Tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto, kansainvälinen kauppa ja talouskasvu

Kansantaloustieteen pro gradu –tutkielma

Helsingin yliopisto

6.3.2006

Aku Valtakoski

Helsingin yliopisto - Helsingfors universitet - Helsinki University ID=2006-155

Tiedekunta-Facultet-Faculty		Laitos-Institution-Department
Valtiotieteellinen tiedekunta		Kansantaloustieteen laitos
Tekijä-Författare-Author Valtakoski, Aku		
Työn nimi-Arbetets titel-Title Tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto, kansainvälinen kauppa ja talouskasvu		
Oppiaine - Läroämne - Subject Makroekonomia		
Työn laji-Arbetetets art-Level Pro gradu -työ	Aika-Datum-Month and year 2006-03-06	Sivumäärä-Sidantal- Number of pages 73 + 34 sivua

Tiivistelmä-Referat-Abstract

Toisen maailmansodan jälkeisistä taloudellisista ilmiöistä merkittävimpiä ovat olleet kasvuihmeet. Esimerkkinä kasvuihmeenä voidaan pitää Itä-Aasian pienten maiden kokemaa nopeaa ja pitkäaikaista talouskasvua, jonka aikana niiden talous bruttokansantuotteella henkilöä kohden mitattuna on kasvanut huomattavasti historiallisia keskiarvoja ja kehittyneitä maita nopeammin. Tämä on merkittävää, sillä maailmantalouden tulojakauma kokonaisuudessaan on leventynyt huomattavasti samalla ajanjaksolla (Pritchett, 1997). Maailman elintasoerot ovat siis kasvaneet, joten kasvuihmeiden syntymekanismin ymmärtäminen olisi siis erittäin olennaista muun muassa kehitysmaiden tilanteen kohentamiseksi.

Yksimielisyyttä ihmeiden syntymisestä ei kuitenkaan ole. Tässä tutkielmassa tarkastellaan nopean talouskasvun syntyä tuotannontekijöiden kasaantumisen kautta. Tätä selitystä tukevat empiiriset tulokset (Young, 1995), joiden mukaan tuottavuuden kasvu ei ole ollut merkittävässä asemassa Itä-Aasian nopeassa kasvussa. Neoklassisen kasvuteorian mukaan pääoman kasaantuessa kasvunopeuden pitäisi kuitenkin hidastua pääoman laskevien rajatuottojen vuoksi. Näin ei ole käynyt, vaan maiden kasvunopeus on pysynyt pitkään hyvin korkeana. Tarvitaan siis vaihtoehtoinen selitys sille, miten kasvuihmeet ovat voineet syntyä pelkästään pääoman kasautumisen kautta.

Ensimmäinen vaihtoehtoinen selitys Itä-Aasian maiden kokemalle pitkäkestoiselle nopealle talouskasvulle on tuotannon korkea substituutiojousto. De La Grandvillen (1989) esittämän hypoteesin mukaan pääoman ja työvoiman substituutiojouston ollessa riittävän korkea tuotantoteknologia itsessään mahdollistaa endogeenisesti syntyvän jatkuvan kasvun ja kasvuihmeet. Kasvu perustuu siihen, että pääoman rajatuotot eivät laske nollaan. Korkean substituutiojouston ansiosta kasaantuva pääoma voidaan hyödyntää tehokkaasti siten, että työvoiman muodostuminen yhä harvemmaksi ei haittaa talouskasvua. Tätä selitystä tarkastellaan tässä tutkielmassa Klumpin ja Preisslerin (2000) artikkelin pohjalta sekä Solow-Swan-kasvumallissa että Ramseyn kasvumallissa.

Toinen potentiaalinen selittävä teoria perustuu kansainvälisen kaupan vaikutukseen talouskasvuun. Venturan (1997) esittämässä mallissa maat vuorovaikuttavat keskenään käymällä kauppaa välituotteilla. Tällöin kooltaan pieni avoin maa pystyy kasvamaan maailman keskiarvoja nopeammin, vaikka maailmantalous kokonaisuudessaan ei tukisikaan jatkuva kasvua. Keskimääräistä nopeampi kasvu perustuu siihen, että pienen maan oma toiminta ei vaikuta välituotteiden hintoihin maailmanmarkkinoilla. Pääoman kasaantuessa ei oteta käyttöön pääomavaltaisempia tuotantomenetelmiä, vaan siirretään tuotantoa pääomavaltaisemmille tuotantosektoreille.

Molempien mallien antama kuva kasvuihmeiden synnystä on samanlainen: maan kotitalouksien täytyy olla riittävän kärsivällisiä, jotta säästämisen ja investointien taso olisi rittävän korkea. Lisäksi maan tuotantorakenteen täytyy pystyä muuttumaan riittävän nopeasti. Kansainvälisen kaupan mallissa tämä tarkoittaa, että tuotanto siirtyy riittävän nopeasti pääomaintensiiviselle vientituotteita tuottavalle sektorille. Maan infrastruktuurin ja yritysten toimintaympäristön tulee olla kunnossa, jotta substituutiojoustolla mitattu talouden tuotannon joustavuus olisi riittävän korkea. Riittävän hidas väestönkasvu tukee tuotannon joustavuuden kasvunopeutta kiihdyttävää vaikutusta.

Koska kummassakaan käsitellyistä malleista ei oleteta teknologian kehityksen nostavan työvoiman tuottavuutta, täydentävät ne hyvin teknologiseen ja tuottavuuden kehitykseen perustuvien mallien antamaa kuvaa talouskasvusta ja kasvuihmeistä.

Avainsanat-Nyckelord-Keywords
kasvuteoria - endogeeninen kasvu - kasvuihmeet
kansainvälinen kauppa
CES-tuotantofunktiot
substituutiojousto

Säilytyspaikka-Förvaringsställe-Where deposited

Muita tietoja-Övriga uppgifter-Additional information

Sisällys

Käytetyt muuttujat ja notaatiot . . . **iii**

1 Johdanto . . . **1**

2 Kasvuihmeiden empiiriset tosiasiat ja selitykset . . . **4**
- 2.1 Kasvuihmeiden empiiriset todisteet . . . 4
- 2.2 Kasvuihmeiden selitykset . . . 7

3 Substituutiojousto ja talouskasvu . . . **10**
- 3.1 CES-tuotantofunktiot ja substituutiojousto . . . 10
  - 3.1.1 CES-tuotantofunktioista . . . 10
  - 3.1.2 Substituutiojouston tulkinta . . . 12
- 3.2 CES-tuotantofunktioiden teoriaa . . . 14
  - 3.2.1 CES-tuotantofunktion määrittely . . . 14
  - 3.2.2 CES-tuotantofunktion ominaisuuksia . . . 16
  - 3.2.3 CES-tuotantofunktioiden normalisointi . . . 19
- 3.3 CES-tuotantofunktiot ja Solow-Swan-kasvumalli . . . 22
  - 3.3.1 Mallin määrittely . . . 22
  - 3.3.2 Endogeenisen talouskasvun esiintyminen . . . 24
  - 3.3.3 Jatkuvan kasvun nopeus . . . 26
  - 3.3.4 Tasaisen kasvun tilan taso . . . 27
  - 3.3.5 Konvergenssinopeus . . . 28
- 3.4 CES-tuotantofunktiot ja Ramseyn kasvumalli . . . 29
  - 3.4.1 Mallin määrittely . . . 30
  - 3.4.2 Tasaisen kasvun tilan olemassaolo . . . 33
  - 3.4.3 Endogeenisen kasvun tila . . . 36
  - 3.4.4 Tasaisen kasvun tilan taso . . . 37
  - 3.4.5 Konvergenssinopeus . . . 38

4 Kansainvälinen kauppa ja talouskasvu . . . **40**
- 4.1 Kansainväliset kytkökset ja talouskasvu . . . 40

4.2 Kansainvälisen hyödykekaupan ja talouskasvun malli 42
4.2.1 Kotitalouksien toiminta 44
4.2.2 Lopputuoteyrityksen toiminta 45
4.2.3 Välituoteyritysten toiminta 46
4.3 Suljetun maan talouskasvu 47
4.3.1 Välituotteiden hintojen muodostuminen 47
4.3.2 Liikeyhtälöiden johtaminen 48
4.3.3 Pitkän tähtäimen talouskasvu 49
4.3.4 Tasaisen kasvun tila 50
4.3.5 Konvergenssinopeus 52
4.4 Avoimen maailman talouskasvu 53
4.4.1 Suhteellisten pääomaintensiteettien kehitys 53
4.4.2 Maailman tulojakauman pitkän tähtäimen kehitys 56
4.5 Kasvuihmeiden syntyminen 59
4.5.1 Poikkeavan maan talouskasvu 60
4.5.2 Pitkän tähtäimen talouskasvu 61
4.5.3 Tuotantorakenteen kehitys 64

5 Johtopäätökset **66**

Lähteet **70**

Liitteet **74**
A CES-tuotantofunktion yleisen muodon johtaminen 74
B Substituutiojouston vaikutus tuotannon tasoon 77
C Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilaan Solow–Swan-mallissa 79
D Ramseyn kasvumallin liikeyhtälöiden johto 81
E Ramseyn mallin talouskasvun eksakti analyysi 84
F Siirtyminen muuttujiin z ja χ 92
G Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan tasoon Ramseyn kasvumallissa 93
H Konvergenssinopeutta koskevien tulosten johtaminen 96
I Kulutuksen kehityksen eksplisiittinen ratkaisu 100
J Suhteellisten pääomaintensiteettien liikeyhtälön johtaminen 102
K Suhteellisten pääomaintensiteettien kasvutekijän etumerkki 104
L Muuttujan χ kasvunopeuden johtaminen 105
M Poikkeavan maan suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälön johtaminen 106

Käytetyt muuttujat ja notaatiot

Muuttuja	Määritelmä	Selitys
σ		Pääoman ja työvoiman välinen substituutiojousto
ψ	$1-\frac{1}{\sigma}$	
Y		(Kansantalouden) kokonaistuotanto
K		Tuotannossa (tai kansantaloudessa olevan) pääoman määrä
L		Tuotannossa käytetyn työvoiman määrä
y	Y/L	Kansantalouden bruttokansantuote henkeä kohden
k	K/L	Pääoma henkeä kohden (eli pääomaintensiteetti)
μ	F_L/F_K	Rajasubstituutiosuhde pääoman ja työvoiman välillä
A		Työvoiman tuottavuus (tuotantoteknologian taso)
α		Tulojen jakautumista kuvaava termi CES-tuotantofunktiossa
Π		Yrityksen voittofunktio
r		Talouden korkokanta, ts. pääomalle maksettava vuokrakorko
w		Palkkataso, ts. työvoimalle maksettava yksikköpalkka
s		Säästämisaste, ts. kokonaistuotannosta säästettävä osuus
δ		Pääoman kulumisesta johtuvien poistojen osuus pääomasta
n	$g_L=\dot{L}/L$	Väestön kasvunopeus
C	$(1-s)Y$	Kansantalouden kokonaiskulutus
c	C/L	Kansantalouden kulutus henkeä kohden
p		Välituotteen hinta
π	rK/Y	Pääoman osuus kokonaistuotannosta
λ		Konvergenssinopeutta (tasaisen kasvun tilaan) kuvaava tekijä
ρ		Kotitalouden kulutuspreferenssi ajan suhteen
θ		Kotitalouden preferenssi kulutuksen tasaisuuden suhteen
x		Lopputuotteen tuotannossa käytettävä välituotteen määrä

Notaatio	Selitys
$A, B, C, \ldots$	Ekstensiivinen suure, ts. lukumäärä- tai raha-arvoinen
$a, b, c, \ldots$	Intensiivinen suure, ts. per capita tai per suorite -arvoinen
$\dot{x}$	Muuttujan x derivaatta ajan suhteen, ts. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$
g_x	$\doteq \dot{x}/x$, muuttujan x kasvunopeus ajan suhteen
x^*	Muuttujan x asymptoottinen arvo ($\lim_{t\to\infty} x$), erityisesti tasaisen kasvun tilassa
x_0	Muuttujan x arvo hetkellä $t = 0$, ts. (suhteellinen) alkuarvo
x_j	Muuttujan x arvo maassa j

Luku 1

Johdanto

> *Emme ole todella ymmärtäneet talouskasvua ilmiönä ennen kuin pystymme selittämään kasvuihmeet.*
>
> (Robert Lucasia (1993) mukaillen)

Empiirisesti todetuista talouskasvun ilmiöistä *kasvuihmeet* ovat yksi mielenkiintoisimmista. Tällä nimellä kutsutaan tietyissä maissa toisen maailmansodan jälkeen syntynyttä voimakasta ja pitkäkestoista talouskasvua. Tunnetuimpia esimerkkejä kasvuihmeistä ovat pienet Itä-Aasian maat: Etelä-Korea, Hong Kong, Singapore ja Taiwan. Nämä maat kokivat lähes neljäkymmentä vuotta kestäneen nopean talouskasvun.[1] Tämän talouskasvun ansiosta näitä maita kutsutaankin nykyisin lempinimellä ”Aasian tiikerit”.

Empiirisesti on todettu, että maailman maiden kokonaistulojakauma on leventynyt saman ajanjakson aikana (Pritchett, 1997; Jones, 1997). Itä-Aasian kasvuihmevaltiot ovat kuitenkin konkreettinen esimerkki siitä, että maan on mahdollista parantaa omaa suhteellista taloudellista tilannettaan ja siirtyä rikkaiden maiden muodostamaan ”konvergenssikerhoon” (convergence club)[2]. Toistaiseksi kehittymättömien maiden kannalta olisi olennaista ymmärtää kasvuihmeiden syntymekanismi ja pystyä antamaan siihen perustuvia talouspoliittisia neuvoja vastaavan nopean talouskasvun saavuttamiseksi.

