JATKUVAT SEMIMARTINGAALIT JA FILTRAATION ALKULAAJENNUS

Pro gradu-tutkielma

Mikko Pakkanen

Ohjaaja ja tarkastaja: dos. Tommi Sottinen
Toinen tarkastaja: dos. Harri Nyrhinen

HELSINGIN YLIOPISTO

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Hyväksytty 23. lokakuuta 2006

Sisältö

Alkusanat

Todennäköisyyslaskennalle ominaiseen tapaan myös *martingaalin* käsite on lähtöisin vanhasta ranskalaisesta uhkapelikulttuurista. Alkuaan martingaali on nähtävästi tarkoittanut mitä tahansa naiivia tai ”typeränä” pidettyä tapaa pelata uhkapelejä (ransk. *jouer à la martingale*). Myöhemmin martingaalilla on tarkoitettu erityisesti pelistrategiaa, jossa pelaaja asettaa jokaisella kierroksella panokseksi edellisellä kierroksella menettämänsä summan *tuplattuna* lopettaen pelaamisen välittömästi voittaessaan (ks. [Man05], jossa on käsitelty myös muita martingaaliin liitettyjä merkityksiä ja etymologioita). Todennäköisyyslaskennassa martingaali on vakiintunut tarkoittamaan stokastista prosessia — hieman yksinkertaistaen ajassa etenevää satunnaisuuden ajamaa ilmiötä — jolle tulevan kehityksen paras ennuste on nykyhetken arvo. Abstraktista määritelmästään huolimatta yhteys uhkapeleihin ei suinkaan ole katkennut, sillä vastaahan pelaajan varallisuuden ajallinen kehitys idealisoidussa *reilussa* uhkapelissä juuri martingaalin käsitettä.

Martingaalissa on keskeistä se, että käsite on *suhteessa* tietämykseen, jonka perusteella prosessia yritetään ennustaa. Jos käytettävissä onkin ehkä parempaa ennakkotietoa prosessin tulevasta kehityksestä, voidaan ennusteita mahdollisesti tarkentaa nykyhetken arvosta, jolloin kyseessä ei enää tietenkään ole martingaali. On selvää, että se mitä *tietämyksellä* kulloinkin tarkoitetaan, voi helposti jäädä epämääräiseksi. Kuitenkin todennäköisyyslaskennan yksi suurista saavutuksista on juuri ollut täsmällisen, ajan mittaan kertyvää ”tietoa” tai ”informaatiota” kuvaavan käsitteen, *filtraation*, määritteleminen. Siten martingaalin käsite voidaan määritellä luonnollisella tavalla suhteessa johonkin filtraatioon.

Tässä tutkielmassa olen perehtynyt kysymykseen, mitä martingaalille tapahtuu, kun sitä tarkastellaan alkuperäistä filtraatiota — sitä, jonka suhteen se on martingaali — *laajemman*, toisin sanoen *laajennetun*, filtraation suhteen. Kysymys on tietenkin sellaisenaan liian yleinen, joten olen rajoittunut tapaukseen, jossa laajennettuun filtraatioon lisätty uusi tietämys on saadaan jostakin yksittäisestä *satunnaismuuttujasta*, esimerkiksi martingaalin arvosta jollakin kiinteällä ajanhetkellä tulevaisuudessa. Tämä vastaa tulkinnallisesti sitä, että ennusteita ”laadittaessa” olisi tiedossa kyseisen satunnaismuuttujan *tarkka arvo*. Toisin kuin analogiassa, jossa martingaali kuvaa pelaajan varallisuutta *jonossa* (esimerkiksi peräkkäisinä päivinä) toistettua uhkapeliä, tarkastelen martingaaleja, jotka kehittyvät *jatkuvassa ajassa*, siis ikään kuin uhkapeliä toistettaisiin ajassa mielivaltaisen tiheään, kuten esimerkiksi kuvitteellisilla osakemarkkinoilla, jossa kauppaa käy *äärettömän monta* sijoittajaa. Tämän lisäksi oletan, että tarkasteltavat martingaalit ovat *jatkuvia*, eli niiden aikakehitys ei voi ”hypätä” millään ajanhetkellä.

Tutkielman ensimmäisessä luvussa käsittelen lyhyesti jatkuvien martingaalien teorian perusteita: keskeisiä käsitteitä ja tärkeän työkalun, *stokastisen integraalin* konstruktiota. Lopuksi esittelen esimerkkinä kaikista tunnetuimman jatkuvan martingaalin, *Brownin liikkeen*. Luvun tärkeimpänä lähteenä on toiminut Chris Rogersin ja David Williamsin varsin originelli teos [RW00b], mutta vaikutteita on otettu myös mm. kirjoista [Kal02] ja [CW83]. Jälkimmäinen luku on puolestaan omistettu kokonaan filtraation laajennukselle. Lyhyehkön motivoinnin jälkeen esitän ja todistan Marc Yorilta lähtöisin olevan (ks. [Yor85]) lauseen 2.8, joka karkeasti ottaen kertoo, miten martingaali voidaan hajottaa summaksi martingaalista laajennetun filtraation suhteen ja stokastisesta *vietteestä* (engl. *drift*). Esittämäni todistus on astetta yksityiskohtaisempi versio Yorin alkuperäisessä artikkelissa ja myöhemmässä kirjassa [MY06] esitetyistä, hieman ylimalkaisista, todistuksista. Lauseen sovelluksena perehdyn lopuksi rajoitetulla aikavälillä elävän Brownin liikkeen filtraation laajentamiseen Brownin liikkeen välin päätepisteessä saamalla arvolla. Lisäksi selvitän, mikä yhteys tällä laajennuksella on *Brownin siltaan*, eli Brownin liikkeeseen, joka on *ehdollistettu* saamaan jonkin kiinnitetyn arvon aikavälin päätepisteessä. Tämä osa on saanut vaikutteita kirjassa [MY06] esitetystä vastaavasta esimerkistä sekä artikkelista [GSV06].

Kiitokset: Ohjaajalleni Tommi Sottiselle haluani osoittaa kiitokseni kiintoisan aiheen ehdottamisesta sekä kommenteista ja neuvoista työhön liittyen. Lisäksi haluan erityisesti kiittää vanhempiani tuesta opintojeni aikana.

Mikko Pakkanen
Helsingissä, 9. lokakuuta 2006

Merkinnöistä

Tutkielmassa on käytetty varsin vakiintuneita merkintöjä, tai se on ainakin ollut tarkoituksena. Suuri osa merkinnöistä esitellään sitä mukaa, kun niihin liittyvät käsitteet määritellään tekstissä. Alle on koottu "ensiavuksi" sellaisia merkintöjä, jotka oletetaan tunnetuiksi heti alusta lähtien.

Tärkeä sopimus. Melkein varmasti samat (vast. erottamattomat) satunnaismuuttujat (vast. stokastiset prosessit) *samaistetaan* aina. Siksi yhtäsuuruusmerkkien yhteydessä jätetään turhan toiston välttämiseksi *melkein varmasti* (vast. *erottamattomuuteen asti*) kirjoittamatta, ellei ole erityistä syytä olla täsmällisempi.

Funktioita

$x \vee y = \max\{x, y\}$

$x \wedge y = \min\{x, y\}$

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A, \\ 0, & \text{kun } x \notin A. \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x > 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0, \\ -1, & \text{kun } x < 0. \end{cases}$$

$\mathrm{b}\,\mathcal{F} = \{f : f \text{ on } \mathcal{F}\text{-mitallinen rajoitettu reaalifunktio}\}$

σ-algebroja

$\mathcal{B}(E) = \sigma(A : A \text{ on avoin } E\text{:ssä})$

$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} = \sigma(A \times B : A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G})$

$\mathcal{F} \vee \mathcal{G} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$

$\bigvee_{t \in T} \mathcal{F}_t = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t\right)$

Muuta

$\xrightarrow{\mathbf{P}}$ stokastinen suppeneminen mitan **P** suhteen

$\xrightarrow{L^2}$ (vahva) suppeneminen L^2-normin suhteen

$\ll$ mitan absoluuttinen jatkuvuus

dt, dx Lebesgue-mitta $\mathbb{R}$:llä

$:=$ käytetään varsin liberaalisti merkityksissä *määritellään*, *asetetaan* tai *merkitään*, kaksoispiste ilmaisee suunnan, johon toimenpide tapahtuu

1 Lyhyt johdatus jatkuvien martingaalien teoriaan

1.1 Stokastiset prosessit

Olkoot $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ täydellinen[1] todennäköisyysavaruus ja T epätyhjä parametriavaruus. Tällöin kokoelma $X := (X_t)_{t \in T}$ on *stokastinen prosessi* tai jatkossa lyhyemmin *prosessi*, jos X_t on reaaliarvoinen *satunnaismuuttuja*, eli mitallinen kuvaus, $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jokaisella $t \in T$. Asetelmaa voidaan ajatella myös hieman toisesta näkökulmasta. Kiinnitetyllä $\omega \in \Omega$ voidaan nimittäin määritellä myös kuvaus $t \mapsto X_t(\omega)$, jota sanotaan *poluksi*. Siten stokastinen prosessi voidaan ehkäpä karakterisoida yhtä hyvin satunnaismuuttujana $\omega \mapsto X(\omega, \cdot) := X_\cdot(\omega)$, jonka maaliavaruus on siis $\mathbb{R}^T$, eli kuvausten $T \to \mathbb{R}$ joukko. Jos funktioavaruus $\mathbb{R}^T$ varustetaan, kuten tavallista, arvofunktionaalien $\pi_t : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$, $\pi_t(x) = x(t)$ virittämällä σ-algebralla $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T} := \sigma(\pi_t : t \in T)$, tämä luonnehdinta onkin yhtäpitävä alkuperäisen määritelmän kanssa.

Väite 1.1. *Kokoelma $(X_t)_{t \in T}$ on stokastinen prosessi, jos ja vain jos $\omega \mapsto X(\omega, \cdot)$ on satunnaismuuttuja $(\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T})$.*

Todistus. Oletetaan ensin että $\omega \mapsto X(\omega, \cdot)$ on mitallinen. Käyttäen $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T}$:n määritelmää väite seuraa nyt välittömästi siitä, että $X_t(\omega) \equiv \pi_t(X(\omega, \cdot))$.

Oletetaan seuraavaksi kääntäen, että $(X_t)_{t \in T}$ on stokastinen prosessi. Koska muotoa $\pi_t^{-1}(B)$, missä $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $t \in T$, olevat joukot virittävät σ-algebran $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes T}$, ja koska $\{\omega \in \Omega : X(\omega, \cdot) \in \pi_t^{-1}(B)\} = \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B\} = X_t^{-1}(B)$, väite seuraa stokastisen prosessin määritelmästä. $\square$

[1] Täydellisyys tarkoittaa sitä, että jos $A \in \mathcal{F}$ ja $\mathbf{P}(A) = 0$, niin $B \in \mathcal{F}$ kaikilla $B \subset A$. Tn-avaruus, ja yleisemmin myös mitta-avaruus, voidaan aina yksikäsitteisellä tavalla *täydellistää* minimaalisesti (ks. esim. [Rud87] Theorem 1.36).

Todennäköisyysteorian kannalta kahta satunnaismuuttujaa voidaan pitää käytännössä samoina, mikäli ne ovat yhtäsuuria *melkein varmasti*, eli melkein kaikilla $\omega \in \Omega$. Prosesseille tämä kriteeri yleistetään tavallisesti kahdella tavalla. Olkoot X ja Y prosesseja avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Tällöin Y on X:n *modifikaatio* (tai *versio*), mikäli

$$\mathbf{P}(X_t = Y_t) = 1 \quad \text{kaikilla } t \in T.$$

Prosessit X ja Y ovat *erottamattomat*, mikäli niillä on melkein varmasti samat polut, eli

$$\mathbf{P}(X_t = Y_t \text{ kaikilla } t \in T) = 1.$$

Tn-mitan $\mathbf{P}$ monotonisuudesta seuraa välittömästi, että erottamattomat prosessit ovat aina toistensa modifikaatiot. Käänteinen pätee selvästi ainakin silloin, kun T on numeroituva. Jos T on ylinumeroituva, tarvitaan kuitenkin hieman lisäoletuksia.

Täysin abstraktin joukon T sijaan jatkossa prosessit on parametroitu jollakin ei-negatiivisen reaaliakselin välillä. Ellei ole mitään erityistä syytä rajoittua jollekin pienemmälle välille, käytetään koko väliä $[0, \infty)$. Nyt parametri t voidaan tietenkin tulkita luontevasti *ajaksi*. Koska avaruudella $[0, \infty)$ on käyttökelpoinen topologia, on usein hyödyllistä olettaa prosessien poluilta jatkuvuutta. Sanotaan, että prosessi on *jatkuva*, jos sillä on jatkuvat polut. Edelleen *oikealta jatkuvat* ja *vasemmalta jatkuvat* prosessit määritellään täysin analogisella tavalla. Nyt on mahdollista esittää riittävät (muttei mitenkään välttämättömät) ehdot sille, että modifikaatiot ovat erottamattomia.

Apulause 1.2. *Olkoot $X = (X_t)_{t \geq 0}$ ja $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ oikealta (tai vaihtoehtoisesti vasemmalta) jatkuvia prosesseja. Tällöin jos Y on X:n modifikaatio, niin X ja Y ovat erottamattomat.*

Todistus. Käsitellään ainoastaan tapaus, jossa prosessit ovat oikealta jatkuvia. Todistus perustuu tietenkin $[0, \infty)$:n separoituvuuteen. Merkitään $A := \{X_t = Y_t \text{ kaikilla } t \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}$. Koska Y on X:n modifikaatio, selvästi $\mathbf{P}(A) = 1$. Olkoot nyt $\omega \in A$, $s \in [0, \infty) \setminus \mathbb{Q}$ ja $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sellainen, että $s_n \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $s_n \downarrow s$. Jatkuvuuden nojalla $X_s(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_{s_n}(\omega) = \lim_{n \to \infty} Y_{s_n}(\omega) = Y_s(\omega)$, joten $A \subset \{X_t = Y_t \text{ kaikilla } t \in [0, \infty)\} =: C$. Monotonisuuden nojalla $1 = \mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(C) \leq 1$. $\square$

Avaruus $[0, \infty)$ voidaan luonnollisesti varustaa mielekkäällä mittateoreettisella struktuurilla, joten on usein hyödyllistä olettaa prosessilta "yhteismitallisuutta" sekä satunnaisuuden että ajan suhteen. Prosessin X sanotaan olevan *mitallinen*, jos $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ on mitallinen kuvaus $(\Omega \times [0,\infty), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,\infty))) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Oletus prosessin mitallisuudesta on varsin hyödyllinen siksi, että tällöin *Fubinin lauseesta* seuraa, että prosessin polut ovat aina $\mathcal{B}([0,\infty))$-mitallisia funktioita.

