin 200 jaa asti täydennetty *Tšou Pei Suan Tšing* (en. *The Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven* [19]) on keskustelumuotoinen kokoelma ongelmia ja nimensä mukaisesti vähän kaikkea matematiikkaan liittyvää maan ja taivaan väliltä.

Intiassa vallitsi korkea kulttuuri jo Egyptin pyramidien aikaan (~2000 eaa). Matematiikan kehitys Intiassa eteni pitkälti samoja ratoja kuin Egyptissäkin ja havaintojen perusteella on todennäköistä, että vaikutteita otettiin kaksoisvirranmaasta ja Kreikasta. Varhaiset vaiheet ovat kuitenkin hieman hämärän peitossa, koska ajalta ennen ajanlaskun alkua ei ole juurikaan luotettavaa tietoa. Aryabhatan teos *Aryabhatiya* vuodelta 499 on Intian vanhimpia säilyneitä matemaattisia tekstejä, joskin muihin kulttuureihin verrattuna aika myöhäinen. *Aryabhatiya* on runomuotoinen *Stoikheian* kaltainen matemaattisen tiedon kokoelmateos. *Aryabhatiya* on kuitenkin *Stoikheiaa* suppeampi ja kuvainnollisempi, joka sisälsi muutakin kuin matematiikkaa. Varsinaisia todistuksia teoksessa ei ollut. Intialaisen matematiikan kehityksen tutkimusta vaikeuttaa etteivät he juurikaan viitanneet edeltäjiin ja ongelmia lähestyttiin usein itsenäisesti ottamatta huomioon aiempia tuloksia.

Arabien valloitusten aika (600-750) oli sekasortoista, mutta muutoksesta huolimatta Arabit käänsivät aktiivisesti Kreikan ja Intian teoksia. Käännökset, jotka sisälsivät myös huomattavan määrän matemaattisia teoksia, koottiin ”Viisauden taloon” (750-850). Myöhemmin arabimatemaatikot olivat hyvin aktiivisia varsinkin algebran saralla.

Keskiajalle tultaessa matemaattisen kehityksen keskus alkoi siirtyä Arabiasta Eurooppaan. Keskiajan alku (∼500-900) ei ollut kovin tuotteliasta, eikä suuria mullistuksia tieteessä juurikaan tapahtunut. Bysanttilainen fyysikko ja filosofi Johannes Filopolainen (∼490–570 [30]) kumosi Aristoteeliset liikelait, kumosi tyhjiön mahdottomuuden ja esitteli hitauden periaatteen. Matematiikan opiskelu tapahtui pääasiassa antiikin Kreikan keskeisten teosten pohjalta. Intialais-arabialainen lukujärjestelmä saapui Eurooppaan viimeistään 1200-luvun lopulla mm. Gerbert Aurillacilaisen (myöh. Paavi Sylvester II, 946-1003 [31]) ja Maximus Planudesin (∼1260–1305 [32]) toimesta. Lukujärjestelmä ei kuitenkaan vaihtunut välittömästi vaan pitkään 1500-luvulle asti käytettiin rinnalla kreikkalaisia numeroita.

1100-luvulla alkoi matemaattinen herääminen Euroopassa ja kuten Arabiassakin varhaisempia teoksia käännettiin runsaasti. Pääasiassa käännökset olivat kreikasta ja arabiasta latinaksi, mutta myös hepreaksi ja hepreasta käännettiin. Toledossa oli monikansallinen kääntäjien kilta, jonka johdosta myös espanjaksi käännettiin runsaasti teoksia. Keskeisimpiä käännöksiä olivat:

- *Stoikheia* (arabia → latina, 1142)
- Kokoelma al-Khwarizmin tähtitiedettä (arabia → latina, 1126)
- *Almagest* (kreikka → latina, 1155; arabia → latina, 1175)
- al-Khwarizmin *Algebra* (arabia → latina, 1145)

Kaupankäynnin monimuotoistuminen vaati monimutkaisempia laskutoimituksia, joka edesauttoi intialais-arabialainen lukujärjestelmän käyttöönottoa. Leonardo Bonacci (Fibonacci, ∼1170-1250) oli edelläkävijä intialais-arabialaisen lukujärjestelmän käyttöönotossa ja yhdistämisessä kaupallisiin sovelluksiin keskeisimmin teoksessaan *Liber abaci*. Fysiikan tutkimus oli vielä käytännössä matematiikan ala. Teoreettinen fysiikka kehittyi Thomas Bradwardinen (∼1290-1349) tutkimuksista ja Jordanus Nemorarius (1300-luku [33]) otti symbolit käyttöön fysiikan laskuissaan. 1400-luvulla oppineisuus siirtyi Ranskasta ja Englannista Saksaan ja Puolaan ruton ja sotien seurauksena.

1400-luku toi mukanaan monia suuria muutoksia. Painotaito (1447→) johti kirjoitusten aiempaa huomattavasti suurempaan leviämiseen. Yksi 1400-luvun lopun merkittävimmistä teoksista oli Nicolas Chuquet'n (1445 tai 1455 - 1488 tai 1500 [34]) *Triparty* (1484), joka osittain pohjautui Boëthiuksen, Campanuksen ja mahdollisesti Fibonaccin töihin. *Tripartyn* yhteiskunnallisesti merkittävimpiä sisältöjä oli johdanto intialais-arabialaisesta lukujärjestelmästä sisältäen nollan. Kymmenen vuotta *Tripartyn* jälkeen julkaistua Luca Paciolin (1445-1514) *Summaa* (1494) pidetään ensimmäisenä painettuna algebran teoksena. Pääasiassa aiempaa tietoa kokoavassa teoksessa tuntematonta, potensseja ja yhtäsuuruusmerkkiä merkittii sanalyhentein. Samoihin aikoihin kuitenkin matematiikan arvostus oli laskussa taiteiden ja kirjallisuuden kukoistaessa. Arvostuksen vähenemisestä huolimatta ei matematiikan tutkimus jäänyt täysin unohduksiin. Renesanssille tyypillisen taiteen ja varsinkin kuvataiteen ihannoinnin seurauksena tutkittiin taiteen ja matematiikan yhdistävää perspektiivin teoriaa. Keskeisimpiä tutkijoita oli saksalainen Albrecht Dürer (1471-1528 [36]), jonka teos *Melankolia* (1514) käsitteli taikaneliöitä ja teos *Mittausohjeita*, josta otettiin useampia painoksia (1525-1538), esitteli uudet käyrät episykloidin ja tasospiraalin. Myöskin saksalainen Christoph Rudolff (∼1500-1545) esitteli ensimmäisenä desimaaliosat ja modernin juurimerkinnän. Elettiin suurten löytöretkien aikaa, joten myös kartanpiirtämisen ja suunnistamisen ongelmat pohdituttivat monia matemaatikoita. 1500-luvun lopulla tunnettiin suurin osa antiikin Kreikan keskeisimmistä teoksista ja kehitettiin edelleen arabien algebraa. Trigonometria oli eriytynyt omaksi alakseen ja vanhentunut seksagesimaalijärjestelmä pyrittiin korvaamaan desimaalijärjestelmällä, jonka johdosta desimaalipilkku esiintyi ensimmäisen kerran Maginin (1555-1617) ja Claviuksen (1537-1612) toimesta. François Viète kehitti parametrin käsitettä merkinnällä, jossa vokaalit kuvasivat tuntemattomia ja konsonantit tunnettuja/vakioita, jolloin pystyttiin ensimmäisen kerran yksiselitteisesti esittämään yhtälön yleinen muoto. Vaikka merkinnät $+, -$ ja $=$ oli jo otettu käyttöön Saksassa ei Viète käyttänyt näitä vaan vanhempia antiikin ja keskiajan merkintäkäytäntöjä. 1500- ja 1600-lukujen vaihteessa ajettiin siirtymistä kymmenjärjestelmän kokonaisvaltaiseen käyttöön muun muassa Vièten ja Simon Stevinin (1548-1620 [42]) toimesta. Stevin yritti tutustuttaa tavalliset kansalaiset desimaalilukujen käyttöön talouden ja tekniikan sovellusten avulla, joskin merkinnät olivat vielä rajoitteisia. Napier käytti desimaalimerkkejä jo *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*:ssa ja hieman myöhemmin desimaalipilkku vakiintui manner-Euroopassa, mutta Englannissa desimaalimerkiksi vakiintui piste. Tämä jako on vieläkin vallalla ja näkyy myös samoihin aikoihin ajetussa kymmenjärjestelmän käytöstä paino- ja mittajärjestelmissä. Vaikka suuri osa 1600-luvun matematiikasta lasketaan modernin jaon mukaan fysiikaksi, tähtitieteeksi tai tekniikan sovelluksiksi kehittyi puhdaskin matematiikka kiihtyvällä tahdilla. Käytännössä juuri 1600- ja 1700-luvuille ajoittuvat tuoreimmat matematiikan keksinnöt, jotka käsitellään lukion opetussuunnitelmassa.

Luku 3

Matematiikan juuret ja lähtökohdat opetukseen

Aloitamme matematiikan opetuksen tarkastelun intuitiivis-loogisesti tutkimalla peruskoulun luokkien 1-2 opetussuunnitelmaa *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista* (POPS [1]) ja vertaillen tätä matematiikan opiskelun alkutaivalta matematiikan historian alkukehitykseen.

> Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. [1, s.126]

Keskeisenä osana vuosiluokkien 1-2 matematiikan opiskelua on siis pohjan luonti matematiikan laajemmalle oppimiselle ja pyritään antamaan oppilaille tasavertaiset lähtökohdat jatkon kannalta niin itse osaamisen kuin henkisen hyvinvoinninkin osalta. Tieto- ja viestintäteknologian käyttö on myös nostettu keskeiseksi osaksi matematiikan opiskelua teknologian ollessa suurelle osalle oppilaista hyvin näkyvä osa jokapäiväistä arkea. Juuri perusteiden hallitseminen ja konkreettiset yhteydet arkimaailmaan nousevat toistuvasti esille. Vaikka pidämme matematiikan käsitteitä ja rakennetta lähes itsestäänselvyyksinä kuten opetussuunnitelmastakin voi tulkita, ei tämä ole historiallisesti katsoen läheskään näin suoraviivaista. Alkujaan matematiikka kehittyi jokapäiväisen elämän haasteisiin. Ensimmäiset primitiiviset matematiikan käsitteet olivat enemmän havaintoja kuin varsinaisesti nykykäsityksemme mukaista matematiikkaa. Luku/määrä, koko ja muoto perustuivat enemmän vertailulle ja kontrastille: yksi-usea, pieni-iso, pyöreä-suora. Ryhmien samankaltaisuuksien havaitseminen johti lukujen muodostumiseen ja näin abstraktien matematiikan käsitteiden muodostuminen alkoi jopa 30 000 eaa. Opetus perustuu nykyisellään enemmän lukujärjestelmän ja yhteiskunnallisen kehityksen pohjalta muovautuneisiin standardeihin. Lukujen muodostuminen oli kuitenkin iso askel matematiikan kehityksessä, koska pystyttiin havaitsemaan kahta ryhmää yhdistävä näkymätön ominaisuus: varpaat-sormet, neljän kiven rykelmä-neljän puun rykelmä. Aluksi varsinainen laskeminen perustui "luvuille" yksi, kaksi ja monta. Varsinaista tarvetta ei ollut laskea suurempia joukkoja vaan pienempi/suurempi oli riittävä tieto joukkojen koista. Tämä vastaa pikemminkin lapsen vanhempien ja lähipiirin opettamia laskemisen perusteita. Historiallisesti vasta ihmisen kehittyessä pidemmälle tarve ilmaista suurempia lukuja kasvoi ja lukuja alettiin ilmaista käyttämällä sormia apuna. Sormilla laskeminen on vieläkin merkittävä vaihe ihmisen laskutaidon kehityksessä. Tästä tavasta ilmaista lukuja sormilla on peruja nykyään käyttämämme kymmenjärjestelmä. Vaikka ensimmäiset lukujärjestelmät ovat olleet kaksi- tai kolmikantaisia verrattain nopeasti viisi- ja kymmenkantaiset järjestelmät syrjäyttivät nämä. Myös neljä-,kahdeksan-, kaksikymmen- ja kuusikymmenkantaisia lukujärjestelmiä on esiintynyt. Kiinassa oli käytössä varmasti viimeistää 300-100 eaa kymmenjärjestelmä, jossa oli kaksi rinnakkaista merkintäperiaatetta: kertolaskuun perustuva ja paikkamerkintään perustuva, jossa merkittiin numero ja sitten kerroin sanallisesti (esim. 6 sata 5 kymmenen 8). Tyhjällä paikalla merkittiin nollaa kunnes mahdollisesti 700-luvulla, mutta viimeistään 1247 otettiin käyttöön symboli 0. Intiassa kehittyi ensimmäisen vuosituhannen ensimmäisellä puoliskolla paikkajärjestelmään perustuva lukujärjestelmä, josta poistui aiemmin käytössä olleet yhdeksää suurempia lukuja kuvanneet merkit. Lukujärjestelmän kehitys oli hyvin Kreikan kaltainen. Vaikka Intiassa otettiin paljon vaikutteita muualta niin nykyinen numeromerkintä on intialaista alkuperää. Varsinainen kymmenkantaisen lukujärjestelmän vakiintuminen kesti kuitenkin kauan ja yhteiskunnassamme on yhä historiallisia jäämiä muista lukujärjestelmistä muun muassa ajan ja kulmien mittaamisessa. Lisäksi eräiden kielien lukusanoissa on viitteitä vanhojen lukujärjestelmien käytöstä, esimerkiksi ranskassa on viitteitä 20-järjestelmästä ja englannissa 12-järjestelmästä [61].

Lukujen symboliikka ja merkintätavat ovat vanhempia ja intuitiivisempia kuin lukujen verbaaliset muodot, esimerkiksi 1 - yksi. Sormilla laskemiseen tuettaessa on helpompi näyttää yhtä sormea tai piirtää yksi viiva kuin verbaalisesti ilmaista lukumäärää. Kokonaisluvun käsite on matematiikan vanhimpia. Siirtyminen kokonaisluvuista murtolukuihin vei suhteellisen paljon aikaa, koska alkukantaisilla heimoilla ei ollut tarvetta tarkastella murto-osia vaan usein riitti valita laskettavaksi riittävän pienet yksiköt. Samasta syystä myös siirtyminen puolikkaasta muihin murtolokuihin kesti kauan. POPSissa mainitaan oppiaineen tehtävissä:

> Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti.[1, s.128]

Käytännössä siis tavoitteena on perustaitojen hallitseminen. Ensimmäisillä luokilla oppilaan laskutaidon tasoksi riittää käytännössä sormilla laskeminen. Sama taitotaso, joka riitti historiallisesti katsoen pitkään ihmisillekin. Merkittävänä erona on opetussuunnitelmassa rajoittuminen kymmenjärjestelmään.

> Matematiikan opetus luo vahvan pohjan lukukäsitteen ja kymmenjärjestelmän ymmärtämiseksi sekä laskutaidolle. [1, s.128]

Tarkastellaan vuosiluokkien 1-2 keskeisimpiä sisällöllisiä tavoitteita ja niihin liittyviä keskeisimpiä sisältöalueita:

- Yleiset matemaattiset sisällöt
    - päättely- ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen
    - matemaattisia käsitteitä ja merkintätapoja
    - lukukäsite ja kymmenjärjestelmän periaate
    - tarkastellaan matemaattisia tilanteita eri näkökulmista
    - lukumäärän, lukusanan ja numeromerkinnän yhteys
    - lasketaan, hahmotetaan ja arvioidaan lukumääriä
    - asetetaan lukuja järjestykseen
    - lukujen ominaisuudet, kuten parillisuus, monikerta ja puolittaminen
    - lukujen 1–10 hajotelmat
    - kymmenjärjestelmän periaate konkreettisten mallien avulla
    - laskutoimituksissa rajoitutaan luonnollisiin lukuihin
    - syy- ja seuraussuhteita
- Esittäminen ja visualisointi
    - ratkaisujen ja päätelmien esittäminen konkreettisin välinein ja piirroksin, sekä suullisesti ja kirjallisesti
    - ratkaisujen ja päätelmien esittäminen tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen
- Peruslaskutoimitukset
    - peruslaskutoimitusten periaatteet ja ominaisuudet
    - sujuva peruslaskutaito luonnollisilla luvuilla ja erilaiset päässälaskustrategiat
    - yhteen- ja vähennyslasku
    - yhteen- ja vähennyslaskujen konkretisointi erilaisissa sovellustilanteissa
    - vaihdannaisuuden ja liitännäisyyden hyödyntäminen yhteenlaskussa
    - kertolaskun käsite konkretian avulla ja opetellaan kertotaulut 1-5 ja 10
    - pohja jakolaskun sekä kerto- ja jakolaskun yhteyden ymmärtämiselle
    - vaihdannaisuus ja liitännäisyys kertolaskussa
    - murtoluvun käsiteen pohjustaminen jakamalla kokonainen yhtä suuriin osiin
- Geometrisiin muotoihin tutustuminen ja niiden ominaisuudet
    - yhtäläisyyksiä, eroja ja säännönmukaisuuksia
    - vertaillaan, luokitellaan ja asetetaan järjestykseen
    - kappaleet ja tasokuviot
    - rakennetaan ja piirretään
    - kappaleiden ja tasokuvioiden luokittelu
    - hahmotetaan kolmiulotteista ympäristöä ja havaitaan siinä tason geometriaa
- Mittaamien ja taulukot
    - mittaamisen periaate
    - taulukoihin ja diagrammeihin tutustuminen
    - suunta- ja sijaintikäsitteet
    - suureet pituus, massa, tilavuus ja aika, sekä niihin liittyvät mittayksiköt
    - kellonajat ja ajanyksiköt
    - kerätään ja tallennetaan tietoja kiinnostavista aihepiireistä
    - yksinkertaiset taulukot ja pylväsdiagrammit
- Ohjelmoinnin alkeet

Lista on pitkä, mutta on keskeisenä ideana on vain luoda pohjaa aiheiden ymmärtämiselle. Opetuksen eteneminen oppilaan ehdoilla ja oppilaan oman päättelyn tukeminen on keskeinen osa, joka näkyy POPSin muotoilussa, jossa toistuvat sanat tukea ja ohjata. Varsinaista terminologiaa, kuten vaihdannaisuus ja liitännäisyys, ei käytetä ja pyrkimys on pitää uudet käsitteet mahdollisimman intuitiivisina ja käytännönläheisinä. Matematiikan kumulatiivinen luonne mainitaan useampaan otteeseen ja tämän muistaminen on jokseenkin keskeistä, mutta harvoin oppilas itsessään tiedostaa tätä rakennetta vaan kokemus matematiikan rakenteesta tulee todennäköisemmin suhteellisen luonnollisesti.

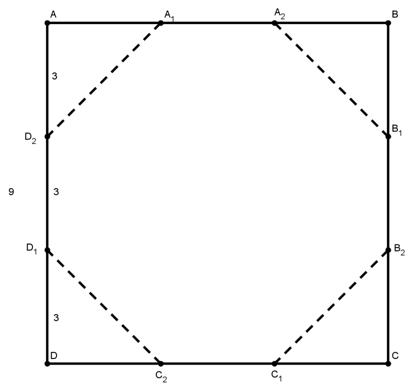
Geometria on yksi keskeisimmistä ensimmäisten vuosiluokkien sisältöalueista ja kuten historiallisestikin lähdetään liikkeelle vertailusta ja luokittelusta. Geometrian juuret ovat kaukana historiassa, esineitä kuvioitiin jo ennen Egyptin kehittynempää geometrista osaamista geometrisin kuvioin, joissa esiintyivät yksinkertaisimpien geometristen kuvioiden kuten neliöiden ja kolmioiden lisäksi kuvioiden yhtenevyyksiä ja symmetrioita. Tarkkaa tietoa geometrian alkuperästä ei ole, mutta ensimmäisst sivilisaatiot käyttivät geometriaa ja mittaamista yksinkertaisiin käytännön tarpeisiin ja rituaalien osana esimerkiksi alttarin mittojen määrittämiseen. Perusmittaaminen on myös osa ensimmäisten vuosiluokkien sisältöä.