Kasvuihmeiden ymmärtämiseksi on Itä-Aasian maiden talouskasvua tutkittu paljon niin teoreettisesti kuin empiirisestikin. Yksimielisyyttä nopean kasvun syistä ei kuitenkaan ole vielä saavutettu. Neoklassinen kasvuteoria ja endogeenisen kasvun teoriat

[1] Myös Japanin, Irlannin ja Suomen talouksien nopeaa kehitystä toisen maailmansodan jälkeen voidaan pitää kasvuihmeenä. Kiinan ja Intian viimeaikainen voimakas talouskasvu lähestyy myös kasvuihmeen määritelmää.

[2] Konvergenssikerhoksi voidaan sanoa joukkoa maita, joiden talouden rakenne on kutakuinkin samanlainen ja joiden talouksien kehitys noudattaa neoklassisen kasvuteorian antamaa (absoluuttista) konvergenssiennustetta.

eivät pysty tyydyttävästi selittämään kasvuihmeiden syntyä. Ne ennustavat talouskasvun hidastuvan ennemmin tai myöhemmin laskevien rajatuottojen vuoksi. Tämä ennuste on ristiriidassa empiiristen tulosten kanssa, sillä kasvuihmemaiden talouskasvu ei hidastunut, vaan jatkui nopeana pitkän aikaa. Maiden nopean talouskasvun aikana työvoiman tuottavuus ei myöskään ratkaisevasti parantunut, joten tuottavuudenkaan kasvu ei voi olla kasvuihmeiden selittävä tekijä (Young, 1995).

Young selittää Itä-Aasian maiden tavallista nopeamman kasvun syntyneen pikemminkin normaalin tuotannontekijöiden kertymisen ja ehdollisen konvergenssin kautta, kun kasvuihmemaat ovat onnistuneet nostamaan työllisyys- ja säästämisastettaan. Nämä tekijät eivät kuitenkaan tarjoa täysin tyydyttävää selitystä ilmiölle, sillä neoklassinen kasvuteoria ennustaa näiden muutosten nostavan vain tuotannon tasoa, ei pitkän tähtäimen kasvunopeutta.[3] Edellä mainittujen tekijöiden lisäksi Young esittää ihmeiden olennaiseksi tekijäksi tuotannontekijöiden siirtymisen talouden tuotantosektorilta toiselle (esimerkiksi maataloudesta teollisuuteen). Tätä viimeistä tekijää voidaan kuvata yhden sektorin kasvumalleissa tuotannontekijöiden välisenä korkeana *substituutiojoustona*.

Toinen merkittävä tavallisten kasvuteorioiden puute Itä-Aasian kasvuihmeiden selittämisessä on, että ne olettavat kansainvälisten kytkösten olevan merkityksettömiä yksittäisen maan talouskasvun kannalta. Empiirisesti on kuitenkin todettu, että viennin osuudella mitattuna talouden avoimuudella on merkittävä yhteys talouskasvuun (Lee, 1993; Levine ja Renelt, 1992). Itä-Aasian maat ovat olleet erityisen vientiin suuntautuneita (Frankel ym., 2000), joten varteenotettavan teorian pitäisi pystyä ottamaan huomioon maiden kansainväliset yhteydet.

Tässä tutkielmassa tarkastellaan kahta vaihtoehtoista selitystä sille, miksi pelkkään pääomaan kasaantumiseen perustuva talouskasvu pystyy selittämään jatkuvan talouskasvun tietyissä olosuhteissa. Samalla arvioidaan, kuinka hyvin nämä teoriat pystyvät ennustamaan Itä-Aasian maiden kaltaisten kasvuihmeiden syntymisen. Ensimmäisessä mallissa talouden tuotannontekijöiden välisen substituutiojouston oletetaan poikkeavan tavanomaisesta ykkösestä. De La Grandvillen (1989) esittämän hypoteesin mukaan riittävän korkea substituutiojousto voi selittää jatkuvan kasvun ja kasvuihmeiden syntymisen. Kuten tullaan näkemään, tällöin talous voi todella kasvaa rajatta endogeenisesti ilman teknologista kehitystä.

Toisessa käsiteltävässä mallissa tarkastellaan kansainvälisen hyödykekaupan vaikutusta pienen maan talouskasvuun. Käytettävä malli perustuu pitkälti Venturan (1997) artikkeliin. Havaitaan, että pieni ja taloudeltaan avoin maa pystyy kasvamaan endogeeni-

[3] Katso esimerkiksi Jones (2002, luku 2).

sesti, vaikka maailmantalous kokonaisuudessaan olisikin eksogeenisen kasvun tilassa.

Koska molemmissa käsitellyissä kasvumalleissa olennaista on endogeenisen kasvun syntyminen ilman tuotannontekijöiden tuottavuuden kehitystä, tuotantoteknologian ja tuottavuuden oletetaan pysyvän vakiona. Näin ollen teknologian kehitys ja kehittäminen jätetään kokonaan huomioimatta talouskasvua ja tuotantoa mallinnettaessa. Käytössä olevan teknologian annetaan kuitenkin vaikuttaa työntekijöiden tuottavuuteen. Tämä tuottavuus vaihtelee maittain ja oletetaan vakioksi.

Luvussa 2 esitellään Itä-Aasian nopean talouskasvuun liittyvät tärkeimmät empiiriset tosiasiat. Tämän lisäksi luodaan katsaus teorioihin ja malleihin, joiden avulla maiden hämmästyttävää kasvua on pyritty selittämään.

Luku 3 käsittelee ensimmäistä vaihtoehtoista selitystä pääoman kertymiseen perustuvalle pitkäkestoiselle nopealle kasvulle, korkean substituutiojouston vaikutusta talouskasvuun. Luvussa esitellään substituutiojouston mallinnuksessa tavallisesti käytettyjen *vakiosubstituutiojoustoisten (constant elasticity of substitution, CES)* funktioiden taustaa ja teoriaa. Tämän jälkeen tarkastellaan substituutiojouston vaikutusta talouskasvuun niin Solow–Swan–mallissa kuin Ramseyn kasvumallissa. Tämä tehdään olettamalla, että talouden tuotantoteknologiana on CES-tuotantofunktio.

Kansainvälisen kaupan vaikutusta talouskasvuun käsitellään luvussa 4. Tarkasteltava Venturan malli perustuu Ramseyn kasvumalliin ja CES-tuotantofunktioihin, joten tarkastelussa voidaan hyödyntää aiempien lukujen tuloksia. Mallien ominaisuudet ja ennusteet talouskasvulle kerrataan luvussa 5. Luvussa arvioidaan myös, miten hyvin mallit pystyvät selittämään Itä-Aasian kasvuihmeet. Lopuksi kerrataan tärkeimmät johtopäätökset ja pohditaan, missä määrin valtiovalta voi vaikuttaa talouskasvuun mallien puitteissa.

Luku 2

Kasvuihmeiden empiiriset tosiasiat ja selitykset

Kasvuihmeiden empiirinen tutkimus on olennainen ja aktiivinen osa nykyaikaista talouskasvun tutkimusta. Tässä luvussa esitellään Itä-Aasian kasvuihmeiden empiirinen todistusaineisto olennaisimmilta osiltaan ja kerrataan kasvuihmeiden syntymisen tavallisimmat selitykset.

2.1 Kasvuihmeiden empiiriset todisteet

Tarkastelemalla Etelä-Korean, Hong Kongin, Singaporen ja Taiwanin talouskasvun faktoja ei ole vaikeaa ymmärtää, miksi maiden talouden ilmiömäistä kasvua voi hyvällä syyllä kutsua kasvuihmeeksi. Taulukossa 2.1 on lueteltu Itä-Aasian maiden keskimääräinen vuosittainen kasvunopeus vuosien 1960-1990 välillä (mitattuna bruttokansantuotteen vuosittaisella kasvulla). Luvut on laskettu Penn World Table –tietokannasta (versio 6.1, citetpenntable) saatujen tietojen perusteella. Lisäksi taulukkoon on lisätty vertailun vuoksi Ison-Britannian, Japanin, Yhdysvaltain ja koko maailman pitkän aikavälin kasvunopeudet.[1] Taulukosta nähdään suoraan, että Itä-Aasian maiden talouskasvu on ollut huomattavan nopeaa verrattuna maailman pitkän ajan keskiarvoiseen kasvunopeuteen tai kehittyneiden maiden talouskasvuun samalla ajanjaksolla.

Maiden kokemaa talouskasvua voidaan havainnollistaa aikasarjana. Kaaviossa 2.1 on kuvattu maiden talouden kehitystä käyttäen mittarina asukasta kohden mitattua bruttokansantuotetta verrattuna vuoden 1960 tasoon. Kaavioon on sisällytetty myös Japanin,

[1] Pitkän aikavälin kasvunopeudet on laskettu Pritchettin (Pritchett, 1997, taulukko 3) artikkelin lukujen pohjalta.

Maa	1960–1990	1870–1994
Etelä-Korea	6,3 %	-
Hong Kong	6,7 %	-
Singapore	7,7 %	-
Taiwan	7,0 %	-
Iso-Britannia	2,3 %	1,3 %
Japani	5,7 %	2,7 %
Yhdysvallat	2,6 %	1,8 %
Koko maailma	< 2,5 %	1,8 %

Taulukko 2.1: *Keskimääräinen talouskasvu vuodessa Itä-Aasian kasvuihmemaissa ja valituissa muissa maissa vuosina 1960–1990.*

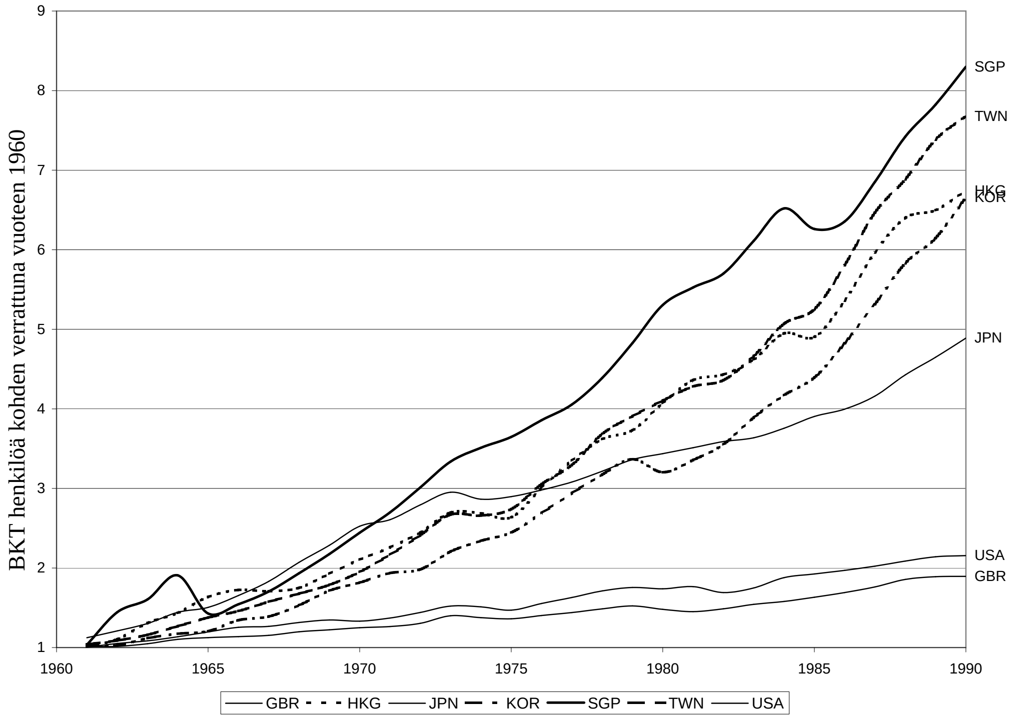
Yhdysvaltojen ja Ison-Britannian vastaavat kasvulukemat. Myös tämän kaavion piirtämiseen tarvitut tiedot on saatu Penn World Table –tietokannasta.

Kaaviosta 2.1 nähdään suoraan nopean kasvun tulokset: maiden asukasta kohden mitattu reaalinen bruttokansantuote on kasvanut moninkertaiseksi vain kolmessa vuosikymmennessä. Suurimman kasvun kokeneen Singaporen bruttokansantuote asukasta kohden on peräti yli kahdeksankertaistunut tarkastelujaksolla. Tämä on dramaattisesti suurempi kasvu kuin esimerkiksi Yhdysvaltain ja Ison-Britannian talouden kehitys; näissä maissa bruttokansatuote asukasta kohden on vain noin kaksinkertaistunut samassa ajassa. Itä-Aasian maiden kokeman kasvupyrähdyksen nimittäminen ihmeeksi ei siis ole mitenkään liioiteltua. Huomattavaa on ollut paitsi kasvun nopeus, myös sen vakaus ja pitkäkestoisuus: kasvuihmemaat ovat kokeneet vain muutamia notkahduksia talouskasvussaan.

Itä-Aasian maiden talouden nopealla kehityksellä on havaittu olevan seuraavat ominaispiirteet:

Pitkäaikainen, keskimääräistä nopeampi talouskasvu. Kuten edellä on jo esitetty, kasvuihmemaiden kasvunopeus on pysynyt huomattavan pitkään kehittyneitä länsimaita korkeammalla. Jos vielä verrataan kasvuihmemaiden kasvunopeuksia pitkän ajan keskiarvoihin, huomataan kasvunopeuden olleen historiallisestikin huomattavan korkea.