1.2 Filtraatiot

Olkoon $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ kokoelma $\mathcal{F}$:n ali-σ-algebroja. Tällöin $\mathbb{F}$ on *filtraatio*,[2] jos $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+h}$, kun $t, h \geq 0$. Filtraatiolla $\mathbb{F}$ varustettua tn-avaruutta $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ sanotaan *filtteröidyksi tn-avaruudeksi*. Filtraation käsitteen taustalla on ajatus, että prosessin koko realisaatiota ei havaita heti, vaan se paljastuu vähitellen tarkentaen tietämystä prosessin taustalla olevan satunnaiskokeen lopputuloksesta. Esimerkiksi jos tarkkailija havainnoi prosessia X, tietää hän hetkellä s muuttujan X_t arvon jokaisella $t \leq s$ ja voi, ainakin periaatteessa, päätellä jokaisesta σ-algebran $\mathcal{F}_s^X := \sigma(X_t : t \leq s)$ tapahtumasta, sattuiko se vai ei. Kokoelma $\mathbb{F}^X := (\mathcal{F}_t^X)_{t\geq 0}$ on esimerkki filtraatiosta, sitä kutsutaan prosessin X *luonnolliseksi filtraatioksi*. Yleisemmin mielivaltainen tn-avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ voidaan *aina* varustaa filtraatiolla. Asetetaan yksinkertaisesti $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}$ kaikilla $t \geq 0$. Tätä kaytännössä varsin hyödytöntä filtraatiota sanotaan *deterministiseksi filtraatioksi*.

Prosessi X on *sopiva* filtraation $\mathbb{F}$ suhteen (tai lyhyemmin $\mathbb{F}$-*sopiva*), mikäli X_t on $\mathcal{F}_t$-mitallinen kaikilla $t \geq 0$. Sopivuus tarkoittaa sitä, että tarkkailija vähintäänkin havaitsee prosessin "reaaliajassa", ja on toivottava minimivaatimus, kun ylipäätään tarkastellaan jotakin prosessia jonkin filtraation suhteen. Edellä esitelty X:n luonnollinen filtraatio $\mathbb{F}^X$ on selvästi *pienin* filtraatio, jonka suhteen prosessi X on sopiva.

Eräistä varsin syvällisistä syistä (mm. jotta taustalla olevat tarpeelliset *début*- ja *sektiolauseet* pätisivät, ks. [RW00a] s. 184–188) filtraatiolta oletetaan kirjallisuudessa yleensä vakiintuneet säännöllisyysehdot. Filtraation $\mathbb{F}$ sanotaan olevan *oikealta jatkuva*, mikäli

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \quad \text{kaikilla } t \geq 0.$$

[2] Filtraatiota kutsutaan usein myös *historiaksi*, ja varsinkin sovelluksissa σ-algebraa $\mathcal{F}_t$ *informaatioksi* hetkellä t.

Filtraatio $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ on $\mathbb{F}$:n pienin oikealta jatkuva *laajennus*. On myös toivottavaa, että filtraatio on *täydellinen*, eli sen sisältämät σ-algebrat ovat täydellisiä. Merkitään σ-algebran $\mathcal{C}$ täydellistymää $\overline{\mathcal{C}}$:llä. Tällöin $(\overline{\mathcal{F}_t})_{t\geq 0}$ on $\mathbb{F}$:n pienin täydellinen laajennus. Täydellisen, oikealta jatkuvan filtraation sanotaan toteuttavan *tavanomaiset ehdot*.[3] Osoittautuu, että pienimmän oikealta jatkuvan laajennuksen ja pienimmän täydellisen laajennuksen ottaminen ovat vaihdannaisia toimenpiteitä. Siten filtraatiolle voidaan määritellä yksikäsitteinen pienin tavanomaiset ehdot täyttävä laajennus.

Väite 1.3. *Filtraatio* $(\overline{\mathcal{F}_{t+}})_{t\geq 0} = (\overline{\mathcal{F}}_{t+})_{t\geq 0}$ *on filtraation* $\mathbb{F}$ *pienin täydelliset ehdot täyttävä laajennus.*

Todistus. [Kal02] Lemma 7.8. □

1.3 Martingaalit ja lokalisointi

Oletus 1.4. Tästä eteenpäin että kaikki tapahtuu kiinnitetyllä filtteröidyllä tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, jossa $\mathbb{F}$ toteuttaa tavanomaiset ehdot. Lisäksi kaikki tarkasteltavat prosessit ovat mitallisia.

Ehdollisen odotusarvo-operaattorin $\mathbf{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ avulla voidaan tunnetusti laskea integroituvalle satunnaismuuttujalle harhaton ennuste, kun käytettävissä on ajanhetken t tietämys taustalla olevan satunnaiskokeen lopputuloksesta. Jos satunnaismuuttuja on neliöintegroituva, ehdollisen odotusarvon antama ennuste on keskineliövirheen, eli L^2-normin mielessä optimaalinen. *Martingaaliksi* sanotaan prosessia, jolle paras tulevaisuuden ennuste on nykyhetken arvo. Siis täsmällisemmin ilmaistuna integroituva, $\mathbb{F}$-sopiva prosessi X on *martingaali filtraation* $\mathbb{F}$ *suhteen* (tai yleensä lyhyemmin $\mathbb{F}$-*martingaali*), jos

$$\mathbf{E}[X_{t+h}|\mathcal{F}_t] = X_t \quad \text{kaikilla } t, h \geq 0. \tag{1.5}$$

Koska $\mathbb{F}$ toteuttaa tavanomaiset ehdot, *Doobin regularisaatiolauseen* (ks. esim. [RW00a] Theorem II.67.7.) nojalla jokainen $\mathbb{F}$-martingaali voidaan modifioida oikealta jatkuvaksi.

Martingaali X on *tasaisesti integroituva*, jos $\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}[|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>n\}}] \to 0$, kun $n \to \infty$. Kun $p \in [1, \infty)$, martingaalin X sanotaan puolestaan olevan *rajoitettu* L^p*:ssä*, jos $\sup_{t\geq 0} \mathbf{E}[|X_t|^p] < \infty$.

[3] Tavanomaiset ehdot ovat luonnollisesti mielekkäät ainostaan jos taustalla oleva tn-avaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ on täydellinen. Siksi täydellisyys tulisi lisätä ehtoihin mukaan, ellei sitä olisi alunperin oletettu.

Väite 1.6. *Olkoon $p \in (1,\infty)$. Tällöin jokainen L^p:ssä rajoitettu martingaali on tasaisesti integroituva.*

Todistus. Olkoon martingaali X rajoitettu L^p:ssä ja $K := \sup_{t\geq 0} \mathbf{E}[|X_t|^p]^{\frac{1}{p}}$. *Hölderin* ja *Tšebysevin* epäyhtälöiden nojalla

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t>n|\}}] &\leq \mathbf{E}[|X_t|^p]^{\frac{1}{p}}\mathbf{E}[\mathbf{1}^{\frac{p}{p-1}}_{\{|X_t>n|\}}]^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq K\,\mathbf{P}(|X_t|>n)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq K\left(\frac{\mathbf{E}[|X_t|]}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq K\left(\frac{K}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

sillä $p \in (1,\infty)$, joten $\frac{p-1}{p} > 0$. Saadun yläraja-arvion nojalla

$$0 \leq \sup_{t\geq 0} \mathbf{E}[|X_t|\mathbf{1}_{\{|X_t|>n\}}] \leq K\left(\frac{K}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} \longrightarrow 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$ □

Otetaan jatkuvien martingaalien luokille käyttöön muutamia merkintöjä. Olkoot $\mathcal{M}(\mathbb{F})$ jatkuvien $\mathbb{F}$-martingaalien luokka, $\mathcal{M}^1(\mathbb{F})$ jatkuvien, tasaisesti integroituvien $\mathbb{F}$-martingaalien luokka ja kaikilla $p \in (1,\infty)$ vastaavasti $\mathcal{M}^p(\mathbb{F})$ kaikkien jatkuvien, L^p:ssä rajoitettujen $\mathbb{F}$-martingaalien luokka. Väitteen 1.6 ja Hölderin epäyhtälön nojalla pätee

$$\mathcal{M}^{p+h}(\mathbb{F}) \subset \mathcal{M}^p(\mathbb{F}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{F}) \quad \text{kaikilla } p \in [1,\infty), h > 0.$$

Määritellään vielä $\mathcal{M}_0(\mathbb{F}) := \{X : X \in \mathcal{M}(\mathbb{F}), X_0 = 0\}$ ja $\mathcal{M}_0^p(\mathbb{F}) := \{X : X \in \mathcal{M}^p(\mathbb{F}), X_0 = 0\}$. On selvää, että tässä määritellyt martingaaliluokat ovat kaikki *vektoriavaruuksia*. Koska filtraatio $\mathbb{F}$ on tässä vaiheessa kiinnitetty, merkitään vain yksinkertaisesti $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathbb{F})$ ja $\mathcal{M}^p := \mathcal{M}^p(\mathbb{F})$. Myöhemmin, kun tarkasteltavana on samanaikaisesti useampia filtraatiota, palataan takaisin täsmällisempiin merkintöihin.

Raja-arvoa $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$, sanotaan martingaalin X *päätearvoksi*. Otetaan käyttöön merkintä $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$. Seuraavassa lauseessa esitetään riittävät ehdot päätearvon olemassaololle ja kerrotaan, missä mielessä konvergenssi tapahtuu.

Apulause 1.7 (Martingaalikonvergenssilause)**.** *Olkoot $p \in [1,\infty)$ ja $X \in \mathcal{M}^p$. Tällöin on olemassa sellainen $X_\infty \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbf{P}|\mathcal{F}_\infty) =: L^p(\mathcal{F}_\infty)$, että $X_t \to X_\infty$ melkein varmasti ja L^p:ssä, kun $t \to \infty$. Lisäksi $X_t = \mathbf{E}[X_\infty|\mathcal{F}_t]$ kaikilla $t \geq 0$.*

Todistus. [CW83] Theorem 1.5, [Kal02] Corollary 7.22. □

Prosessien kanssa samalla tn-avaruudella elävät $[0,\infty]$-arvoiset satunnaismuuttujat voidaan tulkita satunnaiskokeesta määräytyviksi ajanhetkiksi, eli *satunnaishetkiksi*. Satunnaishetkeä $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ sanotaan $\mathbb{F}$-*pysäytyshetkeksi* (tai lyhyemmin *pysäytyshetkeksi*, kun ei ole sekaannuksen vaaraa), jos $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ kaikilla $t \ge 0$. Pysäytyshetken ideana on se, että jokaisella hetkellä tulee filtraation $\mathbb{F}$ tarjoaman tietämyksen perusteella olla selvillä, onko "pysähtymisen" aika koittanut. Pysäytyshetkillä operoitaessa seuraava lähes ilmeinen tulos on varsin tärkeä.

Apulause 1.8. *Jos τ ja τ' ovat pysäytyshetkiä, niin $\tau \vee \tau'$ ja $\tau \wedge \tau'$ ovat myös pysäytyshetkiä.*

Todistus. Ensinnäkin $\{\tau \vee \tau' \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\tau' \le t\} \in \mathcal{F}_t$, ja toisaalta $\{\tau \wedge \tau' \le t\} = \{\tau \le t\} \cup \{\tau' \le t\} \in \mathcal{F}_t$. □

Pysäyttämällä (tai ehkä kuvaavammin "jäädyttämällä") prosessi X pysäytyshetkellä τ saadaan *pysäytetty prosessi* $X^\tau := (X_t^\tau)_{t\ge 0} := (X_{t\wedge\tau})_{t\ge 0}$. Martingaaliominaisuus säilyy pysäyttämisessä, toisin sanoen $\mathcal{M}$ on *vakaa* pysäyttämisen suhteen.

Apulause 1.9. *Jos $X \in \mathcal{M}$, niin pysäytetty prosessi $X^\tau \in \mathcal{M}$.*

Todistus. [RW00b] Lemma IV.12.4. □

Pysäytyshetkeen τ liittyen voidaan määritellä *pysäytetty σ-algebra* $\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, t \ge 0\}$. Se, että $\mathcal{F}_\tau$ on todellakin σ-algebra, on suoraviivaisesti tarkistettavissa. Seuraava apulause kertoo, miten tasaisesti integroituvilla martingaaleilla ominaisuus (1.5) yleistyy tilanteeseen, jossa prosessia tarkastellaan pysäytyshetkellä, ja ehdollinen odotusarvo otetaan pysäytetyn σ-algebran suhteen.

Apulause 1.10 (Doobin pysäytyslause)**.** *Olkoot $X \in \mathcal{M}^1$, ja $\tau \le \tau'$ pysäytyshetkiä. Tällöin $X_\tau \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_\tau, \mathbf{P}|\mathcal{F}_\tau)$, ja $\mathbf{E}[X_{\tau'}|\mathcal{F}_\tau] = X_\tau$.*

Todistus. [RW00a] Theorem II.77.5. □

Pysäytyshetkien avulla martingaalin käsitettä voidaan yleistää tilanteeseen, jossa se on voimassa lokaalisti. Prosessia X sanotaan *lokaaliksi* $\mathbb{F}$-*martingaaliksi*, jos on olemassa jono $\mathbb{F}$-pysäytyshetkiä $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jolla $\tau_n \uparrow \infty$ ja X^{τ_n} on martingaali kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jonoa $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sanotaan tällöin *lokalisoivaksi jonoksi*. Yleisemmin kun X on mielivaltainen prosessi, $\mathcal{C}$ jokin prosessien luokka ja

$(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kuten edellä, jos $X^{\tau_n} \in \mathcal{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin sanotaan että X on *lokaalisti* $\mathcal{C}$:ssä, tai X *lokalisoituu* $\mathcal{C}$:hen. Tällöin merkitään $X \in \mathcal{C}_{\text{loc}}$. Esimerkiksi jos X on jatkuva lokaali martingaali, niin $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. *Lokaalisaatioksi* kutsutaan menettelyä, jossa prosessia X pysäytellään lokalisoivaa jonoa pitkin, ja jokin ominaisuus määritellään tai todistetaan ensin pysäytetyille prosesseille X^{τ_n} kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja sitten yleistetään alkuperäiselle prosessille X.

Lokalisaation avulla voidaan usein redusoida jokin prosesseihin liittyvä ongelma sellaiseksi, että voidaan olettaa tarkasteltavien prosessien olevan joko rajoitettuja tai "riittävän" integroituvia. Näin voidaan tehdä esimerkiksi jatkuville lokaaleille martingaaleille, joilla alkuarvo on nolla. Nimittäin luokan $\mathcal{M}_{0,\text{loc}}$ prosessille voidaan aina valita eksplisiittinen lokalisoiva jono, joka takaa erittäin vahvan lokalisaation.

Apulause 1.11. *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}$. Määritellään $\tau_n^X := \inf\{t > 0 : |X_t| > n\}$. Tällöin $(\tau_n^X)_{n\in\mathbb{N}}$ on X:n lokalisoiva jono.*

Todistus. [CW83] Proposition 1.9. □

Seuraus 1.12. *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}$. Tällöin X on lokaalisti rajoitettu ja siten $X \in \mathcal{M}^p_{0,\text{loc}}$ kaikilla $p \in [1, \infty)$.*

1.4 Äärellisesti heilahtelevat prosessit ja neliöheilahtelu

Tähän mennessä tässä luvussa on tarkasteltu lähinnä stokastisiin prosesseihin ja martingaaleihin liittyviä peruskäsitteitä ja -tuloksia. Seuraavana tavoitteena on konstruoida *stokastinen integraali* jatkuvan lokaalin martingaalin suhteen. Integraalin halutaan olevan muotoa $\int_0^t Y_s dX_s$, missä Y on riittävän "säännöllinen" prosessi ja $X \in \mathcal{M}_{\text{loc}}$. Koska integroinnissa alkuarvolla ei ole merkitystä, voidaan olettaa, että $X \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}$. Osoittautuu, että *integraattorina* toimivan prosessin X polkujen *heilahtelevuus* sanelee pitkälti sen, miten kyseinen integraali voidaan, ja toisaalta myös miten sitä ei voida määritellä.