Lukujärjestelmistä perehdytään vain kymmenjärjestelmään, joka oli käytössä jo varhaisessa Egyptissä (- 4000eaa), jossa jokaista kymmenen potenssia kuvasi oma symboli joita toistettiin lukua kirjoitettaessa vaadittava määrä. Noin 2000 eaa Egyptin lukujen kirjoitus kehittyi ottamalla huomioon kirjoitusjärjestyksen ja lisäämällä omat symbolit kuvaamaan muitakin kuin kymmenen potensseja. Nykyinen lukujen kirjoitusjärjestelmä perustuu pitkälti tähän keksintöön. Pienet kokonaisluvut merkittiin Kaksoisvirranmaassa (Mesopotamia) kuten Egyptissäkin eli jokaista kymmentä kohti merkittiin kymmentä kuvaava merkki ja samoin jokaista yhtä kohti merkittiin yhtä kuvaava merkki. Noin 2000 eaa otettiin käyttöön lukujen paikkaan perustuva merkintä, joka lyhensi huomattavasti varsinkin suurien lukujen kirjoitukseen vaadittavaa aikaa ja lyhensi merkintöjä. Nollaa tai tyhjää kuvaava merkki otettiin käyttöön vasta Aleksanteri Suuren aikaan 350-300 eaa, jota ennen merkinnän tarkoittama luku jouduttiin päättelemään kontekstista. Toisaalta ”nollaa” osattiin käyttää vain keskellä lukua eli kuvaamaan esimerkiksi lukua 101, kuitenkin lukujen 11, 110 ja 1100 kirjoitusasu oli sama. Nollan myöhäinen historiallinen esiintyminen on ristiriidassa peruskoulun käytännön välillä. Peruskoulussa nolla esitetään käytännössä heti osana kymmenjärjestelmää vaikka ensimmäinen todiste nollaa merkitsevän symbolin käytöstä on Intiasta vuodelta 876, joskin jo Aryabhatan teos *Aryabhatiya* (499 jaa) sisälsi viitteitä tähän. Kun nolla lisättiin kymmenkantaiseen paikkajärjestelmään perustuvaan lukujärjestelmään saatiin nykyisin käytössä olevaa vastaava lukujärjestelmä lukujen symbolien muokkaantuessa vielä arabien toimesta.

Egyptiläiset käyttivät yleisesti yksikkömurtolukuja eli murtolukuja, joiden osoittaja on yksi. Näiden lisäksi käytössä oli murtoluku $\frac{2}{3}$ ja pienissä määrin myös muotoa $\frac{n}{n+1}$ olevat murtoluvut. Juuri näihin yksinkertaisiin murtolukuihin perustuu ensimmäisten vuosiluokkien murtolukuihin perehtyminen. Egyptissä murtolukujen ilmaisemiseen käytettiin yksikkömurtolukujen summia, joissa kuitenkin jokainen yksikkömurtoluku esiintyi vain kerran. Näin monimutkaiseen murtolukujen merkitsemiseen ei peruskoulussa pahemmin perehdytä vaikka joissain tapauksissa tällainen merkintätapa voi olla hyvinkin intuitiivinen. Esimerkkinä tilanne, jossa annetaan pois puolet ja tämän jälkeen vielä jäljellä olevasta puolet $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Egyptiläiset kehittivät jopa sääntöjä murtolukukehitelmien muodostamiseen, mutta monimutkaisempiin murtolukukehitelmiin ei ole syytä peruskoulussa perehtyä nykyisten merkintätapojen ollessa tehokkaampia. On huomattava, että Egyptissä murtolukuja ei pidetty varsinaisina lukuina vaan kahden kokonaisluvun suhteena tai riippuvuutena. Tällainen murtolukukäsitys tukee enemmän matematiikan teoreettisempaa puolta kuin käytännön sovelluksia eikä täten ole soveltuvin lähestymistapa kun murtolukuja aletaan käsittelemään.

Yhteenlasku oli egyptiläisille peruslaskutoimitus. Positiivisilla kokonaisluvuilla yhteen- ja vähennyslaskujen historian ulottuessa kauas dokumentoimattomaan aikaan. Kertolaskut toteutettiin kahdentamisilla, jolloin esimerkiksi $19 \cdot 69$ laskettiin siten, että laskettiin ensin $2 \cdot 69 = 138$, $2 \cdot 2 \cdot 69 = 2 \cdot 138 = 276$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 69 = 2 \cdot 276 = 552$ ja $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 69 = 2 \cdot 552 = 1104$. Viimeisin on suurin kahdennus, joka on pienempi kuin $19 \cdot 69$, jolloin aiemmin lasketuista saatiin muodostettua summa $19 \cdot 69 = 16 \cdot 69 + 2 \cdot 69 + 1 \cdot 69 = 1104 + 138 + 69 = 1311$. Jakolaskussa vastaavasti jakajaa kahdennettiin. Tällainen metodi suurten lukujen (> 10) kertolaskussa on intuitiivinen ja varmasti on oppilaita, jotka käyttävät vastaavanlaista menetelmää varsinkin päässälaskuissa. Myös kerto- ja jakolaskujen perustoiminnot, eli verrannot, ristiinkertominen ja suhteet, olivat tunnettuja Egyptissä.

Monesti geometrian synty sijoitetaan Egyptiin ja maanmittaajien ansioksi. Vaikka onkin todennäköistä, että Egyptissä oli tarve maanmittaukselle ja tämä ala oli hyvinkin kehittynyttä, niin geometria oli kuitenkin pienessä osassa egyptiläisten matematiikassa. Geometriasta tunnettiin ainakin: kolmion ala, puolisuunnikkaan ala ja suunnikkaan ala. Todistukset olivat pääasiassa leikkaa ja liimaa -tyyppisiä, joissa pyrittiin kuviot muuttamaan suorakulmioiksi. Lisäksi geometriassa, geometrian todistuksissa ja säännönmukaisuuksissa ei tehty eroa täsmällisten suhteiden ja likiarvojen välillä, joka johti laskusääntöihin joilla pystyttiin laskemaan vain likiarvoja. Piille (π) egyptiläiset käyttivät likiarvoa $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. Tämä likiarvo on saatu vähentämällä neliöstä, jonka sivun pituus on 9 kulmat, jotka muodostuvat kun jokainen sivu jaetaan kolmeen osaan ja yhdistetään sivun keskimmäinen kolmasosa viereisen sivun keskimmäiseen kolmasosaan.



Pii kehitelmä

Likiarvo $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ja neliöstä piirtämällä saatu likiarvo eivät ole täsmälleen samat, joskin hyvin lähellä. Geometriassa varsinkin suhteiden tarkastelu ja niihin liittyvät säännöt oli keskeinen osa ja kehittyi huomattavan pitkälle, mutta toisaalta "Egyptin matematiikasta ei tunneta ainuttakaan teoreemaa tai formaalista todistusta" [5]. Pii esiintyy opetussuunnitelmassa huomattavasti myöhemmin, vasta yläluokilla, mutta ensimmäisten vuosiluokkien oppilaalle vastaavanlainen kehitelmä ei ole mahdotonta ymmärtää. Varsinaisten pinta-alojen laskeminenkin käsitellään vasta myöhemmin, mutta ensimmäisten vuosiluokkien oppilaalle on täysin mahdollista ymmärtää myös kuvioiden yhdistäminen uusiksi kuvioiksi tai kuvion jakaminen pienempiin kuvioihin. Kolmiulotteisten kappaleiden hahmottaminen tasogeometrian kuvioiksi on intuitiivinen tapa lähteä tutkimaan yhdistämällä uusi käsite jo tunnettuun. Sinänsä ensimmäisten vuosiluokkien sisällöt vastaavat pitkälti Egyptin valtakunnan ajan matematiikan osaamista. Ainoa selkeästi poikkeava aihe POPSissa on ohjelmoinnin alkeet, joka perustuu huomattavasti myöhempiin keksintöihin ja tässä näyttäisi olevan kuten *New Math* -liikkeenkin opetussuunnitelmassa tavoitteena vastata teknologistuvan yhteiskunnan vaatimuksiin.

Luku 4

Perusteista eteenpäin

Tarkastellaan alakoulun myöhempiä vuosiluokkia ja miten matematiikka alkoi kehittyä Egyptin valtakunnassa ja muissa aikakauden kulttuureissa. Vuosiluokilla 3-6 oppiaineen opetuksen tehtävät ovat pääpiirteittäin samat kuin ensimmäisillä vuosiluokilla, joskin lisänä on laajemman kokonaisuuden ymmärtäminen.

> Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa.[1, s.234]

Sama laajempien kokonaisuuksien ja yhteyksien hahmottaminen näkyy myös opetuksen tavoitteissa. POPSissa usein mainitut ohjaaminen ja tukeminen viittaavat tavoitteeseen auttaa oppilasta itse havaitsemaan uutta ja kehittämään omaa matemattiista osaamistaan kehittäen samalla itse käsityksen matematiikan rakenteesta ja yhteyksistä niin muihin aineisiin kuin arkielämään. Miten tällainen oppilaasta itsestään lähtevä kehittyminen sitten toimii käytännön opetustilanteissa, kun kuitenkin koko oppilasryhmän tulisi olla jokseenkin samalla tasolla on iso kysymys ja mahdollisesti hyvinkin keskeinen ongelma opetuksessa.

Tarkastellaan keskeisimpiä tavoitteita ja niihin liittyviä sisältöjä:

- Yleiset matemaattiset sisällöt
  - yhteydet opittujen asioiden välillä
  - kehittää taitoa esittää kysymyksiä ja perusteltujen päätelmien teko havaintojen pohjalta
  - ratkaisun järkevyyden ja tuloksen mielekkyyden arviointi
  - matemaattisten käsitteiden ja merkintöjen käyttö ja ymmärtäminen
- Lukujärjestelmä
  - kymmenjärjestelmä
  - positiiviset rationaaliluvut ja negatiiviset kokonaisluvut
  - murtoluku ja murtolukujen peruslaskutoimitukset
  - desimaaliluvut osana kymmenjärjestelmää ja peruslaskutoimitukset desimaaliluvuilla
  - murtoluvun, desimaaliluvun ja prosentin yhteydet
- Peruslaskutoimitukset
  - lukujen rakenteet, yhteydet ja jaollisuus tutkimalla ja luokittelemalla lukuja
  - yhteen- ja vähennyslaskualgoritmeja
  - kertotaulut $6 \to 9$
  - kertolaskualgoritmi
  - jakolasku, sekä sisältö- että ositusjakotilanteissa
  - laskutoimitusten ominaisuudet ja niiden väliset yhteydet
  - lukujen pyöristäminen ja laskeminen likiarvoilla
- Geometriset käsitteet
  - lieriöt, kartiot, suorakulmainen särmiö, ympyrälieriö, ympyräpohjaiseen kartio ja pyramidi
  - tarkempi perehtyminen kolmioihin, nelikulmioihin ja ympyrään
  - piste, jana, suora ja kulma
  - kulmien piirtäminen, mittaaminen ja luokitteleminen
  - symmetria suoran suhteen
  - kierto- ja siirtosymmetriat ympäristössä (esimerkiksi osana taidetta)
- Tilastot
  - prosentti
  - tilaston suurin ja pienin arvo, keskiarvo ja tyyppiarvo
  - todennäköisyys arkitilanteiden perusteella päättelemällä, onko tapahtuma mahdoton, mahdollinen vai varma
- Yhtälöt
  - lukujonon säännönmukaisuuden tutkiminen ja jatkaminen säännön mukaan
  - tuntematon
  - yhtälö ja yhtälön ratkaisut päättelemällä ja kokeilemalla
- Mittaaminen
  - koordinaatiston ensimmäinen neljännes ja laajennos kaikkiin neljänneksiin
  - mittakaava, suurennokset ja pienennökset
  - mittakaava kartan käytössä
  - mittaaminen ja tarkastellaan mittaustarkkuutta, mittaustuloksen arviointia ja mittauksen tarkistamista
  - mittayksikköjärjestelmän rakentuminen
  - yksikönmuunnokset yleisimmillä mittayksiköillä
- Toimintaohjeiden laatiminen tietokoneohjelmina graafisessa ohjelmointiympäristössä

Jälleen lista on pitkä, mutta käytännössä kyse on jo opitun sisällön tutkimisesta syvemmin ja opitun pohjalta matemaattisen tietämyksen laajentaminen uusiin aihekokonaisuuksiin. Varsinkin matemaattisen ajattelun kehittyminen ja yhteyksien löytäminen vaikuttaa loogiselta etenemiseltä. Jälleen keskitytään vain kymmenjärjestelmään, joka vaikuttaisi olevan helpoin tapa edetä sekoittamatta oppilasta, kun otetaan huomioon lukujärjestelmän keskeisyys yhteiskunnassamme. Negatiivisten lukujen käsittely on iso harppaus eteenpäin, kun pohditaan asiaa historialliselta kantilta. Ensimmäinen dokumentoitu negatiivisten lukujen esiintyminen on Kiinasta hieman ennen ajanlaskun alkua teoksesta *Tšiu-tšang suan-su*, joskin on hyvin mahdollista, että negatiiviset luvut tunnettiin jo aiemmin.

Historiallisesti tarkemmin kehittymistä vastaa geometrian opiskelun eteneminen. Egyptiläiset tunsivat trigonometrian alkeita ja yhdenmuotoisten kolmioiden teoriaa. POPSissa edetään opettelemalla kulman käsite, joka on käytännössä käänteinen lähestyminen historiaan ja trigonometrian syntyyn verrattaessa, koska pitkään sivujen suhteet olivat keskeinen mielenkiinnon kohde ja helpommin mitattavissa käytännön sovellusten ollessa tärkein motivaattori matematiikan kehityksessä. Lieriöt, kartiot, särmiöt ja pyramidit on tunnettu jo pitkään ja näitä kolmiulotteisia peruskuvioita on käytetty pitkään esimerkiksi uskonnollisissa rakennuksissa kuten Egyptin pyramideissa. Piste, jana, suora ja kulma ovat varsinkin matemaattisissa merkityksissään uudempia keksintöjä, vaikka nämä ovat geometrisina muotoina tunnettu jo kauan. Symmetriat ovat olleet pitkään ihmiskunnan kiinnostuksen kohteena, koska ihmisen tarpeisiin kuuluu löytää säännönmukaisuuksia maailmasta. Näin ollen symmetriat ovat hyvä lähtökohta geometristen permutaatioiden tutkimisessa. Muutenkin permutaatioiden tutkiminen on usein oppilaalle mielekästä, koska pääosin muutokset pystytään havainnollistamaan piirtämällä ja oppilas pystyy avoimesti käyttämään omaa päättelytaitoaan.

Koordinaatistot ja mittaaminen ovat lähellä geometriaa ja mittaamisessa on helppo käyttää hyväksi geometrista osaamista. Historiallisesti pythagoralaiset, eli Pythagoraan ($\sim$ 570-495 eaa [49]) oppilaat, liittivät pisteiden avulla lukuihin geometrisen käsitteen. Juuri näin saatiin paljon jo tunnettua geometrista tietoutta sovellettua koordinaatistoon. POPSissa koordinaatistossa tarkastellaan ensin koordinaatiston ensimmäistä neljännestä, josta sitten laajennetaan kaikkiin neljänneksiin, joka helpottaa koordinaatiston omaksumista. Tarkoituksena on kuitenkin opetella vain koordinaatiston käytön perusteet. Mittaamisessa näkyy selkeästi tavoite liittää nämä matemaattisen osaamisen taidot koulun ulkopuoliseen maailmaan ja hyödyntää näitä taitoja arkielämän tilanteissa. Mittakaava kartan käytössä on juurikin tällainen taito ja ensimmäiset maata kuvaavat kartat ovatkin jo noin 2500 eaa babyloniasta, mutta myös egyptiläiset ja foinikialaisetkin tekivät karttoja samoihin aikoihin [51]. Mittakaava, suurennokset ja pienennökset ovat läheisessä yhteydessä symmetrioihin ja siten helposti liitettävissä tätäkin kautta geometriaa ja kuten symmetria on mittakaavakin helposti havainnollistettavissa piirtämällä. Käytäntöön liittyvillä mittayksikköjärjestelmän ja yksikkömuunnosten tarkasteluilla tuetaan oppilaan perustaitojen kehittymistä. Mittaustarkkuutta tarkastelemalla, mittaustulosta arvioimalla ja mittauksia tarkistamalla tehdään samaa toiminnan oikeellisuuden tarkastelua, jota tehtiin jo aiemmin, joskin eri kontekstissa, samalla luoden pohjaa fysiikan tutkimuksille.

Kaksoisvirranmaassa tunnettiin meidän desimaalilukujamme vastaava merkintä. Kuten jo mainittiin luvuilla 11, 110 ja 1100 oli sama kirjoitusasu, mutta tämä merkintä saattoi tarkoittaa myös lukuja $1,1$; $0,11$; ... eli myös kuusikymmenjärjestelmän negatiiviset potenssit tunnettiin. Kaksoisvirranmaan babylonialaiset osasivat myös hyödyntää tarkempia merkintöjään ja käyttämään huomattavasti tarkempia likiarvoja. Esimerkiksi neliöjuuren likiarvo poikkeaa todellisesta arvosta vasta kuudennessa desimaalissa. Arabiassa Jamshid al-Kashi (1380-1429 [29]) kehitti desimaalilukulaskemisen tasolle, jolle yllettiin uudelleen vasta 1500-luvun lopulla. Tähän pohjaten eteneminen POPSissa vaikuttaa pätevältä, kun otetaan huomioon, että oppilaat tuntevat jo nollan, on desimaalien käyttö helpompaa kuin babylonialaisten ja arabien menetelmillä, joskin arabialaisten matemaatiikan notaatiot olivat jo hyvin lähellä moderneja. Prosentti ei sinäänsä ole erillinen kokonaisuus vaan murto- ja desimaalilukujen johdannainen. Kymmenjärjestelmän pohjalta on loogista jakaa kokonaisuus sataan osaan esimerkiksi verotusta ajatellen on idea, jota käytettiin ilmeisesti jo Rooman valtakunnan aikaan [46].

> Pythagoraan kerrotaan oppineen Kaksoisvirranmaassa aritmeettisen, geometrisen ja harmonisen keskiarvon. Lisäksi hän oppi "kultaisen verrannon" (kahdesta luvusta ensimmäisen suhde lukujen aritmeettiseen keskiarvoon on yhtä suuri kuin lukujen harmonisen keskiarvon suhde toiseen lukuun). Pythagoras kehitti kymmenen keskiarvon järjestelmän, jossa b on lukujen a ja c eräs keskiarvo. [5, s.96]

1. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{a}$ (aritmeettinen)
2. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{b}$ (geometrinen)
3. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{a}{c}$ (harmoninen)
4. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{a}$
5. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{a}$
6. $\frac{b-a}{c-b} = \frac{c}{b}$
7. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{c}{b}$
8. $\frac{c-a}{c-b} = \frac{c}{a}$
9. $\frac{c-a}{b-a} = \frac{b}{a}$
10. $\frac{c-a}{c-b} = \frac{b}{a}$

Prosenttia siis ei vielä todennäköisesti tunnettu Pythagoraan aikaan, mutta tilastojen tutkimus eteni kuitenkin sen verran hitaasti ja paloittain, että vaikka aikaväli on kohtuullisen suuri (~ 500 vuotta) niin vain tilastojen tutkimuksen kehitystä tarkasteltaessa kyseessä on suhteellisen lyhyt aika. Tilaston suurin ja pienin arvo, sekä keskiarvo ovat intuitiivisesti ensimmäisiä käsiteltäviä tilastojen käsitteitä ja juuri näistä on POPSissakin lähdetty liikkeelle. Tyyppiarvo eli moodi vaikuttaa monimutkaisemmalta, mutta jos ei oteta huomioon termistöä on moodi helposti oppilaan havaittavissa pienestä aineistosta ilman, että varsinaista termistöä on tarvetta käsitellä. Todennäköisyyksien päättely omien kokemusten ja intuition pohjalta on käytännöllinen tapa lähteä tarkastelemaan todennäköisyyksiä ilman varsinaista, mahdollisesti oppilaalle vaikeaa teoriapohjaa.