Korkea säästämis- ja investointiaste. Maiden kotitaloudet ovat olleet valmiita (joissakin tapauksissa jopa pakotettuja!) siirtämään kulutustaan ja säästämään. Maiden säästämis- ja investointiasteet eivät kuitenkaan ole olleet merkittävän korkeat suhteessa kehittyneisiin maihin (Krugman, 1994).



Kaavio 2.1: *Itä-Aasian maiden, Japanin sekä Yhdysvaltojen ja Ison-Britannian reaalisen bruttokansantuotteen kehitys asukasta kohden vuosina 1961-1990 verrattuna vuoteen 1960, ts. 1960 = 1.*

Viennin merkittävä osuus kansantuotteesta. Itä-Aasian maat ovat erittäin vientiorientoituneita. Teollisten vientituotteiden osuus niiden kansantuotteesta on merkittävä. (Frankel ym., 2000).

Talouden tuotantorakenteen muutos. Maiden tuotantorakenne on muuttunut radikaalisti nopean talouskasvun aikana. Entisten maataloustuotteiden ja matalatasoisten teollisuustuotteiden sijaan maat ovat nykyisin jo korkean teknologian tuotteiden tuottajia. (Nelson ja Pack, 1999).

Tuottavuuden tavanomainen kehitys. Toisin kuin kenties voisi nopean talouskasvun puolesta odottaa, Itä-Aasian maiden työvoiman tuottavuus ei ole kehittynyt merkittävästi nopeammin kuin kehittyneissä maissa. (Young, 1995; Krugman, 1994; Kim ja Lau, 1994; Collins ja Bosworth, 1996; Bosworth ja Collins, 2003).

Valtiovallan interventiot. Vaikka Itä-Aasian hallitusten interventioiden luonteesta ja sen onnistumisesta ei olekaan yksimielisyyttä (Rodrik, 1994; Sarel, 1996), tiedossa on, että maat ainakin *yrittivät* vaikuttaa talouskasvuunsa aktiivisella talouspolitiikalla. Interventioita tehtiin muun muassa viennin ja luototuksen piirissä.

2.2 Kasvuihmeiden selitykset

Koska kasvuihmeiden syntyminen on merkittävä taloudellinen ilmiö, ei ole ihme, että niiden selittämisestä ja mahdollisesta toistamisesta ollaan erittäin kiinnostuneita. Yksimielisyyttä nopean kasvun syistä ja mekanismeistä ei kuitenkaan ole löytynyt. Löydettyjen empiiristen tosiasioiden on katsottu tukevan useita, toisilleen jopa vastakkaisia talouskasvun teorioita.

Olennaisin jako kasvuihmeiden selitysten välillä on jako *pääoman kasaantumista (accumulation)* painottaviin ja *teknologian omaksumista (assimilation)* painottaviin selityksiin (Nelson ja Pack, 1999). Pääoman kasaantumiseen perustuvat selitykset pohjautuvat oletukselle, että fyysisten ja inhimillisten pääomaresurssien tehokas hyödyntäminen ja pääoman nopea kasaantuminen selittävät suurimman osan kasvuihmeiden synnystä. Teknologian omaksumiseen pohjautuvat selitykset taas korostavat innovaation, teknologian tuonnin ja oppimisen merkitystä kasvuihmeiden syntymiselle niiden tuottaman tuottavuuden kasvun kautta. Luonnollisesti molemmissa selityksissä on vielä vaihtelua sen mukaan, mitä kasvun tekijää painotetaan.

Frankel ym. (2000) toteavat lisäksi, että on kiistanalaista, mikä maan kauppapolitiikan avoimuuden merkitys on ollut Itä-Aasian maiden menestykselle. Tosiasioiden on katsottu tukevan sekä protektionistisen talouspolitiikan merkitystä että avoimuuteen ja vapaaseen kauppaan perustuvan kasvun ylivertaisuutta. Kolmas kiistelty selitysmahdollisuus liittyy valtiovallan ja talouspolitiikan merkitykseen kasvuihmeiden synnyssä. Sekä valtion aktiivisella talouspolitiikalla että markkinalähtöisillä näkökannoilla on omat kannattajansa (Sarel, 1996).

Itä-Aasian maiden nopealle kasvulle on siis tarjolla erittäin monta vaihtoehtoista selitystä. Ainakin seuraavien tekijöiden on esitetty selittävän maiden nopean ja pitkäkestoisen talouskehityksen. Ristiriidaiset selitykset johtuvat ainakin osittain talouskasvun kirjanpidon (growth accounting) vaihtelevista metodeista ja tulkinnoista (Bosworth ja Collins, 2003).

Pääoman kasaantuminen. Työvoiman tuottavuus ei Youngin (1995) mukaan ole kasvanut merkittävästi Itä-Aasian maissa. Nopea talouskasvu näyttäisi sen sijaan syntyneen olemassaolevien resurssien tehokkaasta hyödyntämisestä ja pääoman nopeasta kasaantumisesta (Krugman, 1994), jota on auttanut kotitalouksien korkea säästämisaste.

Tuottavuuden kehitys. Itä-Aasian maiden teknologinen taso vielä 1950-luvulla oli kaukana kehittyneiden länsimaiden tasosta. Vertaamalla tätä lähtökohtaa maiden nykyiseen korkeaan tekniseen kehitysasteeseen on selvää, että maat ovat kyenneet omaksumaan tehokkaasti olemassa olevaa teknologiaa. Tämä nopea teknologinen kehitys ei kuitenkaan tarkoita, että työvoiman tuottavuus olisi noussut vastaavassa määrin. Pelkkään tuottavuuden nousuun perustuvat kasvuihmeiden selitykset eivät ole empiiristen tutkimusten (Felipe, 1997; Bosworth ja Collins, 2003) valossa uskottavia.

Talouden avoimuus. Itä-Aasian maiden avoimuuden ja vientiin suuntautuneiden talouksien voidaan katsoa vaikuttaneen ratkaisevasti nopeaan talouskasvuun. Viennin osuus niiden bruttokansantuotteesta on merkittävä. Frankel ym. (2000) ovat todenneet, että kansainvälisellä kaupalla pystytään selittämään suuri osuus syntyneestä talouskasvusta, joidenkin maiden osalta kasvun voidaan katsoa syntyneen jopa lähes kokonaan kaupan ansiosta.

Koulutus ja investoinnit inhimilliseen pääomaan. Lucas (1993) esittää, että merkittävä osuus Itä-Aasian maiden talouskasvusta voidaan selittää koulutuksen, oppimisen ja inhimillisen pääoman kasaantumisen avulla. Kasvua kiihdyttävä vaikutus syntyy tietämyksen kerääntymisen ja kehittämisen positiivisista ulkoisvaikutuksista.

Demografiset syyt. On myös mahdollista, että kasvuihmeen sai aikaan jo pelkästään se seikka, että maan väestörakenne ja väestön koulutustaso oli sopiva. Esimerkiksi Bloom ym. (1999) esittävät, että väestön nopea kasvupyrähdys (”vauvabuumi”), johon liittyy koulutustason nostaminen, mahdollistaa nopean talouskasvun, koska työntekijöiden osuus väestöstä on suuri. Tällöin investoitavissa oleva osuus tuloista on suurempi, mikä mahdollistaa nopeamman pääoman kasaantumisen.

Maiden harjoittama talouspolitiikka. Itä-Aasian maat ovat harjoittaneet enemmän tai vähemmän aktiivista talouspolitiikkaa. Sopiva teollisten sektoreiden kehittämiseen tähtäävä politiikka on voinut olla merkittävä kasvua tukeva tekijä (Collins ja Bosworth, 1996). Joka tapauksessa on todettu, että maiden talouspolitiikan riittävä vakaus ja investoinnit infrastruktuuriin ovat olleet *välttämättömiä* (mutta eivät välttämättä riittäviä) tekijöitä nopean talouskasvun syntymiselle.

Tämän tutkielman kannalta olennaiset selitykset ovat *pääoman kasaantumisen ja talouden avoimuuden* merkitys talouskasvulle ja kasvuihmeiden syntymiselle. Molemmissa selityksissä on kuitenkin ongelmansa. Kuten Krugman (1994) huomauttaa, pitäisi pääoman kasautumiseen perustuvan talouskasvun neoklassisen kasvuteorian mukaisesti hidastua ennemmin tai myöhemmin. Näin ei kuitenkaan ole tapahtunut, joten tarvitaan selitys sille, miksi jatkuva kasvu on mahdollista perustuen pelkästään pääoman kasaantumiseen. Luvussa 3 käsiteltävä korkeaan substituutiojoustoon perustuva kasvu on yksi mahdollinen pääoman kasautumiseen perustuva vaihtoehtoinen selitys kasvuihmeille.

Talouden avoimuuteen ja kansainväliseen kauppaan perustuvat kasvuihmeiden selitykset kärsivät kausaalisuusongelmasta: tiedämme vain, että viennin kasvu korreloi talouskasvun kanssa, muttemme sitä, kumpi aiheuttaa kumman (Frankel ym., 2000). Luvussa 4 tarkasteltava talouskasvun malli välttää tämän ongelman osoittamalla, että pienen maan keskimääräistä nopeampi ja jatkuva talouskasvu on mahdollista, jos maa *ylipäätänsä* on avoin ja käy kauppaa kansainvälisillä markkinoilla. Talouskasvu mallissa perustuu edelleen pääoman kasaantumiseen.

Luku 3

Substituutiojousto ja talouskasvu

Tarkastellaan aluksi talouskasvua mallissa, jossa kasvu syntyy yksinkertaisesti pääoman kasaantumisesta. Tällöin neoklassinen kasvuteoria antaa epätyydyttävän kuvan talouskasvusta, sillä talouskasvun pitäisi hidastua laskevien rajatuottojen vuoksi. Tässä luvussa tarkastellaan mallia, jossa sopiva tuotantoteknologia voi synnyttää jatkuvan keskimääräistä nopeamman talouskasvun. Tähän jatkuvan kasvun tilaan päästään, mikäli pääoman ja työvoiman välinen substituutiojousto on riittävän korkea.

3.1 CES-tuotantofunktiot ja substituutiojousto

Karkeasti ottaen substituutiojousto mittaa sitä, kuinka helposti pääomaa ja työvoimaa voidaan vaihtaa toisiinsa tuotannossa (Hicks, 1932). Mitä korkeampi substituutiojousto on, sitä joustavammin tuotannontekijöitä voidaan vaihtaa toisiinsa, kun tuotannon taso pysyy samana. Substituutiojouston tarkastelu tuotannon ja talouskasvun analyysissä liittyy pitkälti vakiosubstituutiojoustoisten (CES) tuotantofunktioiden tarkasteluun ja käyttöön.

3.1.1 CES-tuotantofunktioista

Vakiosubstituutiojoustoisten tuotantofunktioiden (CES-tuotantofunktioiden) kehitys liittyy läheisesti neoklassisen kasvuteorian kehitykseen. Alunperin jo Solow (1956) käytti klassisessa kasvuteoria-artikkelissaan CES-tyyppistä funktiota Cobb-Douglas-funktion ohella mallintamaan tuotantoa. Hän todensi tuolloin, että riittävän korkea substituutiojousto saattoi synnyttää jatkuvan endogeenisen kasvun.

Nykyisen nimensä ja yleistetyn muodon CES-tuotantofunktiot saivat Arrow ym. (1961) toimesta. Tämän lisäksi Brown ja de Cani (1963) kehittivät funktioiden teoriaa eteenpäin. Arrow ym. artikkelissa myös testattiin ensi kertaa empiirisesti mallin ennusteita vertaamalla Yhdysvaltain ja Japanin eri taloussektorien tuottavuuden substituutiojoustoja toisiinsa. Kirjoittajat totesivat pääoman ja työvoiman välisen substituutiojouston eroavan tavallisesti ykkösestä. CES-funktioita on tämän jälkeen hyödynnetty runsaasti mikrotaloustieteessä, muun muassa tuotannon ja kuluttajan hyödyn mallintamisessa. Uzawa (1962) ja McFadden (1963) yleistivät alunperin kahden tuotannontekijän teknologian kuvaamisen käytetyn CES-tuotantofunktion *n*:n tekijän tapaukseen.[1]

1960-luvun jälkeen kiinnostus CES-tuotantofunktioiden käyttöä kohtaan lopahti kasvuteorian tutkimuksessa. Syynä tähän oli, että Cobb-Douglas-tuotantofunktioiden koettiin kuvaavan riittävän hyvin talouden kehitystä neoklassisessa kasvuteoriassa, sekä empiiriset tulokset, jotka totesivat substituutiojouston olevan riittävän tarkasti yksi (Berndt, 1976). 1980-luvulla yleinen kritiikki neoklassista kasvuteoriaa kuitenkin kasvoi. Syynä kritiikkiin olivat erityisesti jatkuvan kasvun kannalta olennaisen teknologisen kehityksen kuvaamisen puuttuminen ja empiiristen tulosten kanssa ristiriidassa olevat konvergenssiennusteet. Näitä puutteita korjaamaan kehitettiin endogeenisen kasvun malleja[2], jotka pystyvät selittämään teknologisen kehityksen ja talouden jatkuvan kasvun. Samalla myös kiinnostus CES-tuotantofunktioita kohtaan heräsi uudelleen.