Olkoon $t > 0$. Tällöin joukkoa $\pi_{t,k} = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t\}$ sanotaan välin $[0, t]$ *ositukseksi*. Määritellään $|\pi_{t,k}| := \max_{1\le j\le k} |t_j - t_{j-1}|$. Funktion $f : [0, t] \to \mathbb{R}$ sanotaan olevan *rajoitetusti heilahteleva*, jos jokaisella jonolla osituksia $(\pi^{(n)}_{t,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, jolla $\lim_{n\to\infty} |\pi^{(n)}_{t,k_n}| = 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} |f(t_j^{(n)}) - f(t_{j-1}^{(n)})| < \infty.$$

Funktio $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ on puolestaan *äärellisesti heilahteleva*, jos rajoittumat $g|[0, t]$ ovat rajoitetusti heilahtelevia kaikilla $t > 0$. Prosessia sanotaan äärellisesti heilahtelevaksi, jos sen polut ovat äärellisesti heilahtelevia funktiota. Merkitään $\mathbb{F}$-sopivien, jatkuvien äärellisesti heilahtelevien prosessien luokkaa $\mathcal{V}(\mathbb{F})$:llä. Luokka $\mathcal{V}_0(\mathbb{F})$ määritellään kuten martingaalien tapauksessa, ja jätetään kiinnitetty filtraatio $\mathbb{F}$ tässä vaiheessa merkitsemättä.

Äärellisesti heilahteleva funktio g indusoi yksikäsitteisen *merkkisen mitan*[4] avaruudelle $[0, \infty)$, jolloin $\int_0^t f(x)dg(x)$ voidaan määritellä *Lebesgue–Stieltjes*-integraalina kyseisen mitan itseisarvon suhteen integroituville funktioille f (ks. esim. [CW83] s. 4). Siten voisi toivoa, että integraalin $\int_0^t Y_s dX_s$ voisi ehkä määritellä poluittain, mikäli jatkuva lokaali martingaali X olisi äärellisesti heilahteleva. Valitettavasti näin vahvaa olettamusta ei kuitenkaan ole mahdollista tehdä, sillä se trivialisoisi integraattoreiksi sopivien prosessien luokan.

Apulause 1.13. *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Jos $X \in \mathcal{V}_0$, niin $X = 0$.*

Todistus. [Kal02] Proposition 17.2. □

Vaikka jatkuvat lokaalit martingaalit ovat siis melkein aina rajoittamattomasti heilahtelevia, hieman yllättäen jatkuvan lokaalin martingaalin polkujen *neliöity* heilahtelu käyttäytyy huomattavasti säännöllisemmin.

Apulause 1.14. *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Tällöin on olemassa erottamattomuuteen asti yksikäsitteinen kasvava prosessi $[X]$, jolla $[X]_0 = 0$ ja $X^2 - [X] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Erityisesti jos $X \in \mathcal{M}_0^2$, niin $X^2 - [X] \in \mathcal{M}_0^1$.*

Todistus. [RW00b] Theorem IV.30.1, Lemma IV.30.6. □

Prosessia $[X]$ sanotaan lokaalin martingaalin X *neliöheilahteluprosessiksi*. Koska $[X]$ on kasvava, tietenkin $[X] \in \mathcal{V}_0$. Lokaaleille martingaaleille $X, Y \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ määritellään edelleen *yhteisheilahteluprosessi* käyttäen *polarisaatiokaavaa*

$$[X, Y] := \frac{1}{4}([X + Y] - [X - Y]). \tag{1.15}$$

Operaatiolla $[\cdot, \cdot] : \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}} \times \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}} \to \mathcal{V}_0$ on sisätulon kaltaisia ominaisuuksia. Lisäksi se on vaihdannainen prosessien pysäyttämisen kanssa.

[4] Merkkinen mitta μ voidaan määritellä *Jordan–Hahn-hajotelmalla* $\mu = \mu^+ - \mu^-$, missä μ^+ ja μ^- ovat positiivisia mittoja. Mitan μ itseisarvo $|\mu|$ on positiivinen mitta ja määritellään kaavalla $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ (ks. esim. [Rud87] s. 119).

Apulause 1.16. *Olkoot $X, Y \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ ja τ pysäytyshetki. Tällöin $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ on symmetrinen ja bilineaarinen. Lisäksi*

$$[X^\tau, Y] = [X^\tau, Y^\tau] = [X, Y]^\tau. \tag{1.17}$$

Todistus. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin neliöheilahteluprosessin määritelmästä seuraa, että $\alpha^2 X^2 - \alpha^2[X] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ ja $(\alpha X)^2 - [\alpha X] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$, joten myös niiden erotus $M := [\alpha X] - \alpha^2[X] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Mutta toisaalta $M \in \mathcal{V}_0$, koska $\mathcal{V}_0$ on vektoriavaruus, joten apulauseen 1.13 nojalla $M = 0$. Siten $[\alpha X] = \alpha^2[X]$. Symmetrisyys seuraa nyt suoraan polarisaatiokaavasta (1.15).

Koska $(X+Y)^2 - [X+Y] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ ja $(X-Y)^2 - [X-Y] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$, myös niiden erotus $4XY - ([X+Y] - [X-Y]) \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Apulauseen 1.13 nojalla voidaan nyt päätellä, että $[X, Y]$ on erottamattomuuteen asti ainoa prosessi, jolla $XY - [X, Y] \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Tämän karakterisaation (ja edelleen apulauseen 1.13) avulla voidaan edellisen kappaleen kaltaisella argumentilla näyttää bilineaarisuus.

Määritellään apulauseen 1.11 tavoin pysäytyshetket $\tau_n := \{t > 0 : |XY - [X, Y]_t| > n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin pätee yhtälöt

$$(X^\tau Y^\tau - [X, Y]^\tau)^{\tau_n} = X^{\tau \wedge \tau_n} Y^{\tau \wedge \tau_n} - [X, Y]^{\tau \wedge \tau_n} = (X^{\tau_n} Y^{\tau_n} - [X, Y]^{\tau_n})^\tau,$$

ja koska $X^{\tau_n} Y^{\tau_n} - [X, Y]^{\tau_n}$ on martingaali, niin apulauseen 1.9 nojalla se on τ:lla pysäytettynäkin martingaali. Siten $X^\tau Y^\tau - [X, Y]^\tau \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$, eli pysäytysidentiteetin (1.17) oikeanpuoleinen osa on todistettu. Vasen puoli seuraa puolestaan siitä, että voidaan osoittaa (esim. lokalisoimalla ja käyttämällä tulosta [Kal02] Corollary 7.14), että $X^\tau(Y - Y^\tau) \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$, ja edelleen siitä että $X^\tau Y - [X, Y]^\tau = X^\tau Y^\tau + X^\tau(Y - Y^\tau) - [X, Y]^\tau$. □

Neliöheilahteluprosessi $[X]$ määriteltiin epäkonstruktiivisesti apulauseen 1.14 ominaisuuksien perusteella, eikä siten ole välttämättä selvää, mitä tekemistä sillä on varsinaisesti prosessin polkujen neliöidyn heilahtelun kanssa. Nimitys voidaan kuitenkin perustella seuraavan approksimaatiotuloksen perusteella.

Väite 1.18. *Olkoot $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ ja $(\pi^{(n)}_{t,k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sellainen jono välin $[0, t]$ osituksia, että $\lim_{n\to\infty} |\pi^{(n)}_{t,k_n}| = 0$. Tällöin*

$$\sum_{j=1}^{k_n} (X_{t_j^{(n)}} - X_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} [X]_t, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Jos X on lisäksi rajoitettu, niin kyseinen konvergenssi tapahtuu myös L^2:ssa.

Todistus. [CW83] Theorem 4.1. □

1.5 Ennustettavat prosessit

Toisin kuin aiemmin, tässä jaksossa tarkasteltavat prosessit käyttävät parametriavaruutta $(0, \infty)$ ja ne tulkitaan tässä kuvauksina $\Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Merkitään $\mathcal{P}$:llä σ-algebraa, jonka virittävät vasemmalta jatkuvat $\mathbb{F}$-sopivat prosessit avaruudella $\Omega \times (0, \infty)$. Näin määriteltyä σ-algebraa $\mathcal{P}$ sanotaan *ennustettavaksi σ-algebraksi*. Prosessia sanotaan puolestaan *ennustettavaksi*, jos se on mitallinen kuvaus $(\Omega \times (0, \infty), \mathcal{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Olkoot $\tau \leq \tau'$ pysäytyshetkiä ja $\xi \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_\tau$. Merkitään $\mathcal{E}_\mathcal{P}$:llä *yksinkertaisten prosessien* muodostamaa vektoriavaruutta, jonka virittävät muotoa $\xi \mathbf{1}_{(\tau,\tau']} := (\xi \mathbf{1}_{(\tau,\tau']}(t))_{t>0}$ olevat prosessit. Tarkoituksena on osoittaa, että yksinkertaiset prosessit tietyssä mielessä virittävät koko rajoitettujen ennustettavien prosessien luokan $\mathrm{b}\,\mathcal{P}$. Välineenä käytetään *monotonisen luokan lausetta*, mutta ennen kuin sitä voidaan käyttää, tarvitaan hieman aputuloksia.

Apulause 1.19. *Yksinkertainen prosessi $\xi \mathbf{1}_{(\tau,\tau']}$ on ennustettava.*

Todistus. [RW00b] Lemma IV.6.1. □

Apulause 1.20. *Yksinkertaiset prosessit virittävät ennustettavan σ-algebran $\mathcal{P}$.*

Todistus. [RW00b] IV.6.4. □

Apulause 1.21. *Avaruus $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ on suljettu pisteittäisen kertolaskun suhteen, eli se on algebra. Lisäksi avaruuden $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ alkio voidaan aina esittää muodossa*

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{1}_{(\tau_i,\tau_i']}, \tag{1.22}$$

missä $\tau_1 \leq \tau_1' \leq \cdots \leq \tau_n \leq \tau_n' < \infty$ ovat pysäytyshetkiä ja $\xi_i \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\tau_i}$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$.

Todistus. Olkoot $\tau_1 \leq \tau_1'$ ja $\tau_2 \leq \tau_2'$ pysäytyshetkiä sekä $\xi_1 \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\tau_1}$ ja $\xi_2 \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\tau_2}$. Riittää tietenkin osoittaa, että summalla $\xi_1 \mathbf{1}_{(\tau_1,\tau_1']} + \xi_2 \mathbf{1}_{(\tau_2,\tau_2']}$ ja tulolla $\xi_1 \mathbf{1}_{(\tau_1,\tau_1']} \xi_2 \mathbf{1}_{(\tau_2,\tau_2']}$ on kaavan (1.22) mukaiset esitykset. Loppu seuraa induktiolla.

Tarkastellaan ensin summaa. Jotta merkinnät pysyisivät hallinnassa, otetaan käyttöön apumerkinnät $\rho_1 := \tau_1 \wedge \tau_2$, $\rho_2 := (\tau_1 \vee \tau_2) \wedge (\tau_1' \wedge \tau_2')$, $\rho_3 :=$

$(\tau_1 \vee \tau_2) \vee (\tau_1' \wedge \tau_2')$ ja $\rho_4 := \tau_1' \vee \tau_2'$. Selvästi $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_3 \leq \rho_4$. Summalle saadaan nyt kaavan (1.22) mukainen esitys hajotelmana

$$\begin{aligned}
\xi_1 \mathbf{1}_{(\tau_1,\tau_1']} + \xi_2 \mathbf{1}_{(\tau_2,\tau_2']} = & \underbrace{\left(\xi_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq \tau_2\}} + \xi_2 \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq \tau_1\}}\right)}_{\in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\rho_1}} \mathbf{1}_{(\rho_1,\rho_2]} \\
& + \underbrace{(\xi_1 + \xi_2) \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq \tau_1'\} \cup \{\tau_1 \leq \tau_2'\}}}_{\in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\rho_2}} \mathbf{1}_{(\rho_2,\rho_3]} \\
& + \underbrace{\left(\xi_1 \mathbf{1}_{\{\tau_2 \leq \tau_1\}} + \xi_2 \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq \tau_2\}}\right)}_{\in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\rho_3}} \mathbf{1}_{(\rho_3,\rho_4]},
\end{aligned}$$

missä kertoimina olevien satunnaismuuttujien mitallisuudet voidaan tarkistaa kirjanpitoargumentilla.

Tarkastellaan lopuksi yksinkertaisten prosessien tuloa. Se voidaan kirjoittaa muotoon

$$\xi_1 \mathbf{1}_{(\tau_1,\tau_1']} \xi_2 \mathbf{1}_{(\tau_2,\tau_2']} = \xi_1 \xi_2 \mathbf{1}_{(\tau_1 \vee \tau_2, (\tau_1 \vee \tau_2) \vee (\tau_1' \wedge \tau_2')]},$$

missä tietenkin $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\tau_1 \vee \tau_2}$. □

Monotonisen luokan lause muotoillaan usein joukkoperheille, mutta tässä on tarpeen lauseen funktionaalinen versio.

Apulause 1.23 (Monotonisen luokan lause)**.** *Olkoot S epätyhjä joukko ja $\mathcal{H}$ vektoriavaruus, jonka alkioita ovat rajoitetut funktiot $S \to \mathbb{R}$. Oletetaan lisäksi, että*

(M1) $\mathcal{H}$ sisältää kaikki vakiofunktiot,

(M2) $\mathcal{H}$ on suljettu tasaisen suppenemisen suhteen,

(M3) Jos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono tasaisesti rajoitettuja ei-negatiivisia funktioita $\mathcal{H}$:ssa, niin pisteittäisestä suppenemisesta $f_n \uparrow f$ seuraa, että $f \in \mathcal{H}$.

Jos nyt avaruudessa $\mathcal{H}$ on osajoukko $\mathcal{C}$, joka on suljettu kertolaskun suhteen, niin $\mathcal{H}$ sisältää jokaisen $\sigma(\mathcal{C})$-mitallisen funktion $S \to \mathbb{R}$.

Todistus. [DM75] Théorème 21. □

Apulauseista 1.19–1.21 ja monotonisen luokan lauseesta seuraa nyt välittömästi seuraava tulos.

Seuraus 1.24. *Olkoon $\mathcal{H}$ vektoriavaruus, jonka alkiot ovat prosesseja parametriavaruutenaan $(0,\infty)$. Oletetaan lisäksi, että $\mathcal{H}$ toteuttaa ehdot (M1)–(M3). Tällöin jos $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{H}$, niin $\mathcal{H}$ sisältää jokaisen rajoitetun ennustettavan prosessin.*

1.6 Stokastisen integraalin L^2-määritelmä

Kuten aiemmin jo mainittiin, tavoitteena on määritellä stokastinen integraali $\int_0^t Y_s dX_s$, kun Y on riittävän "säännöllinen" prosessi, ja $X \in \mathcal{M}_{0,\text{loc}}$. Riittävän "säännöllisinä" tullaan lopulta pitämään *lokaalisti* rajoitettuja ennustettavia prosesseja. Strategiana on kuitenkin ensin olettaa että Y on rajoitettu ja ennustettava ja myöhemmin laajentaa integraalin määrittelyjoukkoa lokalisaation avulla. Seurauksena 1.12 havaittiin, että $\mathcal{M}_{0,\text{loc}} = \mathcal{M}^p_{0,\text{loc}}$ kaikilla $p \in [1, \infty)$. Siten lokalisoimalla voidaan tässä vaiheessa myös olettaa, että $X \in \mathcal{M}^2_0$. Kuten jatkossa nähdään, valintaan $p = 2$ on erityinen syy. Laajennus yleisemmille integraattoreille suoritetaan seuraavassa jaksossa.