Algoritmien käyttö yhteen-, vähennys- ja kertolaskuissa kuulostaa abstraktimmalta kuin se todellisuudessa on. Monet oppilaat käyttävät näitä algoritmeja automaattisesti hahmottaessaan päissään laskujen etenemistä. Varsinkin kerto- ja jakolaskuissa on historiallisesti käytetty erilaisia tapoja laskujen helpottamiseksi varsinkin suurilla luvuilla. Intiassa matematiikka oli Kreikkaan verrattuna käytännönläheisempää ja näin kerto- ja jakolaskut saivat suuremman roolin. Laskutekniikat muistuttivat hyvin paljon nykysiä menetelmiä ja kertolaskussa oli monimutkaisempiin laskuihin käytössä ristikkokertolasku Gelosia ja jakolaskussa teknisesti modernia kulmajakolaskua vastaava ”Kaljuuna”-tekniikka. Laskutoimitusten väliset yhteydet ovat hahmotuksen perustaitoja ja on siis perusteltua, että näitä käydään läpi. Pyöristäminen ja likiarvoilla laskeminen on ollut tapa helpottaa laskuja kun tavoitteena on ollut saada käytännön tuloksia. Tällöin ei ole ollut tarvetta tehdä laskuista liian monimutkaisia ja pitkiä vaan suhteellisen pätevän tuloksen saaminen on ollut prioriteetti. Egyptiläiset eivätkä babylonialaisetkaan tehneet eroa tarkkojen ja mitattujen arvojen välillä. Monesti pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen käytetyt säännöt antoivat vain karkeita arvioita, jotka riittivät hyvin.

Lukujonon säännönmukaisuuden tutkiminen on hyvä lähtökohta yhtälöiden tutkimiselle. Tuntematon tulee uutena aiheena yhtälöiden tutkimisen yhteydessä ja on monelle ensimmäinen selkeästi abstraktimpi matematiikan aihe. Vaikka yhtälöiden ratkaisuja haetaan ensin päättelemällä ja kokeilemalla on tämä silti ensimmäinen askel kohti eksaktimpaa matemaattista kieltä. Jo egyptiläiset tunsivat ja kykenivät ratkaisemaan ensimmäisen asteen yhtälön. Ratkaisu poikkeaa modernista ratkaisumenetelmästä siinä, ettei yhtälöä pyritä edes ratkaisemaan suoraan vaan tehdään eräänlainen yrite eli periaatteessa yritetään arvata vastaus. Samaan toimintatapaan perustuu POPSin ensimmäiset yhtälönratkaisutavat eli tässä edetään opetussuunnitelmassa ja historiallisesti samaa kaavaa noudattaen. Egyptiläiset laskivat yritteellä yhtälön molemmat puolet ja jos yrite ei ollut pätevä korjattiin yritettä suhteiden avulla. Tämä metodi yhtälön ratkaisemiseksi on intuitiivinen ja alakoulun oppilaidenkin hahmoitettavissa toimintana yrityksen ja erehdyksen kautta. Samalla pystytään luomaan ilmapiiriä, jossa erehtyminen ei ole vääriin vaan vasta ensimmäinen askel kohti ratkaisua. Visuaalisuuteen yhtälöiden yhteydessä edettiin vasta Kreikassa, jolloin noin 400 eaa esitettiin ensimmäisen asteen käyrä, joka ei ollut ympyrä tai suora.

Selkeästi moderniin aikaan sijoittuva toimintaohjeiden laatiminen tietokoneohjelmina graafisessa ohjelmointiympäristössä on jälleen otettu mukaan, jotta oppilas ymmärtäisi syvemmin käytössä olevien laitteiden toimintaperiaatteita ja pystyisi itse hahmottamaan mitä vaatimuksia laitteiden toiminnan pohjalla on. Samalla tämä on selkeää jatkoa jo alaluokilla aloitetulle ohjelmoinnin opettelulle.

Luku 5

Peruskoulun yläluokat ja matematiikan eriytyminen

Vuosiluokilla 7-9 oppiaineen opetuksen tehtävät pysyvät pääpiirteittäin samoina kuin alemmilla vuosiluokilla, mutta jälleen laajennetaan kokonaisuuksien ja yhteyksien ymmärtämistä. Lisäksi uutena ominaisuutena kiinnitetään huomiota loogiseen ja täsmälliseen matematiikkaan, sekä pyritään luomaan selkeämpiä yhteyksiä koulun ulkopuoliseen elämään ja tarkastellaan jo matematiikan käytön mahdollisuuksia työelämässä.

> Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua.[1, s.234]
>
> Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Opetus kehittää oppilaiden kykyä käyttää ja soveltaa matematiikkaa monipuolisesti.[1, s.234]
>
> Vuosiluokkien $7-9$ matematiikan opetuksen tehtävänä on vahvistaa matemaattista yleissivistystä. Opetuksessa syvennetään matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien ymmärtämistä. Opetus innostaa oppilaita löytämään ja hyödyntämään matematiikkaa omassa elämässään. Oppilaiden valmiuksiin kuuluvat ongelmien matemaattinen mallintaminen ja ratkaiseminen. Matematiikan opetus ohjaa oppilaita tavoitteelliseen, täsmälliseen, keskittyneeseen ja pitkäjänteiseen toimintaan. Oppilaita rohkaistaan esittämään ratkaisujaan ja keskustelemaan niistä. Opetuksessa kehitetään oppilaiden yhteistyötaitoja.[1, s.374]

Myös tavoitteissa on selkeästi esillä täsmällinen matemaattinen ilmaisu ja yhä suurempien kokonaisuuksien hahmottaminen:

- opittujen asioiden väliset yhteydet
- täsmällinen matemaattinen ilmaisu suullisesti ja kirjallisesti
- looginen ja luova ajattelu vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa ja tarvittavien taitojen kehittämisessä
- ratkaisujen kriittisesti arviointi
- matematiikan soveltaminen muissa oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa

Tavoitteet ajavat selkeästi kohti oppilaan omaa matematiikan hahmotuksen kehittämistä. Kokonaisuuksien ja yhteyksien havaitseminen ja hyödyntäminen on keskeinen osa oppilaan kehittymistä. Tämä yhteyksien ja kokonaisuuksien hahmottaminen on keskeisessä osassa niin opetussuunnitelmassa kuin historiallisestikin, koska matemaattisen tietouden kasvaessa ja eriytyessä on tärkeä hahmottaa miten asiat liittyvät toisiinsa ja miten eri aiheissa opittuja taitoja voidaan soveltaa toisiin aiheisiin.

Matemaattisten kokonaisuuksien laajetessa ja erikoistuessa myös tavoitteisiin liityvien sisältöalueiden lukumäärä kasvaa:

- Yleiset matemaattiset sisällöt
  - loogista ajattelua vaativia toimintoja kuten sääntöjen ja riippuvuuksien etsimistä ja esittämistä täsmällisesti
  - päättelykyky ja taito perustella
  - syvennetään algoritmista ajattelua
  - matemaattisen tekstin tulkitseminen ja tuottaminen
- Yleiset laskutoimitukset
  - peruslaskutoimitukset desimaali- ja murtoluvuilla, sekä negatiivisilla luvuilla
  - vastaluku, käänteisluku ja itseisarvo
  - lukualue laajennetaan reaalilukuihin
  - lukujen jaollisuus ja alkutekijät
  - tarkan arvon ja likiarvon ero sekä pyöristäminen
- Potenssit
  - potenssilaskenta kokonaislukueksponentilla
  - neliöjuuri
  - potenssilausekkeiden sieventäminen
- Polynomit ja yhtälöt
  - muuttuja ja lausekkeen arvon laskeminen
  - polynomi ja polynomien yhteen-, vähennys- ja kertolasku
  - lausekkeen muodostaminen ja sieventäminen
  - ensimmäisen asteen yhtälöt ja vaillinaiset toisen asteen yhtälöt
  - yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaisu
  - ensimmäisen asteen epäyhtälöt
  - verrannon käyttö tehtävien ratkaisussa.
  - funktioiden riippuvuudet sekä graafisesti että algebrallisesti
  - suoraan ja kääntäen verrannollisuus
  - suorat ja paraabelit koordinaatistossa
  - suoran kulmakerroin ja vakiotermi
  - kuvaajien tulkinta tutkimalla funktion kasvamista ja vähenemistä
  - funktioiden nollakohdat
- Geometria
  - piste, jana, suora, kulma, viiva ja puolisuora, sekä niiden ominaisuudet
  - yhdenmuotoisuus ja yhtenevyys
  - geometrinen konstruointi
  - monikulmioiden piirit ja pinta-alat
  - ympyrän pinta-ala, kehän ja kaaren pituus sekä sektorin pinta-ala
  - pallon, lieriön ja kartion pinta-alat ja tilavuudet
- Trigonometria
  - Pythagoraan lause, Pythagoraan lauseen käänteislause ja trigonometriset funktiot
  - kehä- ja keskuskulma, sekä Thaleen lause
- Logiikka ja todistaminen
  - todistamisen perusteet
  - väitelauseiden totuusarvon päättelyä
- Todennäköisyys, tilastot ja prosentit
  - pohditaan ja määritetään vaihtoehtojen lukumääriä
  - prosenttiosuuden laskeminen ja prosenttiluvun osoittaman määrän laskeminen
  - lasketaan muuttunut arvo, perusarvo sekä muutos- ja vertailuprosentti
  - keskiarvo, tyyppiarvo, frekvenssi, suhteellinen frekvenssi, mediaani ja hajonta
- Lukujonot
- Mittayksiköiden ja yksikkömuunnosten hallinta
- Ohjelmointi

Opetusuunnitelma kannustaa valitsemaan soveltavien tehtävien aiheet oppilaita kiinnostavista aiheista ja ilmiöistä, sekä näihin liittyvistä ongelmista. Oppilaita kannustetaan käyttämään omaa intuitiota, sekä havainnollistamaan, mallintamaan ja tukemaan ajatteluaan piirroksilla ja apuvälineillä. Myös projekteja ja ongelmalähtöisiä tutkimustehtäviä tarjotaan monipuolistamaan opetusta, joskin ilmeisesti vain taitaville oppilaille. Arviointiin panostetaan ainakin ideatasolla enemmän kuin alaluokilla. Monipuoliseen arviointiin ei ole kuitenkaan uskallettu täysin lähteä vaikka siihen kannustetaankin.

> Oppilailla tulee olla mahdollisuus osoittaa osaamistaan eri tavoin. Arvioinnin kohteena ovat matemaattiset tiedot ja taidot sekä niiden soveltaminen. [1, s.377]

> Lisäksi arvioinnissa kiinnitetään huomiota tekemisen tapaan ja taitoon perustella ratkaisuja sekä ratkaisujen rakenteeseen ja oikeellisuuteen. [1, s.377]

Käytännössä vaikuttaa siis siltä, että soveltavampaa ja oppilaslähtöisempään matematiikan esitykseen kannustetaan kunhan se tehdään määrätynlaisen rakenteen puitteissa. Sääntöjen ja riippuvuuksien etsiminen on juurikin se tapa millä matematiikka on pääsääntöisesti kehittynyt. Käytännön ongelmaan on pyritty etsimään laskennallisia sääntöjä, joita pystyttäisiin soveltamaan tulevaisuuden ongelmatilanteissa. Samaan pyritään päättelykyvyn kehittämisellä ja hiljalleen lähestytään matemaattisesti täsmällisempää päättelyä. On loogista, ettei täsmällistä matematiikan kieltä ja esitystapoja oteta käyttöön heti vaan vasta huomattavasti myöhemmin, koska historiallisestikin täsmällinen matematiikan esitys tuli käyttöön huomattavan myöhään. Vaikka antiikin Kreikan geometrisissa todistuksissa (vrt. Eukleideen *Stoikheia*) oltiinkin jo hyvin lähellä täsmällistä todistuksen esitystä ei muissa matematiikan alueissa täsmällistä esitystä käytetty systemaattisesti vielä yli tuhanteen vuoteen.

Laajennus negatiivisten lukujen käyttöön tulee yllättävän myöhään, koska historiallisesti negatiiviset luvut esiintyivät jo ennen nollan modernia vastaavaa käyttöä. Varsinaisesti nolla tuli osaksi lukujärjestelmää vasta intialaisten matematiikassa, joka luetaan Brahmaguptan (598- ~665[22]) ansioksi. Kiinassa negatiiviset luvut esiintyivät jo teoksessa *Tšiu-tšang suan-su* (en. *The Nine Chapters on the Mathematical Art* [20]), jonka tekstit ovat pitkältä aikaväliltä (1000-100 eaa) ja täydennyksiä tehtiin aina 100-luvun loppupuolelle asti. Vaikka negatiiviset luvut olivat käytössä ei niitä kelpuutettu yhtälön ratkaisuiksi. *Tšiu-tšang suan-su* käsittelee paljon käytännön ongelmia, mutta myös yhtälönratkaisua, suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia ja taikaneliöitä. Peruslaskutoimitukset on opeteltu POPSin mukaan jo vuosia aiemmin, ja desimaali- ja murtoluvut ovat myöskin jo tuttuja. Kyse on siis vain opittujen asioiden yhdistämisestä. Vastaluku, käänteisluku ja itseisarvo ovat läheisessä yhteydessä negatiivisiin lukuihin ja murtolukuihin, joten niiden käsittely samassa yhteydessä on ymmärrettävää. Samoin kuin edelliset myös jaollisuus ja alkutekijät ovat olleet historiallisesti pyörittelyn kiinnostuksen kohteita. Tällaiset lukujen ominaisuuksien tarkastelut ovat olleet monien matematiikan harrastajien mielenkiinnon kohteita, eikä näiden keksimistä pystytä tarkasti ajoittamaan, koska kuten monet muutkin peruspyörittelyt ei niitä pidetty merkittävinä vaan enemmänkin välituloksina tai eräinä ominaisuuksina muiden joukossa. Lukualueen laajentaminen reaalilukuihin on pitkällisempi prosessi. Noin 400 eaa selvitettiin, etteivät kokonaisluvut ja niiden suhteet riitä kaikkien geometrian ominaisuuksien selittämiseen. Huomattiin, ettei muun muassa neliön lävistäjä ollut kokonais- tai rationaaliluku, mutta muiden kuin kokonais- tai rationaalilukujen olemassaolo pystyttiin hieman myöhemmin myös todistamaan formaalisti. Yhteismitattomuus, eli lukujen vertailukelvottomuus keskenään, on havaittavissa kreikkalaisille keskeisissä neliön, kuution ja säännöllisen viisikulmion lävistäjissä. Antiikin Kreikan määritelmän mukaan janat tai luvut ovat yhteismitalliset, jos on olemassa jana, jonka monikertoja molemmat ovat. Tämän perusteella kreikkalaiset jaottelivat luvut neljään ryhmään yhteismitallisuutensa perusteella:

- yhteismitalliset
- yhteismitattomat
- yhteismitattomat, mutta neliön suhteen yhteismitalliset
- yhteismitattomat myös neliön suhteen

Potenssit itsessään on tunnettu jo kauan ja babylonialaisten tapa laskea aritmeettiset laskutoimitukset oli pääasiassa samat kuin nykyisin ja heidän taitonsa olivat käytännössä nykyistä vastaavat. He tunsivat potenssin ja logaritmin käsitteen sekä osasivat käyttää näitä yksinkertaisissa tapauksissa. Potenssia ja logaritmia osattiin lisäksi käyttää sovelluksissa arvioimalla arvoja tunnetuista potensseista ja logaritmeista. Modernit potenssimerkinnät ovat sen sijaan uudempi keksintö. Kreikkalainen Diofantos (201/215-285/299 [52]) tutki laajasti yhtälöitä ja kehitti potenssimerkinnät, joissa esimerkiksi S vastaa modernia x^4 ja C modernia x^3. Näin pystyttiin merkitsemään vain tuntemattoman potensseja. Nicola Oresme ($\sim$1360) kehitti edelleen potenssi- ja juurimerkintöjä, mutta nämä olivat vielä hankalia. Nicolas Chuquet (1445/1455 - 1488/1500 [34]) esitteli teoksessaan *Triparty* (1484) potenssimerkinnän $.5.^2$, joka vastaa modernia merkintää $5x^2$, jossa oli käytössä myös potenssi 0 ja negatiiviset potenssit. Myös potenssinimitykset *ala*, *kuutio* ja neljännen potenssin *alan ala* esiintyivät teoksessa. Rafael Bombelli (1526-1573) otti käyttöön jälleen moderneja merkintöjä lähestyvät potenssimerkinnät $^{(1}, ^{(2}, ^{(3}$, jotka vastaavat moderneja x, x^2, x^3. Joskin Bombellin merkinnöillä kyettiin ilmeisesti merkitsemään vain tuntemattoman potensseja kuten Diofantoksenkin merkinnöillä. William Oughtred (1574-1660 [39]) vuorostaan käytti Diofantoksen merkintätapaa vastaavaa potenssimerkintää, jossa q vastaa tuntemattoman toista potenssia ja c kolmatta, jolloin qc vastaa modernia merkintää $x^2x^3 = x^5$. 1600-luvulla Euroopassa potenssit nousivat kokoajan suurempaan asemaan matematiikan tutkimuksessa, joka lisäsi tarvetta kehittää käytännöllinen merkintätapa.

Usein tuntematonta ja sen potenssia merkittiin yhdellä symbolilla, jonka seurauksena merkinnät olivat kankeita. Jobst Bürgi (1552-1632 [41]) kehitti merkinnän $1^{IV} + 3^{II} - 7^{I}$, joka vastaa modernia $x^4 + 3x^2 - 7x$. Simon Stevin (1548-1620 [42]) vuorostaan potenssimerkinnän $1^{4} + 3^{2} - 7^{1}$, joka vastaa modernia $x^4 + 3x^2 - 7x$, sekä juurimerkinnät $2^{1/2}$, joka vastaa modernia $\sqrt{2x}$, ja $2^{3/2}$, joka vastaa modernia $\sqrt{2x^3}$. Modernien merkintöjen keksiminen luetaan René Descartes'n (1596–1650 [53]) ansioiksi esittäessään merkitätavan teoksessaan *La Géométrie* (1637) [55], jossa esiteltiin myös ensimmäinen moderni koordinaatisto [54]. Potenssilausekkeiden sieventäminen ja potenssilaskusäännöt ovat historiallisesti katsoen vanhoja keksintöjä ja esiintyneet jo potenssien käyttöönoton aikoihin. Varsinaiset formaalit potenssilaskusäännöt $x^m x^n = x^{(m+n)}$ ja $(x^m)^n = x^{mn}$ ovat kuitenkin vasta Nicola Oresmen peruja, joskin Oresme kykeni ottamaan huomioon myös irrationaaliset potenssit toisin kuin edeltäjänsä. Tässä vaiheessa potensseja käsitellään POPSissa kuitenkin vain kokonaislukupotensseilla.

Neliöjuuri on läheisessä yhteydessä potensseihin ja voidaan esittää potenssien erikoistapauksena, joten neliöjuuren käsittely potenssien yhteydessä on täysin perusteltua. Historiallisesti potenssit ja neliöjuuri ovat kehittyneet ajallisesti hyvin lähellä toisiaan, joskin neliöjuuri on laskennallisesti vaativampi prosessi kuin kokonaislukupotenssit. Babylonialaiset olivat taitavia algoritmisten prosessien kehittäjiä ja he kehittävät menetelmän muun muassa neliöjuuren laskemiseen. Lisäksi näillä menetelmillä oli mahdollista tarkastella päättymättömiä prosesseja ja desimaalilukuja, mutta nykyisten todisteiden perusteella ei ole syytä uskoa, että babylonialaiset olisivat syvällisemmin tarkastelleet näitä. Päättymätön desimaaliluku katkaistiin sopivasta kohtaa ja käytettiin likiarvoa tai asetettiin luvulle ylä- ja alaraja. Vaikka babylonialaiset olivatkin eteviä desimaaliluvuilla laskijoita ei uskota, että he kykenivät tunnistamaan desimaalilukujen jaksollisuutta tai muita säännönmukaisuuksia. Likiarvojen tarkastelun tulisi olla POPSin perusteella oppilaille jo tuttua, joten neliöjuuren käsittely yksinkertaisimmillaan neliön käänteisprosessina voidaan olettaa olevan täysin oppilaan hallittavissa.