Substituutiojouston huomioimiseen talouskasvun tekijänä CES-tuotantofunktioita käyttämällä on monia syitä. Ensinnäkin empiirisesti on havaittu, että tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto ei tavallisesti ole suuruudeltaan yksi (Duffy ja Papageorgiou, 2000; Klump ym., 2004). Lisäksi Duffy ja Papageorgiou (2000) toteavat, että substituutiojousto on korkeampi rikkaissa kuin köyhissä maissa. Jos substituutiojousto oletetaan ykköseksi Cobb-Douglas-funktioiden tapaan, ei talouskasvusta ja konvergenssista välttämättä saada oikeaa kuvaa. Käyttämällä CES-tuotantofunktioita ei tarvitse tehdä etukäteen oletusta substituutiojouston suuruudesta.

Tavallisesti käytettyjen Cobb-Douglas-funktioiden eräs tärkeä ominaisuus on, että tuotannontekijöiden osuus kokonaistuloista pysyy vakiona. Tämä tulos on sopusoinnussa Kaldorin (1961) esittämän pitkän tähtäimen tulonjakoa koskevan *empiirisesti todetun säännönmukaisuuden*[3] *(stylized fact)* kanssa. Cobb-Douglas-funktion matemaattisen muodon vuoksi ei ole väliä, onko teknologinen kehitys päävoiman vai työvoi-

[1] Substituutiojouston määritelmä useamman kuin kahden muuttujan tapauksessa ei ole suoraviivainen. Substituutiojoustolle on tällöin olemassa useita vaihtoehtoisia määritelmiä: *suora substituutiojousto*, Allenin (1938) määrittelemä *osittainen substituutiojousto* ja Klumpin ja de La Grandvillen (2000) suosittelema *Morishima-subsituutiojousto* (Morishima, 1967).

[2] Esimerkkejä näistä malleista ovat Lucasin (1988), Romerin (1990) ja Jonesin (1995) mallit.

[3] Jones (2002) esittelee hyvin nämä säännönmukaisuudet.

man tehokkuutta lisäävää (augmenting). Empiiriset tulokset (Blanchard, 1997; Klump ym., 2004) kuitenkin tukevat[4] näkemystä, jonka mukaan teknisen kehityksen suunnalla on merkitystä, jolloin myöskään tulo-osuudet eivät pysy vakiona. Toinen syy CES-funktioiden käyttöön on, että ne pystyvät huomioimaan teknisen kehityksen suunnan sekä mahdollisesti muuttuvan tuotannontekijöiden välisen tulonjaon pääomaintensiteetin kasvaessa.

Kolmas perustelu CES-tuotantofunktioiden käyttämiselle on, että ne sisältävät erikoistapauksina kaikki vakiosubstituutiojoustoiset tuotantofunktiot, mukaan lukien Cobb–Douglas-funktiot. Vaikka CES-funktiot ovatkin matemaattisesti monimutkaisia käsitellä, voidaan samalla vaivalla tutkia useiden tuotantofunktioiden jatkumoa yhden funktiotyypin sijaan. Tätä ominaisuutta esitellään enemmän luvussa 3.2.

Neljänneksi, riittävän korkea substituutiojousto voi olla kasvuihmeitä selittävä tekijä mainitun de La Grandville -hypoteesin mukaisesti. Kasvuihmeiden mahdollinen syntyminen perustuu luvussa 3.3 johdettaviin johtopäätöksiin pitkän tähtäimen talouskasvusta. Yuhn (1991) on testannut hypoteesiä Etelä-Korean vuosien 1962–1981 väliselle talouskasvulle ja toteaa empiiristen tulosten tukevan sitä. Muita hypoteesia testaavia empiirisiä maakohtaisia tutkimuksia ei kuitenkaan ole vielä juuri tehty.

Toisistaan eroavat määrittelyt ja tästä seuranneet ristiriitaiset tulokset muun muassa kasvuteorian alueella ovat kuitenkin heikentäneet kiinnostusta CES-tuotantofunktioiden käyttämiseen. De La Grandvillen (1989) esittämä huomio CES-tuotantofunktion parametrien ja substituutiojouston välisestä riippuvuudesta mahdollistaa funktioiden tarkemman analyyttisen käsittelyn. Tämän riippuvuuden huomioiminen potentiaalisesti selkeyttää CES-funktioiden määrittelyä ja käsittelyä. Tähän huomioon perustuen Klump ja de La Grandville (2000) esittävät metodin systemaattisesti määriteltyjen CES-tuotantofunktioiden johtamiseen. Metodi esitellään luvussa 3.2. Näin muodostettuja funktioita kutsutaan *normalisoiduiksi CES-tuotantofunktioiksi*. Niitä käyttämällä on selvää, mitkä mallin parametreista ovat riippumattomia ja mitkä riippuvat muista muuttujista.

3.1.2 Substituutiojouston tulkinta

Substituutiojouston taloudellinen tulkinta kasvuteoriassa on edelleen epämääräinen, mikä on osaltaan heikentänyt kiinnostusta CES-tuotantofunktioiden käyttöä kohtaan. Mikrotalousteoriassa tuotannontekijöiden välinen *tekninen* substituutiojousto on tulkinnaltaan selkeä: se kuvaa, missä suhteissa (eli miten tehokkaasti) tuotannontekijöi-

[4] Jones (2003) on kuitenkin esittänyt vastakkaisia näkemyksiä Cobb-Douglas-funktioiden puolesta.

tä voidaan käyttää tietyn tuotannon tason saavuttamiseksi. Kasvuteoriassa tulkinta ei ole yhtä täsmällinen, sillä substituutiojousto määrittyy makrotaloudellisen aggregaattidatan perusteella. Kokonaistalouden substituutiojoustoon vaikuttavat tällöin muutkin kuin tuotantoteknologian puhtaasti tekniset ominaisuudet.

Korkeaan substituutiojoustoon perustuva kasvumalli ei siis pysty eristämään institutionaalisia tekijöitä pois talouskasvun syntyä tarkasteltaessa. Täten se ei pysty selittämään talouskasvua tuotannon *pelkästään* teknisten ominaisuuksien ja pääoman kasaantumisen avulla.

Klump ja Preissler (2000) listaavat potentiaalisia subsituutiojoustoon vaikuttavia talouden institutionaalisia tekijöitä. Näitä tekijöitä ovat työmarkkinajärjestöjen valta-asema, sisäisen ja ulkoisen kilpailun voimat, uuden tietämyksen leviäminen yksityisten instituutioiden tukemana sekä hyvin toimivat raha- ja rahoitusmarkkinat.

Korkeampi substituutiojousto voidaan liittää talouden parempaan joustavuuteen esimerkiksi tuotannontekijöiden liikkuvuuden ja korvattavuuden suhteen. CES-tuotantofunktioiden kuvaama substituutiojousto ei kuitenkaan ole mikään valmis teknologia tai tuotantofunktio, jonka yritykset voivat valita tuotantoa suunnitellessaan. Parempi luonnehdinta on, että substituutiojousto määrittyy makrotaloudellisen aggregaattidatan perusteella, jolloin talous tai sen tuotannonalat käyttäytyvät ikään kuin niillä olisi käytössään havaittu CES-teknologia.

Substituutijoustolle voidaan antaa makrotaloudellisella tasolla useita luonnehdintoja. Yuhn (1991) luonnehtii substituutiojouston kuvaavan yrityksille saatavilla olevien vaihtoehtoisten tuotantoteknologioiden määrää. Yksinkertaistaen yksittäisen yrityksen kannalta tuotantoteknologian valinta merkitsee tietyn pääoma–työvoima–suhteen valintaa. Yksittäisen yrityksen tuotannon tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto ei välttämättä ole korkea, ja se voi olla jopa lukittu tiettyyn pääoma–työvoimasuhteeseen tehtyään kerran valinnan. Uusia yrityksiä voidaan kuitenkin perustaa koko ajan, ja perustamishetkellä kullakin yrityksellä on olemassa kokonaissubstituutiojouston määrittelemät vaihtoehdot. Näin ollen substituutiojoustoa voidaan pitää de La Grandvillen (1989) mukaisesti kokonaistuotantojärjestelmän tehokkuuden mittarina.

Tuotannontekijöiden välisellä substituutijolla ei myöskään ole vain yhtä tiettyä muotoa. Hicks (1932) on esittänyt, että substituutiota voi tapahtua kolmella eri tapaa. Ensinnäkin substituutio voi tapahtua yhden tuotannonalan sisällä. Toiseksi substituutio voi tapahtua talouden eri alojen välillä, jolloin esimerkiksi muutetaan tuotantorakennetta siirtämällä voimavaroja työvoimavaltaisilta aloilta päävoimavaltaisille aloille. Viimeisenä substituution muotona on uusien tuotantomuotojen innovaation tuottama jousto. Tässä tutkielmassa käsitellään teknisesti vain ensimmäistä tyyppiä, sillä kaiken tuotannon oletetaan tapahtuvan yhdellä tuotantosektorilla. Käytetyn aggregaattituotantoteknologian voidaan kuitenkin katsoa kuvaavan myös eri sektorien välistä tuotannontekijöiden substituutiota talouden tuotantorakenteen muuttuessa.

3.2 CES-tuotantofunktioiden teoriaa

Edellisessä luvssa kuvattiin CES-tuotantofunktioiden historiaa, käyttökelpoisuutta talouskasvun selittämisessä, kritiikkiä ja substituutiojouston tulkintaa. Tässä luvussa määritellään ja johdetaan CES-funktioiden tärkeimmät ominaisuudet matemaattisesti. Luvun tuloksia hyödynnetään myöhemmin luvussa 3.3, jossa analysoidaan talouskasvua Solow-Swan-mallissa.

3.2.1 CES-tuotantofunktion määrittely

Tarkastellaan tuotantoa, jossa käytetään kahta tuotannontekijää: pääomaa K ja työvoimaa L. Koska tarkastelussa on keskeistä tuotannontekijöiden välisen substituutiojouston vaikutus tuotantoon ja talouskasvuun, jätetään yleinen teknologinen ja työvoiman tuottavuuden kehitys pois mallista. Tällöin yleisellä tasolla voidaan kirjoittaa tuotannolle funktio, jonka tarkka muoto määritellään myöhemmin.

$$Y = F(K,L).$$

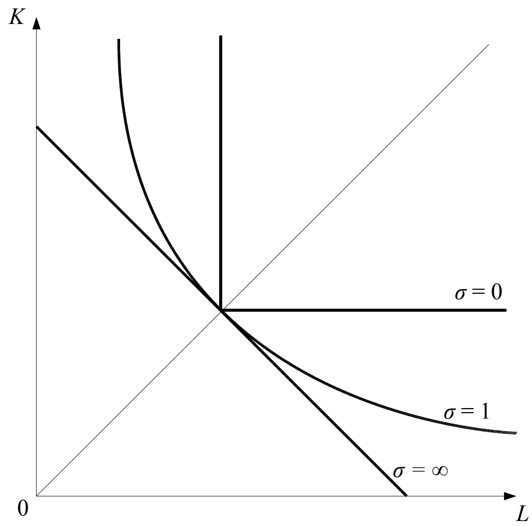
Oletetaan lisäksi, että tuotantofunktio F on ensimmmäisen asteen homogeeninen funktio eli tuotannossa pätevät vakioskaalatuotot. Tällöin käyttämällä intensiivisiä suureita (tuotanto työntekijää kohden, $y = Y/L = f(k)$ ja pääoma työntekijää kohden, $k = K/L$) voidaan tuotantofunktio edelleen kirjoittaa muodossa[5]

$$y = f(k).$$

Riippuen käytetyn teknologian eli tuotantofunktion tarkasta muodosta pääomaa ja työvoimaa voidaan käyttää eri suhteissa. Näiden kahden tuotannontekijän välinen substituutiojousto määritellään seuraavasti:

$$\sigma \doteq \frac{\mathrm{d}(K/L)(K/L)}{\mathrm{d}(F_L/F_K)} = \frac{f'(k)[f(k) - kf'(k)]}{-kf''(k)f(k)}, \tag{3.1}$$

[5] Koska F on ensimmäisen asteen homogeeninen funktio, pätee $F(sK,sL) = sF(K,L)$. Valitaan skaalaustekijäksi $s = 1/L$. Tällöin $F(K,L)/L = F(K/L,1) = f(k)$.



Kaavio 3.1: *CES-tuotantofunktioiden isokvanttikäyriä eri substituutiojouston arvoilla.*

missä $F_L = \partial F/\partial L$ ja $F_K = \partial F/\partial K$. Substituutiojousto σ voi saada arvoja väliltä $[0,\infty[$. Kun $\sigma = 0$, ovat pääoma ja työvoima täydellisiä komplementteja: molemmat tuotannontekijät ovat välttämättömiä tuotannon toteuttamiseksi, ja niitä käytetään aina vakiosuhteessa. Kun taas $\sigma \rightarrow \infty$, pääoma ja työvoima ovat täydellisiä substituutteja, jolloin riittää käyttää vain yhtä (edullisempaa) tuotannontekijää. Tavallisesti kuitenkin σ jää näiden ääriarvojen välille. Erityistapauksena on $\sigma = 1$; tämän tapauksen voidaan osoittaa vastaavan tavanomaista Cobb-Douglas –tuotantofunktiota. Yllämainittujen tuotantofunktioiden isokvanttikäyrät on piirretty kaavioon 3.1. Kaaviosta nähdään, mitkä pääoma–työvoima -vaihtoehdot tuottajalla on käytettävissään tietyllä tuotannon tasolla.