Stokastinen integraali määritellään ensin luokan $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ yksinkertaisille ennustettaville prosesseille. Olkoon siis $Y \in \mathcal{E}_\mathcal{P}$, eli apulauseen 1.21 nojalla se voidaan esittää muodossa

$$Y = \sum_{i=1}^n \xi_{i-1} \mathbf{1}_{(\tau_{i-1}, \tau_i]},$$

missä $\tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_n < \infty$ ovat pysäytyshetkiä ja $\xi_{i-1} \in \mathrm{b}\,\mathcal{F}_{\tau_{i-1}}$ jokaisella $i = 1, \ldots, n$. Prosessin Y stokastinen integraali martingaalin $X \in \mathcal{M}^2_0$ suhteen määritellään nyt prosessina

$$I_X(Y)_t := \sum_{i=1}^n \xi_{i-1}(X_{\tau_i \wedge t} - X_{\tau_{i-1} \wedge t}) \quad \text{kaikilla } t \ge 0.$$

Prosessi $I_X(Y) := (I_X(Y)_t)_{t \ge 0}$ on selvästi jatkuva. Jatkon kannalta on vieläkin tärkeämpää, että $I_X(Y)$ on martingaali.

Apulause 1.25. *Olkoot X, Y kuten edellä. Tällöin $I_X(Y) \in \mathcal{M}^2_0$, ja siten martingaalikonvergenssilauseen 1.7 nojalla $I_X(Y)_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ on olemassa. Lisäksi pätee yhtälö*

$$\mathbf{E}[I_X(Y)^2_\infty] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n \xi^2_{i-1}(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right]. \tag{1.26}$$

Todistus. [RW00b] Lemma IV.25.3. □

Seuraavaksi manipuloidaan yhtälön (1.26) oikeaa puolta niin, että sinne saadaan näkyviin X:n neliöheilahteluprosessi $[X]$. Välineenä käytetään apulausetta 1.14.

Apulause 1.27 (Itô-isometria)**.** *Olkoot X, Y kuten edellä. Tällöin*

$$\mathbf{E}[I_X(Y)^2_\infty] = \mathbf{E}\left[\int_0^\infty Y^2_t d[X]_t\right]. \tag{1.28}$$

Koska $[X] \in \mathcal{V}_0$ ja integrandi Y on paloittain jatkuva, voidaan yhtälön (1.28) oikean puolen integraali tulkita poluittain *Riemann–Stieltjes*-mielessä.

Todistus. Todistus perustuu yhtälön (1.26) oikean puolen manipuloimiseen ehdollisen odotusarvon avulla. Aluksi havaitaan, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}^2 (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\xi_{i-1}^2 (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\xi_{i-1}^2 (X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\xi_{i-1}^2 \mathbf{E}\left[(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right]\right].
\end{aligned}$$

Toisaalta apulauseen 1.14 nojalla $X^2 - [X] \in \mathcal{M}_0^1$, joten käyttämällä Doobin pysäytyslausetta 1.10 ehdollinen odotusarvo voidaan muokata muotoon

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] &= \mathbf{E}\left[X_{\tau_i}^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] - \mathbf{E}\left[2X_{\tau_i - 1} X_{\tau_i} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] + \mathbf{E}\left[X_{\tau_i - 1}^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[X_{\tau_i}^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] - \mathbf{E}\left[X_{\tau_{i-1}}^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[[X]_{\tau_i} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] - \mathbf{E}\left[[X]_{\tau_{i-1}} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[[X]_{\tau_i} - [X]_{\tau_{i-1}} | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right].
\end{aligned}$$

Sijoittamalla tulos paikalleen ja hankkiutumalla ehdollisesta odotusarvosta eroon saadaan lopulta haluttu muoto

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\xi_{i-1}^2 \mathbf{E}\left[(X_{\tau_i} - X_{\tau_{i-1}})^2 | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right]\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\xi_{i-1}^2 ([X]_{\tau_i} - [X]_{\tau_{i-1}}) | \mathcal{F}_{\tau_{i-1}}\right]\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_{i-1}^2 ([X]_{\tau_i} - [X]_{\tau_{i-1}})\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\int_0^\infty Y_t^2 d[X]_t\right].
\end{aligned}$$

□

Martingaalikonvergenssilauseen 1.7 nojalla mielivaltaisella martingaalilla $M \in \mathcal{M}_0^2$ on päätearvo $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$, mutta toisaalta martingaali saadaan takaisin ottamalla odotusarvoja päätearvosta, eli $M_t = \mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$ kaikilla $t \geq 0$.[5]

[5] Jokaisella ajanhetkellä melkein varmasti määritellystä odotusarvomartingaalista $\mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_\cdot]$ voidaan valita jatkuva modifikaatio, joka on tietenkin myös M:n modifikaatio. Apulauseen 1.2 nojalla M ja $\mathbf{E}[M_\infty | \mathcal{F}_\cdot]$ ovat siis erottamattomat.

Apulause 1.29. *Joukko $\{M_\infty : M \in \mathcal{M}_0^2\}$ on $L^2(\mathcal{F}_\infty)$:n suljettu lineaarinen aliavaruus.*

Todistus. Aliavaruusominaisuus seuraa suoraan siitä, että $\mathcal{M}_0^2$ on vektoriavaruus. Olkoon $(M_\infty^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sellainen joukon $\{M_\infty : M \in \mathcal{M}_0^2\}$ alkioista koostuva jono, että $M_\infty^{(n)} \xrightarrow{L^2} M_\infty$ jollakin $M_\infty \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$. Sitä tietenkin vastaa jono $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avaruudessa $\mathcal{M}_0^2$. Tavoitteena on nyt osoittaa, että päätearvoa $M_\infty^{(n)}$ vastaava martingaali $M \in \mathcal{M}_0^2$. Doobin normiepäyhtälön (ks. esim. [Kal02] Proposition 7.16.) nojalla

$$\mathbf{E}\left[\left(\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(n)} - M_t\right|\right)^2\right] \leq 4\,\mathbf{E}\left[\left(M_\infty^{(n)} - M_\infty\right)^2\right] \to 0.$$

Siten on olemassa indeksijono $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, jolla

$$\sup_{t\geq 0}\left|M_t^{(n_k)} - M_t\right| \to 0 \quad \text{melkein varmasti, kun } k \to \infty.$$

Selvästi $M_0 = 0$. Koska sillä mitä nollamittaisessa joukossa mahdollisesti tapahtuu, ei ole merkitystä, ja koska tasaisesti suppenevan jatkuvien funktioiden jonon raja on jatkuva, pätee lisäksi $M \in \mathcal{M}_0^2$. □

Apulause 1.29 antaa aiheen lainata *Hilbert-avaruuden* $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ normia martingaaliavaruuteen $\mathcal{M}_0^2$ määrittelemällä

$$||M||_{\mathcal{M}^2}^2 := ||M_\infty||_{L^p(\mathcal{F}_\infty)}^2 = \mathbf{E}[M_\infty^2].$$

Tällöin nimittäin apulauseen 1.29 nojalla $(\mathcal{M}_0^2, ||\cdot||_{\mathcal{M}^2})$ on *Banach-avaruus*. Voidaan siitä tietenkin tehdä myös Hilbert-avaruus, mutta sisätulolle ei tässä yhteydessä ole juurikaan tarvetta.

Olkoon $X \in \mathcal{M}_0^2$, kuten edellä. Määritellään seuraavaksi integrandeina toimivien prosessien avaruuteen normi kaavalla

$$||Y||_{L^2(\mathbf{P}\times d[X])}^2 := \mathbf{E}\left[\int_0^\infty Y_t^2 d[X]_t\right],$$

ja asetetaan itse avaruudeksi

$$L_{\mathcal{P}}^2(\mathbf{P}\times d[X]) := \left\{Y : Y \text{ on ennustettava ja } ||Y||_{L^2(\mathbf{P}\times d[X])} < \infty\right\}.$$

Yhtälön (1.28) nojalla $\mathcal{E}_{\mathcal{P}} \subset L_{\mathcal{P}}^2(\mathbf{P}\times d[X])$. Toisaalta, jos luokka $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ *suljetaan* normin $||\cdot||_{L^2(\mathbf{P}\times d[X])}^2$ suhteen, saatu sulkeuma $\overline{\mathcal{E}_{\mathcal{P}}}$ toteuttaa monotonisen luokan lauseen 1.23 ehdot (M1)–(M3), joten seurauksen 1.24 mukaan $\overline{\mathcal{E}_\mathcal{P}}$ sisältää jokaisen rajoitetun ennustettavan prosessin. Siten $\overline{\mathcal{E}_\mathcal{P}} = L^2_\mathcal{P}(\mathbf{P} \times d[X])$, eli $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ on *tiheä* $L^2_\mathcal{P}(\mathbf{P} \times d[X])$:ssä.

Kun integraalin määrittelyjoukkoa laajennetaan $\mathcal{E}_\mathcal{P}$:n tiheyden avulla, on keskeistä huomata, että yhtälö (1.28) voidaan nyt ilmaista muodossa

$$||I_X(Y)||_{\mathcal{M}^2} = ||Y||_{L^2(\mathbf{P}\times d[X])},$$

mikä tarkoittaa sitä, että lineaarikuvaus I_X on *isometria* $\mathcal{E}_\mathcal{P} \to \mathcal{M}^2_0$. Seuraava apulause (tai oikeastaan sen todistus) kertoo, miten I_X voidaan jatkaa isometriaksi koko avaruudelle $L^2(\mathbf{P} \times d[X])$.

Apulause 1.30. *Olkoot $(E_1, ||\cdot||_{E_1})$ normiavaruus ja $(E_2, ||\cdot||_{E_2})$ Banach-avaruus. Tällöin jos $I : D \to E_2$ on lineaarinen isometria ja $D \subset E_1$ on tiheä, on I:lle olemassa yksikäsitteinen lineaarinen, isometrinen jatke $\tilde{I} : E_1 \to E_2$.*

Todistus. Olkoon $x \in E_1$. Tällöin on olemassa sellainen jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, että $x_n \in D$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x_n \to x$. Tällöin isometrisyyden nojalla $(I(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ on *Cauchy-jono* avaruudessa E_2. Koska E_2 on täydellinen, on olemassa $y \in E_2$, jolla $I(x_n) \to y$. Asetetaan siis $\tilde{I}(x) := y$. Tarkistetaan vielä, että $\tilde{I}$:n määritelmä ei riipu approksimoivasta jonosta. Olkoon $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toinen D:n jono, jolla $x'_n \to x$, ja merkitään $y' := \lim_{n\to\infty} I(x'_n)$. Tällöin saadaan arvio

$$\begin{aligned} ||y - y'||_{E_2} &\le ||y - I(x_n)||_{E_2} + ||\underbrace{I(x_n) - I(x'_n)}_{=I(x_n - x'_n)}||_{E_2} + ||I(x'_n) - y'||_{E_2} \\ &= ||y - I(x_n)||_{E_2} + ||x_n - x'_n||_{E_1} + ||I(x'_n) - y'||_{E_2} \to 0. \end{aligned}$$

Jatkeen $\tilde{I}$ lineaarisuus seuraa raja-arvojen lineaarisuudesta ja isometrisyys ja yksikäsitteisyys suoraan normien jatkuvuudesta. □

Isometrian I_X lineaarista jatketta $\tilde{I}_X : L^2(\mathbf{P} \times d[X]) \to \mathcal{M}^2_0$ sanotaan *stokastiseksi (Itô-)integraaliksi* prosessin X suhteen. Jos $Y \in L^2(\mathbf{P} \times d[X])$, käytetään merkintöjä

$$\tilde{I}_X(Y)_t =: \int_0^t Y_s dX_s :=: (Y \cdot X)_t \quad \text{kaikilla } t \ge 0.$$

Stokastisella integraalilla on lineaarisuuden ohella mm. seuraavat hyödylliset ominaisuudet.

Apulause 1.31. *Olkoot $X, X' \in \mathcal{M}^2_0$, $Y \in \mathrm{b}\,\mathcal{P}$ ja τ pysäytyshetki. Tällöin pätee:*

(I1) $(Y \cdot X)^\tau = Y\mathbf{1}_{(0,\tau]} \cdot X = Y\mathbf{1}_{(0,\tau]} \cdot X^\tau = Y \cdot X^\tau$,

(I2) $[Y \cdot X] = \int_0^\cdot Y_t d[X]_t$,

(I3) $[Y \cdot X', X] = Y \cdot [X', X] := \int_0^\cdot Y_t d[X', X]_t$.

Todistus. (I1), (I2): [RW00b] Theorem IV.27.6. (I3): Theorem IV.28.1. □

1.7 Integraalin laajentaminen ja semimartingaalit

Edellisessä jaksossa rajoitetuille ennustettaville prosesseille jatkuvan L^2-martingaalin suhteen konstruoitu stokastinen integraali voidaan nyt laajentaa lokalisaation avulla integraaliksi lokaalisti rajoitetuille ennustettaville prosesseille jatkuvan lokaalin martingaalin suhteen.

Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Tällöin apulauseen 1.14 mukaan neliöheilahteluprosessi $[X]$ on olemassa. Olkoon Y puolestaan ennustettava prosessi, jolle pätee melkein varmasti, että

$$\int_0^t Y_s^2 d[X]_s < \infty \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{1.32}$$

Erityisesti kaikki lokaalisti rajoitetut prosessit toteuttavat ehdon (1.32). Apulauseen 1.11 nojalla pysäytyshetket $\tau_n^X := \inf\{t > 0 : X_t > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, lokalisoivat X:n luokkaan $\mathcal{M}_0^2$. Asetetaan integrandille lokalisaatio pysäytyshetkillä

$$\tau_n^Y := \inf\left\{t > 0 : \int_0^t Y_s^2 d[X]_s > n\right\} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Nyt jos lokalisoivat jonot "yhdistetään" kaavalla $\tau_n := \tau_n^X \wedge \tau_n^Y$, niin pätee luonnollisesti, että $X^{\tau_n} \in \mathcal{M}_0^2$ ja $Y^{\tau_n} \in L^2_{\mathcal{P}}(\mathbf{P} \times d[X^{\tau_n}])$. Tällöin stokastinen integraali $Y^{\tau_n} \cdot X^{\tau_n}$ on olemassa ja kuuluu luokkaan $\mathcal{M}_0^2$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Siten voidaan määritellä $Y \cdot X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}^2 = \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$ kaavalla

$$(Y \cdot X)^{\tau_n} := Y^{\tau_n} \cdot X^{\tau_n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Integraali $Y \cdot X$ on nyt hyvinmääritelty, sillä $\tau_n \uparrow \infty$ ja apulauseen 1.31 kohdan (I1) nojalla

$$(Y^{\tau_n} \cdot X^{\tau_n})^{\tau_{n-1}} = Y^{\tau_n \wedge \tau_{n-1}} \cdot X^{\tau_n \wedge \tau_{n-1}} = Y^{\tau_{n-1}} \cdot X^{\tau_{n-1}}.$$

Prosessia X sanotaan jatkuvaksi *semimartingaaliksi* filtraation $\mathbb{F}$ suhteen, jos sillä on *kanoninen hajotelma*

$$X = X_0 + M + A, \tag{1.33}$$

missä $M \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{F})$ ja $A \in \mathcal{V}_0(\mathbb{F})$. Merkitään $\mathcal{S}(\mathbb{F})$:llä jatkuvien $\mathbb{F}$-semimartingaalien luokkaa, tai kun filtraatio $\mathbb{F}$ on kiinnitetty lyhyemmin $\mathcal{S}$:llä. Apulauseen 1.13 avulla havaitaan helposti, että hajotelma (1.33) on yksikäsitteinen erottamattomuuteen asti. Nimittäin jos X:llä on toinen kanoninen hajotelma $X = X_0' + M' + A'$, niin ensinnäkin $X_0 = X_0'$ ja siten $M - M' = A - A'$. Mutta $A - A' \in \mathcal{V}_0$, joten $M - M' = 0$, ja siten myös $A = A'$. Jos nyt Y on lokaalisti rajoitettu ennustettava prosessi, niin stokastinen integraali jatkuvan semimartingaalin X suhteen määritellään kaavalla

$$(Y \cdot X)_t :=: \int_0^t Y_s dX_s := \int_0^t Y_s dM_s + \int_0^t Y_s dA_s, \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{1.34}$$

Integraali äärellisesti heilahtelevan prosessin A suhteen tulkitaan Lebesgue–Stieltjes-mielessä. Näin määriteltynä integraali $Y \cdot X \in \mathcal{S}$ kanonisena hajotelmanaan yhtälön (1.34) oikea puoli.