Polynomien ja yhtälöiden laajempi käsittely on keskeisimpiä ja haastavimpia vuosiluokkien 7-9 kokonaisuuksia. Muuttujien käyttö, yhtälöt ja varsinkin funktiot ovat jo selkeästi abstraktimmalla tasolla kuin aiemmat matematiikan kokonaisuudet. POPSissa geometrinen konstruointi, sekä funktioiden riippuvuuksien graafinen ja algebrallinen tarkastelu on vuosiluokkien 7-9 aiheistossa, jolloin yhtälöiden ja geometristen tasokuvioiden välinen yhteys olisi havaittavissa. Tämä yhteys ei ole kuitenkaan triviaali, jos aihealueet käydään läpi erillään. POPSissa painotus on ensimmäisen asteen yhtälöillä ja yhtälön ymmärtämisen perusteilla. Tässä yhteydessä tarkastellaan lausekkeen muodostamista ja sieventämistä, verrannon käyttöä ja funktioiden kuvaajia. Suoria ja paraabeleja koordinaatistossa tarkasteltaessa pystytään yhdistämään symbolinen ja graafinen muoto toisiinsa, kun tarkastellaan suoran kulmakertoimen ja vakiotermin vaikutusta kuvaajan muutokseen. Samalla tarkastellaan funktion nollakohtia ja kuvaajan kasvamista ja vähenemistä, joka luo jo hieman pohjaa derivaattaan. Tämä graafinen lähestymistapa vastaa historiallista kehitystä ja tätä voidaan pitää intuitiivisena lähestymisenä aiheeseen.

Ensimmäisen asteen yhtälöt on tunnettu jo ennen varsinaista Egyptin valtakunnan suurta kukoistusta, joskin eri muodossa kuin nykyisin käsitämme yhtälöt. Tuntemattoman käyttö symbolisessa muodossa on kehittynyt vasta huomattavasti myöhemmin. 400-300 eaa toisen asteen yhtälölle johdettiin ratkaisukaava geometrisesti. Vertailun vuoksi samoihin aikoihin pinta-alat, tilavuudet ja pituudet eroteltiin, jolloin esimerkiksi alan ja pituuden yhteenlasku ei enää onnistunut. Tämä oli merkittävä askel matematiikassa ja enteili formaalimman matematiikan syntyä. Pinta-alojen, tilavuuksien ja pituuksien erottelun ja toisen asteen asteen yhtälön ratkaisukaavan välillä on mielenkiintoinen kontrasti, koska aiempaa voidaan pitää nykykatsomuksen mukaan suhteellisen triviaalina toinen taas on jo monipuolisempaa osaamista vaativa tulos. Geometristen kehitelmien kehittyessä suhteiden käyttö väheni ja "kaavojen" käyttö yleistyi. Varsinaisiksi kaavoiksi emme voi näitä kehitelmiä sanoa, koska esitysmuoto oli piirretty. Merkittävimpiä kehitelmiä olivat osittelulaki $a(b+c+d) = ab+ac+ad$, binomilause toiselle potenssille $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ ja neliöjuuren viitteellinen laskentatapa.

Vaillinaisia toisen asteen yhtälöitä tarkastellessa on, niin historiallisesti, kuin opetuksen rakennekin huomioiden perusteltua, ettei toisen asteen yhtälöitä oteta kokonaisuudessaan kerralla vaikka oppilailla periaatteessa olisikin tarvittavat taidot toisen asteen yhtälöiden käsittelyyn. Babylonialaiset tunsivat toisen asteen yhtälön ratkaisun niin yksittäisissä kuin yleisessäkin tapauksessa, jos juuri oli positiivinen. Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavassa käytettiin symbolien sijasta sanoja *pituus*, *leveys*, *ala* ja *tilavuus* muuttujien merkinnässä. Näillä oli käyttöä, sekä käytännön laskennassa, että abstraktimmassa matematiikassa, koska esimerkiksi alaan saatettiin lisätä pituus tietyissä tilanteissa ilman ongelmia. Yhtälöparejakin osattiin ratkaista, joskin ratkaisumenetelmät olivat kirjavia. Koska babylonialaiset eivät osanneet ratkaista negatiivisia juuria, niin toisen asteen yhtälöt jaettiin kolmeen ryhmään:

1. $a^2 + bx = c$
2. $a^2 = bx + c$
3. $a^2 + c = bx$

Tämä ryhmittely, joka tunnettiin tiettävästi Kaksoisvirranmaassa jo noin 2000eaa, oli käytössä aina keskiajalle asti. Ryhmittelyyn, joskin ei ihan samanlaiseen, perustuu vieläkin jako opetussuunnitelmien etenemisessä. Käydään läpi ensin helpommat tapaukset, joista sitten vaiheittain edetään vaikeampiin tapauksiin.

Esimerkkinä voi käyttää juuri toisen asteen yhtälön ratkaisuun perehtymistä:

1. ensimmäisen asteen yhtälö
2. vaillinainen toisen asteen yhtälö positiivisilla kokonaislukujuurilla
3. vaillinainen toisen asteen yhtälö reaalilukujuurilla
4. yleinen toisen asteen yhtälö positiivisilla kokonaislukujuurilla
5. yleinen toisen asteen yhtälö reaalilukujuurilla
6. yleinen toisen asteen yhtälö kompleksilukujuurilla

Näistä yleiset ratkaisut kuuluvat vasta lukion oppimäärään. Epäyhtälöt ovat perinteisiä yhtälöitä vähemmän dokumentoituja ja usein historian tutkimuksessa epäyhtälöt jäävät lähes huomiotta. Suuruuksien ja joukkojen kokojen vertailulla on kuitenkin pitkät perinteet aivan matematiikan historian alkuhämäristä asti [9]. Kuten jo aiemmin mainittiin 3 on pienempi/suurempi varsinkin suurien lukujen ja joukkojen yhteydessä ollut riittävä tieto. Koska kyseessä on näinkin vanha matematiikan käsittelemisen tottumus ei epäyhtälöidenkään käytössä varsinaisesti ole pohdittu, että kyseessä olisi yhtälöistä eroava kokonaisuus vaan enemmänkin yhtälöiden intuitiivinen soveltaminen. Esimerkiksi jo Eukleideen Stoikheiassa määritellään, että kulma on tylppä, jos se on suurempi kuin suorakulma. Modernit merkinnät ovat kuitenkin todella uusi keksintö ottaen huomioon kuinka kauas matematiikan historia yltää ja kuinka kauan on peruslaskutoimituksia ja yhtälöitä käytetty. Merkit $+$ ja $-$ otettiin käyttöön vasta 1400-luvun lopussa Johannes Widmanin toimesta aluksi yli- ja alijäämää kuvaavina symboleina. Robert Recorde (1510-1558), joka oli lääkäri kuten monet ajan matemaatikot (mm. Chaquet, Cardano), otti käyttöön modernin kaltaisen yhtäsuuruusmerkin yhdessä merkkien $+$ ja $-$ kanssa, joskin venytetympinä

$$1 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\; 3 \longrightarrow 2 \Longrightarrow 2.$$

Yhtäsuuruusmerkin vakiintuminen kesti kuitenkin yli sata vuotta. Thomas Harriot (1560-1621 [38]) otti käyttöön merkinnät $>$ ja $<$ yhdistäen nämä Recorden yhtäsuuruus merkkiin $=$ ja William Oughtred (1574-1660 [39]) vuorostaan esitteli kertomerkin $\times$. Modernien merkintöjen kehitys kesti siis lähes 200 vuotta alkusysäyksestään. On kuitenkin huomattava, kuten lukujärjestelmämmekin kanssa, ettei oppilaille ole tarpeellista tai järkevää esitellä vanhempia merkintöjä modernien merkintöjen ollessa niin keskeinen osa yhteiskuntaamme.

Geometriassa tutustutaan trigonometrian käsittelyyn vaadittaviin tietoihin. Piste, jana, suora, kulma, viiva ja puolisuora, sekä niiden ominaisuudet ovat keskeisiä niin geometriassa kuin trigonometriassakin. Yhdenmuotoisuus ja yhtenevyys ovat jo tuttuja alemmilta luokilta. Geometrinen konstruointi on jo selkeästi askel kohti eksaktimpaa geometriaa ja Eukleideen konstruktioita. Eukleides ($\sim$300 eaa) tunnetaan yhden antiikin Kreikan merkittävimmän teoksen *Stoikheia* kirjoittajana. *Stoikheia* on kattava euklidisen geometrian oppikirja ja vaikka se ei ollut varsinaisesti alan oppikirja oli se niin kattava, että sitä käytettiin yhä 1800-luvulla oppikirjana. Syy pitkään ikään on useissa käännöksissä, joiden avulla teos säilyi toisin kuin monet tuon ajan teokset, mutta myös geometrian tutkimuksen innostuksen laantuminen Kreikan kulta-ajan jälkeen. Verrattuna yhtälöihin geometriset konstruktiot ovat vanhempia keksintöjä ja juuri geometriset konstruktiot johtivat ensimmäisiin yhtälöihin ja kuten jo aiemmin mainittiin esimerkiksi toisen asteen yhtälön ratkaisukaava konstruoitiin ensin geometrisesti. Piirien, pinta-alojen ja tilavuuksien mittaaminen oli vuorostaan jo Egyptin valtakunnan aikana keskeisessä asemassa ja selkeimpiä insinööritaidon ensimmäisiä saavutuksia.

Trigonometrian tutkimuksessa palataan jälleen antiikin Kreikan aikaan, mutta jo babylonialaiset tunsivat trigonometrian alkeita ja osasivat havaita kuvioista säännönmukaisuuksia. Pythagoraan lause ja käänteislause tunnettiin babyloniassa tietyissä tapauksissa. Tällöin ilmaistiin suorakulmaisen kolmion kylkien pituudet muodossa $p^2 - q^2$ ja $2pq$, jolloin hypotenuusan pituus oli $p^2 + q^2$ ja kylkien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan neliö. Vaikka trigonometria kehittyi kolmiotutkimuksista pitkällä aikavälillä useissa eri paikoissa tehtyjen tutkimusten perusteella oli Kreikka trigonometrian tutkimuksen keskeisin edistäjä. Thalesta pidetään ensimmäisenä, joka kehitteli varsinaista todistamista ja häntä pidetään geometrian deduktiivisen rakenteen kehittäjänä. Hänen tutkimuksen lähentelevät jo trigonometriaa tutkiessaan ja todistaessaan muun muassa seuraavat väitteet:

- Ympyrän halkaisija jakaa ympyrän kahteen yhtä suureen osaan
- Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret
- Kahden toisiaan leikkaavan suoran ristikulmat ovat pareittainn yhtä suuret
- Kolmiot ovat yhtenevät, jos kolmioiden kaksi vastinkulmaa ja vastinsivu ovat yhtenevät
- Thaleen lause

Thaleeseen ja Pythagorakseen kulminoituukin Kreikan trigonometrian kehitys vaikka babylonialaiset tunsivatkin jo aiemmin Thaleen ja Pythagoraan mukaan nimetyt lauseet, on todennäköistä, että Thales ja Pythagoras tunsivat babylonialaisten matematiikkaa. Pythagoraan keskeisimpiä tutkimuskohteita olivat:

- Kolmioiden yhdenmuotoisuus
- Suhteet (kultainen leikkaus)
- Pythagoraan lause

Aluksi kulmat ilmoitettiin kolmion osina, mutta jo Hipparkhos (∼190-127 eaa) käytti kirjoituksissaan päivien lukumäärään vuodessa perustuvaa 360 asteen jakoa, joka on yhäkin käytössä. Trigonometrian avulla pystyttiin tekemään menetelmällisesti päteviä arvioita Maan, Kuun ja Auringon suhteellisista etäisyyksistä ja koista, joskin välineistön epätarkkuus ja virheellinen käsitys aurinkokunnan rakenteesta johtivat epätarkkoihin arvoihin. Ptolemaios (∼100-200 jaa) esitti teoksessaan *Almagest* edistyneempää trigonometriaa ja taulukoi kattavasti trigonometrisia arvoja, joskin suurin osa näistä arvoista oli jo tunnettu, muttei tiettävästi koottu yksiin kansiin. Trigonometriset funktiot ovat tuoreempi keksintö vaikka Egyptin rakennustekniikassa tunnettiin nykyistä kotangenttia vastaava käsite suhteena, jolla kuvattiin rakennuksen kaltevuuttaa $\frac{\text{vaaka}}{\text{pysty}}$. Nykyään nousun jyrkkyys ilmoitetaan tangentin avulla pystysuoran mitan ja vaakasuoran mitan suhteena $\frac{\text{pysty}}{\text{vaaka}}$. Muutoin trigonometrisia funktioita ei juurikaan käsitelty välimeren alueella. Sinifunktiota kuitenkin tutkittiin Intiassa 300- ja 400-luvulla arvojen ollessa hyvin lähellä moderneja. Arabiassa Thabit ibn-Qurra (826-901[26]) esitti vaihtoehtoisia todistuksia Pythagoraan teoreemaan. Euroopassa trigonometrian tutkimus oli lähes mitätöntä Kreikan kulta-ajan jälkeen aina 1400-luvun alkuun asti. Nicolaus Casalainen (1401-1464) tutki paikanmittausta ja janoja niin teoriassa kuin käytännössäkin. Nicolaus oli kuitenkin hyvin käytännönläheinen ja piti erittäin tärkeänä, että kaikki tieto perustuu mittauksiin. Hieman Nicolauksen jälkeen vaikuttanut Regiomontanus (1436-1476) oli huomattavasti enemmän teoriaan tutkimuksensa pohjaava ja osoittikin useat Nicolauksen päätelmistä virheellisiksi. Regiomontanus oli ensimmäinen trigonometrian edistäjä Euroopassa, mutta toisin kuin arabit ja intialaiset hän erotti tähtitieteen trigonometriasta erilliseksi alaksi. Vasta 1533 julkaistu *De triangulis* oli kattava teos trigonometriasta, mutta ei yltänyt noin 200 vuotta aiemmin vaikuttaneen Nasir Eddinin tasoon. Vaikka Regiomontanus pohjasi tutkimuksensa Eukleideen töihin oli hän tietoinen myös arabien töistä. Näin ollen Regiomontanus pystyi etenemään Eukleideen töistä antamalla probleemoille numeeriset arvot, jolloin hän kykeni käyttämään hyväksi arabien algebran tietoutta. Nasir al-Din al-Tusi (Nasir Eddin, 1201-1274[28]) ja hänen edeltäjänsä Omar Khayyam (1048-1131[27]) olivat Arabian keskeisimpiä geometrian ja trigometrian tutkijoita. Omar Khayyam tutki Kreikan geometrian ja trigonometrian lisäksi Lambertin ja Saccherin nelikulmioita kauan ennen nimensä näille antaneita tutkijoita. Nasir Eddin vuorostaan jatkoi Omar Khayyamin töiden pohjalta paralleeliaksiooman tutkimista, jonka lisäksi hänen ansioikseen luetaan ensimmäiset systemaattiset taso- ja pallotrigonometrian esitykset, sekä ympyräratojen tutkimus tähtitieteessä, joka mahdollisesti loi pohjaa Kopernikuksen ja Cardanon töille.

Logiikka ja todistaminen on keskeinen osa eksaktia matematiikkaa. Päättelykyky on ollut aina välttämätön taito matematiikan osaamisessa ja kehittämisessä, mutta varsinaiset eksaktit todistukset loistivat pitkään poissaolollaan. Toisaalta peruskoulussa todistaminen ja looginen päättely on pääasiassa omien päätelmien tekemistä, sekä matemaattisen päättelyn etenemisen ja oikeutuksen tarkastelua. Hyvin pitkälti siis samaa mitä tehtiin ennen eksaktin matemaattisen todistamisen kehitystä. Logiikan puolella eteneminen on samankaltaista. Pyritään pohtimaan väitteiden totuusarvoja. Perehdytään siis sisältöihin, jotka niin opetuksellisesti kuin historiallisestikin luovat pohjaa eksaktin matemaattisen logiikan omaksumiselle.

Todennäköisyyksien kohdalla pohditaan yksinkertaisimpia todennäköisyyksiä, kuten vaihtoehtojen lukumääriä. Historiallista kehitystä on vaikea tarkasti määrittää, koska varsinkin yksinkertaisimpien todennäköisyyksien kohdalla intuitio on suuressa asemassa. Prosenttilaskut vuorostaan jatkuvat siitä mihin alaluokilla jäätiin, josta jatketaan muuttuneen arvon, perusarvon sekä muutos- ja vertailuprosenttien laskemiseen. Tässäkin on kyse suhteellisen pienestä muutoksesta loogisesti edettäessä aiheessa niin opetuksellisesti kuin historiallisestikin.

Mittayksiköiden ja yksikkömuunnosten hallinta on enemmän käytännön taito kuin varsinaista matematiikkaa. Muunnokset kuitenkin vaativat laskemista ja päättelykykyä, joskin hallitseminen onnistuu myös ulkomuistin varassa. Käsiteltävä ja yhteiskunnassamme käytössä oleva kansainvälinen yksikköjärjestelmä eli SI-järjestelmä vuodelta 1960 on suhteellisen tuore standardi, mutta järjestelmä pohjaa pitkälti Ranskan vallonkumouksen aikoihin 1700-luvun lopulla kehitettyyn metrijärjestelmään [56].

Ohjelmointi on jälleen osa opetussuunnitelmaa, mutta kuten jo aiemmin mainittiin on ohjelmoinnin historia kovin lyhyt muihin matematiikan opetussuunnitelman sisältöihin verrattuna.

Luku 6

Lukio

Matematiikan opetuksen rakenteen kehittyminen opetussuunnitelmassa seuraa selkeää kaavaa. Opetuksen edetessä pyritään jatkuvasti laajentamaan oppilaan käsitystä matematiikan rakenteesta, yhteyksistä muihin oppiaineisiin ja yhteiskunnallisesta merkityksestä. Lukion matematiikan opetuksen tavoitteissa juuri yhteiskunnallinen näkökulma ja liittymäkohdat työelämään tulevat yhä selkeämmin esille, mutta aiheet pyritään mahdollisuuksien mukaan liittämään oppilaiden mielenkiinnon kohteisiin.

> Matematiikan asema aikamme kulttuurissa edellyttää valmiutta ymmärtää, hyödyntää ja tuottaa matemaattisesti esitettyä tietoa. Sillä on merkittävä tai ratkaiseva rooli muun muassa tieteissä, teknologiassa, taloudessa, yrittäjyydessä, terveydenhuollossa ja turvallisuudessa.[2, s.142]

Rohkaiseminen ja kannustaminen oppilaan oman intuition ja päättelykyvyn käyttöön on keskeisessä asemassa. Kuitenkin on huomattavaa, että jos pyritään samanaikaisesti kokoajan formaalimpaan matemaattiseen esitystapaan on normista poikkeavan ratkaisun esittäminen oppilaalle huomattava riski oman koulumenestyksen kannalta. Lukion matematiikan opetuksessa näyttäisi olevan kuitenkin pyrkimys intuitiivista päättelyä tukevaan oppimiseen.

> Opetustilanteet järjestetään siten, että ne herättävät opiskelijan tekemään havaintojensa pohjalta kysymyksiä, oletuksia ja päätelmiä sekä perustelemaan niitä. Erityisesti opiskelijaa ohjataan hahmottamaan matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin. [2, s.142]

> Opiskelijaa rohkaistaan myös käyttämään ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä sekä tuetaan opiskelijan taitoa siirtyä toisesta matemaattisen tiedon esitysmuodosta toiseen. [2, s.142]

Opiskelijaa kannustetaan kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin. [2, s.142]

Opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä sekä tietoisesti käytetään eteen tulevia mahdollisuuksia opiskelijan persoonallisuuden kehittämiseen, mikä tarkoittaa muun muassa hänen kiinnostuksensa ohjaamista, kokeiluihin kannustamista sekä tiedonhankintaprosessien kehittämistä. [2, s.142]

Tuoreimmassa versiossa Lukion opetussuunnitelman perusteista matematiikan opiskelu aloitetaan kaikille yhteisellä kurssilla. Matematiikan yhteisen opintokokonaisuuden tehtävissä toistetaan pitkälti samoja teemoja kuin matematiikan opetuksen yleisissäkin tavoitteissa, mutta lisänä pyritään herättämään kiinnostus matematiikan opiskelua kohtaa ja mahdollisesti motivoida useami jatkamaan pitkän oppimäärän parissa.