Kahden tuotannontekijän CES-tuotantofunktio on mahdollista johtaa lähtien substituutiojouston määritelmästä (3.1) (Brown ja de Cani, 1963, liite II). Tämä johto on pääpiirteittäin esitetty liitteessä A. Yleisimmässä mahdollisessa tapauksessa CES-tuotantofunktio on n:nnen asteen homogeeninen funktio. Tässä tutkielmassa keskitytään vain tapaukseen $n = 1$, sillä tämä vastaa tehtyä tuotannon vakioskaalatuotto-oletusta ja yhtenee Cobb-Douglas-funktioihin. Lisäksi yleisen tapauksen käsittely olisi matemaattisesti paljon hankalampaa eikä mielekästä tämän tutkielman kannalta.

Vakioskaalatuotto-oletuksen perusteella voidaan nyt kirjoittaa tässä tutkielmassa käytettävät CES-tuotantofunktioiden muodot (ekstensiivisessä ja intensiivisessä muodossa):

$$Y = F(K,L) = \gamma_1 [K^\psi + \gamma_2 L^\psi]^{1/\psi}, \tag{3.2}$$

$$y = Y/L = f(k) = \gamma_1 [k^\psi + \gamma_2]^{1/\psi}. \tag{3.3}$$

Integrointivakiot γ_1 ja γ_2 määräytyvät ongelman alkuehtojen perusteella ja ne riippuvat substituutijoustosta σ. Lähes kaikki CES-funktioiden erilaiset määritelmät voidaan palauttaa ylläoleviin muotoihin, kuten Klump ja Preissler (2000) artikkelissaan esittävät.

Valitaan jatkossa CES-tuotantofunktion muoto, joka on yhtenevä Arrow ym. (1961) käyttämän määritelmän kanssa. Näin voidaan tehdä, sillä mikä tahansa yhtälöön (3.2) perustuva CES-tuotantofunktio on yhtenevä nyt valittavien funktiomuotojen kanssa. Lisäksi myöhemmin selviää, että kyseinen muoto on yhteensopiva CES-funktioiden normalisoinnissa käytetyn muodon kanssa. Jatkossa käytetään siis tuotantofunktiota

$$Y = C\,[\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}]^{1/\psi}, \tag{3.4}$$

missä $\alpha = 1/(1+\gamma_2)$ ja $C = \gamma_1(1+\gamma_2)^{1/\psi}$. Parametrit saavat arvoja väleiltä $\alpha \in [0,1]$ ja $C \in [0,\infty[$. Substituutiojoustoa kuvaava muuttuja ψ vaihtelee välillä $]-\infty,1]$.

3.2.2 CES-tuotantofunktion ominaisuuksia

Esitellään nyt lyhyesti CES-tuotantofunktioiden matemaattisia ominaisuuksia. Tuotannon mallintamiseen käytettävän CES-funktioiden ominaisuudet määräävät pitkälti syntyvän talouskasvun luonteen. Lasketaan ensin

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial K} &= C\alpha K^{\psi-1}[\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}]^{(1-\psi)/\psi} \\ &= C\alpha[\alpha + (1-\alpha)(L/K)^{\psi}]^{(1-\psi)/\psi} > 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial L} &= C(1-\alpha)L^{\psi-1}[\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}]^{(1-\psi)/\psi} \\ &= C\alpha[\alpha(K/L)^{\psi} + (1-\alpha)]^{(1-\psi)/\psi} > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ylläolevista osittaisderivaatoista nähdään, että molempien tuotannontekijöiden rajatuotot ovat positiiviset kaikilla mahdollisilla K:n ja L:n arvoilla (luonnollisesti oletetaan, että sekä pääoma että työvoima ovat aidosti positiivisia).

Edelleen voidaan laskea CES-tuotantofunktion toiset derivaatat tuotannontekijöiden suhteen:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} = \alpha(1-\alpha)C(\psi-1)L^{\psi}K^{\psi-2}[\quad]^{1/\psi-2} < 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} = \alpha(1-\alpha)C(\psi-1)L^{\psi-2}K^{\psi}[\quad]^{1/\psi-2} < 0, \tag{3.8}$$

missä $[\quad] \doteq [\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}] > 0$. Derivaattojen negatiivisuus seuraa termistä

Tuotannontekijä	Raja-arvo	$\psi < 0$	$\psi > 0$
K	$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial F}{\partial K}$ $\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K}$	0 $C\alpha^{1/\psi}$	$C\alpha^{1/\psi}$ ∞
L	$\lim_{L\to\infty} \frac{\partial F}{\partial L}$ $\lim_{L\to 0} \frac{\partial F}{\partial L}$	0 $C(1-\alpha)^{1/\psi}$	C $(1-\alpha)^{1/\psi}$ ∞

Taulukko 3.1: *Tuotannontekijöiden rajatuottavuuksien raja-arvot CES-tuotantofunktioille*

$(\psi - 1)$, sillä määritelmän mukaisesti $\psi < 1$. Ensimmäisten ja toisten derivaattojen perusteella voidaan sanoa, että CES-tuotantofunktiolla on neoklassisen tuotantofunktion ominaisuuksia: tuotannontekijöiden lisääminen kasvattaa tuotantoa, mutta näiden lisäysten rajatuotot laskevat koko ajan. Epäyhtälöt (3.7) ja (3.8) osoittavat myös CES-tuotantofunktion olevan *konkaavi* kaikilla pääomaintensiteetin ja työvoiman arvoilla.

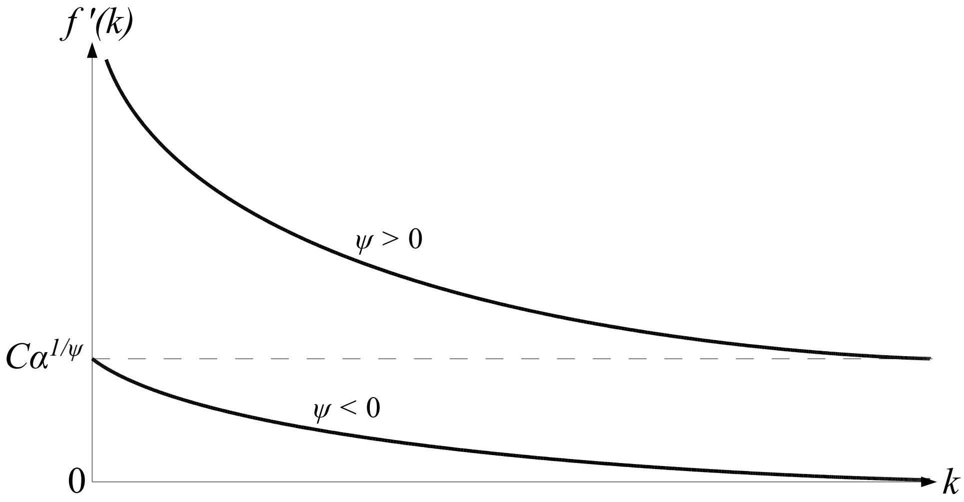
Lasketaan vielä tuotannontekijöiden rajatuottavuuksien raja-arvot, kun $K,L \to \infty$ ja $K,L \to 0$. Nämä raja-arvot näkyvät taulukossa 3.1. CES-tuotantofunktiot rikkovat neoklassisen tuotantofunktion *Inada-ehtoja*, kun substituutiojousto $\sigma \neq 1$, jolloin siis $\psi \neq 0$. Inada-ehtojen mukaan rajatuottavuuden tulee asymptoottisesti laskea nollaan pääomavarannon (tai työvoiman) kasvaessa ja vastaavasti lähestyä ääretöntä pääomavarannon ollessa lähellä nollaa. Käytännössä kyse on (asymptoottisesti) laskevista rajatuotoista. Taulukon 3.1 epäyhtälöistä havaitaan, että näin ei käy CES-funktioiden tapauksessa. Kuten tullaan näkemään, juuri tämä ominaisuus on välttämätön muttei riittävä ehto endogeenisen kasvun syntymiselle.

Inada-ehtojen täyttämättömyys tapauksessa $\psi > 0$ merkitsee, että tuotannon rajatuotot eivät laske nollaan pääoman kertyessä. Laskevat rajatuotot eivät siis rajoita tuotannon kasvua, joten talous kasvaa tällöin potentiaalisesti endogeenisesti teknologisesta kehityksestä riippumatta. Vastaavasti, kun $\psi < 0$, ei talous välttämättä saavuta edes tasaisen kasvun tilaa, vaan pienenee asymptoottiseti kohti nollaa. Tässä tutkielmassa jätetään systemaattisesti käsittelemättä tapaus $\psi = 0$, sillä se vastaa Cobb–Douglas-tuotantofunktiota. Inada-ehdot pätevät Cobb–Douglas-funktioille, jotka siten täyttävät neoklassisen tuotantofunktion ehdot.

Kun $\psi > 0$, on

$$\lim_{K\to\infty} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{k\to\infty} f'(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = C\alpha^{1/\psi}, \tag{3.9}$$

eli myös rajatuottavuus ja keskimääräinen tuottavuus ovat asymptoottisesti alhaaltapäin rajoitettuja. Ylläolevat lasketut raja-arvot ovat hyödyllisiä pääteltäessä, päätyykö



Kaavio 3.2: *CES-tuotantofunktion rajatuottavuus substituutiojouston eri arvoilla*

talous lopulta jatkuvan vai tasaisen kasvun tilaan. Kun taas $\psi < 0$, on

$$\lim_{K\to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \lim_{k\to 0} f'(k) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k)}{k} = C\alpha^{1/\psi}. \tag{3.10}$$

Yllä laskettuja raja-arvoja ja yleensä CES-tuotantofunktioiden rajatuottavuutta voidaan havainnollistaa kaavion 3.2 avulla. Kaavioon on katkoviivalla piirretty asymptoottista rajatuottavuutta kuvaava viiva $f'(k) = C\alpha^{1/\psi}$. Tämä arvo on olennainen luvuissa 3.3 ja 3.4 tarkasteltaessa malleissa syntyvää pitkän tähtäimen talouskasvua.

Tarkastellaan nyt CES-tuotantofunktioiden vaikutusta tuotannontekijöiden väliseen tulonjakoon. Olkoon tarkasteltava kansantalous yhden sektorin täydellisen kilpailun markkina, jonka lopputuotetta käytetään sekä kulutuksessa että investoinneissa. Lisäksi lopputuotetta käytetään arvonmäärittäjänä (numeraire), joten sen arvo määritellään ykköseksi. Yrityssektorin optimointiongelma voidaan tällöin kirjoittaa muodossa

$$\max_{K,L} \Pi = F(K,L) - rK - wL,$$

missä r on pääoman korkokanta ja w on työvoiman palkkataso. Tuotantofunktiona $F(K,L)$ käytetään yhtälöä (3.4). Koska myös raha- ja työmarkkinat oletetaan täydellisen kilpailluiksi, yritykset ottavat palkka- ja korkotason annettuina ja maksimoivat voittoaan valitsemalla käytettävät tuotannontekijöiden määrät K ja L.

Tasapainotilan ensimmäisen kertaluvun ehdoista $\partial\Pi/\partial K = 0$ ja $\partial\Pi/\partial L = 0$ voidaan laskea korkokanta ja palkkataso tasapainossa:

$$r = \frac{\partial F}{\partial K} = \alpha C K^{\psi-1} [\quad]^{1/\psi-1}, \tag{3.11}$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial L} = (1-\alpha) C L^{\psi-1} [\quad]^{1/\psi-1}, \tag{3.12}$$

missä $[\quad] \doteq [\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}] > 0$. Näiden avulla voidaan laskea pääoman ja työvoiman osuudet kokonaistuloista:

$$\frac{rK}{Y} = \frac{\alpha K^{\psi}}{\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}} = \frac{1}{1+\tilde{\alpha} k^{-\psi}}, \tag{3.13}$$

$$\frac{wL}{Y} = \frac{(1-\alpha)L^{\psi}}{\alpha K^{\psi} + (1-\alpha)L^{\psi}} = \frac{1}{1+\tilde{\alpha}^{-1} k^{\psi}}, \tag{3.14}$$

missä $\tilde{\alpha} \doteq (1-\alpha)/\alpha$. CES-tuotantofunktioilla pääoman ja työvoiman tulo-osuudet eivät siis pysy vakiona, vaan riippuvat kasvasta pääomaintensiteetistä yhtälöiden (3.13) ja (3.14) mukaisesti. Mikäli $\sigma \to 1$, $\psi \to 0$ ja tulo-osuudet lähestyvät vakioarvoja $rK/Y = \alpha$ ja $wL/Y = 1-\alpha$. Nämä vastaavat tavallisen Cobb-Douglas-tuotantofunktion tapausta.

Pääoman osuus kokonaistuloista riippuu paitsi pääomaintensiteetistä myös substituutiojoustosta. Matalan substituutiojouston tapauksessa ($\psi < 0$) osuus lähestyy arvoa 0 kun $k \to \infty$. Vastaavasti korkean substituutiojouston tapauksessa ($\psi > 0$) osuus lähestyy arvoa 1. Täten riippuen substituutiojouston tasosta pääoman tulo-osuus joko pienenee merkityksettömäksi tai muodostuu lopulta kokonaistulojen suuruiseksi.

Erityisesti voidaan vielä laskea korko- ja palkkatason välinen suhde $r/w = \alpha/(1-\alpha)k^{\psi-1}$. Koska $\psi < 1$, on tämä suhde aina laskeva pääomaintensiteetin suhteen. Täten korko- ja palkkatason suhde lähestyy arvoa 0 kun $k \to \infty$.