Semimartingaalin määritelmä kanonisen hajotelman (1.33) avulla voi tuntua ehkä hieman huonosti motivoidulta tai keinotekoiselta, mutta on osoittautunut, että semimartingaalien luokka on tietyssä mielessä luonnollinen tai maksimaalinen integraattorien joukko stokastiselle integraalille. Nimittäin jos $Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}$, niin X on semimartingaali täsmälleen silloin, kun kuvaus $Y \mapsto (Y \cdot X)_\infty$ on jatkuva, kun maaliavaruus on varustettu stokastisten konvergenssin topologialla (ks. esim. [DM80] Théorème 80). Kyseinen heikohko jatkuvuusoletus on varsin luonteva minimivaatimus stokastiselta integraalilta.

1.8 Osittaisintegrointi ja Itôn kaava

Stokastinen integraali on nyt määritelty ensin jatkuvan neliöintegroituvan martingaalin suhteen käyttämällä L^2-isometriaa ja myöhemmin laajennettu lokaalisaation ja äärellisesti heilahtelevan osan avulla integraaliksi jatkuvan semimartingaalin suhteen. Määritelmät eivät kuitenkaan tarjoa minkäänlaisia keinoja integraalien *laskemiseen*; integrandin approksimoiminen yksinkertaisilla prosesseilla onnistunee lähinnä täysin triviaaleissa tapauksissa. Stokastisen integraalin käyttökelpoisuus piileekin siinä, että se säilyttää integraattorin martingaaliominaisuudet, mutta toisaalta myös siinä, miten sitä voidaan manipuloida. Stokastisten integraalien käsittelyyn on tarjolla kaksi keskeistä työkalua: *osittaisintegrointikaava* ja *Itôn kaava*.

Kun $X = X_0 + M^X + A^X$ ja $Y = Y_0 + M^Y + A^Y$ ovat jatkuvia semimartingaaleja, X:n ja Y:n yhteisheilahteluprosessi määritellään kaavalla $[X, Y] = [M^X, M^Y]$. Osittaisintegrointikaava kytkee yhteen kahden semimartingaalin tulon, yhteisheilahteluprosessin ja stokastiset integraalit.

Apulause 1.35 (Osittaisintegrointi)**.** *Olkoot $X, Y \in \mathcal{S}$. Tällöin $XY \in \mathcal{S}$, ja on voimassa yhtälö*

$$XY = X_0 Y_0 + X \cdot Y + Y \cdot X + [X, Y]. \tag{1.36}$$

Todistus. [RW00b] Theorem IV.32.4. □

Koska X ja Y ovat jatkuvina ennustettavia ja kanonisen hajotelman perusteella lokaalisti rajoitettuja, ovat kaavan (1.36) integraalit hyvinmääriteltyjä.

Itôn kaava puolestaan kertoo, miten riittävän sileä funktiomuunnos jatkuvasta semimartingaalista voidaan ilmaista stokastisten integraalien avulla. Kirjallisuudessa Itôn kaavasta on esitetty usein sovelluskohteesta riippuen useita hieman erilaisia muotoja. Myöhempää tarvetta silmälläpitäen tässä esitetään astetta yleistetympi versio, jossa muuntava funktio saa riippua aikaparametrista derivoituvasti.

Apulause 1.37 (Itôn kaava)**.** *Olkoot $X \in \mathcal{S}$ ja $f \in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tällöin $f(\cdot, X_\cdot) \in \mathcal{S}$, ja kaikilla $t \geq 0$ on voimassa yhtälö*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) = &\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_1} f(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_2} f(s, X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(s, X_s) d[X]_s. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Todistus. Kaava voidaan todistaa 2. kertaluvun *Taylor-kehitelmän* avulla. Kirjallisuudessa Itôn kaavan todistus esitetään lähes yksinomaan rajoittuen yksinkertaisempaan tilanteeseen, jossa $f \in C^2(\mathbb{R})$ (esim. [RW00b] Theorem IV.32.8.). Yleisempi muoto (1.38) voidaan kuitenkin perustella samanlaisella argumentilla. □

Itôn kaava on reaalianalyysin tavallisen muuttujanvaihtokaavan yleistys stokastiseen analyysiin. Poikkeuksena differentioituvien tai rajoitetusti heilahtelevien funktioiden analyysiin nähden siinä esiintyy kuitenkin semimartingaalin X rajoittamattomasta heilahtelusta johtuva ylimääräinen toisen kertaluvun termi $\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(s, X_s) d[X]_s$, jota kutsutaan usein *Itôn korjaustermiksi*.

1.9 Brownin liike ja martingaalien esityslause

Tähän mennessä jatkuvia (lokaaleja) martingaaleja on käsitelty antamatta ainoatakaan esimerkkiä sellaisesta. Jos triviaalit tapaukset, kuten identtisesti vakioarvon saavat prosessit suljetaan pois, takaa apulause 1.13 sen, että prosessin poluilla on väistämättä varsin monimutkainen rakenne. Tässä jaksossa annetaan esimerkki jatkuvasta martingaalista, joka lienee (epätriviaaleista) yksinkertaisin, mutta on ainakin varmuudella tunnetuin.

Jatkuva prosessi $W = (W_t)_{t\geq 0}$ on *Brownin liike* (tai *Wiener-prosessi*), jos $W_t = 0$, ja jos kaikilla $t, h \geq 0$ prosessin *lisäys* $W_{t+h} - W_t$ on *stationaarinen* noudattaen normaalijakaumaa $\mathrm{N}(0, h)$, ja *riippumaton* σ-algebrasta $\mathcal{F}_t^W$. Prosessin W luonnollista filtraatiota $\mathbb{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ kutsutaan usein *Brownin filtraatioksi*. Brownin liike on tietenkin $\mathbb{F}^W$-martingaali, sillä kaikilla $t, h \geq 0$ lisäysten riippumattomuuden ja jakauman nojalla ehdollinen odotusarvo

$$\mathbf{E}[W_{t+h}|\mathcal{F}_t^W] = \underbrace{\mathbf{E}[W_{t+h} - W_t|\mathcal{F}_t^W]}_{=\mathbf{E}[W_{t+h}-W_t]=0} + \mathbf{E}[W_t|\mathcal{F}_t^W] = W_t.$$

Brownin liikkeen neliöheilahteluprosessi $[W]$ on niin ikään suoraviivaisesti löydettävissä määritelmien avulla. Nimittäin laskemalla odotusarvon

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[W_{t+h}^2|\mathcal{F}_t^W] &= \mathbf{E}[(W_{t+h} - W_t)^2|\mathcal{F}_t^W] - 2W_t\mathbf{E}[W_{t+h} - W_t|\mathcal{F}_t^W] + \mathbf{E}[W_t^2|\mathcal{F}_t^W] \\
&= \mathbf{E}[(W_{t+h} - W_t)^2] + 2W_t \cdot 0 + W_t^2 \\
&= W_t^2 + h
\end{aligned}$$

havaitaan, että W^2 voidaan *kompensoida* martingaaliksi vähentämällä siitä deterministisen prosessin $[W]_t \equiv t$. Hieman yllättäen Brownin liike on itse asiassa alkuarvoa vaille *ainoa* jatkuva lokaali martingaali, jonka neliöheilahteluprosessi on t. Nimittäin pätee:

Apulause 1.39 (Lévyn karakterisaatiolause)**.** *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$. Tällöin X on Brownin liike, jos ja vain jos $X_t^2 - t \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}$.*

Todistus. [RW00b] Theorem IV.33.1. □

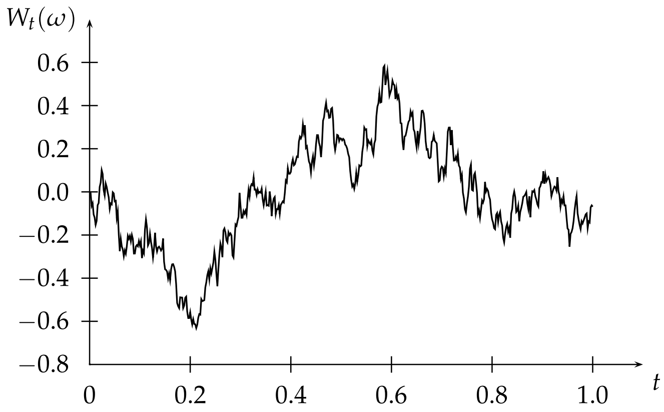
Prosessin sanotaan olevan *gaussinen*, jos kaikki sen äärellisulotteiset reunajakaumat ovat multinormaalisia. Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$. Tällöin Brownin liikkeen arvoista koottu vektori $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ voidaan esittää lineaarimuunnoksena

$$\begin{bmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} \\ \vdots \\ W_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{t_1} \\ W_{t_2} - W_{t_1} \\ \vdots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \end{bmatrix},$$

missä $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ noudattaa lisäysten riippumattomuuden ja normaalisuuden nojalla multinormaalijakaumaa. Koska multinormaalisuus tunnetusti säilyy lineaarimuunnoksessa, $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ on niin ikään multinormaalinen, joten Brownin liike on gaussinen prosessi.

Kun Brownin liike määritellään aksiomaattisesti, mikään ei tietenkään takaa, että se ylipäätään on olemassa. Itse asiassa on varsin epätriviaalia todistaa Brownin liikkeen olemassaolo, ja siksi tässä tyydytäänkin tilan puutteen vuoksi ainoastaan mainitsemaan kaksi tunnetuinta tekniikkaa, joilla olemassaolo voidaan todistaa. Yksinkertaisin tapa lienee Brownin liikkeen esittäminen stokastisena *Fourier-sarjana* avaruudessa $L^2([0,1])$. Näin konstruoitu prosessi elää tietenkin ainoastaan yksikkövälillä, mutta Brownin liikkeen lisäysten riippumattomuuden ja stationaarisuuden nojalla laajennus välille $[0,\infty)$ voidaan saada aikaan "liimaamalla" yksikkövälin prosesseja yhteen (ks. [KS91] s. 56–59). Monimutkaisempi tapa on käyttää kuuluisaa *Daniell–Kolmogorov-olemassaololausetta* (esim. [RW00a] Theorem II.31.1), jonka nojalla *kanonisella avaruudella* $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,\infty)})$ on olemassa mitta, joka vastaa Brownin liikkeen jakaumaa. Tällöin identiteettikuvaus $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{[0,\infty)}}$ vastaa väitteen 1.1 nojalla prosessia parametriavaruudella $[0,\infty)$, mutta ongelmana on se, että prosessi on määritelty ainoastaan jakauman tasolla, joten prosessin polkujen ominaisuuksista, etenkin jatkuvuudesta, ei *a priori* ole mitään tietoa. Itse asiassa jatkuvien funktioiden joukko $C([0,\infty))$ ei edes kuulu σ-algebraan $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,\infty)}$, ja vieläpä pätee, että jos $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,\infty)}$ ja $A \subset C([0,\infty))$, niin $A = \emptyset$, eli polut eivät voi olla jatkuvia edes melkein varmasti. On kuitenkin mahdollista viedä konstruktio päätökseen osoittamalla *jatkuvan modifikaation* olemassaolon käyttäen *Kolmogorov–Tšentsov-jatkuvuuslausetta* (esim. [RW00a] Theorem I.25.2.).

Brownin liikkeellä on lukuisia syvällisiä ja paikoitellen hämmästyttäviäkin ominaisuuksia, eikä niistä ole mielekästä esittää tässä puutteellistakaan listaa (kiinnostuneelle lukijalle voi suositella erityisesti kirjan [RW00a] ensimmäistä lukua). Jatkon kannalta on kuitenkin tarpeellista nostaa esiin vielä eräs Brownin filtraation ominaisuus. Nimittäin jos X on lokaali martingaali



Kuva. *Brownin liikkeen W simuloitu polku välillä* $[0, 1]$.

Brownin filtraation[6] suhteen, niin se voidaan esittää stokastisena integraalina Brownin liikkeen suhteen, ja kyseinen esitys on käytännössä yksikäsitteinen.

Apulause 1.40 (Martingaalien esityslause)**.** *Olkoon* $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{F}^W)$. *Tällöin on olemassa* $\mathbf{P} \times dt$*-nollamittaisia joukkoja vaille yksikäsitteinen ennustettava prosessi* H*, jolla* $\mathbf{P}\left(\int_0^t H_s^2 ds < \infty \text{ kaikilla } t \geq 0\right) = 1$ *ja*

$$X_t = \int_0^t H_s dW_s \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{1.41}$$

Todistus. [RW00b] Theorem IV.36.5. □

Ehkäpä vielä itse esitystä (1.41) tärkeampi on huomio, joka seuraa välittömästi stokastisen integraalin määritelmästä.

Seuraus 1.42. *Jokaiselle lokaalille* $\mathbb{F}^W$*-martingaalille on olemassa jatkuva modifikaatio.*

[6]Brownin filtraatio $\mathbb{F}^W$ ei välttämättä toteuta tavanomaisia ehtoja, joten sitä joudutaan laajentamaan. Laajennus ei kuitenkaan ”vahingoita” Brownin liikkeen ominaisuuksia (ks. esim. [RW00a] Theorem II.68.2.), joten tästä eteenpäin oletetaan *implisiittisesti*, että $\mathbb{F}^W$ on laajennettu täyttämään tavanomaiset ehdot.

2 | Filtraation alkulaajennus

2.1 Määritelmä ja motivointi

Ensimmäisessä luvussa prosesseja ja etenkin niiden martingaaliominaisuuksia tarkasteltiin suhteessa kiinnitettyyn filtraatioon $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Kuitenkin jos $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$ on filtraatiota $\mathbb{F}$ aidosti laajempi filtraatio (eli $\mathcal{F}_t \subset \tilde{\mathcal{F}}_t$ kaikilla $t \geq 0$, mutta $\mathcal{F} \neq \tilde{\mathcal{F}}_t$ jollakin $t \geq 0$), ei esimerkiksi $\mathbb{F}$-martingaali tyypillisesti olekaan martingaali filtraation $\tilde{\mathbb{F}}$ suhteen. Itse asiassa on intuitiivisesti selvää, että siirryttäessä laajempaan filtraatioon prosessin martingaaliominaisuus menetetään aina, kun laajemmassa filtraatiossa aiempaa enemmän kyseisen prosessin kannalta relevanttia ”tietoa”, jonka avulla ennusteita voidaan tarkentaa. Koska martingaalit säilyvät martingaaleina siis erittäin harvoin, onkin filtraatioiden laajennuksia koskevassa tutkimuksessa keskitty etsimään ehtoja, joiden vallitessa $\mathbb{F}$-semimartingaalit (ja erityisesti siis myös *aidot* $\mathbb{F}$-martingaalit) *säilyvät* $\tilde{\mathbb{F}}$*-semimartingaaleina*.[1] Jos semimartingaalien säilymisominaisuus on voimassa, on lisäksi keskeistä tietää, mikä on semimartingaalin kanoninen hajotelma laajemman filtraation $\tilde{\mathbb{F}}$ suhteen.