6.1 Luvut ja lukujonot

Kurssin (MAY1) keskeiset sisällöt:

- reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta
- funktio, kuvaajan piirto ja tulkinta
- lukujono
- rekursiivinen lukujono
- aritmeettinen jono ja summa
- logaritmi ja potenssi sekä niiden välinen yhteys
- muotoa $a^x = b$, $x \in \mathbb{N}$ olevien yhtälöiden ratkaiseminen
- geometrinen jono ja summa

Reaaliluvut, peruslaskutoimitukset ja prosenttilaskenta ovat pääasiassa kertausta aiemmista opinnoista samoin kuin funktioiden perusominaisuudet. Lukujonoja on tarkasteltu jo aiemmin, mutta edettäessä rekursiivisen ja aritmeettisen lukujonon, sekä geometrisen jonon ja summan tarkasteluun on loogista hieman kerrata lukujonon ominaisuuksia. Jo Pythagoras tutki suhteita niin aritmetiikan, lukuteorian kuin geometriankin osalta. Lukuja tutkittiin ja luokiteltiin runsaasti: alkuluvut ja yhdistetyt luvut; parilliset ja parittomat; pariton-pariton- ja pariton-parillinen -tulot erotettiin toisistaan, jolloin parilliset luvut olivat yksinomaan kahden potensseja. Kreikan kulta-aikaa aiemmin Babyloniassa tunnettiin geometrisen sarjan summan yleinen kaava ja n. ensimmäisen täydellisen neliön summan kaava. Kuitenkin Kaksoisvirranmaasta ei ole todisteita yleisistä tuloksista vaan savitaulut sisältävät vain erikoistapauksia, joskin osaa tapauksista voi käyttää yleisissä tapauksissa muuttamalla lukuarvot.

Potenssi on perusominaisuuksiltaan jo peruskoulusta tuttu, mutta logaritmi on täysin uusi aihe, jonka formaalin esitystavan historiallinen synty ajoittuu vasta Keski-Euroopan intellektuallisen nousun alkuaikoihin 1400-luvulle. Nicolas Chuquet'n teoksessa *Triparty* on kaksikantaista logaritmia vastaava taulukko. Logaritmien tutkimus kuitenkin nousi laajempaan tietoisuuteen vasta, kun John Napier(1550-1617) tutki logaritmeja muuan muassa teoksessaan *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614, suom. *Ihmeellisen logaritmisäännön kuvaus*). Napier tuki logaritmeja geometrisesti ja logaritmit olivat pääasiassa nykyisiä vastaavia. Hänen saavutuksiksi lasketaan:

- $\frac{1}{e}$-kantainen logaritmi
- luonnollinen logaritmi
- kymmenkantainen logaritmi yhdessä Henry Briggsin kanssa
    - $\log 1 = 0$
    - $\log 10 = 1$
- numeerinen logaritmien taulukointi
- sana logaritmi kreikan sanoista logos (suom. suhde) ja arthimos (suom. luku)

Henry Briggs (1561-1630 [40]) jatkoi Napierin töitä ja logaritmien taulukointia vielä Napierin kuoleman jälkeenkin. Jobst Bürgi (1552-1632 [41]) kehitteli logaritmeja ilmeisesti Napierista riippumatta samoihin aikoihin ja lähes vastaavin tuloksin. Logaritmien tutkimus jatkui aktiivisesti vielä myöhemminkin mm. Galilein oppilaan Bonaventura Cavalierin (1598-1647 [45]) toimesta.

Tästä eteenpäin keskitetään tarkastelu vain matematiikan pitkään oppimäärään selkeämmin jaotellun ja laajemman sisältönsä vuoksi, josta sisällytetään tarkasteluun kaikki valtakunnalliset kurssit. Matematiikan pitkän oppimäärän tavoitteissa painotetaan hyvien matemaattisten valmiuksien merkitystä ammatillisissa ja korkeakouluopinnoissa unohtamatta yhteiskunnallisia motiiveja. Kokeileva ja tutkiva opiskelu on yhä keskeisessä asemassa, mutta yhä selkeämmin näkyy pyrkimys, että oppilas kykenisi ilmaisemaan matemaattista osaamistaan yhä formaalimmin, perustelemaan toimintaansa ja kriittisesti tarkastelemaan tuloksiaan ja metodejaan. Tällainen korkeakouluopiskeluun tähtäävä opiskelu vaaatii jo huomattavasti pitkäjänteisempää työskentelyä ja tämä onkin kirjattu yhdeksi tavoitteeksi.

6.2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt

Kurssin (MAA2) keskeiset sisällöt:

- polynomien tulo ja muotoa $(a+b)^n$, $n \leq 3$, $n \in \mathbb{N}$ olevat binomikaavat
- 2. asteen yhtälö ja ratkaisukaava sekä juurten lukumäärän tutkiminen
- 2. asteen polynomin jakaminen tekijöihin
- polynomifunktio
- polynomiyhtälöitä
- polynomiepäyhtälön ratkaiseminen

Polynomeihin ja toisen asteen yhtälöihin on tutustuttu jo peruskoulussa ja nyt pyrkimyksenä on syventää olemassa olevaa tietoutta. Intiassa toisen asteen yhtälön yleisen ratkaisun kehitys lähti liikkelle Brahmaguptan (598-665[22]) töistä, joissa hän esitti Diofantoksen yhtälön yleisen ratkaisun ($ax + by = c; a, b, c \in \mathbb{Z}$) ja Diofantoksen toisen asteen yhtälön ratkaisun ($x^2 = 1 + py^2$). Bhaskara (myös Bhaskaracarya tai Bhaskara II, 1114–1185 [23]) oli toinen merkittävä intialainen matemaatikko, jonka ansioiksi on luettu Pellin yhtälön yleinen ratkaisu, joka selvitettiin Euroopassa vasta 1600-luvulla John Pellin (1611-1685 [57]) toimesta.

Diofantoksen vaikutus Kreikassa oli varteenotettava vaikka suurin osa hänen tuloksistaan oli tunnettu jo Babyloniassa ja on oletettavaa, että hän on ollut tietoinen babylonialaisten tuotoksista. Alla keskeisimpiä Diofantoksen tutkimuskohteita, erityisominaisuuksia ja saavutuksia.

- yksikäsitteisen ratkaisun omaavat yhtälöt
- äärettömän ratkaisujoukon omaavat yhtälöt
- symbolien käyttö algebrassa
- eksponenttilakeja vastaavat kombinaatiosäännöt
- ei varsinaisia operaattoreita, relaatioita tai potenssiinkorotusmerkintöjä
- ei varsinaisia yleistyksiä, vaan mahdollisimman yleistettäviä esimerkkiongelmia
- esimerkeissä käytetyt arvot eivät liittyneet käytännön ongelmiin

Diofantos siis eteni yhtälöiden tutkimuksessaan pitkälle, mutta jälleen tehokkaan merkintätavan puute on todennäköisesti estänyt etenemästä vieläkin pidemmälle.

Arabiassa Omar Khayyam (1048-1131 [27]) määritti binomin potenssit $4, 5, 6$ ja n. Toisen asteen yhtälöt ovat, kuten jo aiemmin mainittiin, vanhempi keksintö varsinkin, jos sallitaan geometriset esitystavat. Arabian merkittävimpiä matemaatikoita oli algebran isäksikin tituleerattu Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (~780-850 [24]), joka tunnetaan omien töidensä sijasta pääasiassa tiedon kokoajana. Al-Khwarizmin vaikutuksesta kertoo paljon se, että algorismi ja algoritmi on nimetty suoraan, joskin puolivahingossa, hänen mukaansa. Myös sana algebra on al-Khwarizmilta peräisin johtuen sanasta al-jabr, jolla tarkoitetaan operaatiota nimeltä palautus, jossa yhtälön molemmille puolille lisätään sama luku [24]. Al-Khwarizmin yhteydessä al-jabr viittaa myös hänen teokseensa *al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabala* (~830[24]), jota pidetään yhtenä aikansa parhaista oppikirjoista. Keskeisimpiä al-Khwarizmin teosten sisältöjä ja merkityksellisiä erikoispiirteitä:

- toisen asteen yhtälön ratkaisuja erikoistapauksissa
- neliöön täydentäminen
- negatiivinen juuri jätettiin pois tarpeettomana
- yhtälöiden yhdistäminen geometriaan kreikkalaisten innoittamina

Lukumerkintöjen puuttuminen oli yleistä arabimatemaatikoille, jolloin luvut kirjoitettiin sanamuodossa. Symbolimerkinnät puuttuivat kokonaan ajan arabialaisilta matemaatikoilta. Tästä huolimatta arabien teokset ovat huomattavasti aiempaa rakenteellisesti sujuvampia ja abstraktimpiin aiheisiin kyettiin syventymään ongelmattomammin ja uskaliaammin. Vaikka Arabiassa otettiinkin suuria askeleita kohtia modernia matematiikkaa toisen asteen yhtälön yleinen ratkaisu selvitettiin vasta 1300-luvulla Jordanus Nemorariuksen toimesta[33]. Myöskin arabi Abd al-Hamid ibn Turk (~ 830[25]) selvitti, ettei toisen asteen yhtälöllä ole ratkaisua, jos diskriminantti negatiivinen.

Nicolas Chuquet'n teos *Triparty*, joka osittain pohjautui Boëthiuksen, Campanuksen ja mahdollisesti Fibonaccin töihin, sisälsi ensimmäisen kerran dokumentoidusti itsenäisen negatiivisen luvun yhtälössä, ongelmassa $4x = -2$. Siis negatiiviset itsenäiset luvut yhtälöissä on hyvin myöhäinen edistysaskel ottaen huomioon yhtälöiden pitkän historian. Myöhäinen edistysaskel ovat myös imaginaarilukujen olemassaolo ja hyväksyminen yhtälön ratkaisuina. Chuquet havaitsi imaginaariratkaisujen olemassaolon, mutta käsitteli ne merkityksettöminä tai käsittämättöminä. Ranskalainen Albert Girard (1595-1632 [37]) oli ensimmäisiä, joka hyväksyi negatiiviset ja imaginaariset arvot ja juuret, sekä osoitti, että yhtälöllä voi olla asteluvun ilmoittama määrä juuria. Tosin imaginaarilukuja ei edes käsitellä lukion valtakunnallisessa oppimäärässä.

Kokonaisuutena kurssi on selkeästi painottunut kahden ensimmäisen asteen polynomien ja yhtälöiden opetteluun, jossa edetään suhteellisen samalla reitillä historiallisen kehityksen kanssa, joskin ymmärrettävästi oikoen ajan rajallisuuden vuoksi. Eteneminen ensimmäisen ja toisen asteen yhtälöistä korkeamman asteisiin yhtälöihin ei ole historiallisesti yhtä yksinkertaista kuin nykyisillä menetelmillä. Askel ensimmäisen asteen yhtälöistä toisen asteen yhtälöihin oli historiallisesti merkittävä ja siihen panostetaan opetuksessakin paljon. Toisesta asteesta kolmanteen toimii opetuksessa enemmän yleistyksen pohjalta. tunnetaan yhtälöiden ja potenssien ominaisuuksia, joten niitä voidaan huoletta soveltaa korkeamman asteisiin yhtälöihin. Historiallisesti prosessi on ollut monimutkaisempi, eikä tällaisia yleistyksiä ole voitu ilman tutkimusta tehdä.

Ensimmäiset dokumentit kolmannen asteen yhtälöistä ovat babylonialaisilta ja heiltä on säilynyt kolmannen asteen yhtälön ratkaisuja. Yksinkertaiset kolmannen asteen yhtälöt ratkaistiin taulukoiden avulla, mutta vaikeammissa tapauksissa jouduttiin käyttämään sijoitusmenetelmää, jolla yhtälö saatiin yksinkertaisempaan muotoon. Kuitenkin yleistä muotoa $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ olevaa yhtälöä ei tiettävästi osattu ratkaista ainakaan säännönmukaisesti. Babylonialaiset kykenivät ratkaisemaan sijoitusmenetelmällä korkeammankin (> 3) asteisia yhtälöitä, jos nämä olivat muutettavissa toiseen asteen yhtälöiksi.

Pappoksen ($\sim$320) kirjoittama *Synagoge* (suom. *Kokoelma*) jäi antiikin Kreikan viimeiseksi suureksi teokseksi. Synagoge kokoaa yhteen Kreikan matematiikan keskeisimmät saavutukset ja käy läpi Kreikan matematiikan historiaa. Teoksessa on myös katsaus uudempaan matematiikkaan sisältäen:

- analyysin ja analyyttisen geometrian alkeet
- kolmannen asteen yhtälöiden geometrisen ratkaisun mahdottomuus
- käänteinen ratkaisumenetelmä (tuloksesta alkutilaan)

Omar Khayyam määritti kolmannen asteen yhtälön geometrisen yleisen ratkaisun positiivisille juurille paraabelin ja hyperbelin avulla. Arabiassa myös mm. Jamshid al-Kashi tutki laajasti kolmannen asteen yhtälöitä.

Keskiajan Euroopassa kolmannen ja korkemman asteen yhtälöitä kehitettiin edelleen. Gerolamo Cardanon (1501-1576) teos Ars Magna (1545) toi matemaattisen maailman tietoisuuteen kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisut, joskin tietyin rajoittein. Tosin kolmannen asteen yhtälön ratkaisun oli perua Nicclo Tartaglialta (1500-1557) ja neljännen asteen yhtälö Cardanon oppilaalta Ludovico Ferrarilta (1522-1565). Myöhemmin Cardanon tietoon tuli, että nämä yhtälöt oli ratkaissut jo aiemmin Scipione del Ferro (1465-1526). Cardanon oli kuitenkin ensimmäinen, joka viimeisteli ja julkaisi tulokset. Kolmannen ja neljännen asteen yhtälöiden ratkaisut olivat kenties suurin saavutus algebrassa sitten babylonialaisten ja toisin kuin al-Kashin eivät Cardanon kolmannen asteen yhtälön ratkaisut olleet käytännön ongelmiin liittyviä. Rafael Bombelli (1526-1573) havaitsi kolmannen asteen yhtälöissä hyödyllisten kompleksisten liittolukujen olemassaolon.

Kiinassa korkeampi asteisia yhtälöitä käsiteltiin Hornerin metodilla (myös Hornerin skeema tai sääntö). Näin pystyttiin tutkimaan, jopa astetta 14 olevia yhtälöitä ja yhtälöryhmiä. Muita Kiinan matematiikan saavutuksia ovat muun muassa Pascalin kolmio 1200-luvun lopulla (Pascal julkaisi vuonna 1665 [21]) ja binomin sarjakehitelmä kahdeksanteen potenssiin asti. 1400-luvulta lähtien vuorovaikutus muiden kulttuurien kanssa oli jo niin voimakasta, ettei riippumatonta kehitystä pystytä arvioimaan.

6.3 Geometria

Kurssin (MAA3) keskeiset sisällöt:

- kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus
- sini- ja kosinilause
- ympyrän, sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria
- kuvioihin ja kappaleisiin liittyvien pituuksien, kulmien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen

Kuvioiden yhdenmuotoisuutta on tarkasteltu jo ensimmäisiltä luokilta asti, mutta nyt haetaan formaalimpia osoituksia kuvioiden yhdenmuotoisuudesta. Sini- ja kosinilause syventävät jo opittujen sini- ja kosinifunktioiden käyttöä. Sinifunktion juuret sijaitsevat Intiassa. Trigonometrian kokonaisvaltaisempi kehitys siirtyi kuitenkin Eurooppaan, jossa trigonometria oli keskeinen ja välttämätön osa tähtitieteen tutkimuksia. Euroopassa trigonometrian kehittäjät olivatkin pääasiallisesti tähtitieteilijöitä ja/tai fyysikoita. Tähtitieteen modernin maailmankuvan juuret ovat kuitenkin antiikin Kreikassa, jossa pythagoralainen Filolaos esitti, että maailmankaikkeuden keskellä on tuli, jota planeetat (Maa, Aurinko, Kuu ja viisi planeettaa) kiersivät. Jotta taivaankappaleiden määrä saataisiin ihannoituun kymmeneen Filolaos keksi ”vasta-Maan”, joka kiersi tulen vastakkaisella puolella, jolloin se ei näy koskaan maasta. Samoin tulta ei koskaan nähty, koska se oli aina Maan ”asumattoman” puolen puolella. Pythagoralaisten käsityksen mukaiset planeettojen ympyräradat olivat käytössä lähes 2000 vuotta, jopa Kopernikus hyväksyi ympyräradat sellaisenaan pythagoralaisilta. Arabialainen Nasir Eddin tutki ympyräratoja tähtitieteessä ja loi mahdollisesti pohjaa Kopernikuksen ja Cardanon töille. Tähtitieteilijä ja siten myös trigonometriaa tutkinut Nikolaus Kopernikus (1473-1543) kehitti yhden ensimmäisistä ellipsin määritelmistä. Kopernikuksen ja Regiomontanuksen trigonometrian töitä kehitti edelleen Georg Joachim Rheticus (1514-1576), joka muun muassa otti tehtäväkseen todella työlään projektin ja taulukoi kaikki kuusi trigonometrista funktiota. Trigonometriassa kehitettiin 1500-luvun lopussa prostafaireeseja eli muuntokaavoja (esim. $\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$), joiden avulla pystyttiin käyttämään tehokkaammin jo olemassaolevia taulukoita. Siis sinifunktion keksimisestä muuntokaavojen kehitykseen kesti noin 1200 vuotta. On toisaalta mielenkiintoista, että sini- ja kosinilause on sijoitettu geometriaa käsittelevään kurssiin eikä myöhempään trigonometrisia funktioita käsittelevään kurssiin.

Ympyrän ominaisuuksien tarkastelu on ollut historiallisesti yksi hankalimmista ja mielenkiintoisimmista matematiikan tutkimuskohteista. Keskeisimmin ympyrän pinta-alan ja piirin, sekä ympyräpohjaisten kolmiulotteisten kappaleiden tilavuuden laskemiseen tarvittava piin arvo on irrationaalisuutensa vuoksi ollut vaikea hallittava. Vaikka piin arvon tarve ja tärkeys sovellusten laskemisessa tiedostettu ja tutkimukseen käytetty kenties eniten aikaa historiassa verrattu aiheen laajuuteen on piin arvon selvittäminen ollut pitkä ja kivinen tie. Kuitenkin on otettava huomioon, että vielä ajanlaskunkin alussa usein karkeakin likiarvo on riittänyt hyvin. Jo aiemmin tarkastelimme piin tutkimusta Egyptissä 3 ja siirrytään nyt hieman eteenpäin.

Babylonialaiset tutkivat ja taulukoivat runsaasti monikulmioiden aloja ja niiden suhteita. Yleisesti ympyrän pinta-alan laskuun käytettiin kaavaa $A = 3r^2$ eli piin arvona käytettiin likiarvoa 3. Kuitenkin on todisteita myös arvon $3\frac{1}{8}$ käytöstä, joskin tämä oli ilmeisesti vähemmän käytössä. Myös Kiinassa käytettiin muuallakin hyvin yleistä piin arvoa 3. Jo 200-luvulla säännöllisestä 3072-kulmiosta saatiin arvo $3,14159$ ja 400-luvulla arvo $\frac{355}{113}$, jossa ensimmäinen piin arvosta poikkeava numero on vasta seitsemännessä desimaalissa. Arvoa $\frac{355}{113}$ vastaava tarkkuus saavutettiin uudelleen vasta 1400-luvulla Arabiassa, jolloin Jamshid al-Kashi kehitti toistaiseksi tarkimman piin arvon. Euroopassa kiinalaisten tarkkuuteen $\frac{355}{113}$ päästiin vasta 1573, josta kuitenkin arvo tarkentui suhteellisen nopeasti Vièten toimesta 10:een merkitsevään numeroon ja 1596 van Ceulenin toimesta 20:een merkitsevään numeroon.

Pinta-alat ja tilavuudet ovat olleet ensimmäisiä ja tarpeellisimpia matematiikan soveluskohteita. Noin 1890 eaa kirjoitetun Moskovan papyruksen perusteella katkaistun pyramidin tilavuus osattiin Egyptissä laskea nykyistä vastaavalla kaavalla, joskin varsinaista muuttujiin perustuvaa kaavaa ei osattu esittää. Menetelmä katkaistun pyramidin tilavuuden laskemiseen on todennäköisesti johdettu samaan tapaan kuin kolmioita ja suunnikkaita käsiteltiin. Pyramidi pyrittiin leikkaa-liimaa -menetelmällä muokkaamaan suorakulmaisiksi suuntaissärmiöiksi, joiden tilavuus on huomattavasti yksinkertaisempi laskea. Lisäksi egyptiläiset osasivat esittää arvioita kaarevien pintojen aloista, joskin arvioiden tarkkuus ja toistettavuus on arvoitus.