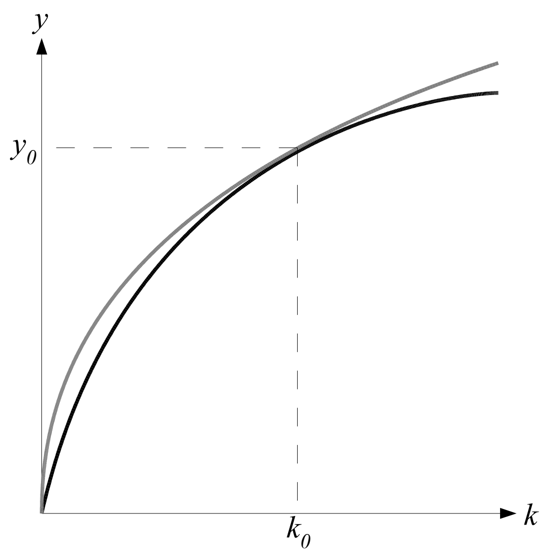
3.2.3 CES-tuotantofunktioiden normalisointi

Eri lähteet ovat käyttäneet CES-tuotantofunktioille hyvinkin erilaisia määritelmiä, mikä on omalta osaltaan hankaloittanut näiden funktioiden käyttöä ja tulosten suoraa vertailua. Funktion tarkka muoto nimittäin vaikuttaa saataviin tuloksiin. Esimerkkejä erilaisista määritelmistä on taulukossa 3.2. Suurin osa käytetyistä määritelmävarianteista voidaan kuitenkin palauttaa luvussa 3.2.1 johdettuun CES-funktion yleiseen muotoon valitsemalla parametrit sopivasti.

Vaikka useimmat variantit voidaankin käsitellä yleisen muodon avulla, jää kuitenkin edelleen epäselväksi, riippuvatko tuotantofunktion parametrit substituutiojoustos-

Pitchford (1960)	$Y = (aK^{\Psi} + bL^{\Psi})^{1/\Psi}$
Arrow ym. (1961)	$Y = C[\alpha K^{\Psi} + (1-\alpha)L^{\Psi}]^{1/\Psi}$
David ja van de Klundert (1965)	$Y = [(BK)^{\Psi} + (AL)^{\Psi}]^{1/\Psi}$
Barro ja Sala-i-Martin (2004)	$Y = C\{\alpha(BK)^{\Psi} + (1-\alpha)[(1-B)L]^{\Psi}\}^{1/\Psi}$

Taulukko 3.2: *CES-tuotantofunktioiden variantteja (artikkelista Klump ja Preissler (2000))*



Kaavio 3.3: *Kaksi CES-funktiota, joilla on samat alkuarvot* $\{y_0, k_0, \mu_0\}$ *(lähde: Papageorgiou ja Saam (2005).*

ta. Epäselvyydestä voidaan päästä eroon käyttämällä CES-tuotantofunktion *normalisointia* de La Grandvillen (1989) esittämällä tavalla. Käytännössä normalisointi tarkoittaa, että CES-funktio kiinnitetään yhdestä pisteestään alkuarvojensa avulla. Tämän jälkeen kaikki yhteen *CES-funktioperheeseen* kuuluvat funktiot kulkevat tämän pisteen kautta ja eroavat toisistaan vain substituutiojoustoltaan. Substituutiojouston taso määrää, kuinka ”suora” kiinnityspisteen läpi kulkeva funktio on. Esimerkki normalisoiduista samaan perheeseen kuuluvista CES-funktioista on kaaviossa 3.3.

Käytetään CES-funktioiden normalisointiin Klumpin ja Preisslerin (2000) käyttämää metodia. Normalisoinnissa CES-funktiot kirjoitetaan alkuehtojensa avulla, jolloin nähdään myös tuotantofunktion parametrien todellinen riippuvuus substituutiojoustosta. Funktiomuodosta (3.4) voidaan johtaa yhtälöt parametreille C ja α substituutiojouston σ funktiona. Aloitetaan laskemalla pääoman ja työvoiman välinen rajasubstituutiosuhde (MRTS) alkuhetkellä. Rajasubstituutiosuhteen määritelmästä saadaan

$$\mu_0 \doteq \left(\frac{F_L}{F_K}\right)_0 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1-\psi}.$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista

$$\alpha(\sigma) \doteq \frac{K_0^{1-\psi}}{K_0^{1-\psi} + \mu_0 L_0^{1-\psi}} = \frac{k_0^{1-\psi}}{k_0^{1-\psi} + \mu_0}. \tag{3.15}$$

Vastaavasti alkuhetken $t = 0$ tuotannon lausekkeesta

$$Y_0 = C[\alpha(\sigma)K_0^{\psi} + [1-\alpha(\sigma)]L_0^{\psi}]^{1/\psi}$$

voidaan sijoittamalla $\alpha(\sigma)$ ratkaista

$$C(\sigma) \doteq Y_0 \left[\frac{K_0^{1-\psi} + \mu_0 L_0^{1-\psi}}{K_0 + \mu L_0}\right]^{1/\psi} = y_0 \left[\frac{k_0^{1-\psi} + \mu_0}{k_0 + \mu_0}\right]^{1/\psi}. \tag{3.16}$$

Ylläolevissa lausekkeissa on siis johdettu eksplisiittisesti parametrien C ja α riippuvuus substituutiojoustosta σ. Määrätyt alkuarvot $\{K_0, L_0, Y_0, \mu_0\}$ tai $\{k_0, y_0, \mu_0\}$ määrittelevät yhden *CES-tuotantofunktioperheen*, jonka jäsenet eroavat toisistaan ainoastaan substituutiojouston σ suhteen.

On tärkeää huomata, että parametrit C ja α riippuvat substituutiojoustosta. Jos ne oletettaisiin riippumattomiksi vakioiksi, päädyttäisiin substituutiojouston vaikutuksia tarkasteltaessa vertailemaan funktioita *eri funktioperheistä*. Tällöin johtopäätökset eivät välttämättä pitäisi paikkaansa (Klump ja Preissler, 2000). Normalisoimalla CES-tuotantofunktio tässä esitetyllä tavalla vältytään virheellisiltä tulkinnoilta.

Sijoittamalla $C(\sigma)$ ja $\alpha(\sigma)$ yhtälöön (3.4) saadaan tässä tutkielmassa käytetty muoto CES-tuotantofunktiolle:

$$Y = F(K, L, \sigma, Y_0, K_0, \mu_0) = C(\sigma)\left[\alpha(\sigma)K^{\psi} + (1-\alpha(\sigma))L^{\psi}\right]^{1/\psi}. \tag{3.17}$$

Tuotantofunktion (3.17) parametrin $C(\sigma)$ voidaan tulkita kuvaavan tuotannon yleistä tehokkuutta Hicks-neutraalilla tavalla. Parametri $\alpha(\sigma)$ taas kuvaa kokonaistulojen jakautumista tuotannontekijöiden kesken.

Eräs CES-tuotantofunktioiden käyttämisen etu on, että yhden CES-tuotantofunktioperheen sisällä voidaan samanaikaisesti käsitellä erikoistapauksina myös muita tavallisimpia tuotantofunktioita taulukon 3.3 mukaisesti. Nämä erikoistapaukset voidaan laskea raja-arvoina yleisestä CES-tuotantofunktiosta.

Jakamalla yhtälö (3.17) työvoimalla L saadaan talouden tuotantoyhtälö intensiivisessä muodossa:

$$y = f(k, \sigma, y_0, k_0, \mu_0) = C(\sigma)\left[\alpha(\sigma)k^{\psi} + (1-\alpha(\sigma))\right]^{1/\psi}. \tag{3.18}$$

$\sigma \to 0$	$(\psi \to -\infty)$	Walras-Leontief -tuotantofunktio:	$Y = Y_0 \min\left[K/K_0, L/L_0\right]$
$\sigma \to 1$	$(\psi \to 0)$	Cobb-Douglas -tuotantofunktio:	$Y = Y_0 (K/K_0)^{\beta} (L/L_0)^{1-\beta}$
$\sigma \to \infty$	$(\psi \to 1)$	von Neumannin tuotantofunktio:	$Y = Y_0 \left[\beta(K/K_0) + (1-\beta)(L/L_0)\right]$

Taulukko 3.3: *Yhden normalisoidun CES-tuotantofunktioperheen jäseniä. Mukailtu artikkelista Klump ja Preissler (2000).* $\beta = \alpha(1) = K_0/(K_0 + \mu_0 L_0)$.

Jatkossa tarkastellaan CES-tuotantofunktioita saman funktioperheen sisällä substituutiojouston σ vaihdellessa eli alkuarvojen $\{k_0, y_0, \mu_0\}$ oletetaan pysyvän vakiona.

3.3 CES-tuotantofunktiot ja Solow-Swan-kasvumalli

CES-tuotantofunktioiden vaikutusta talouskasvuun Solow-Swan-kasvumallissa tarkasteltiin jo Solow'n (1956) alkuperäisessä artikkelissa. Tässä luvussa tarkastelu tapahtuu yleisellä tasolla ja se perustuu CES-tuotantofunktioiden luvussa 3.2.3 esiteltyihin normalisoituihin CES-funktioihin. Luku perustuu pitkälti Klumpin ja Preisslerin (2000) artikkeliin, joka on hyvä yhteenveto CES-tuotantofunktioiden ja substituutiojouston vaikutuksista talouskasvuun.[6]

3.3.1 Mallin määrittely

Tarkastellaan seuraavissa luvuissa CES-tuotantofunktion vaikutusta talouskasvuun Solow'n kasvumallissa. Tällöin pääoma siis kasaantuu yhtälön

$$\dot{K} = sY - (n+\delta)K$$

mukaisesti, missä δ on poistojen osuus pääomasta, n on väestön (ja työvoiman) kasvunopeus, joka oletetaan vakioksi ja s on tuotannosta säästettävä ja investoitava osuus, joka myös tavalliseen tapaan oletetaan vakioksi. Talouden kokonaiskulutus on $C = (1-s)Y$.[7] Kaikki investoimattomat varat kulutetaan saman tien. Työvoima on täystyöllistetty: työn tarjonta on joustamatonta eikä vapaa-aikaa ole.

[6] CES-funktioiden ominaisuudet ja substituutiojouston vaikutus talouskasvuun voidaan laajentaa *muuttuvasubstituutiojoustoisiin (variable elasticity of substitution, VES)* -funktioihin (Karagiannis ym., 2005). Tällä laajennuksella ei ole vaikutusta talouskasvun ennusteisiin. Toinen vaihtoehtoinen laajennus on voidaan käyttää useampitasoisia (nested) CES-funktioita (Papageorgiou ja Saam, 2005). Tällöinkään ennusteet eivät merkittävästi muutu.

[7] Säästäminen ja kulutus voidaan tehdä endogeenisiksi käyttämällä esimerkiksi Ramsayn kasvumallia, jota käsitellään luvussa 3.4.

Jakamalla pääoman kasaantumisyhtälö työvoimalla L saadaan yhtälö pääomaintensiteetin kehitykselle:

$$\dot{k} = sy - (n+\delta)k.$$

Käyttämällä nyt CES-tuotantofunktion intensiivimuotoista määritelmää (3.18) saadaan pääomaintensiteetin liikeyhtälö

$$\dot{k} = sC(\sigma)\left[\alpha(\sigma)k^{\psi} + (1-\alpha(\sigma))\right]^{1/\psi} - (n+\delta)k. \tag{3.19}$$

Koska $y = f(k)$, voidaan kansantalouden tuotannon kehitystä työntekijää kohden tarkastella käyttämällä pääomaintensiteettiä, jonka kehityksen määrää yhtälö (3.19).

Kirjoitetaan pääomaintensiteetin kasvunopeudelle yhtälö

$$g_k \doteq \frac{\dot{k}}{k} = sC(\sigma)\left[\alpha(\sigma) + (1-\alpha(\sigma))k^{-\psi}\right]^{1/\psi} - (n+\delta). \tag{3.20}$$

Tästä voidaan laskea pääomaintensiteetin vaikutus kasvunopeuteen:

$$\frac{\partial g_k}{\partial k} = -sC(\sigma)k^{-\psi-1}\left[\alpha(\sigma) + (1-\alpha(\sigma))k^{-\psi}\right]^{(1-\psi)/\psi} < 0,$$

joten CES-tuotantofunktioiden käyttäminen ei muuta Solow-Swan–mallin (ehdollista) konvergenssiennustetta. Pidettäessä muut tekijät pysyvät vakiona kansantalous kasvaa edelleen sitä nopeammin, mitä pienempi sen suhteellinen pääomaintensiteetti on alkuhetkellä.

Substituutiojouston yleiselle vaikutukselle talouskasvuun todistetaan liitteessä B seuraava väittämä[8]:

Väittämä 1. *Olkoon kaksi maata, joiden taloutta voidaan kuvata CES-tuotantofunktiolla, ja joiden talouksien alkuarvot (pääomaintensiteetti k_0, väestönkasvunopeus n ja säästämisaste s) ovat samat substituutiojoustoa lukuun ottamatta. Tällöin substituutiojoustoltaan korkeamman maan pääomaintensiteetti on aina suurempi.*

Väite seuraa derivoimalla pääomaintensiteetin liikeyhtälöä (3.19) substituutiojouston suhteen. Liitteessä B johdetaan tulos $\partial f(k)/\partial\sigma > 0$ kaikilla $k \neq k_0$. Täten substituutiojoustoltaan korkeamman maan pääomaintensiteetti kasvaa aina nopeammin. Koska alkutilanteessa maiden pääomaintensiteettien on oletettu olevan yhtä suuret, seuraa nopeammasta kasvusta, että nopeammin kasvavassa maassa pääomaintensiteetti on aina korkeampi.