Olkoon nyt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ sellainen täydellinen filtteröity tn-avaruus, että $\mathbb{F}$ toteuttaa tavanomaiset ehdot. Jos L on satunnaismuuttuja tällä avaruudella, niin $\mathbb{F}$:n *L-alkulaajennus* (tai kun L on kiinnitetty ja ei ole sekaannuksen vaaraa, lyhyemmin *alkulaajennus*) on filtraatio $\mathbb{F}^{\sigma(L)} = (\mathcal{F}_t^{\sigma(L)})_{t\geq 0}$, joka määritellään kaavalla

$$\mathcal{F}_t^{\sigma(L)} := \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(L)) \quad \text{kaikilla } t \geq 0. \tag{2.1}$$

Alkulaajennus $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$ on siis pienin tavanomaiset ehdot täyttävä filtraatio, jonka suhteen L on mitallinen heti ajanhetkestä $t = 0$ alkaen. Tulkinnallisesti

[1] Tätä ominaisuutta kutsutaan kirjallisuudessa usein *hypoteesiksi (H')*. Vahvempaa aidon martingaaliominaisuuden säilymistä sanotaan puolestaan *hypoteesiksi (H)* (ks. esim. [Jeu80]).

ajatellen tarkkailijalla, jolla on "käytössään" alkulaajennettu filtraatio, on heti alusta alkaen tiedossa satunnaismuuttujan L toteutunut arvo, toisin kuin alkuperäistä filtraatiota $\mathbb{F}$ seuraavalla tarkkailijalla, jolle L:n ei välttämättä tarvitse paljastua koskaan.

Vaikka filtraation alkulaajennus ja etenkin sen seuraukset ovat teoreettiselta kannalta jo sinänsä kiinnostavia, teorialla on myös merkittäviä sovelluksia. Eräs varhaisimmista motivoinneista filtraation alkulaajennukselle on K. Itôn esittämä kysymys, miten stokastisen integraalin $\int_0^t W_1 dW_s$ voisi tulkita tavanomaisen Itô-integroinnin keinoin (ks. esim. [MY06] s. 11). Kyseistä integraalia ei voida määritellä edellisessä luvussa esitettyjen menetelmien perusteella, sillä integrandi W_1 ei tietenkään ole ennustettava, eikä edes sopiva Brownin filtraation suhteen. Kuitenkin jos filtraatiota laajennetaan satunnaismuuttujalla W_1 ja voidaan osoittaa — ja seuraavissa jaksoissa näin juuri tehdäänkin —, että Brownin liike W on semimartingaali kyseisen W_1-alkulaajennuksen suhteen, voidaan ongelma palauttaa Itô-integroinnin piiriin yksinkertaisesti vain siirtymällä laajennettuun filtraatioon $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_1)}$.

Lähempänä käytäntöä on matemaattisessa rahoitusteoriassa esitetty alkulaajennuksen sovellus sisäpiiritiedon mallinnukseen rahoitusmarkkinoilla. Olkoon $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ prosessi, joka kuvaa jonkin riskillisen sijoituskohteen hintaa, kun sillä käydään kauppaa aikavälillä $[0, T]$. Tyypillisesti S:n oletetaan olevan martingaali luonnollisen filtraationsa suhteen (vähintäänkin jossain luonnollisen tn-mitan kanssa *ekvivalentissa* tn-mitassa). Yksinkertaisessa tapauksessa tavallisella sijoittajalla tiedossa ainoastaan, miten sijoituskohteen hinta on kehittynyt aikaisemmin, eli hän seuraa S:n luonnollista filtraatiota, kun taas sisäpiiritietoa omaavalla sijoittajalla on puolestaan tiedossa lisäksi kohteen (mahdollisesti epätarkka) hinta sijoitusperiodin lopussa, eli hän seuraa S:n luonnollisen filtraation L-alkulaajennusta, kun $L = S_T$ tai $L = S_T + \varepsilon$, missä ε on riippumaton häiriötermi. Tällöin filtraation laajennuksen teorian avulla on esitetty joitakin laskelmia sisäpiiritiedon vaikutuksesta sijoittajien hyötytasoihin. Filtraation laajennuksen sovelluksia rahoitukseen on esitelty yksityiskohtaisemmin esimerkiksi artikkelissa [AIS98].

Filtraatioita voidaan toki laajentaa muillakin tavoilla kuin alkulaajennuksella. Alkulaajennuksen ohella on tutkittu paljon myös *progressiivista laajennusta*, jossa filtraatiota laajennetaan "vähitellen" niin, että annetusta satunnaishetkestä tulee pysäytyshetki laajennetussa filtraatiossa (ks. esim. [Jeu80] Chapitre IV). Lisäksi joitakin tuloksia on esitetty tilanteessa, jossa filtraatiota laajennetaan toisella rinnakkaisella filtraatiolla (ks. esim. [ADI04]).

2.2 Semimartingaalien säilyvyys ja kanoniset hajotelmat

Tarkoituksena on nyt osoittaa sopivien ehtojen vallitessa että jatkuvalle lokaalille $\mathbb{F}$-martingaalille voidaan antaa kanoninen hajotelma L-alkulaajennetun filtraation $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$ suhteen. Koska äärellisesti heilahtelevien prosessien luokka on suljettu yhteenlaskun suhteen, seuraa tästä luonnollisesti sitten, että $\mathbb{F}$-semimartingaali, jonka lokaali martingaaliosa täyttää kyseiset ehdot, säilyy $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$-semimartingaalina alkulaajennuksessa. Taustalla olevalta filtteröidyltä tn-avaruudelta oletetaan seuraavaa:

Oletus 2.2. Tästä eteenpäin kaikki tapahtuu täydellisellä filtteröidyllä tn-avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$, jossa $\mathbb{F}$ toteuttaa tavanomaiset ehdot. Lisäksi kaikki prosessit ovat mitallisia ja kaikki $\mathbb{F}$-martingaalit jatkuvia.

Oletus martingaalien jatkuvuudesta on voimakas, eikä sitä yleisesti ottaen olisi aivan välttämätöntä tehdä. Se on kuitenkin edellisessä luvussa esitetyn teorian soveltuvuuden kannalta välttämätön siksi, että vaikka tavoitteena onkin tutkia pelkästään jatkuvien martingaalien säilyvyyttä, joudutaan silti kaiken aikaa työskentelemään sellaistenkin martingaalien (esim. odotusarvomartingaalit) kanssa, joiden jatkuvuudesta ei muutoin olisi mitään takeita. Alkulaajennusta on tutkittu heikommilla oletuksilla esimerkiksi kirjassa [Jeu80], joka kuitenkin edellyttää lukijalta varsin hyvää *prosessien yleisen teorian* tuntemusta.

Olkoot nyt $L : \Omega \to \mathbb{R}$ satunnaismuuttuja ja $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Oletuksen 2.2 nojalla on olemassa jatkuva $\mathbb{F}$-martingaali $\lambda(g) := (\lambda_t(g))_{t \geq 0}$, jolla $\lambda_t(g) = \mathbf{E}[g(L)|\mathcal{F}_t]$ kaikilla $t \geq 0$. Pyrkimyksenä on esittää L:n ehdolliset jakaumat $\mathbf{P}(L \in \cdot|\mathcal{F}_t)$ kaikilla $t \geq 0$ riittävän säännöllisessä muodossa, jotta suure $\lambda_t(g)$ voitaisiin esittää mittaintegraalina niiden suhteen. Sitä varten määritellään ensin parametrista riippuviin mittoihin liittyvä keskeinen käsite. Olkoot $(E, \mathcal{E})$ ja $(U, \mathcal{U})$ mitta-avaruuksia. Tällöin kuvaus $\lambda : E \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ on *ydin* avaruudelta $(E, \mathcal{E})$ avaruudelle $(U, \mathcal{U})$, jos $e \mapsto \lambda(e; A)$ on $\mathcal{E}$-mitallinen kuvaus jokaisella $A \in \mathcal{U}$ ja $A \mapsto \lambda(e; A)$ on mitta $(U, \mathcal{U})$:llä jokaisella $e \in E$. Ehdolliset jakaumat halutaan nyt esittää sopivan ytimen avulla. Koska ehdolliset todennäköisyydet riippuvat sekä satunnaisuudesta että ajasta, asetetaan $E := \Omega \times (0, \infty)$. Lisäksi koska ydin esiintyy jatkossa stokastisessa integraalissa integrandina, halutaan sen olevan ennustettava, joten $\mathcal{E} := \mathcal{P}$, ennustettava σ-algebra. Mittailua harjoitetaan puolestaan L:n maaliavaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) =: (U, \mathcal{U})$.

Apulause 2.3. *On olemassa sellainen ydin λ avaruudelta $(\Omega \times (0,\infty), \mathcal{P})$ avaruudelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, että jos merkitään $\lambda_t(dx) := \lambda(\cdot, t; dx)$, niin jokaisella $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pätee*

$$\lambda(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\lambda_{\cdot}(dx).$$

Apulauseen todistamiseen käytetään yleistä ydinten konstruointia koskevaa aputulosta. Siinä ilmausta *melkein kaikkialla* käytetään hieman tavanomaista yleisemmässä merkityksessä. Olkoon $(E, \mathcal{E})$ edelleen mitallinen avaruus ja $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$ sellainen epätyhjä joukkokokoelma, että $E \notin \mathcal{N}$, kokelma $\mathcal{N}$ on suljettu numeroituvien yhdisteiden suhteen ja lisäksi $\mathcal{N}$ toteuttaa ehdon, että jos $A \in \mathcal{E}$ ja $A \subset N$ jollakin $N \in \mathcal{N}$, niin $A \in \mathcal{N}$. Nyt jos $p(e)$ on jokin ominaisuus, joka riippuu alkiosta $e \in E$ ja jos $\{e \in E : p(e) \text{ ei päde}\} \in \mathcal{N}$, niin sanotaan, että $p(\cdot)$ pätee *melkein kaikkialla* $(\mathcal{N})$. Huomautetaan lisäksi vielä, että topologista avaruutta sanotaan *Lusin-avaruudeksi*, jos se voidaan upottaa johonkin kompaktiin metristyvään avaruuteen Borel-joukoksi.

Apulause 2.4. *Olkoot $(E, \mathcal{E})$ ja $(U, \mathcal{U})$ mitallisia avaruuksia ja $\mathcal{N}$ kuten edellä. Oletetaan lisäksi, että U on Lusin ja $\mathcal{U} = \mathcal{B}(U)$. Tällöin jos operaattori $\Lambda : \mathrm{b}\,\mathcal{U} \to \mathrm{b}\,\mathcal{E}$ toteuttaa ehdot:*

(Y1) Jos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ja $f, g \in \mathrm{b}\,\mathcal{U}$, niin $\Lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha\Lambda(f) + \beta\Lambda(g)$ melkein kaikkialla $(\mathcal{N})$,

(Y2) Jos $f \in \mathrm{b}\,\mathcal{U}$, $f \geq 0$, niin $\Lambda(f) \geq 0$ melkein kaikkialla $(\mathcal{N})$,

(Y3) Jos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono $\mathrm{b}\,\mathcal{U}$:n funktioita, joilla $0 \leq f_n \uparrow f \in \mathrm{b}\,\mathcal{U}$, niin $\Lambda(f_n) \uparrow \Lambda(f)$ melkein kaikkialla $(\mathcal{N})$,

niin on olemassa (rajoitettu) ydin λ avaruudelta $(E, \mathcal{E})$ avaruudelle $(U, \mathcal{U})$, jolla kaikilla $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{E}$ pätee

$$\Lambda(g) = \int_U g(u)\lambda(\cdot; du) \quad \text{melkein kaikkialla } (\mathcal{N}).$$

Todistus. [Get75] Proposition 4.1. □

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ tavanomaisella topologiallaan varustettuna on Lusin-avaruus, sillä se voidaan upottaa esimerkiksi arkustangentilla kompaktin välin avoimeksi osajoukoksi. Apulausetta 2.4 voidaan siis soveltaa.

Apulauseen 2.3 todistus. Määritellään operaattori $\Lambda : \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{b}\,\mathcal{P}$ siten, että $g \overset{\Lambda}{\mapsto} \lambda(g)$. Määritelmä on pätevä, sillä odotusarvomartingaali $\lambda(g)$ on jatkuva ja rajoitettu, joten voidaan tulkita,[2] että $\lambda(g) \in \mathrm{b}\,\mathcal{P}$. Olkoon

$$\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{P} : A \subset B \times (0,\infty) \text{ jollakin } B \in \mathcal{F},\ \mathbf{P}(B) = 0\}.$$

On selvää, että kokoelma $\mathcal{N}$ toteuttaa vaaditut ehdot. Operaattorilta Λ vaaditut ehdot (Y1)–(Y3) seuraavat puolestaan ehdollisen odotusarvon vastaavista ominaisuuksista, sekä siitä, että parametriavaruus $(0,\infty)$ on separoituva ja että prosessiksi $\lambda(g)$ valittiin jatkuva modifikaatio. Näytetään malliksi ehto (Y3). Dominoidun konvergenssin lauseesta ehdollisille odotusarvoille seuraa, että

$$\mathbf{P}\left(\lambda_t(f_n) \uparrow \lambda_t(f)\right) = 1 \quad \text{kaikilla } t \in (0,\infty).$$

Siten leikkaamalla yli rationaalipisteiden saadaan

$$\mathbf{P}\left(\lambda_t(f_n) \uparrow \lambda_t(f) \text{ kaikilla } t \in \mathbb{Q} \cap (0,\infty)\right) = 1.$$

Koska prosessit $\lambda(f)$ sekä $\lambda(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$ ovat jatkuvia, pätee edelleen, että

$$\mathbf{P}\left(\lambda_t(f_n) \uparrow \lambda_t(f) \text{ kaikilla } t \in (0,\infty)\right) = 1,$$

eli $\Lambda(f_n) \uparrow \Lambda(f)$ melkein kaikkialla $(\mathcal{N})$.

Apulauseen 2.4 nojalla on olemassa sellainen ydin λ avaruudelta $(\Omega \times (0,\infty), \mathcal{P})$ avaruudelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, että kaikilla $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on voimassa

$$\lambda_\cdot(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\lambda(\cdot,\cdot; dx) \quad \text{melkein kaikkialla } (\mathcal{N}).$$

Mutta tämähän tarkoittaa täsmälleen sitä, että martingaali $\lambda(g)$ ja integraaliprosessi $\int_{\mathbb{R}} g(x)\lambda_\cdot(dx)$ ovat erottamattomat. □

Martingaalille $\lambda(g)$ joudutaan jatkoa varten olettamaan esitys stokastisena integraalina. Tämä luonnollisesti kaventaa sopivien tn-avaruuksien ja laajentavien satunnaismuuttujien L valikoimaa.