Egyptiläiset ja babylonialaiset eivät tehneet eroa tarkkojen ja mitattujen arvojen välillä. Monasti pinta-alojen ja tilavuuksien laskemiseen käytetyt säännöt antoivat vain karkeita arvioita. Tästä huolimatta muun muassa neliöpohjaisen katkaistun pyramidin tilavuus osattiin laskea oikein, mutta silti saatettiin laskea lyhyemmällä vain likiarvon antavalla muodolla. Babylonialaiset osasivat soveltaa sääntöjään, esimerkiksi tiedettiin neliön lävistäjän pituuden olevan aina sivun pituus kerrottuna $\sqrt{2}$:lla ja Pythagoraan lausetta osattiin soveltaa käytäntöön. Siis vaikuttaa, että matematiikka oli paljon säännönmukaisempaa kuin mitä erikoistapauksina kirjoitetusta matemaattisesta tekstistä voisi päällisin puolin päätellä. Monet savitaulujen esimerkit ja harjoitustehtävät olivat hyvin samankaltaisia kuin nykypäivän peruskoulun ja lukion geometrian harjoitustehtävät. Geometriasta tunnettiin lisäksi muun muassa:

- tasakylkisen kolmion huipusta piirretty korkeus puolittaa kannan
- apoteema (suurimman säännöllisen monikulmion sisään piirretyn ympyrän säde) tietyin ehdoin

- Thaleen lause (puoliympyrän kehäkulma on suora)

Kreikassa tunnettiin jo hieman monimutkaisempi Pappoksen *Synagoge* teoksessa esitelty Pappos-Guldin teoreema, jonka keksimisen ansio on usein annettu myös yli tuhat vuotta myöhemmin eläneelle Paul Guldinille (1577-1643). Intiassa vuorostaan Brahmagupta kehitti Brahmaguptan kaavan, joka on Heronin kaavan (kolmion ala) yleistys nelikulmion alaan, joskaan hän ei ottanut huomioon, että kaava pätee vain ympyrän sisään piirretyille nelikulmioille. Kreikassa laajasti tutkittu menetelmä ympyrän neliöimiseen puuttuu lukion oppimäärästä vaikka tämä olisi erittäin käyttökelpoinen johdatus differentiaalilaskentaan.

6.4 Vektorit

Kurssin (MAA4) keskeiset sisällöt:

- vektoreiden perusominaisuudet
- vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku ja vektorin kertominen luvulla
- koordinaatiston vektoreiden skalaaritulo
- yhtälöryhmän ratkaiseminen
- suorat ja tasot avaruudessa

Vektorit ovat keskeinen osa fysiikan mallintamista ja täten ei ole yllättävää, että ensiaskeleet vektorien tutkimukseen näkyvät juuri pikemmin fysiikan ja tähtitieteen tutkijoiksi miellettyjen henkilöiden teoksissa. Esimerkiksi Galileo Galilei (1564-1642 [43]) jakoi heittoliikkeen tasaisen nopeuden vaakasuoraan ja tasaisesti kiihtyvään pystysuoraan liikkeeseen, joka nykyään ilmaistaan usein juuri vektoreilla. Vektoreiden synty ei ollut yht'äkkinen keksintö varsinaisen vektorien tutkimisen alkaessa vasta 1800-luvulla. Vektorien keksiminen luetaan usein Sir William Rowan Hamiltonin ansioksi. Hamilton ei ollut ensimmäinen vektorien kaltaisen teorian tutkija, mutta hänen kvaternioihin keskittynyt tutkimuksensa synnytti ohessa vektoriavaruuden käsitteen ja itse nimitys ”vektori” on myös Hamiltonilta peräisin. Kurssi kattaa muuten hyvin perustiedot vektoreista, mutta jättää epävaihdannaisuutensa vuoksi hieman ongelmallisen vektoritulon eli ristitulon käsittelemättä.

6.5 Analyyttinen geometria

Kurssin (MAA5) keskeiset sisällöt:

- pistejoukon yhtälö
- suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälöt
- itseisarvoyhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen, tyyppiä $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$
- pisteen etäisyys suorasta

Analyyttinen geometria on jatkoa jo aiemmin tutkittuun geometriaan, joskin näiden erotteleminen on modernimpi keksintö kuin itse sisällöt. Kreikkalaisen Menaikhmosin ($\sim$380-320 eaa [47]) sanotaan keksineen ellipsi, hyperbeli ja paraabeli, mutta kreikkalaisille tyypillisesti käyrät tunnettiin vain geometrisesti kartioleikkauksina eikä nykyään yleisempänä yhtälömuotona. Pisteen etäisyys suorasta on vuorostaan läheistä sukua kreikkalaisen Heronin ongelmaan, jossa selvitetään lyhintä reittiä kahden pisteen välillä. Heronin ongelma askarrutti myös muun muassa Al-Khwarizmia.

Pääasiallisesti tähtitieteilijänä pidetty Johannes Kepler (1571-1630 [44]) kehitti ja tutki tähtitieteen tutkimusten tueksi useita geometrisia tuloksia. Hänen tuloksiaan ja tutkimuskohteitaan ovat mm.:

- kartioleikkaussovellukset
- jatkuvuusperiaate
- planeetat kiertävät Aurinkoa ellipsiradoilla, joiden toinen polttopiste on Aurinko
- Auringosta planeettaan piirretyn radan sädevektori pyyhkäisee tasaisina aikaväleinä yhtäsuuret pinnat
- ellipsin ala
- pyörähdyskappaleiden tilavuus

Jatkuvuusperiaate on Gottfried Leibnizin, Keplerin tutkimusten pohjalta, osoittama teoreema, jota Kepler käytti ympyrän alan laskemiseen asettamalla ympyrän olemaan ääretönkulmainen monikulmio [58]. Analyyttisen geometrian keksimisen ajankohta määritetään Descartesin tutkimusten perusteella vuoteen 1628 tai hieman tämän jälkeen.

Itseisarvoyhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen on jälleen hieman erikoinen osa kurssin sisältöä, joskin näitä taitoja tullaan tarvitsemaan tällä ja myöhemmillä kursseilla. Muuten kurssi on selkeä kokonaisuus ja vaikuttaa seuraavan suhteellisen tarkasti historiallista kehitystä ottaen huomioon, että käsitellään vain yhtä matematiikan alaa.

6.6 Differentiaalilaskenta

Käsitellään differentiaalilaskentaan liittyvät kurssit yhtenä kokonaisuutena, koska historiallisesta näkökulmasta derivaatta ja integraali, sekä näiden sovellukset ovat kehittyneet suhteellisen tiukasti toisiinsa liittyneinä.

Kurssin **Derivaatta** (MAA6) keskeiset sisällöt:

- rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
- funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
- polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
- polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen

Kurssin **Integraalilaskenta** (MAA9) keskeiset sisällöt:

- integraalifunktio
- alkeisfunktioiden integraalifunktiot
- määrätty integraali
- pinta-alan ja tilavuuden laskeminen

Kurssin **Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi** (MAA13) keskeiset sisällöt:

- funktion jatkuvuuden ja derivoituvuuden tutkiminen
- jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia
- käänteisfunktio
- kahden muuttujan funktio ja osittaisderivaatta
- funktioiden ja lukujonojen raja-arvot äärettömyydessä
- epäoleelliset integraalit
- lukujonon raja-arvo, sarjat ja niiden summa

Ekshaustio- eli tyhjennysmenetelmä oli kreikkalaisten vastine integraalille. Modernilla notaatiolla esitettynä:
Olkoon $\mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ ja $\frac{1}{2} \leq r < 1$, niin $\exists N \in \mathbb{Z}_+$ siten, että

$$\mu(1-r)^n < \varepsilon \qquad \forall n > N.$$

Siis $\lim_{n\to\infty} \mu(1-r)^n = 0$.
Ekshaustiota käytettiin käyräviivaisten kuvioiden, alojen ja tilavuuksien teoreemojen todistamiseen. Havaittiin myös, että ympyröiden alojen suhde on sama kuin niiden halkaisijoiden neliöiden suhde eli

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Historiallisesti onkin loogisempaa, että integraalia vastaavat menetelmät ovat syntyneet ensin. Vaikka derivaattaan liittyvä kaltevuus onkin ollut tarpeellinen tieto on suurin osa rakennelmien sivuista ollut jokseenkin suoria, jolloin pelkällä suhteen tarkastelulla on saatu riittävä tieto. Monimutkaisemman pinta-alan laskeminen sen sijaan ollut tarpeellisempi taito ja usein pinta-alat on pilkottu pienempiin helpommin laskettaviin osiin, jolloin lähestytään integraalin ideapohjaa. Esimerkiksi Arkhimedeen tutkimukset ennakoivat jo integraalilaskennan syntyä.

> Arkhimedeen säilyneissä kirjoituksissa esiintyvät todistukset perustuvat vaikean ekshaustiomenetelmän käyttöön. Vuonna 1906 löydettiin kuitenkin Arkhimedeen aleksandrialaiselle Eratostheneelle (n. 276 – n. 196 eKr.; tunnettu mm. alkuluvut tuottavasta Eratostheneen seulasta ja maapallon mittasuhteiden rationaalisesta määrittämisestä) kirjoittama kirje, joka tunnetaan nimellä Metodi. Siinä esitetää oikotie: alue, jonka pinta-ala halutaan laskea, jaetaan janoiksi, joita verrataan pinta-alaltaan tunnetun alueen janoihin asettamalla kyseiset osat ikään kuin erivartisen vaa'an kuppeihin. Tällä integraalilaskentaa muistuttavalla menetelmällä Arkhimedes pystyi nopeasti laskemaan esim. paraabelinkaaren rajoittamien alueiden aloja, mutta koska menetelmä oli loogisesti epätyydyttävä (äärettömän monen äärettömän pienen suureen summat!), hän varmensi tulokset ekshaustiomenetelmään perustuvin todistuksin.[13, s.23]

Myöhemmin esimerkiksi nollaan ja varsinkin nollalla jakamiseen liittyvät tutkimukset sisälsivät viitteitä infinitesimaalianalyysistä, joka oli differentiaali- ja integraalilaskentaa edeltävä tutkimusala. Intiassa Brahmagupta (598-665 [22]) tutki nollan ominaisuuksia ansiokkaasti, joskin pääosin nykykäsityksen mukaan virheellisesti. Esimerkiksi "tyhjyyden" hän tulkitsi luvuksi nolla ja päätteli tuloksen $\frac{0}{0} = 0$. Bhaskara oli toinen merkittävä intialainen matematiikko, jonka nollalla jakamisen tutkimus oli hieman hedelmällisempää $\frac{3}{0} = \infty$, mutta jostain syystä $\frac{a}{0} = 0, a \in \mathbb{R}_+\{0\}$. Haparoinnista huolimatta $\frac{3}{0} = \infty$ on merkittävä tulos. Kreikkalaisista poiketen tarkkoja ja epätarkkoja tuloksia ei Intiassa eroteltu, joten myös lukujen irrationaaliset juuret olivat lukuja, josta oli suuri apu algebrassa. Varsinaiset läpimurrot differentiaali- ja integraalilaskennassa tehtiin kuitenkin vasta 1500- ja 1600-luvuilla Euroopassa.

Ensimmäiset viittaukset derivaattaan ja integraaliin funktion muutoksen ja käyrän rajaaman pinta-alan kuvaajina ovat peräisin Oresmelta. Oresme käytti graafeja lineaaristen funktioiden muutoksen kuvaajana. Parisataa vuotta myöhemmin Galilei tutki infinitesimaalianalyysia ja differentiaali- ja integraalilaskennan alkeita, sekä määritti sykloidin ja tason rajaaman alan punnitsemalla. Infinitesimaalitutkimus oli keskeinen osa ajan matematiikkaa ja kuten Kepler myös Galilei rinnasti ympyrän monikulmioksi, jolla on äärettömän monta kulmaa ja sivua. Hän havaitsi myös huomattavan modernin tuloksen väittämällä, että numeroituvasti äärettömien joukkojen alkioiden lukumäärät ovat samat, jota hän ei kuitenkaan kyennyt todistamaan. Vuonna 1586 Stevius osoitti, että kolmion painopiste sijaitsee mediaanilla piirtämällä kolmion sisään kasvavan määrän suunnikkaita, jolloin suunnikkaiden yhteenlaskettu ala lähestyy rajatta kolmion alaa. Steviuksen menetelmä viittaa taas voimakkaasti integraalilaskennan suuntaan. Myös Kepler tutki laajasti integraalilaskennan alkeita ja määritti pyörähdyskappaleiden tilavuuksia, jotka ovat yleisimpiä integraalilaskennan sovelluksia. Galilein oppilas Bonaventura Cavalieri jatkoi Galilein ja Keplerin töitä kehittäen lausetta $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ vastaavan teoreeman ja loi pohjaa napakoordinaatiston käyttöön. Cavalierin aikalainen, differentiaalilaskennan isäksikin kutsuttu, Pierre de Fermat (1601-1665) kehitti menetelmän, joka vastaa pääpiirteittäin modernia derivointia vastaten raja-arvoa

$$\lim_{E \to \infty} \frac{f(x+E) - f(x)}{E},$$

kun merkitään raja-arvo yhtä suureksi kuin nolla. Tämän raja-arvon tutkiminen, joskin hieman eri notaatiolla, on yhäkin erittäin keskeinen osa derivaattojen opiskelua. Fermat eteni myös integraalitutkimustensa puolella hyvin lähelle modernia integraalikäsitystä.

Lukion opetussuunnitelman perusteita tarkasteltaessa suurin poikkeavuus historialliseen kehitykseen on derivaatan opiskeleminen ennen integraaliin perehtymistä. Varsinkin kun derivaatat käsitellään jo kurssissa MAA6 integraalien esiintyessä vasta kurssilla MAA9. On hieman kyseenalaista miten näin lähellä toisiaan olevat aiheet eritellään näinkin selkeästi. Periaatteessa teorian kannalta ei ole merkitystä kumman käsittelee ensin, mutta jos oletetaan, että LOPSissa esitetty järjestys on tarkoituksellinen etemisjärjestys on myös kurssien sisäinen eteneminen myös käänteinen historialliseen verrattuna. Derivaattakurssissa tutkitaan ensin funktion raja-arvoa ja harjoitellaan derivointia ennen kuin edetään polynomifunktion kulun tutkimiseen ja ääriarvojen määrittämiseen. Eli edetään teoriasta käytäntöön toisin kuin historiallisesti. Sama pätee integraalikurssiin, jossa ensin tutkitaan funktioiden integraalifunktioita ja vasta sitten käsitellään pinta-alan ja tilavuuden laskeminen. Toisaalta epäoleellinen integraali esiintyy vasta kurssissa MAA13, joka on määrättyä integraalia teoreettisempi. Muutenkin tässä viimeisessä differentiaali- ja integraalilaskennan kurssissa keskitytään enemmän tietojen syventämiseen ja teoreettisempaan tarkasteluun.

6.7 Trigonometriset funktiot

Kurssin (MAA7) keskeiset sisällöt:

- suunnattu kulma ja radiaani
- trigonometriset funktiot symmetria- ja jaksollisuusominaisuuksineen
- trigonometristen yhtälöiden ratkaiseminen, tyyppiä $\sin f(x) = a$ tai $\sin f(x) = \sin g(x)$
- osaa trigonometristen funktioiden yhteydet $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- yhdistetyn funktion derivaatta
- trigonometristen funktioiden derivaatat

Koska trigonometrian pääsisällöt on käyty läpi jo peruskoulun oppimäärässä, lukion oppimäärässä keskitytään enemmän opittujen funktioiden ominaisuuksien ja derivoinnin hyväksikäyttöön näin syventyen trigonometrian teoreettisempaan puoleen. Vaikka trigonometrian sisällöt ovatkin pääasiallisesti yli tuhannen vuoden takaa on modernin kaltainen funktioihin perustuva trigonometria uudempi keksintö. Modernin trigonometrian kehitys on pääosin toisistaan riippumattomasti työskennelleiden Evangelista Torricellin (myöskin Galilein oppilas, 1608-1647) ja Gilles Persone de Robervalin (1602-1675) aikaansaannosta. Keskeisimpänä kehitysaskeleena oli trigonometristen funktioiden kehitys ja hyödyntäminen, jolloin trigonometriassa kyettiin hyödyntämään muun muassa integraalilaskennan kehityksen mukanaan tuomia sovellusmahdollisuuksia. Kurssi keskittyykin juuri trigonometrisilla funktioilla laskemiseen ja funktioiden käsittelystä opitun hyödyntämiseen luoden näin pätevän jatko-osan peruskoulun trigonometrialle. Ikävä kyllä integraalikurssi on sijoitettu vasta tämän jälkeen, jolloin integraaleja ei voida heti soveltaa trigonometrisiin funktioihin.

6.8 Juuri- ja logaritmifunktiot

Kurssin (MAA8) keskeiset sisällöt:

- potenssien laskusäännöt
- juurifunktiot ja -yhtälöt
- eksponenttifunktiot ja -yhtälöt
- logaritmifunktiot ja -yhtälöt
- juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivaatat

Moderni potenssien ja eksponenttifunktioiden käsittely merkintöineen on lähes kokonaan perua Descartesilta. Vaikka potensseja on tutkittu jo pitkään on nykymuotoinen eksponenttifunktioiden käyttö pääosin 1600-luvulta. Kurssi on tietojen syventämiseen vahvasti painottuva ja on niin opetuksellisesti kuin historiallisestikin pätevää tarkastella erilaisten funktioiden ominaisuuksia perusteiden ollessa jo hallussa. Sisältö on käytännössä kokonaan 1600-luvulta, joten tämä kurssi on historiallisestikin tiivis kokonaisuus. Notaatiot ovat kuitenkin muuttuneet huomattavasti alan kehittyessä ja esimerkiksi Nicolas Chuquet käytti 1400-luvun lopulla juurimerkintää $R)^2.14.\bar{m}.R)^2 180.$, joka vastaa modernia merkintää $\sqrt{14-\sqrt{180}}$, ollen siihen mennessä tehokkain tapa juurimerkinnöille. Moderni juurimerkintä, kuten jo historiajohdannossa kappaleessa 2 mainittiin on Rudolffin käsialaa 1500-luvun alkupuoliskolta.

6.9 Todennäköisyys ja tilastot

Kurssin (MAA10) keskeiset sisällöt:

- diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma
- jakauman tunnusluvut
- klassinen ja tilastollinen todennäköisyys
- kombinatoriikka
- todennäköisyyksien laskusäännöt
- diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma
- diskreetin jakauman odotusarvo
- normaalijakauma

Vaikka yksinkertaisia todennäköisyyksiä on hyödynnetty jo aiemmin varsinainen todennäköisyyksien laajempi tutkinta on jälleen 1600-luvun tuotoksia. Cardano tutki hieman todennäköisyyksiä, mutta hänen tuloksensa jäivät huomiotta. Varsinainen lähtölaukaus todennäköisyyksien tutkimuksille oli Pascalin ja Fermat'n kirjeenvaihto liittyen nopanheiton todennäköisyyksiin vedonlyönti kontekstissa. Pascalin tutkimusten johtivat muun muassa Pascalin kolmion "syntyyn", joskin tämä kolmiomainen lukujoukko oli jo aiemmin tunnettu. Omar Khayyam (1048-1131 [27]) tunsi Pascalin kolmion, joka oli samoihin aikohin tunnettu myös Kiinassa. Pascalin kolmiotutkimuksissa käyttämästä matemaattisen induktion menetelmästä tuli yksi matemaattisen todistamisen perusmetodeista. Vaikka induktion kaltaisesta menetelmästä on viitteitä jo aiemmin oli Pascal yhdessä Fermat'n kanssa ensimmäisiä, jotka esittivät menetelmän formaalisti. Ensimmäinen merkittävä todennäköisyyksiä käsittelevä teos on kuitenkin vasta vuonna 1713 julkaistu Jakob Bernoullin (1654-1705) *Ars conjectandi*(suom. *Arvaamisen taito*). Varsinainen formaalimpi todennäköisyyksien tutkiminen ja kokonaisvaltaisempien aihetta käsittelevien teosten julkaisu siirtyi myöhemmäksi 1700-luvun ollessa varsinaisen todennäköisyysteorian kehityksen kulta-aikaa. MAA10 onkin sisältönsä puolesta tuoreimpiin keksintöihin keskittyvä kurssi lukion oppimäärässä. Silti on mielenkiintoista miten vanhoja keksintöjä uusimmatkin ovat matematiikan opiskelussa verrattuna muihin oppiaineisiin. Kurssin sijoittaminen yhdeksi viimeisimmistä lukion pitkässä oppimäärässä on täysin perusteltua ottaen huomioon miten paljon matematiikan tutkimusta oli historiallisesti tehty tähän mennessä.