[8] Väittämä on alunperin artikkelista (Klump ja de La Grandville, 2000).

3.3.2 Endogeenisen talouskasvun esiintyminen

Tarkastellaan nyt, millä ehdoilla talous päätyy *tasaisen kasvun tilaan (steady state)*, jolloin kaikki talouden reaaliarvoiset suureet kasvavat samalla nopeudella. Erityisesti pääomavaranto kasvaa tällöin samalla nopeudella kuin väestö. Tästä seuraa, että tasaisen kasvun tilassa pääomaintensiteetti on vakio. Oletetaan, että talous päätyy tähän tasaisen kasvun tilaan. Tällöin siis $g_k = \dot{k} = 0$. Yhtälöstä (3.19) saadaan tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetille k^* yhtälö

$$[\alpha(\sigma)(k^*)^\psi + (1-\alpha(\sigma))]^{1/\psi} = \frac{n+\delta}{sC(\sigma)} \cdot k^*, \tag{3.21}$$

mistä voidaan ratkaista

$$k^* = \left\{ \frac{1}{1-\alpha(\sigma)} \left[\left(\frac{n+\delta}{sC(\sigma)} \right)^\psi - \alpha(\sigma) \right] \right\}^{-1/\psi}. \tag{3.22}$$

Mahdollinen tasaisen kasvun tila on yksikäsitteinen, sillä tuotantofunktio $y = C(\sigma)\left[\alpha(\sigma)k^\psi + (1-\alpha(\sigma))\right]^{1/\psi}$ on konkaavi k:n suhteen (katso yhtälöt (3.7) ja (3.8)) ja termi $(n+\delta)k$ on lineaarinen k:n suhteen.

Mikäli $\sigma = 1$, palautuu CES-tuotantofunktio Cobb-Douglas-funktioksi, jolle yksikäsitteinen tasaisen kasvun tila on aina olemassa. Jos taas $\sigma \neq 1$, riippuu tasaisen kasvun tilan olemassaolo liikeyhtälön (3.19) parametreistä. Erotetaan kaksi tapausta, korkean substituutiojouston tapaus, $\sigma > 1$, ja matalan substituutiojouston tapaus, $\sigma < 1$. (Näitä tapauksia vastaavat muuttujan ψ arvot $\psi > 0$ ja $\psi < 0$.) Ensimmäinen CES-tuotantofunktioiden talouskasvua koskeva tulos voidaan nyt esittää muodossa:

Väittämä 2. *Kun $\sigma > 1$, korkeampi substituutiojousto nostaa todennäköisyyttä sille, että liikeyhtälön (3.19) kuvaama talous kasvaa endogeenisesti rajatta, toisin sanoen $k \to \infty$ ja $g_k > 0$ $\forall k$. Kun $\sigma < 1$, substituutiojouston nouseminen nostaa todennäköisyyttä sille, että talous välttää jatkuvan pienentymisen tilan, jossa $g_k < 0$ $\forall k$ ja $k^* = 0$, ja päätyy sen sijaan tasaisen kasvun tilaan.*

Väite voidaan todentaa tarkastelemalla yhtälöä (3.22) korkean ja matalan substituutiojouston tapauksissa. Koska $k \geq 0$ eli myös $k^* \geq 0$, saadaan yhtälöstä (3.22) tasaisen kasvun tilan olemassaoloehdoksi korkean substituutiojouston tapauksessa ($\sigma > 1$)

$$C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} < \left(\frac{n+\delta}{s} \right). \tag{3.23}$$

Muistetaan vielä lisäksi, että

$$\lim_{k\to\infty} f'(k) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(k)}{k} = C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi},$$

eli raja-arvoa $k \to \infty$ vastaavan Inada-ehdon rikkominen ei siis ole vielä riittävä ehto endogeenisen kasvun syntymiseksi Solow-Swan-kasvumallissa. Jatkuva kasvu syntyy vasta ehdon $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} > (n+\delta)/s$ täyttyessä. Tällöin talouden pääomaintensiteetti ja tuotanto henkeä kohden kasvavat rajatta.

Syntyvä jatkuva kasvu perustuu siihen, että korkean substituutiojouston ansiosta yhä harvemmaksi käyvä työvoima voidaan korvata tehokkaasti kertyvällä pääomalla. Pääoman rajatuotot eivät tällöin laske nollaan, vaan pysyy aidosti positiivisena. Jos lisäksi ehto (3.23) ei täyty, ovat rajatuotot riittävän korkeat pitkällä tähtäimellä pitääkseen pääomaintensiteetin kasvunopeuden positiivisena. Tavallisesti neoklassisessa kasvuteoriassa käytettävän Cobb-Douglas–tuotantofunktion pääoman rajatuotot sen sijaan laskevat aina nollaan, joten se ei pysty tuottamaan endogeenistä kasvua ilman teknologista kehitystä.

Mikäli substituutiojousto pysyy vakiona, nähdään ehdosta (3.23), että väestönkasvun nopeutuminen ja poistojen osuuden lisääntyminen pienentävät endogeenisen kasvun syntymisen todennäköisyyttä. Säästämisasteen nostaminen taas nostaa tätä todennäköisyyttä. Jos taas epäyhtälö (3.23) pätee, talous konvergoi tasaisen kasvun tilaan, jossa $g_k^* \doteq \lim_{t\to\infty} g_k = 0$. Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan esiintymiseen nähdään derivoimalla siitä riippuvaa termiä[9]:

$$\frac{\partial[C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi}]}{\partial\sigma} = \frac{y_0}{(\sigma-1)^2}\left[\frac{k_0^{1-\psi}}{k_0+\mu_0}\right]^{1/\psi} \ln\left(1+\frac{\mu_0}{k_0}\right) > 0. \tag{3.24}$$

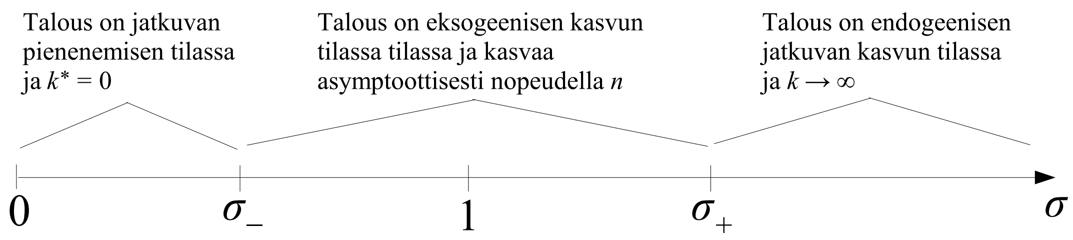
Korkeampi substituutiojousto tekee siis jatkuvan kasvun todennäköisemmäksi.

Kun taas $\sigma < 1$, voidaan yhtälöstä (3.21) vastaavasti johtaa ehto tasaisen kasvun tilan olemassaololle. Nyt

$$C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} > \left(\frac{n+\delta}{s}\right). \tag{3.25}$$

Mikäli ehto (3.25) ei täyty, toisin sanoen $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} < (n+\delta)/s$, on $\dot{k} < 0$ ja pääomaintensiteetti pienenee jatkuvasti, kunnes saavutetaan tasapainotila $k^* = 0$. Yhtälön

[9] Klumpin ja Preisslerin (2000) artikkelissa on tässä kohtaa virhe: vertaa lausekkeen $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi}$ auki kirjoitettua muotoa artikkelin yhtälöissä (8) ja (9). Tämän vuoksi artikkelin yhtälö (8) ja tämän tutkielman yhtälö (3.24) eroavat toisistaan. Varsinaiseen johtopäätökseen substituutiojouston vaikutuksesta jatkuvan kasvun todennäköisyyteen mainittu virhe ei vaikuta.



Kaavio 3.4: *Substituutiojouston σ vaikutus talouskasvuun Solow-Swan-kasvumallissa*

(3.24) perusteella voidaan päätellä, että korkeampi substituutiojousto pienentää todennäköisyyttä joutua tähän jatkuvan pienemisen tilaan. Kuten korkean substituutiojoustonkin tapauksessa, Inada-ehtoa rikotaan — tällä kertaa tapauksessa $k \to 0$:

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \lim_{k\to 0} \frac{f(k)}{k} = C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} < \infty.$$

Ehdon rikkominen ei vielä merkitse, että talous joutuisi automaattisesti jatkuvan pienenmisen tilaan. Mikäli ehto (3.25) pätee, päädytään sen sijaan tasaisen kasvun tilaan.

Yllä esitetyn perusteella voidaan päätellä, että korkeampi substituutiojousto tekee jatkuvan kasvun todennäköisemmäksi (tai jatkuvan pienemisen epätodennäköisemmäksi). Jos substituutiojousto on riittävän korkea siirtyy talous jatkuvan endogeenisen kasvun tilaan. Eri tiloja voidaan havainnollistaa kaavion 3.4 avulla. Kaaviossa tasaisen kasvun ehtoja (3.23) ja (3.25) vastaavia substituutiojouston arvoja on merkitty σ_+:lla ja σ_-:lla.[10]

Yhtälöistä (3.23) ja (3.25) nähdään, että myös talouden muiden parametrien muuttuminen vaikuttaa syntyvän talouskasvun tilaan. Substituutiojouston pysyessä vakiona säästämisasteen nostaminen ja väestönkasvun hillitseminen nostavat todennäköisyyttä päästä jatkuvan kasvun tilaan tai välttää jatkuvan pienenemisen tila, riippuen substituutiojouston tasosta. Näin ollen talouspolitiikalla voidaan ainakin epäsuorasti vaikuttaa jatkuvan kasvun syntymiseen.

3.3.3 Jatkuvan kasvun nopeus

Edellisessä luvussa havaittiin, että korkeampi substituutiojousto tekee endogeenisen kasvun todennäköisemmäksi. Mikäli siirrytään tällaisen jatkuvan kasvun tilaan, riippuu pitkän tähtäimen (kun $k \to \infty$) kasvunopeus substituutiojoustosta. Tämä voidaan tiivistää väittämässä 2.

[10] Tarkat σ_+:n ja σ_-:n arvot voitaisiin ratkaista implisiittisesti yhtälöstä $(n+\delta)/s = C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi}$, huomioiden ehdot $\sigma > 1$ ja $\sigma < 1$.

Väittämä 3. *Mikäli $\sigma > 1$ ja $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} > (n+\delta)/s$, on talous jatkuvan kasvun tilassa, jolloin pääomaintensiteetti kasvaa aina aidosti positiivisella nopeudella. Tällöin korkeampi substituutiojousto nostaa pääomaintensiteetin ja kokonaistuotannon pitkän tähtäimen (asymptoottista) kasvunopeutta g_k^*.*

Väite voidaan todistaa toteamalla ensin, että kun $g_k > 0$, kasvaa pääomaintensiteetti rajatta, kun $t \to \infty$. Näin ollen riittää tarkastella raja-arvoa $\lim_{k\to\infty} g_k$. Jaetaan yhtälö (3.19) pääomaintensiteetillä k ja tarkastellaan raja-arvoa $k \to \infty$. Lopputulokseksi saadaan

$$g_k^* \doteq \lim_{k\to\infty} \frac{\dot{k}}{k} = s\left[C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} - \frac{n+\delta}{s}\right] > 0 \quad \text{kun } C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} > \left(\frac{n+\delta}{s}\right). \tag{3.26}$$

Soveltamalla tähän aiemmin saatua tulosta $\partial[C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi}]/\partial\sigma > 0$ (yhtälö (3.24)) nähdään, että $\partial g_k^*/\partial\sigma > 0$. Substituutiojouston nostaminen siis kiihdyttää pitkän tähtäimen kasvunopeutta. Toisin sanoen korkeampi substituutiojousto paitsi mahdollistaa jatkuvan kasvun myös nopeuttaa sitä.

Talouden muiden parametrien vaikutus on sama kuin tarkasteltaessa talouskasvun tilaa. Yhtälöstä (3.26) nähdään, että jatkuvan kasvun tilassa korkeampi säästämisaste ja hitaampi väestönkasvu nostavat pääomaintensiteetin kasvunopeutta. Toisin kuin Cobb-Douglas–tuotantofunktioiden tapauksessa, vaikuttaa parametrien muuttuminen paitsi talouskasvun tasoon myös itse kasvunopeuteen. Talouspolitiikalla on siis mahdollisuus epäsuorasti vaikuttaa talouskasvun nopeuteen.