Oletus 2.5. On olemassa $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{F})$ ja ydin $\dot{\lambda}$ avaruudelta $(\Omega \times (0,\infty), \mathcal{P})$ avaruudelle $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, joilla jokaisella $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pätee esitys

$$\lambda_t(g) = \lambda_0(g) + \int_0^t \dot{\lambda}_s(g) dM_s \quad \text{kaikilla } t \geq 0, \tag{2.6}$$

[2] Jotta oltaisiin täysin oikeaoppisia, pitäisi valita $(\lambda_t(g))_{t>0}$, sillä ennustettavat prosessit määriteltiin välillä $(0,\infty)$.

missä $\dot{\lambda}_s(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\dot{\lambda}_s(dx)$ $\mathbf{P} \times ds$-melkein kaikkialla. Lisäksi on olemassa $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{P}$-mitallinen kuvaus $\rho : \mathbb{R} \times (\Omega \times (0, \infty)) \to \mathbb{R}$, jolla

$$\dot{\lambda}_\cdot(dx) = \lambda_\cdot(dx)\rho(x, \cdot) \quad d[M]d\mathbf{P}\text{-melkein kaikkialla,} \tag{2.7}$$

ja jokaisella $x \in \mathbb{R}$ poluilla $t \mapsto \rho(x, t)$ on melkein varmasti korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa.

Seuraava lause kertoo vihdoinkin, mikä on jatkuvan lokaalin $\mathbb{F}$-martingaalin kanoninen hajotelma alkulaajennuksen $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$ suhteen.

Lause 2.8 (Yor). *Olkoon $X \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{F})$ sellainen, että $\int_0^t |\rho(L, s)||d[X, M]_s| < \infty$ melkein varmasti kaikilla $t \geq 0$. Tällöin on olemassa $\tilde{X} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{F}^{\sigma(L)})$, jolla*

$$X_t = \tilde{X}_t + \int_0^t \rho(L, s)d[X, M]_s \quad \textit{kaikilla } t \geq 0, \tag{2.9}$$

ja siten tietenkin $X \in \mathcal{S}(\mathbb{F}^{\sigma(L)})$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $X \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{F})$. Jottei integroituvuudesta aiheutuisi ongelmia, määritellään aluksi kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pysäytyshetket $\tau_n' := \inf\{t > 0 : |X_t| > n\}$,

$$\tau_n'' := \inf\left\{t > 0 : \int_0^t |d[X, M]_s| > n\right\},$$

$$\tau_n''' := \inf\left\{t > 0 : \int_0^t |\rho(L, s)||d[X, M]_s| > n\right\}.$$

Kun vielä asetetaan $\tau_n := \tau_n' \wedge \tau_n'' \wedge \tau_n'''$, pysäyttämällä prosessia X jonoa $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pitkin voidaan tässä vaiheessa olettaa, että X on rajoitettu $\mathbb{F}$-martingaali, ja lisäksi apulauseen 1.16 nojalla, että äärellisesti heilahtelevat prosessit $[X, M]$ ja $\int_0^\cdot \rho(L, s)d[X, M]_s$ ovat niin ikään rajoitettuja. Näistä oletuksista luovutaan myöhemmin tavanomaisen lokalisaatioargumentin avulla.

Strategiana todistuksessa on yksinkertaisesti määritellä hajotelmassa (2.9) esiintyvä prosessi $\tilde{X}$ kaavalla

$$\tilde{X}_t := X_t - \int_0^t \rho(L, r)d[X, M]_r \quad \text{kaikilla } t \geq 0,$$

ja osoittaa, että $\tilde{X} \in \mathcal{M}(\mathbb{F}^{\sigma(L)})$. Olkoot $t, s \geq 0$ sellaiset, että $t > s$. Merkitään $\mathcal{H}$:lla niiden satunnaismuuttujien Z luokkaa, joilla

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}\left[Z\left(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s\right)\right] \\ &= \mathbf{E}\left[Z\left(X_t - \int_0^t \rho(L, r)d[X, M]_r - X_s + \int_0^s \rho(L, r)d[X, M]_r\right)\right]. \end{aligned}$$

Tarkoituksena on osoittaa että luokka $\mathcal{H}$ on niin laaja, että on pätee $\mathbf{E}[\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|\mathcal{F}_s^{\sigma(L)}] = 0$. Olkoot $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ja $A \in \mathcal{F}_s$. Ehdollisen odotusarvon määritelmän avulla todetaan ensin, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L)(X_t - X_s)] &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L) X_t] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L) X_s] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[g(L)X_t|\mathcal{F}_t]] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[g(L)X_s|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_t \mathbf{E}[g(L)|\mathcal{F}_t]] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_s \mathbf{E}[g(L)|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A (X_t \lambda_t(g) - X_s \lambda_s(g))].
\end{aligned}$$

Soveltamalla osittaisintegrointikaavaa (1.36) ja muistamalla, että stokastiset integraalit ovat martingaaleja, saadaan toisaalta, että

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_t \lambda_t(g)] &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A (X_0 \lambda_0(g) + (\lambda(g)\cdot X)_t + (X \cdot \lambda(g))_t + [\lambda(g), X]_t)] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A X_0 \lambda_0(g)] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[(\lambda(g)\cdot X)_t|\mathcal{F}_s]] \\
&\quad + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[(X\cdot\lambda(g))_t|\mathcal{F}_s]] + \mathbf{E}[\mathbf{1}_A [\lambda(g), X]_t] \\
&= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A (X_0 \lambda_0(g) + (\lambda(g)\cdot X)_s + (X\cdot\lambda(g))_s + [\lambda(g), X]_t)].
\end{aligned}$$

Apulauseen 1.31 kohdan (I3), oletetun esityksen (2.6) ja yhteisheilahteluprosessin bilineaarisuuden nojalla puolestaan

$$[\lambda(g), X] = \underbrace{[\lambda_0(g), X]}_{=0} + [\dot{\lambda}(g)\cdot M, X] = \dot{\lambda}(g)\cdot[M, X].$$

Kaiken kaikkiaan saadaan siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{1}_A (X_t \lambda(g)_t - X_s \lambda(g)_s)] &= \mathbf{E}[\mathbf{1}_A ([\lambda(g), X]_t - [\lambda(g), X]_s)] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \dot{\lambda}_r(g) d[M, X]_r\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\dot{\lambda}_r(dx) d[X, M]_r\right].
\end{aligned}$$

Oletetun indentiteetin (2.7) nojalla

$$\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\dot{\lambda}_s(dx) d[X, M]_r\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x,r)\lambda_r(dx) d[X, M]_r\right].$$

Määritellään nyt $\rho_n(x,r) := -n \vee (n \wedge \rho(x,r))$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tietenkin $\rho_n(x,\cdot) \in \mathrm{b}\,\mathcal{P}$. Dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x,r)\lambda_r(dx) d[X, M]_r\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_n(x,r)\lambda_r(dx) d[X, M]_r\right].
\end{aligned}$$

Koska integrandi

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_n(x,r)\lambda_r(dx) = \mathbf{E}[g(L)\rho_n(L,r)|\mathcal{F}_r]$$

on jatkuva, prosessin $[X, M]$ suhteen otettu Lebesgue–Stieltjes-integraali voidaan nyt tulkita Riemann–Stieltjes-mielessä. Olkoon nyt $\pi^{(n)}_{k_n} = \{s = r^{(n)}_0 < r^{(n)}_1 < \cdots < r^{(n)}_{k_n} = t\}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, ja oletetaan että $\lim_{n\to\infty} |\pi^{(n)}_{k_n}| = 0$. Merkitään $\Delta[X, M]_{r_j} := [X, M]_{r_j} - [X, M]_{r_{j-1}}$ Koska kaikki on rajoitettua, dominoidun konvergenssin lauseen ja ehdollisen odotusarvon määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\rho_n(x,r)\lambda_r(dx)d[X,M]_r\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbf{E}[g(L)\rho_n(L,r_j)|\mathcal{F}_{r_j}]\Delta[X,M]_{r_j}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbf{E}[\mathbf{1}_A \mathbf{E}[g(L)\rho_n(L,r_j)\Delta[X,M]_{r_j}|\mathcal{F}_{r_j}]]\right). \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L)\rho_n(L,r_j)\Delta[X,M]_{r_j}]\right)
\end{aligned}$$

Koska prosessi $\int_0^\cdot \rho(L,r)d[X,M]_r$ on rajoitettu, voidaan dominoidun konvergenssin lauseella mennä nyt takaperin

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} \mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L)\rho_n(L,r_j)\Delta[X,M]_{r_j}]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k_m} g(L)\rho_n(L,r_j)\Delta[X,M]_{r_j}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t g(L)\rho_n(L,r)d[X,M]_r\right] \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A \int_s^t g(L)\rho(L,r)d[X,M]_r\right].
\end{aligned}$$

Approksimaatio *Riemann-summilla* on tässä pätevä, sillä oletettiin, että poluilla $t \mapsto \rho(x,t)$ on korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuuskohtaa. Kaiken kaikkiaan nyt pätee siis

$$\mathbf{E}[\mathbf{1}_A g(L)(X_t - X_s)] = \mathbf{E}\left[\mathbf{1}_A g(L) \int_s^t \rho(L,r)d[X,M]_r\right]. \tag{2.10}$$

Merkitään $\mathcal{C} := \{\mathbf{1}_A g(L) : A \in \mathcal{F}_s, g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Yhtälö (2.10) tarkoittaa tietenkin nyt sitä, että $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$. Tavallisten konvergenssilauseiden nojalla

$\mathcal{H}$ toteuttaa monotonisen luokan lauseen 1.23 ehdot (M1)–(M3). On lisäksi selvää, että $\mathcal{C}$ on suljettu pisteittäisen kertolaskun suhteen, sillä rajoitettujen Borel-funktioiden tulo on rajoitettu Borel-funktio, ja jos $A, B \in \mathcal{F}_s$, niin $\mathbf{1}_A \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A \cap B}$, ja tietenkin $A \cap B \in \mathcal{F}_s$. Monotonisen luokan lauseen nojalla $\mathcal{H}$ sisältää nyt jokaisen rajoitetun $\sigma(\mathcal{C})$-mitallisen satunnaismuuttujan. Mutta $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}_s^{\sigma(L)}$, joten $\mathbf{E}[\tilde{X}_t - \tilde{X}_s | \mathcal{F}_s^{\sigma(L)}] = 0$, eli $\tilde{X}$ on todellakin $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$-martingaali.

Kun X on ainoastaan lokaali $\mathbb{F}$-martingaali, määritellään lokaali $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$-martingaali $\tilde{X}$ kaavalla

$$\tilde{X}^{\tau_n} := X^{\tau_n} - \int_0^{\cdot} \rho(L,r) d[X^{\tau_n}, M]_r \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Prosessi $\tilde{X}$ on hyvinmääritelty kaavalla (2.11), sillä apulauseen 1.16 nojalla

$$\begin{aligned}
(\tilde{X}^{\tau_n})^{\tau_{n-1}} &= (X^{\tau_n})^{\tau_{n-1}} - \left(\int_0^{\cdot} \rho(L,r) d[X^{\tau_n}, M]_r \right)^{\tau_{n-1}} \\
&= X^{\tau_n \wedge \tau_{n-1}} - \int_0^{\cdot} \rho(L,r) \underbrace{d[X^{\tau_n}, M]_r^{\tau_{n-1}}}_{= d[X^{\tau_n \wedge \tau_{n-1}}, M]_r} \\
&= X^{\tau_{n-1}} - \int_0^{\cdot} \rho(L,r) d[X^{\tau_{n-1}}, M]_r = \tilde{X}^{\tau_{n-1}}.
\end{aligned}$$

□

Huomautus 2.12. Edellä ei missään varsinaisesti käytetty tietoa, että L on reaaliarvoinen. Siten lause 2.8 yleistyy välittömästi Lusin-avaruudessa arvoja saavalle laajentavalle satunnaismuuttujalle L. Varsin monet topologiset avaruudet toteuttavat Lusin-ehdon. Esimerkiksi mielivaltainen *puolalainen avaruus*, eli separoituva, täydellisesti metristyvä avaruus, on Lusin (ks. [RW00a] Theorem II.82.5).

Lauseen 2.8 oletuksiin kuului, että $\int_0^t |\rho(L,s)||d[X,M]_s| < \infty$ melkein varmasti kaikilla $t \geq 0$. Siten lause ei takaa, että *kaikki* jatkuvat lokaalit $\mathbb{F}$-martingaalit säilyisivät $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$-semimartingaaleina. Itse asiassa T. Jeulin ja M. Yor ovat osoittaneet Brownin liikkeeseen liittyvällä esimerkillä (ks. [MY06] Proposition 1.7.), että kyseinen ehto voi olla jopa *välttämätön*, ja erityisesti että voi olla olemassa $\mathbb{F}$-martingaaleja, jotka *eivät säily* $\mathbb{F}^{\sigma(L)}$-semimartingaaleina. Kuitenkin, jos oletus 2.5 korvataan vaatimuksella, että on olemassa *ei-satunnainen*, σ-äärellinen mittaperhe $(\tilde{\lambda}_t(dx))_{t \geq 0}$, jolla

$$\lambda(\omega, t; dx) \ll \tilde{\lambda}_t(dx) \quad \text{melkein kaikilla } \omega \in \Omega, \tag{2.13}$$

niin J. Jacod on osoittanut artikkelissaan [Jac85], että tällöin kaikki semimartingaalit säilyvät. Ehto (2.13) asettaa laajentavalle muuttujalle L hieman tiukemman vaatimuksen kuin oletus 2.5, mutta toisaalta tällöin esityksen (2.6) olemassaoloa ei tarvita.

2.3 Alkulaajennus ja Brownin sillat

Olkoon $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ Brownin liike, ja oletetaan että taustalla oleva filtteröity tn-avaruus on sen "virittämä", eli $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P}) := (\Omega, \mathcal{F}_T^W, \mathbb{F}^W, \mathbf{P}|\mathcal{F}_T^W)$. Tarkastellaan Brownin filtraation alkulaajennusta Brownin liikkeen päätearvolla W_T. Tulkinnallisesti siis filtraatiota $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$ seuraava tarkkailija tietää alusta alkaen, mihin arvoon Brownin liike W päätyy.

Martingaalien esityslauseeen seurauksen 1.42 nojalla havaitaan, että oletus 2.2 on voimassa. Ensimmäisessä luvussa osoitettiin, että Brownin liike on gaussinen prosessi. Kun sen lisäksi vielä lisäysten riippumattomuudesta seuraa, että Brownin liike on *Markov-prosessi* (ks. [KS91] s. 74–75), ehdollinen jakauma $\lambda_t(dx) = \mathbf{P}(W_T \in dx|\mathcal{F}_t^W) = \mathbf{P}(W_T \in dx|W_t)$ on gaussinen mitta parametrein $\mu = W_t$ ja $\sigma^2 = T - t$.[3] Otetaan gaussiselle tiheydelle käyttöön merkintä

$$\phi(x; \mu, \sigma^2) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right].$$

Nyt jokaisella $g \in \mathrm{b}\,\mathcal{B}(\mathbb{R})$ odotusarvomartingaali $\lambda(g)$ voidaan esittää kaavalla

$$\lambda_t(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\phi(x; W_t, T-t)dx =: h_g(t, W_t).$$

Mutta jotta lausetta 2.8 päästäisiin soveltamaan, on $\lambda(g)$:lle muodostettava kaavan (2.6) mukainen esitys. Martingaalien esityslause toki takaa sen olemassaolon, muttei valitettavasti kerro mikä se on. Eksplisiittinen esitys voidaan kuitenkin löytää Itôn kaavan (1.38) avulla.