6.10 Lukuteoria ja todistaminen

Kurssin (MAA11) keskeiset sisällöt:

- konnektiivit ja totuusarvot
- geometrinen todistaminen
- suora, käänteinen ja ristiriitatodistus
- induktiotodistus
- kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö
- Eukleideen algoritmi
- alkuluvut ja Eratostheneen seula
- aritmetiikan peruslause
- kokonaislukujen kongruenssi

Kurssi MAA11 jakautuu selkeästi kahteen erilliseen kokonaisuuteen kuten nimenkin perusteella voi päätellä. Suhteellisen tuoretta induktiotodistamista ja jo ennen ajanlaskun alkua käytettyä geometrista todistamista on käsitelty jo aiemmin. Muutenkin todistamisen historiaa on käyty hiljalleen läpi jo aiempien aiheiden yhteydessä. Todistaminen ei ole siis mikään tarkasti määriteltävä kokonaisuus kuten todennäköisyyksien ja lukuteorian formaalin tutkimuksen kehitys.

Lukuteoriaa leimaa selkeä matemaattisen pohdinnan filosofinen puoli, joka on ollut jo antiikin Kreikan ajoista keskeinen osa matemaattista pohdintaa. Jälleen vaikka lukujen filosofinen puoli ja kauneus on ollut pitkään matematiikan tutkijoiden mielissä varsinainen lukuteoria on uusimpia lukion oppimäärän sisältöjä varsinaisen lukuteorian kehityksen sijoittuessa 1700-luvulle. Lukuteoria jakoi ajan matemaatikot selkeästi kahtia lukuteoriasta kiinnostuneihin ja heihin, joita ei lukuteoria kiinnostanut tai pitivät koko alaa jopa turhana. Lukuteorian keskeisiä tutkijoita olivat muun muassa Fermat ja Leonhard Euler (1707-1783). Aiemmin kurssin MAA11 nimi ja vastaava sisältö oli *Lukuteoria ja Logiikka*, joka on hieman eheämpi ja historiallisestikin kiinteämpi kokonaisuus. Logiikasta on kurssilla yhä jäljellä konnektiivit ja totuusarvot.

6.11 Algoritmit matematiikassa

Kurssin (MAA12) keskeiset sisällöt:

- iterointi ja Newton-Raphsonin menetelmä
- polynomien jakoalgoritmi
- polynomien jakoyhtälö
- Newton-Cotes-kaavat: suorakaidesääntö, puolisuunnikassääntö ja Simpsonin sääntö

Kurssin sisältö painottuu funktioiden käsittelyn apuneuvojen opiskeluun, keskeisimmin derivaattojen ja integraalien laskemisen metodien monipuolistamiseen. Pääasiallisesti, kuten sisällössä esiintyvistä nimistäkin voi päätellä, sisällön historiallinen kehitys sijoittuu 1700-luvun tietämiin ja siten kuten muutkin viimeisimmistä lukion pitkän oppimäärän kursseista keskittyy tuoreempiin matematiikan keksintöihin.

Luku 7

Uusi matematiikka

Nykyisten opetussuunnitelmien ja historiallisen kehityksen välissä on ehtinyt tapahtua paljon, vaikkei siltä vain sisältöjä tarkasteltaessa välttämättä vaikutakkaan. Erilaista näkökulmaa valottavana perehdytään jonkin aikaa 1900-luvun puolen välin jälkeen vaikuttaneeseen *New Math* -liikkeeseen ja tämän pohjalta syntyneeseen opetussuunnitelmauudistukseen. Pääasiallisena lähteenä uudistuksen tarkastelussa käytetään Morris Klinen teosta *Why Johnny Can´t Add: The Failure of the New Math*[10].

New Math (suom. *Uusi matematiikka*) oli Ranskassa syntynsä saanut ja varsinkin Yhdysvalloissa 1960- ja 1970-luvulla vaikuttanut hanke, jossa pyrittiin nimen mukaisesti uudistamaan matematiikan opetusta. Ranskassa uudistus kulminoitui Nicolas Bourbaki aliaksen takana vaikuttaneeseen matemaatikkoryhmään, jonka tavoitteena oli uudistaa matematiikan rakennetta ja opetusta siten, että kaikki matemaattinen aines pohjautuisi joukko-oppiin [59]. Hankkeeseen käytettiin Yhdysvalloissa huomattavan paljon rahaa, aikaa ja vaivaa, koska tavoitteena oli uudistaa täysin matematiikan opetus. Matematiikka on keskeinen aine kouluissa ja siihen käytetään paljon aikaa, mutta tästä huolimatta matematiikka on monille oppilaille ylitsepääsemättömän vaikeaa ja ongelmat matematiikassa saattavat vaikuttaa oppilaan etenemiseen hyvin voimakkaasti. Tämä oppimisen vaikeus motivoi luomaan kokonaan uutta tapaa opettaa ja oppia. *New Math* -liikettä on syytä tarkastella pääasiassa Yhdysvalloissa tehtyjen kokeiluiden valossa Yhdysvaltojen ollessa kokonaisvaltaisen uudistuksen suunnannäyttäjä ja siksi käytänkin tässä tutkielmassa nimeä *New Math*. Kokeilu on Yhdysvalloissa tehdystä uudistuksesta hieman liian lievä ilmaus, koska uudistus tuli huomattavan kokonaisvaltaisena käyttöön lähes puoleen kouluista. Samaan aikaan myös Euroopassa tehtiin myös samansuuntaisia opetussuunnitelmauudistuksia ja Suomessakin oltiin siirtymässä kansa- ja oppikouluista peruskouluihin. Lopulta *New Math* jäi lyhytikäiseksi, mutta päälipuolisesta epäonnistumisestaan huolimatta innoitti uudistamaan opetussuunnitelmia. Epäonnistumistuomiostaan huolimatta *New Math* -uudistukseen johtaneet matematiikan oppimisen ja opetuksen ongelmat ovat yhä vahvasti läsnä nykyopetuksessa, vaikka aikaa onkin kulunut jo lähes puoli vuosisataa.

New Math -uudistuksen pyrkimyksenä oli tuoda eksaktius ja määritelmiin pohjautuvat päätelmät jo matematiikan opetuksen alkuvaiheista lähtien. Kuitenkin tämä tuotti monille oppilaille suuria vaikeuksia, koska tehtävät oli perusteltava esimerkiksi liitännäisyydellä, vaihdannaisuudella tai osittelulailla. Tästä teki vielä vaikeampaa oppilaille se, että opettajilla oli hyvin suppea koulutus uudistuksen mukaiseen tapaan opettaa ja myöskään vanhemmilla ei ollut vanhan opetussuunnitelman mukaisen koulun käyneinä minkäänlaista käsitystä tämänkaltaisesta matematiikasta.

Perinteinen alakoulun matematiikan opetussuunnitelma (~1850-1960) nojaa pitkälti aritmetiikkaan. Vaikka usein haluttaisiinkin syventää oppilaiden matemaattista ymmärrystä, niin useimmiten pääpaino on mekaanisella laskemisella, jossa pyritään tunnistamaan tilanne ja tekemään lähes automaattiset suoritukset vastauksen saavuttamiseksi. Toisto korostuu usein matemaattisen osaamisen pohjana, eikä varsinainen ymmärryksen soveltaminen ja syventäminen.

> The learning is almost always sheer memorization. - Morris Kline [10, s.6]

Usein matematiikan osa-alueet jäävät erillisiksi eivätkä oppilaat osaa käyttää oppimaansa toisessa aihealueessa. Samoin mahdollisesti hyvinkin havainnollistavat yhteydet käytännön maailmaan ja muihin tieteisiin jäävät heikoiksi. Samat matematiikan oppimisen ongelmat on tiedostettu *New Math* -uudistuksen jälkeenkin ja esimerkiksi Suomessa on aktiivisesti pyritty kehittämään matematiikan opetusta mekaanisen laskemisen korvaamiseksi enemmän syvällisempää ymmärrystä tukevalla sisällöllä perinteisiin paluun (~1975-1980) jälkeen. Suomessa varsinkin ongelmalähtöinen opetus on ollut opetussuunnitelmien perustana 1990-luvun taitteesta lähtien.

7.1 Uuden matematiikan synty

1950-luvun alussa koettiin matematiikan opetuksen olevan kehittymätöntä ja ajastaan jäljessä. Tutkimuksissa havaittiin, että matematiikassa opittu unohtui nopeasti ja monilla aikuisilla oli suuria puutteita matematiikan taidoissaan. Neuvostoliitto ehti ensin avaruuteen ensimmäisen Sputnikin laukaisun myötä 1952, sekä elektroniikan ja tietotekniikan kehitys kiihdyttivät entisestään uudistushalua Yhdysvalloissa. Vaikka oppimistason määrittävät useat tekijät koettiin, että opetussuunnitelmamuutos olisi tehokkain tapa varmistaa laaja-alainen matematiikan osaaminen. Tästä alkoi vuonna 1952 uudistuksen suuruuden huomioiden nopea kehitys kohti uutta matematiikkaa.

1955 The College Entrance Examination Board, joka vastaa Collegeiden pääsykokeista alkoi pohtia High Schoolin opetussuunnitelman ongelmia

$\Rightarrow$ Perustivat Commision on Mathematicsin suunnittelemaan opetussuunnitelmauudistusta

1958 The American Mathematics Society perusti The School Mathematics Study Groupin myös uudistamaan High Schoolin opetussuunnitelmaa

1959 Commision on Mathematics julkaisi opetussuunnitelmauudistusehdotuksensa

1959 The National Council of Teachers of Mathematicsin perustama opetussuunnitelmakomitea julkaisi oman opetussuunnitelmauudistusehdotuksensa

1960 Aloitettiin kokeilut High Schooleissa

Vaikka opetussuunnitelmauudistusta pohdittiin useissa eri komiteoissa päädyttiin pääpiirteittäin samankaltaisiin suosituksiin. Uudistajat kokivat, että matematiikassa opetettavat sisällöt olivat vanhanaikaisia. Uudistusinnossa ei kuitenkaan otettu huomioon matematiikan historiallis-kumulatiivista rakennetta eli uuden ja laajemman sisällön oppimiseksi pitää tuntea näiden perusteena olevat tiedot. Uusia matematiikan alueita:

- Abstrakti algebra
- Topologia
- Symbolinen logiikka
- Joukko-oppi
- Boolen algebra

On huomattavaa, että nykyään kyseisiä matematiikan osa-alueita opetetaan pääasiassa vain yliopistotasolla. Myöhemmin (1963) ehdotettiin lisättäväksi myös:

- Lukuteoria
- Lineaarialgebra
- n-ulotteinen geometria
- Projektiot
- Tensorit
- Differentiaali- ja integraalilaskenta

Tavoitteena oli, että High Schoolin neljännen vuoden (12. kouluvuosi) jälkeen oppilaiden matemaattinen osaaminen olisi samalla tasolla kuin aiemmin Collegen kolmannen vuoden jälkeen (15. kouluvuosi). Muun muassa Francis Keppel (1916-1990, Yhdysvaltain opetusviraston johtaja 1962-1965 [16]) arvioi uudistuksen todennäköisesti epäonnistuvan, koska ei uskonut oppilaiden kykenevän näin huomattavasti nopeutettuun opetukseen eikä opettajien täydennyskoulutuksen riittävyyteen. Myös korkeamman matematiikan opettaminen peruskoulutasolla häiritsi monia, koska suurella osalla oppilaista ei tulisi olemaan tarvetta näin korkeatasoisen matematiikan osaamiseen myöhemmässä elämässään. Korkea abstraktiotaso ei vaadi pitkälle edennyttä matematiikan alan opiskelua. Ilkka Niiniluodon sanoin:

> Jotkut matematiikan alat ovat jo syntyessään huomattavan korkealla abstraktiotasolla (esim. joukko-oppi), vaikka ne eivät suoraan nojaudukaan mihinkään aikaisempaan tutkimusalueeseen. - Ilkka Niiniluoto [7, s.178]

Opetussuunnitelmauudistuksen yhtenä motivaattorina oli oppilaiden liiallinen ulkoaopettelun tapa. Tehtävät ratkaistaan sopivan ulkoaopetellun kaavan avulla ilman varsinaista syvällisempää pohdintaa. Uuden matematiikan yhtenä tavoitteena oli poistaa ulkoaopettelun tarve opetuksen edetessä loogisessa järjestyksessä ja tutkittaessa päättelyn vaiheiden merkityksiä, jolloin oppilas kykenisi luottamaan omaan päättelytaitoonsa ulkoaopettelun sijaan. Tähän omaan päättelytaitoon luottamiseen panostetaan myös uudemmissa opetussuunnitelmissa. Geometriassa looginen eteneminen on ollut pitkään keskeisessä asemassa (vrt. *Stoikheia*), jolloin määäritelmistä ja aksioomista johdetaan päätelmiä. Tällainen deduktiivinen päättely nousi uuden matematiikan keskeiseksi lähtökohdaksi. Deduktiivisessa päättelyssä on mahdollista seuraavanlainen päättelyketju

$$4 \times 12 = 4 \times (10 + 2) = 4 \times 10 + 4 \times 2 = 40 + 8 = 48,$$

joka on luonnollinen laskentatapa monille ja pystytään perustelemaan aksioomin. Tällaisella päättelyllä pystytään myös luonnollisesti esittelemään negatiiviset luvut

$$20 + x = 15 \Leftrightarrow (15 + 5) + x = 15 \Leftrightarrow 15 + (5 + x) = 15 \Leftrightarrow 4 + x = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

Ongelma aksioomien ja ominaisuuksien osoittamisen vaatimisessa on, että muun muassa neliöjuurten, ratioonaalilukujen ja kompleksilukujen kohdalla tämä käy huomattavan vaikeaksi. Perinteisesti varsinkin peruskoulutason oppikirjoissa vain luetellaan tietyn toimituksen kanssa päteviä sääntöjä ja ominaisuuksia niiden pohjaa ja hyötyä perustelematta.

Deduktiivisen päättelyyn pohjaavan opetuksen hyödyt ($\oplus$) ja haitat ($\ominus$):

- $\oplus$ Deduktiivinen päättely ja todistaminen auttavat oppilasta ymmärtämään matematiikan kehittymistä omien epäonnistumisten kautta
- $\ominus$ Kehittynyttä puhdasta matematiikkaa ei ole helppo omaksua
- $\ominus$ Liittymäkohdat käytäntöön puuttuvat, jotka ovat tärkeitä niin historiallisesti kuin yksilön oppimisenkin kannalta
- $\ominus$ Vaikka *Stoikheia* onkin malliesimerkki deduktiivisen päättelyn rakenteesta, ei sekään ole suoraviivainen tuotos vaan vuosisatojen aikana kehittynyt tutkimuksen ja epäonnistumisten kautta
- $\ominus$ Geometria on huono lähtökohta deduktiivisen päättelyn perustelemiseksi, koska geometria on luonnostaan käytännönläheinen ja helposti visualisoitava
- $\ominus$ Negatiiviset, kompleksi- ja irrationaaliluvut omaksuttiin historiallisesti katsoen myöhään, eivätkä nämä ole kovin intuiviisia
- $\ominus$ Symbolien myöhäinen omaksuminen tuntemattoman ja vakion merkinnässä
- $\ominus$ Monet matemaattiset keksinnöt on osoitettu toimiviksi intuition ja empirian avulla ilman deduktiivista päättelyä ja formaalia todistusta
- $\ominus$ Deduktiivista päättelyä on käytetty uuden keksimisessä onnistuneesti vain korkean abstraktiotason todistuksissa

Varsinkin matematiikan opiskelun alkutaipaleella on edullisempaa, että oppilas osaa käyttää aksiomiin perustuvia toimituksia intuitiivisesti omaan päättelyyn pohjautuen lähes itsestäänselvyyksinä mieluummin kuin osata käyttää formaalisti aksiomia päättelynsä perusteena. Tällainen intuitioon pohjautuva päättely on nopeampaa ja usein antaa oppilaalle suuremmat mahdollisuudet kokeilla ja kehittää omaa matemattista päättelytaitoaan.

> No discovery has been made in mathematics, or anywhere else for that matter, by an effort of deductive logic; it results from the work of creative imagination which builds what seems to be truth, guided sometimes by analogies, sometimes by an esthetic ideal, but which does not hold at all on solid logical bases. Once a discovery is made, logic intervenes to act as a control; it is logic that ultimately decides whether the discovery is really true or is illusory; its role therefore, though considerable, is only secondary.[10, s.48-49] - Henri Lebesgue (1875-1941 [17])

Kuten Lebesguekin implikoi on deduktiivisen päättelyn rooli muuttaa intuitiivinen ja empiirinen ajattelu formaaliin muotoon. Matematiikkaan läheisesti liitetty täsmällisyys alkoi kukoistaa vasta epäeuklidisen geometrian formaalista synnystä (1800-luku). Täsmällinen todistaminen on vasta yliopistotason matematiikassa kokonaisvaltaisemmin huomioitava aspekti ja voi häiritä matematiikan oppimista liian aikaisin toteutettaessa.

Uuden opetussuunnitelman oli tarkoitus poistaa aiempia matematiikan epätäsmällisyyksiä opetuksessa, joka johti laajan matemaattisen termistön käyttöönottoon, jotta kyettiin hyödyntämään formaalia, matemaattisesti eksaktia esitystapaa. Monet uuden matematiikan tulleet termit koettiin tarpeettomina. Laaja termistö helposti sekoittaa oppilasta ja rasittaa tarpeettomasti muistikapasiteettia. Keskeisimpiä liian laajan terminologian käytön kritisoijia oli fyysikko ja Nobel-voittaja Richard P. Feynman (1918-1988 [18]). Monet termit ja merkinnät ja niiden erot voivat olla haastavia ymmärtää, kuten numeron ja numeraalin ero, sekä 3:n ja $\{3\}$:n ero. Samoin esimerkiksi joukko-opilliset merkinnät, kuten $\{x|x+2=4\}$, eivät ole kovin intuitiivisia ja saattavat saada oppilaan turhautumaan ja kyseenalaistamaan näin monimutkaisen merkinnän tarpeellisuuden. Käytännössä siis pyrittiin tuomaan yliopistotason terminologia ja notaatiot peruskouluun.

Matematiikka on teoriassa itsestään generoituva, eli aiemmin tiedetyt pohjalta pystytään määrittämään ongelmat, joiden pohjalta pystytään matematiikkaa kehittämään edelleen. Käytännössä ja historiallisesti katsoen tämä ei kuitenkaan toimi, koska pääasiassa matematiikka on kehittynyt käytännön ongelmien ja muiden tieteiden, kuten fysiikan, tähtitieteen ja tekniikan, tarpeiden perusteella. Käytännön ongelmien soveltaminen koulutehtäviksi on kuitenkin hyvin haastavaa, koska vaikka käytännön ongelmat ovatkin keinotekoisiin ongelmiin verrattuna ajattelua kehittävämpiä ovat ne lähes aina liian monimutkaisia ja työläitä kouluun. Suurin osa historiallisista ongelmista on kuitenkin vaatinut usein vuosien tai jopa vuosituhansien kehittelyn ennen varsinaista tulosta. *New Math* -uudistusta kehittivät pääasiassa professorit ja opettajat, jotka olivat suuntautuneet puhtaan teoreettiseen matematiikkaan, joka johti voimakkaasti kritisoituun sovellusten puutteeseen opetussuunnitelmassa. Vaikka teoreettinen matematiikkakin tarvitsee osaajansa, täysin teoreettinen opetus ei vastaa soveltavimpien alojen tarpeeseen. Tämä etevien soveltavien matemaatikoiden tarve oli kuitenkin eräs uudistuksen liikkellepanevista voimista. Uudistuksen mukaisen opetuksen teoreettisuuden ja korkeamman abstraktiotason koettiin kehittäjien toimesta toimivan itsessään riittävänä motivaattorina, joka kuitenkin osoittautui selkeäksi virhearvioksi.

> He [the student] wants to know how mathematics fits into his world. And, happily, his world is full of fancy and abstractions. Thus students become interested in mathematics because it gives them quick access to a kind of intellectual adventure that is enticing and satisfying. [11, s.32]

Ideatasolla Uuden matematiikan uudistuksissa ei ollut suurta vikaa, mutta toteutuksen kokonaisvaltaisuus ja valmistelemattomuus johtivat selkeisiin ongelmiin.