Väite 2.14. *Yhtälö (2.6) on voimassa, kun asetetaan* $\dot{\lambda}_t(dx) := \frac{x-W_t}{T-t}\phi(x; W_t, T-t)dx$ *ja* $\dot{\lambda}_t(g) := \int_{\mathbb{R}} g(x)\dot{\lambda}_t(dx)$ *kaikilla* $t \in [0, T)$.

Väitteen todistuksessa joudutaan derivoimaan funktiota h_g, joka on määritelty integraalina. Seuraava aputulos esittää riittävät ehdot sille, että derivoinnin ja integroinnin järjestys voidaan vaihtaa.

[3] Aikavälin päätepisteessä T gaussinen mitta pitää tietenkin korvata *Diracin delta-mitalla* pisteessä W_T.

Apulause 2.15. *Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sellainen, että $f(\cdot, y) \in L^1(\mathbb{R})$ jokaisella $y \in \mathbb{R}$, ja $f(x, \cdot) \in C^1(\mathbb{R})$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Jos jokaiselle $y' \in \mathbb{R}$ on olemassa sellaiset $\varepsilon > 0$ ja $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R})$, että $|\frac{\partial}{\partial y} f(\cdot, y)| \leq \bar{f}$ kaikilla $y \in [y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$, niin*

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)dx \quad \textit{kaikilla } y \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Olkoon $y' \in \mathbb{R}$ kiinnitetty, ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sellainen jono, että $y_n \to y'$. Voidaan itse asiassa olettaa, että $y_n \in [y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{\mathbb{R}} f(x,y')dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y_n) - f(x,y')}{y_n - y'} dx,$$

ja koska väliarvolauseen nojalla jokaiselle $n \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen $\xi_n \in [y' - \varepsilon, y' + \varepsilon]$, että

$$f(x,y_n) - f(x,y') = \frac{\partial}{\partial y} f(x,\xi_n)(y_n - y'),$$

niin

$$\left| \frac{f(x,y_n) - f(x,y')}{y_n - y'} \right| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x,\xi_n) \right| \leq |\bar{f}(x)| \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Siten, koska $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R})$, dominoidun konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y_n) - f(x,y')}{y_n - y'} dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \frac{f(x,y_n) - f(x,y')}{y_n - y'} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y')dx. \end{aligned}$$

□

Väitteen 2.14 todistus. Itôn kaavan nojalla

$$\begin{aligned} \lambda_t(g) = \lambda_0(g) &+ \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_1} h_g(s, W_s)ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_2} h_g(s, W_s)dW_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} h_g(s, W_s)ds. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Funktion $(\mu, t) \mapsto \phi(x, \mu, T - t)$ relevantit osittaisderivaatat ovat

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \phi(x, \mu, T - t) = \frac{x - \mu}{T - t} \phi(x, \mu, T - t), \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \phi(x, \mu, T - t) = \left[\left(\frac{x - \mu}{T - t} \right)^2 - \frac{1}{T - t} \right] \phi(x, \mu, T - t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\mu,T-t) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu}{T-t}\right)^2 - \frac{1}{T-t}\right]\phi(x,\mu,T-t).$$

Näytetään malliksi, miten osittaisderivaatta (2.17) voidaan dominoida apulauseen 2.15 vaatimalla tavalla. Olkoot $\mu' \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ pieni. Tällöin

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\phi(x,\mu,T-t)\right| &= \left|\frac{x-\mu}{T-t}\right|\phi(x,\mu,T-t)\\ &\leq \left|\frac{x-\mu'-\operatorname{sgn}(x-\mu')\varepsilon}{T-t}\right|\phi(x,\mu(x),T-t) =: \bar{f}(x),\end{aligned}$$

kaikilla $\mu \in [\mu'-\varepsilon, \mu'+\varepsilon]$ ja kaikilla $x \in \mathbb{R}$, kun

$$\mu(x) = \begin{cases}\mu'+\varepsilon, & \text{kun } x \in [\mu'+\varepsilon, \infty),\\ 0, & \text{kun } x \in (\mu'-\varepsilon, \mu'+\varepsilon),\\ \mu'-\varepsilon, & \text{kun } x \in (\infty, \mu'-\varepsilon].\end{cases}$$

Nyt $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R})$, sillä korkeintaan polynomiaalisesti kasvavat funktiot ovat aina integroituvia gaussisen mitan suhteen. Muut osittaisderivaatat voidaan dominoida samankaltaisilla estimaateilla.

Kun lisäksi oletettiin, että g on rajoitettu, apulauseen 2.15 nojalla derivoinnit voidaan nyt siis suorittaa integraalien sisällä. Välittömästi havaitaan, että

$$\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_1}h_g(s,W_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}h_g(s,W_s)ds = 0,$$

sillä

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,\mu,T-t) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \mu^2}\phi(x,\mu,T-t).$$

Siten kaava (2.16) lyhenee lopulta haluttuun muotoon

$$\begin{aligned}\lambda_t(g) &= \lambda_0(g) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{\partial}{\partial x_2}\phi(x;W_t,T-s)dx\, dW_s\\ &= \lambda_0(g) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(x)\frac{x-W_t}{T-s}\phi(x;W_t,T-t)dx\, dW_s\\ &= \lambda_0(g) + \int_0^t \dot{\lambda}_s(g)dW_s.\end{aligned}$$

□

Nyt voidaan määritellä mittojen $\dot{\lambda}_t(dx)$ ja $\lambda_t(dx)$ välinen tiheys $\rho(\cdot,t)$ kaavalla

$$\rho(x,t) := \frac{\dot{\lambda}_t(dx)}{\lambda_t(dx)} = \frac{x-W_t}{T-t} \quad \text{kaikilla } t \in [0,T).$$

Fubinin lauseen nojalla kaikilla $t \in [0,T]$ pätee

$$\mathbf{E}\left[\int_0^t \left|\frac{W_t - W_s}{T-s}\right| ds\right] = \int_0^t \frac{\mathbf{E}\left[|W_t - W_s|\right]}{T-s} ds$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{T-s}} < \infty.$$

Siten integroituvuusehto

$$\int_0^t |\rho(W_T, s)||d[W,W]|_s = \int_0^t \left|\frac{W_T - W_s}{T-s}\right| ds < \infty$$

on voimassa melkein varmasti kaikilla $t \in [0,T]$. Kun vielä huomataan, että oletus 2.5 ei edellytä välin päätepisteeseen T liittyvien mitan $\lambda_T(dx)$ ja tiheyden $\rho(\cdot, T)$ olemassaoloa, on lauseen 2.8 nojalla nyt olemassa sellainen $\tilde{W} \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)})$, että

$$W_t = \tilde{W}_t + \int_0^t \frac{W_T - W_s}{T-s} ds \quad \text{kaikilla } t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Itse asiassa $\tilde{W}$ on peräti Brownin liike filtraatiossa $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$. Nimittäin väitteen 1.18 approksimaatiotulos pätee sellaisenaan myös semimartingaaleille (ks. esim. [Kal02] Proposition 17.17.), joten $[W]_t \equiv t$ riippumatta siitä, tulkitaanko W Brownin liikkeeksi $\mathbb{F}$:ssä vai $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$-semimartingaaliksi. Mutta toisaalta $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$-semimartingaalille W määritellään $[W] := [\tilde{W}]$. Siten myös $[\tilde{W}]_t \equiv t$, ja koska $\tilde{W} \in \mathcal{M}_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)})$, niin Lévyn karakterisaatiolauseen 1.39 nojalla $\tilde{W}$ on Brownin liike $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$:ssä.

Vaihdetaan lopuksi vielä hieman näkökulmaa. Brownin liikettä, joka "ehdollistetaan" saamaan päätearvon $W_T = \theta$, missä $\theta \in \mathbb{R}$ on kiinnitetty, sanotaan *Brownin sillaksi* $(0,0)$:sta (T,θ):aan. Otetaan sille merkintä $W^{T,\theta}$. Rajoitutaan tästä eteenpäin puoliavoimelle välille $[0,T)$. Brownin silta voidaan määritellä *stokastisella differentiaaliyhtälöllä*

$$dW_t^{T,\theta} = dW_t + \frac{\theta - W_t^{T,\theta}}{T-t} dt, \tag{2.19}$$

joka on tunnetusti vain formaali tapa kirjoittaa integraaliyhtälö

$$W_t^{T,\theta} = W_t + \int_0^t \frac{\theta - W_s^{T,\theta}}{T-s} ds. \tag{2.20}$$

Syventymättä enempää stokastisten differentiaaliyhtälöiden teoriaan todetaan kuitenkin, että (2.19) on lineaarinen, joten käyttäen esimerkiksi tavanomaisia ratkaisumenetelmiä (ks. esim. [KS91] s. 354–363) sille voidaan löytää yksikäsitteinen ratkaisu

$$W_t^{T,\theta} = \theta \frac{t}{T} + (T-t) \int_0^t \frac{dW_s}{T-s}. \tag{2.21}$$

Merkitään $S_{T,\theta}$:llä kuvausta, joka kuvaa prosessin W ratkaisuprosessille $W^{T,\theta}$. Kuvaus $S_{T,\theta}$ on itse asiassa bijektio, sillä yhtälö (2.20) määrää käänteiskuvauksen $S_{T,\theta}^{-1}$.

Jos X on prosessi ja $\mathbf{P}$ tn-mitta, niin merkitään X:n äärellisulotteisia jakaumia $\mathbf{P}$:n suhteen $\mathrm{Law}(X;\mathbf{P})$:llä. Olkoon lisäksi $\mathbf{P}^{T,\theta} := \mathbf{P}(\cdot|W_T = \theta)$. Mittaa $\mathbf{P}^{T,\theta}$ sanotaan *siltamitaksi*. Suoraviivaisin laskuin voidaan todeta, että

$$\mathbf{E}[W_t^{T,\theta}] = \theta \frac{t}{T} = \mathbf{E}[W_t | W_T = \theta],$$

$$\mathbf{Cov}[W_t^{T,\theta}, W_s^{T,\theta}] = t \wedge s - \frac{ts}{T} = \mathbf{Cov}[W_t, W_s | W_T = \theta].$$

Odotusarvo- ja kovarianssifunktiot määräävät gaussisen prosessin jakauman yksikäsitteisesti (ks. esim. [Kal02] Lemma 13.1.). Koska $W^{T,\theta}$ on gaussinen ja W ehdollisesti gaussinen,

$$\mathrm{Law}(W^{T,\theta};\mathbf{P}) = \mathrm{Law}(W;\mathbf{P}^{T,\theta}).$$

Operoimalla $S_{T,\theta}^{-1}$:lla puolittain saadaan edelleen

$$\begin{aligned}\mathrm{Law}(W;\mathbf{P}) &= \mathrm{Law}\left(S_{T,\theta}^{-1}(S_{T,\theta}(W));\mathbf{P}\right) \\ &= \mathrm{Law}\left(S_{T,\theta}^{-1}(W^{T,\theta});\mathbf{P}\right) = \mathrm{Law}\left(S_{T,\theta}^{-1}(W);\mathbf{P}^{T,\theta}\right).\end{aligned}$$

Prosessi $\bar{W} := S_{T,\theta}^{-1}(W)$ on siis Brownin liike *siltamitan* $\mathbf{P}^{T,\theta}$ *suhteen*. Mutta toisaalta kuvauksen $S_{T,\theta}^{-1}$ määritelmän nojalla $\bar{W}$ toteuttaa yhtälön

$$W_t = \bar{W}_t + \int_0^t \frac{\theta - W_s}{T-s} ds, \tag{2.22}$$

missä W on Brownin *alkuperäisen tn-mitan* $\mathbf{P}$ *suhteen*. Nyt ei enää voi olla huomaamatta yhtälön (2.22) samankaltaisuutta verrattuna yhtälöön (2.18), joka on Brownin liikeen esitys $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$-semimartingaalina. Nimittäin esityksessä (2.18) $\mathbf{P}^{T,\theta}$-Brownin liikettä $\bar{W}$ vastaa $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$-Brownin liike $\tilde{W}$, ja kiinnitettyä päätearvoa θ vastaa alkulaajennetun filtraation $\mathbb{F}^{W,\sigma(W_T)}$ suhteen alusta alkaen mitallinen päätearvo W_T. Siten Brownin filtraation alkulaajennus muuttujalla W_T voidaan formaalisti *tulkita siltamitaksi* $\mathbf{P}^{T,\theta}$, tai yhtä hyvin päinvastoin.

Kirjallisuutta

[AIS98] AMENDINGER, J.–IMKELLER, P.–SCHWEIZER, M. (1998): Additional logarithmic utility of an insider. *Stochastic Processes and their Applications* **75(2)**, 263–286.

[ADI04] ANKIRCHNER, S.–DEREICH, S.–IMKELLER, P. (2004): *Enlargement of filtrations and continuous Girsanov-type embeddings.* Käsikirjoitus.

[CW83] CHUNG, K. L.–WILLIAMS, R. J. (1983): *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, Boston.

[DM75] DELLACHERIE, C.–MEYER, P. A. (1975): *Probabilités et Potentiel. Chapitres I à IV*. Hermann, Pariisi.

[DM80] — (1980): *Probabilités et Potentiel. Chapitres V à VIII, Théorie des martingales*. Hermann, Pariisi.

[GSV06] GASBARRA D.–SOTTINEN, T.–VALKEILA, E. (2006): Gaussian bridges. *Proceedings of the Abel Symposium 2005*. (ilmestymässä)

[Get75] GETOOR, R. K. (1975): On the Construction of Kernels. *Séminaire de Probabilités IX*. Lecture Notes in Mathematics **465**. Springer, Berliini.

[Jac85] JACOD, J. (1985): Grossissement initial, hypothèse (H') et théorème de Girsanov. Kirjassa Jeulin, T.–Yor, M. (toim.): *Grossissements de filtrations: exemples et applications*. Lecture Notes in Mathematics **1118**. Springer, Berliini.

[Jeu80] JEULIN, T. (1980): *Semi-Martingales et Grossissement d'une Filtration*. Lecture Notes in Mathematics **833**. Springer, Berliini.

[Kal02] KALLENBERG, O. (2002): *Foundations of Modern Probability*. 2. painos. Springer, New York.

[KS91] KARATZAS, I.–SHREVE, S. E. (1991): *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. 2. painos. Springer, New York.

[Man05] MANSUY, R. (2005): Histoire de martingales. *Mathématiques et sciences humaines* **169**, 105–113.

[MY06] MANSUY, R.–YOR, M. (2006): *Random Times and Enlargements of Filtrations in a Brownian Setting*. Lecture Notes in Mathematics **1873**. Springer, Berliini.

[RW00a] ROGERS, L. C. G.–WILLIAMS, D. (2000): *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volume 1, Foundations*. 2. painos. Cambridge University Press, Cambridge.

[RW00b] — (2000): *Diffusions, Markov Processes and Martingales. Volume 2, Itô Calculus*. 2. painos. Cambridge University Press, Cambridge.

[Rud87] RUDIN, W. (1987): *Real and Complex Analysis*. 3. painos. McGraw-Hill, New York.

[Yor85] YOR, M. (1985): Grossissement de filtrations et absolue continuité de noyaux. Kirjassa Jeulin, T.–Yor, M. (toim.): *Grossissements de filtrations: exemples et applications*. Lecture Notes in Mathematics **1118**. Springer, Berliini.