Uuden matematiikan mukana tuli paljon uudistuksia. Vanhan opintosuunnitelman sisällöt pidettiin lähes kokonaisuudessaan mukana, mutta joukko-opista tuli keskeinen osa opetusta jo peruskoulun alusta alkaen. Vanhasta opetussuunnitelmasta periytyi:

- Aritmetiikka
- Algebra
- Eukleideen geometria
- Trigonometria
- Analyyttinen geometria

Osana joukko-oppia uutena sisältönä tulivat äärettömät joukot, sekä siihen liittyen joukkojen numeroituvuus ja mahtavuus. Muita huomattavia muutoksia:

- Muita kuin 10-kantaisia lukujärjestelmiä tutkittiin jo huomattavasti aiemmin
- lukujärjestelmiin liittyen modulo jo aikaisessa vaiheessa
- Epäyhtälöt (Collegesta 9-luokalle)
- Matriisit (Collegesta 12-luokalle)
- Symbolinen logiikka ja totuustaulukot uutena
- Boolen algebra uutena (logiikan ja algebran välimuoto)

Yleisesti ottaen matematiikan aihealueita tuotiin peruskoulun yläluokilta alaluokille, sekä collegesta ja yliopistosta yläluokille samalla kun vanhan opetussuunnitelman sisältöjä ei juurikaan karsittu.

7.2 Uuden matematiikan rooli Suomessa

Suomalaisessa opetusyhteisössä koettiin Yhdysvaltain ja Keski-Euroopan innoittamina tarve uudistaa opetussuunnitelmia hyvin samankaltaisten tarpeiden vuoksi. Uudistaminen lähti liikkeelle pohjoismaisella yhteistyöllä, kun vuonna 1960 perustettiin pohjoismaisen matematiikan uudistamistoimikunta, jonka tavoitteena oli rakentaa uusi opetussuunnitelma peruskoulu- ja lukiotasolle. Keskeisenä ajatuksena oli abstraktien asioiden opettaminen konkretian ja leikinomaisuuden kautta. Uuden matematiikan opetussuunnitelma ei tuottanut halutunlaisia tuloksia ja kuten Yhdysvalloissakin koettiin liiallisen symboliikan ja laajan terminologian haittaavan oppimista ja vievän turhaan aikaa itse matematiikan oppimiselta. Myös Suomessa täysin uudenlainen lähestymistapa opetukseen ajoi vanhemmat ymmälleen ja opettajien saama täydennyskoulutus oli vajavainen. Samoihin aikoihin siirryttiin vanhasta koulujärjestelmästä nykyisenkaltaiseen peruskoulu ja lukio -muotoon. Suomessa keskeisimpiä Uuden matematiikan kritisoijia oli Rolf Nevanlinna. Uuden matematiikan uudistuksen epäonnistuttua palattiin vanhaan opetussuunnitelmaan (1975-1976). Peruslaskutoimitusten harjoittelu korostui ja pyrittiin luomaan oppilaille tasavertainen pohja vähentämällä heikkojen suoritusten määrää. 1980-luvun alussa pyrittiin välivaiheen mekaanisen laskemisen tilalle tuoda soveltavampaa matematiikkaa ja ongelmanratkaisua, joka pitkälti on yhä pohjana nykyiselle opetussuunnitelmalle. Samalle siirrettiin vaikeampia ja korkeamman abstraktiotason aiheita myöhemmäksi opetuksessa. Keskeisimpiä eroja Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden vuosimallien 1970 ja

2004 välillä:

2004 painottaa arkipäivän ongelmia ja konkretiaa

1970 painottaa abstraktiutta ja yleisiä käsitteitä, sekä rakenteita matemaattisen ajattelun kehityksessä

- Ensimmäisten luokkien sisältö on pääpiirteittäin sama, mutta 1970 versiossa edetään joukko-opin kautta ja käytetään eksaktimpaa terminologiaa

1970 esittelee symbolisen merkintätavan jo luokilla 3-4

1970 käsittelee derivaatat ja vektorit jo peruskoulussa, kun POPS2003/LOPS2004 nämä löytyvät vasta lukion opetussuunnitelman perusteista

1970 matematiikan opiskelu jakautui 7.vuosiluokalla suppeaan ja laajaan oppimäärään ja vuosiluokilla 8-9 yleis-, keski- ja laajaan oppimäärään.

Lukion opetussuunnitelman perusteet 1973 ja 2003 eivät eroa yhtä radikaalisti, mutta yleisesti abstrakteimpia aiheita on siirretty myöhemmäksi esimerkiksi yliopistossa opiskeltaviksi. Lisäksi joukko-oppi ja logiikka käsitellään integroituna osana muita kursseja, joskin syventävä Logiikka kurssi kuului opetussuunnitelmaan. Uuden matematiikan opetussuunnitelma ja sen epäonnistuminen pikemminkin jarruttivat kehitystä, koska näin radikaalin uudistuksen kaatuminen aiheutti huomattavan vastareaktion, joka palautti opetuksen lähtökohtaa kankeampaan ja mekaanisempaan muotoon. Hienovaraisemman uudistuksen pohjalta olisi mahdollisesti ollut helpompi kehittää opetusta edelleen. [12]

Vaihtoehtoiset oppimäärät on oikeastaan ainoita Uuden matematiikan ajan konsepteja, joka on saanut myöhemmin kannatusta laajemminkin. Uuden matematiikan opetussuunnitelmissa ja opetussuunnitelmissa ennen peruskoulu-uudistusta tasoryhmät olivat keskeinen rakenteellinen osa matematiikan opetussuunnitelmia, joka näkyy moderneissa opetussuunnitelmissa enää lukiossa. Näitä tasoryhmiä halutaan tasaisin väliajoin takaisin opetussuunnitelmiin jo peruskouluun.

> Surkea tilanne on suora seuraus tunnetuista poliittisista päätöksistä. Vuonna 1985 yläkoulun tasokurssit poistettiin, mikä antoi välittömästi aiheen opetussuunnitelmien keventämiseen, sillä kaikki eivät todellakaan opi kaikkea. Näin myös oppimaan halukkaat ja kykenevät oppilaat latistettiin samalle tasolle kaikkein heikoimpien kanssa. [14]

> Keskusteluissa on nostettu esiin matemaattisesti lahjakkaiden oppilaiden riittävä huomioonottaminen opetusjärjestelyissä. On myös esitetty tasokurssien palauttamista perusopetuksen viimeisille vuosille. Toisaalta on tuotu esiin, että joustavat ryhmittelyt tekevät jo nyt mahdolliseksi yksilölliset järjestelyt esimerkiksi oppimistyylin tai harrastuneisuuden perusteella. Tällöin kaikki oppilaat saavuttavat saman jatko-opintokelpoisuuden eikä väylä jatko-opintoihin

> katkea keneltäkään kuten kävi vuoteen 1985 asti voimassa olleessa tasokurssimallissa alimman tasokurssin valinneille.[15]

Toisaalta, kuten jälkimmäisestä lainauksesta voimme todeta, kyseessä ei ole täysin mustavalkoinen kysymys.

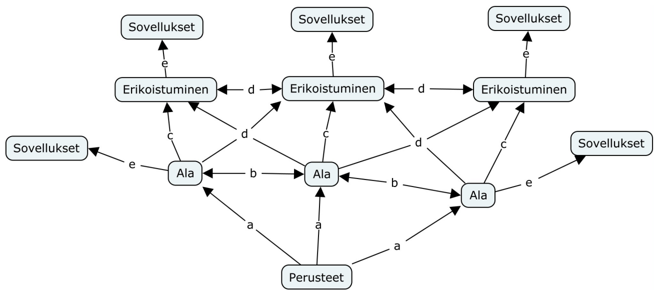
Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 ja *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015* vievät yhä soveltavampaan suuntaan merkittävimmän eron aiempaan (POPS2003 / LOPS2004) ollessa ohjelmoinnin ja tietokoneavusteisen laskemisen lisääminen uusina aiheina. Samalla joukko-opin ja logiikan rooli on pienentynyt entisestään lukion opetuksessa. Hiljalleen ohjelmoinnin opettelu ja tietokoneen laajempi hyötykäyttö näyttävät vievän opetuksen tavoitteet suuntaan, joka oli *New Math* -liikkeen motivaattorina ja uudistuksen tavoitteena yli puoli vuosisataa aiemmin, joskin soveltamiseen ja käytännönläheiseen etenemiseen enemmän painottuvana.

Luku 8

Johtopäätökset

Tarkasteltaessa ja vertailtaessa opintosuunnitelmien perusteita ja matematiikan historiallista kehitystä eivät tulokset ole yksiselitteisiä vaan osittain on yhteneväisyyksiä ja osittain eroavaisuuksia. Modernit opetussuunnitelmat ja historiallinen kehitys yhtenevät suuressa mittakaavassa edettäessä soveltavammasta ja intuitioon pohjaavasta lähestymisestä formaalimpaan ja eksaktimpaan esitystapaan *New Math* -pohjaisen opetussuunnitelman poiketessa molemmista selkeästi, jota läheisimmin voisi kuvata käänteiseksi matematiikan historialliseksi kehitykseksi opetuksen alkaessa teoreettisesta pohjasta ja edettäessä kohti käytännön sovelluksia. Kuvan 8.1 mukaisesti opetussuunnitelmissa [1, 2] opetus lähtee perusteiden opettelemisesta edettäessä suhteellisen alakohtaisesti eteenpäin (a). Aloihin tutustumisen jälkeen pyritään yhdistämään aloja (b) ja erikoistumaan yhteen sisältöalueeseen kerrallaan (c), jonka jälkeen pyritään yhdistämään jälleen aloja (d). Lisäksi pyritään soveltamaan uuden opettelun yhteydessä (e). Yhteen sisältöalueeseen erikoistuminen näkyy voimakkaasti varsinkin kurssimuotoisessa lukio-opetuksessa.

Opetussuunnitelmia tarkasteltaessa on huomioitava, että monet yksinkertaisimmista matematiikan peruskäsitteistä suuri osa lapsista oppii jo ennen varsinaista kouluopetusta. Tästä johtuen kymmenjärjestelmään perustuvat luvut ja esimerkiksi geometrian peruskuviot ovat tuttuja jo monille. Käytännössä siis historiallisesti varhaisimmat matemaattiset käsitteet lapsi oppii jo ennen koulua. Pääpaino nyky-yhteiskunnassa on kuitenkinn voimakkaasti itse luvuilla toisin kuin varhaisessa historiassa. Luvut ovat korvanneet vertailut, jolloin luku itsessään käsitetään tärkeänä tietona toisin kuin vuosituhansia sitten. Joukkojen alkioiden määriä vertailtiin, jolloin esimerkiksi sormilla



Kuva 8.1: Opetuksen eteneminen

laskeminen perustui sormien ja tarkasteltavien alkioiden yhteiseen ominaisuuteen, määrään.

Matematiikan kumulatiivinen rakenne on keskeisessä roolissa niin moderneissa kuin *New Math* -pohjaisissakin opetussuunnitelmissa kuitenkin tämä on merkittävä ero opetussuunnitelmien ja historiallisen kehityksen välillä, joskin yllättäen kumulatiivinen rakenne voidaan ymmärtää hyvinkin eri tavoin. Historiallisessa kehityksessä ei ole ollut tarvetta jatkaa aiemman teorian pohjalta vaan keksintöjä on tehty todistamattomien oletusten ja intuition pohjalta, jolloin kumulatiivista rakennetta tarkasteltaessa hypätään yli välivaiheita ja edetään rajoittamattomammin. Vapaampi lähestyminen on synnyttänyt monia matematiikan edistysaskeleita ja käytännön tarpeeseen kehitettyjen metodien pohjalla on, varsinkin Egyptin ja Babylonian kukoistuksen aikaan, mutta myös vielä Kreikan kulta-aikaan, ollut puhtaasti intuitioon ja empiirisiin havaintoihin perustuvat teoriat.

Notaatioiden historiallinen kehitys ei näy moderneissa eikä *New Math* -pohjaisissa opetussuunnitelmissa. Vaikka notaatioiden kehitys kuvaa hyvin aikansa matemaattista kehitystä ja rajoittuneisuutta, ja siten mielenkiintoista pohdittavaa, on ymmärrettävää, että opetuksessa on suhteellisen tarpeetonta ja liian aikaavievää tarkastella notaatioita tehokkaiden standardimetodien ollessa olemassa. Suurempi puute on kehittävien epäonnistumismahdollisuuksien puuttuminen opetussuunnitelmista. Vaikka ei voida olettaa, että oppilas kykenisi lähes täysin itsenäisesti kehittämään matemaattisia taitojaan historiallisen kehityksen kestäessä tuhansia vuosia 9-12 kouluvuoteen verrattuna, olisi laajempi epäonnistumismahdollisuuksien määrä suotavaa. Varsinkin parin viime vuosikymmenen aikana ovat opetussuunnitelmat kehittyneet lähemmäs oppilaan itsekehittymistä, mutta pelkkä ongelmalähtöinen opetus ei kykene samaan kuin aito kehitystyö. Opetuksessa esiintyvät ongelmatehtävät ovat usein liian suoraviivaisia haettaessa vain oikeaa ratkaisuja verrattaessa avoimempiin ongelmiin, jolloin useat ratkaisuun johtavat reitit ovat mahdollisia ja epäonnistumisetkin saattavat johtaa matematiikan taitojen kehittymiseen. Kuten aina koulumaailmassa on käytettävissä olevan ajan kovin rajoitettu määrä haaste.

Ohjelmointi on opetussuunnitelmissa käytännössä kokonaan uusi kokonaisuus, jota ei ole aiemmissa opetussuunnitelmissa [3, 4] ja, joka ottaen aiheen luonteen huomioon, ei luonnollisesti noudata historiallisen kehityksen järjestystä. Peruskouluun ohjelmoinnin alkeet tulevat heti ensimmäisistä luokista alkaen. Tästä huolimatta lukiossa tietotekniikan kurssit ovat uudessakin opetussuunnitelmassa [2] vain soveltavia kursseja ja matematiikan kursseissa vain kursseilla Tilastot ja todennäköisyys (MAB5), Tilastot ja todennäköisyys II (MAB8) ja Todennäköisyys ja tilastot (MAA10) on selkeä viittaus tietotekniikan käyttöön.

> Kurssin tavoitteena on, että opiskelija … osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä diskreettien jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä ja

todennäköisyyslaskennassa.[2, s.153]

> Kurssin tavoitteena on, että opiskelija ... osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa, todennäköisyysjakauman odotusarvon ja keskihajonnan määrittämisessä, todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman ja parametrien avulla sekä luottamusvälin laskemisessa. [2, s.154]

> Kurssin tavoitteena on, että opiskelija ... osaa käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä ja todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman ja parametrien avulla.[2, s.148]

Kuten jo aiemmin mainittiin modernit opetussuunnitelmat vastaavat historiallista kehitystä pääpiirteittäin ja suuressa mittakaavassa, kun ensimmäiset matematiikaksi luetut keksinnöt opitaan ennen koulua ja ensimmäisillä luokilla uusimpien keksintöjen sijoittuessa lukion viimeisille kursseille. Myös aihealueiden sisäinen opetuksen eteneminen vastaa huomattavan hyvin historiallista kehitystä. Se mikä eroaa eniten on alojen välinen ajoittuminen ja alojen yhdistyminen. Historiassa matematiikan alat sekoittuvat voimakkaasti, joten modernissa jaossa eriteltyjen alojen tuloksia on käytetty paljon ristiin, joskus myös täysin perusteettomasti. Samoin matematiikan sekoittuminen toisiin tieteenaloihin, varsinkin fysiikkaan ja tähtitieteeseen, on historiallisesti ollut voimakasta ja matematiikka erottui täysin omaksi tieteenalakseen oikeastaan vasta 1700-luvulla. Tämän perusteella olisi varsinkin alaluokilla täysin perusteltua yhdistää tältä kantilta tarpeettomasti eroteltuja kouluaineita.

Kirjallisuutta

[1] Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014, Opetushallitus, Juvenes Print - Suomen Yliopistopaino Oy, Tampere 2015

[2] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015, Opetushallitus,

[3] Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, Opetushallitus, Vammalan Kirjapaino Oy, Vammala 2004

[4] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003, Opetushallitus, Vammalan Kirjapaino Oy, Vammala 2003

[5] Carl B. Boyer: Tieteiden kuningatar - Matematiikan historia osa I, 3. painos, Art House, 2000

[6] Carl B. Boyer: Tieteiden kuningatar - Matematiikan historia osa II, 3. painos, Art House, 2000

[7] Juha Oikkonen: Katsauksia matematiikan historiaan, Gaudeamus, 1982

[8] David Eugene Smith: History of Mathematics (Volume II), Dover Publications, 1958

[9] A. M. Fink: An Essay on the History of Inequalities, Department of Mathematics, Iowa State University, 2000

[10] Morris Kline, Why Johnny Can´t Add: The Failure of the New Math, St. Martin´s Press, 1973

[11] The revolution in School Mathematics - A Challenge for Administrators and Teachers, National Council of Teachers of Mathematics, 1961

[12] Eero Seppä, Joukko-opin rooli suomalaisessa koulumatematiikassa, Pro Gradu, 2013, Tampereen Yliopisto

[13] Matti Lehtinen, Matematiikan historian luentoja, Helsingin yliopisto, 2001

[14] Matematiikan asemasta perusopetuksen uudessa tuntijaossa, Solmu 3/2010; Halmetoja, Pokela, Sorsa, Spangar, Suihko, Tuomi; 2010

[15] Perusopetus 2020 – yleiset valtakunnalliset tavoitteet ja tuntijako, Opetus- ja kulttuuriministeriön työryhmämuistioita ja selvityksiä 2010:1, Opetus- ja kulttuuriministeriö - Koulutus- ja tiedepolitiikan osasto, 2010

[16] en.wikipedia.org/wiki/Francis_Keppel

[17] en.wikipedia.org/wiki/Henri_Lebesgue

[18] en.wikipedia.org/wiki/Richard_Feynman

[19] en.wikipedia.org/wiki/Zhou_Bi_Suan_Jing

[20] en.wikipedia.org/wiki/The_Nine_Chapters_on_the_Mathematical_Art

[21] en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle

[22] en.wikipedia.org/wiki/Brahmagupta

[23] en.wikipedia.org/wiki/Bhaskara_II

[24] en.wikipedia.org/wiki/Muhammad_ibn_Musa_al-Khwarizmi

[25] en.wikipedia.org/wiki/%27Abd_al-Hamid_ibn_Turk

[26] en.wikipedia.org/wiki/Thabit_ibn_Qurra

[27] en.wikipedia.org/wiki/Omar_Khayyam

[28] en.wikipedia.org/wiki/Nasir_al-Din_al-Tusi

[29] en.wikipedia.org/wiki/Jamshid_al-Kashi

[30] fi.wikipedia.org/wiki/Johannes_Filoponos

[31] en.wikipedia.org/wiki/Pope_Sylvester_II

[32] en.wikipedia.org/wiki/Maximus_Planudes

[33] en.wikipedia.org/wiki/Jordanus_de_Nemore

[34] en.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Chuquet

[35] en.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel

[36] en.wikipedia.org/wiki/Albrecht_Dürer

[37] en.wikipedia.org/wiki/Albert_Girard

[38] en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Harriot

[39] en.wikipedia.org/wiki/William_Oughtred

[40] en.wikipedia.org/wiki/Henry_Briggs_(mathematician)

[41] en.wikipedia.org/wiki/Jost_Bürgi

[42] en.wikipedia.org/wiki/Simon_Stevin

[43] en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei

[44] en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler

[45] en.wikipedia.org/wiki/Bonaventura_Cavalieri

[46] en.wikipedia.org/wiki/Percentage

[47] en.wikipedia.org/wiki/Menaechmus

[48] en.wikipedia.org/wiki/Autolycus_of_Pitane

[49] en.wikipedia.org/wiki/Pythagoras

[50] en.wikipedia.org/wiki/Archimedes

[51] fi.wikipedia.org/wiki/Kartografian_historia

[52] en.wikipedia.org/wiki/Diophantus

[53] en.wikipedia.org/wiki/René_Descartes

[54] en.wikipedia.org/wiki/La_Géométrie

[55] en.wikipedia.org/wiki/Exponentiation

[56] en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units

[57] en.wikipedia.org/wiki/John_Pell

[58] en.wikipedia.org/wiki/Law_of_Continuity

[59] en.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki

[60] fi.wikipedia.org/wiki/Montessoripedagogiikka

[61] fi.wikipedia.org/wiki/Lukujärjestelmä