3.3.4 Tasaisen kasvun tilan taso

Tarkastellaan nyt substituutiojouston vaikutusta tasaisen kasvun tilaan. Oletetaan siis, että jompi kumpi ehdoista (3.23) ja (3.25) on voimassa, riippuen substituutiojouston tasosta. Tällöin tasaisen kasvun tila on CES-tuotantofunktion konkaaviuden perusteella yksikäsitteisesti olemassa. Tasaisen kasvun tilalle pätee

Väittämä 4. *Mikäli tasaisen kasvun tila on olemassa, nostaa korkeampi substituutiojousto tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetin (ja kokonaistuotannon työntekijää kohden) tasoa.*

Väittämä voidaan todistaa laskemalla derivaatta $\partial k^*/\partial\sigma$. Liitteessä C johdetaan väittämän vahvistava tulos

$$\frac{\partial k^*}{\partial \sigma} > 0.$$

Substituutiojousto	$\sigma < 1$	$\sigma = 1$ (CD)	$\sigma > 1$
Tasaisen kasvun olemassaolo	Kun $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} > (n+\delta)/s$	Aina	Kun $C(\sigma)\alpha(\sigma)^{1/\psi} < (n+\delta)/s$
Tasaisen kasvun tila	$k^* = \left[\frac{1-\alpha(\sigma)}{\alpha(\sigma)} \frac{\pi^*}{1-\pi^*}\right]^{1/\psi}$ kun olemassa, muuten $k^* = 0$	$k^* = \left[\frac{sC(1)}{n+\delta}\right]^{1/(1-\beta)}$	$k^* = \left[\frac{1-\alpha(\sigma)}{\alpha(\sigma)} \frac{\pi^*}{1-\pi^*}\right]^{1/\psi}$ kun olemassa, muuten $k \to \infty$
Tasaisen kasvun taso	$\frac{\partial k^*}{\partial \sigma} > 0$	Ei vaikuta	$\frac{\partial k^*}{\partial \sigma} > 0$
Jatkuvan kasvun nopeus	Ei esiinny	Ei esiinny	$\frac{\partial g_k}{\partial \sigma} > 0$

Taulukko 3.4: *Substituutiojouston vaikutus talouskasvuun*

Ylläoleva tulos on voimassa, kun $k^* \neq k_0$. Substituutiojousto vaikuttaa siis positiivisesti tasaisen kasvun tilan tasoon. Edellisten kolmen luvun tulokset voidaan koostaa taulukoksi 3.4, josta nähdään, että substituution pienetkin poikkeamat arvosta $\sigma = 1$ voivat saada aikaan merkittäviä muutoksia talouskasvussa.

3.3.5 Konvergenssinopeus

Edellisten tulosten jälkeen auki jää vielä kysymys siitä, kuinka nopeasti talous konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaa, kun tuo tila on olemassa sekä vaikuttaako substituutiojousto konvergenssinopeuteen. Havaitaan, että vaikutus ei ole yksikäsitteinen, vaan riippuu talouden alkuehdoista (pääomaintensiteetistä ja tuotannosta työntekijää kohden). Substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen voidaan tiivistää muodossa

Väittämä 5. *Kun tasaisen kasvun tila on olemassa, talous konvergoi sitä kohden. Konvergenssinopeus riippuu tällöin substituutiojoustosta sekä suhteellisen pääomaintensiteetin alkutilan ja tasaisen kasvun tilan välisestä suhteesta. Mikäli pääomaintensiteetti tasaisen kasvun tilassa on matalampi kuin alkutilassa, nostaa korkeampi substituutiojousto konvergenssinopeutta. Päinvastaisessa tapauksessa korkeampi substituutiojousto hidastaa konvergenssia. Rajatapauksessa $k^* = k_0$ substituutiojoustolla ei ole vaikutusta konvergenssinopeuteen.*

Aloitetaan tarkastelu tekemällä logaritmis-lineaarinen approksimaatio[11] pääomaintensiteetin kasvunopeudelle tasaisen kasvun tilan läheisyydessä:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\mathrm{d}\ln k}{\mathrm{d}t} = s\frac{f(k)}{k} - (n+\delta) \approx -\lambda \ln\left(\frac{k}{k^*}\right), \tag{3.27}$$

[11] $f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f(x)/\mathrm{d}\ln x \cdot (\ln f(x) - \ln f(x_0))$

missä

$$\lambda = (n+\delta)(1-\pi^*) = (n+\delta)\left\{1-\alpha(\sigma)\left(\frac{sC(\sigma)}{n+\delta}\right)^{\psi}\right\}. \tag{3.28}$$

Parametri λ kuvaa siis konvergenssinopeutta[12]. Kasvunopeus konvergenssin aikana riippuu yhtälön (3.27) mukaisesti paitsi λ:n suuruudesta, myös siitä, kuinka kaukana tasaisen kasvun tilasta ollaan. Kasvunopeus on sitä suurempi, mitä kauempana tasaisen kasvun tilasta ollaan.

Lasketaan nyt substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen. Tämä tapahtuu laskemalla derivaatta $\partial\lambda/\partial\sigma$. Liitteessä C saadaan lopputulokseksi

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma} = -(n+\delta)\frac{1}{\sigma^2}\pi^* \ln\left(\frac{y_0/k_0}{y^*/k^*}\right).$$

Koska lausekkeen logaritmitermin merkki riippuu suhteesta $y_0/k_0 \cdot k^*/y^*$, lopullinen vaikutus on

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{n+\delta}{\sigma^2}\pi^* \ln\left(\frac{y_0/k_0}{y^*/k^*}\right)\begin{cases} >0 & \text{kun } k^* < k_0 \\ =0 & \text{kun } k^* = k_0 \\ <0 & \text{kun } k^* > k_0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Näin ollen substituution vaikutus konvergenssinopeuteen riippuu siitä, onko pääomaintensiteetti alkuhetkellä suurempi vai pienempi kuin tasaisen kasvun tilassa. Substituutiojousto nopeuttaa konvergenssia vain mikäli pääomaintensiteetti tasaisen kasvun tilassa on pienempi kuin alkutilassa. Pääomavarannon pitää toisin sanoen olla suhteessa matalampi kuin työvoima, kun näitä arvoja verrataan alkutilaan.

3.4 CES-tuotantofunktiot ja Ramseyn kasvumalli

Ramseyn kasvumalli[13] parantaa talouskasvun käsittelyä Solow-Swan-malliin nähden määrittelemällä kulutuksen (ja säästämisen) lähtien kotitalouksien optimoinnista ja kilpailluilla markkinoilla toimivien yritysten toiminnasta. Nyt käytettävää perusmallia voidaan laajentaa monilla tavoilla, muun muassa käyttämällä monisektorimalleja

---

[12] Yhtälö (3.28) voidaan johtaa myös eksaktisti konvergenssinopeuden määritelmästä $\lambda \doteq -\partial g_k/\partial \ln k$. Suorittamalla määritelmän mukainen derivointi ja sijoittamalla tasaisen kasvun ehdosta (yhtälö (3.22)) $g_k^* = 0$ saatava lauseke $k^{*-\psi} = [(n+\delta/sC(\sigma))^{\psi} - \alpha(\sigma)]/(1-\alpha(\sigma))$ derivoinnin tulokseen päädytään samaan lopputulokseen. Tällöin joudutaan kuitenkin olettamaan approksimointia vastaavalla tavalla, että ollaan lähellä tasaisen kasvun tilaa, jolloin voidaan hyödyntää annettua ehtoa g_k^*:lle.

[13] Alunperin mallin esitti Ramsey (1928). Mallia kutsutaan myös Ramsey-Cass-Koopmansin kasvumalliksi mallin muiden kehittäjien mukaan.

tai sisäistämällä kulutuksen lisäksi väestönkasvu.

Tässä luvussa oletetaan, että työvoiman tarjonta on inelastinen eli voimassa on täystyöllisyys, ja tuotanto tapahtuu yhdellä (täydellisen kilpaillulla) sektorilla. Käsittely perustuu pitkälti teoksessa Barro ja Sala-i-Martin (2004, luvut 2, 3, 4.5 ja 4.7) esitettyyn teoriaan, sovellettuna luvussa 3.2 esiteltyihin normalisoituihin CES-tuotantofunktioihin. Monet tarvittavista tuloksista on laskettu jo aiemmin Solow-Swan–mallin tapauksessa luvussa 3.3.

3.4.1 Mallin määrittely

Aloitetaan mallin määrittely toteamalla, että tuotannossa käytetään CES-tuotantoteknologiaa, joka on intensiivisessä (per työntekijä) muodossa identtinen Solow-Swan–kasvumallin käsittelyssä käytetyn kanssa:

$$y = f(k, \sigma, y_0, k_0, \mu_0) = C[\alpha k^{\psi} + (1-\alpha)]^{1/\psi},$$

missä parametrien C ja α riippuvuus substituutiojoustosta σ on jätetty merkitsemättä notaation yksinkertaistamiseksi. On kuitenkin hyvä pitää mielessä, että molemmat riippuvat substituutiojouston suuruudesta. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jatkossa jätetään lisäksi merkitsemättä muuttujien aikariippuvuus, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole.

Kotitaloudet

Johdetaan nyt kotitalouksien kulutukselle differentiaaliyhtälö lähtien liikkeelle hyötyfunktion ja budjettirajoitteen määrittelystä. Oletetaan, että maan kotitalouksia edustaa ikuisesti elävä (dynastinen) kotitalous. Merkitään tälle kotitaloudelle kerääntynyttä varallisuutta A:lla. Koska talouden oletetaan olevan tasapainossa, pätee kotitalouden taloudelle jokaisella hetkellä t budjettirajoite

$$\dot{A} + C = wL + rA.$$

Yhtälön vasemmalla puolella ovat kulut: investoinnit eli nettovarallisuuden lisääntyminen sekä kulutus kullakin hetkellä. Yhtälön oikealla puolella ovat kotitalouden tulot: palkkatulot wL sekä investoidusta varallisuudesta saatavat vuokratulot rA. Kotitalous siis tarjoaa kaiken työvoimansa inelastisesti; lisäksi oletetaan, että koko kertynyt varallisuus investoidaan. Työvoiman oletetaan kasvavan tasaisella nopeudella n yhtälön $L = L_0 e^{nt}$ mukaisesti.

Jakamalla työvoiman määrällä ($a \doteq A/L$) ja huomioimalla, että $\dot{a} = \dot{A}/L - na$, saadaan vastaava yhtälö intensiivisessä muodossa:

$$\dot{a} + c + na = w + ra,$$

missä kotitalouden tulot henkeä kohden (yhtälön oikea puoli) kattavat menot: varallisuuden kasvattamisen ja kulutuksen henkeä kohden sekä nykyisen pääomaintensiteetin jakamisen kasvaneelle väestölle. Kuten Solow-Swan-mallin tapauksessa luvussa 3.3, teknologista kehitystä ei tapahdu, joten työvoiman tuottavuus ei muutu.

Kotitaloudet pyrkivät maksimoimaan hyötyfunktiotaan

$$U = \int_0^\infty u[c(t)]e^{-(\rho-n)t}\mathrm{d}t, \tag{3.30}$$

missä $u[c(t)]$ on (hetkellinen) hyötyfunktio hetkellä t, $\rho \in [0,\infty[$ on kotitalouden aikapreferenssi kulutuksen suhteen. Mitä pienempi ρ on, sitä kärsivällisempi kotitalous on kulutuksensa suhteen ja valmiimpi siirtämään kulutusta tulevaisuuteen. Tekijä ρ voidaan ymmärtää myös kotitalouksien *subjektiivisena diskonttokorkona*[14]. Koska kotitaloudet kasvavat tasaisella nopeudella n, lisääntyy niiden hyöty työntekijää kohden eksponentiaalisesti. Tämä kasvusta johtuva hyödyn muutos on huomioitu ylläolevassa hyötyfunktiossa termillä e^{nt}. Jotta hyötyfunktio U:n arvo olisi äärellinen, joudutaan olettamaan $\rho > n$, sillä muutoin integraali ei saa äärellistä arvoa.

Kotitalouden optimointiongelma voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} & \max_{a(t),c(t)} \int_0^\infty u[c(t)]e^{-(\rho-n)t}\mathrm{d}t \\ \text{s.e.} \quad & \dot{a} + c + na = w + ra \\ \text{ja} \quad & \lim_{t\to\infty} a(t)e^{-\int_0^t [r(\tau)-n]\mathrm{d}\tau} = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Näistä viimeistä, niin sanottua *transversaalisuusehtoa* (*transversality condition*), tarvitaan, jotta kotitalous ei voisi loputtomasti nostaa kulutustaan lainaamalla eri tahoilta rahoittaakseen vanhojen velkojen maksun ja kulutuksen. Käytännössä ehto tarkoittaa, että kotitalouden varallisuus ei voi kasvaa nopeammin kuin $\exp([\overline{r}(t) - n]t)$, missä $\overline{r}(t) = (1/t) \cdot \int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau$, toisin sanoen keskimääräinen (vuokra)korkotaso välillä $[0,t]$.

Yllä esitetyt yhtälöt määrittelevät kuluttajan *dynaamisen optimointiongelman*. Annetusta optimointilausekkeesta ja rajoitteista voidaan johtaa seuraavat liikeyhtälöt varal-

[14] Parametri ρ voidaan ymmärtää myös kotitalouden *kärsimättömyytenä*.

lisuudelle ja kulutukselle henkeä kohden (yhtälöiden johto liitteessä D):

$$r = \rho - \frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} \cdot \frac{\dot{c}}{c}, \tag{3.32}$$

$$\dot{a} = w - c + (r - n)a. \tag{3.33}$$

Oletetaan nyt, että hetkellinen hyötyfunktio on muotoa

$$u[c(t)] = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1 - \theta}, \tag{3.34}$$

jolloin $u[c(t)]$ on *ajan suhteen vakiosubstituutiojoustoinen* (*constant intertemporal elasticity of substitution, CIES*) funktio. $\theta \in [0, \infty[$ on vakiosuuruinen substituutiokerroin, joka kuvaa kotitalouden valmiutta sietää muutoksia kulutuksessa — mitä suurempi θ on, sitä vähemmän kotitalous sietää äkillisiä muutoksia kulutuksessaan. Erikoistapauksina CIES-funktiosta saadaan muun muassa $u[c(t)] = c(t) - 1$, kun $\theta \to 0$ ja $u[c(t)] = \ln c(t)$, ja kun $\theta \to 1$. Kun $\theta \to 0$, on hyötyfunktio lineaarinen kulutuksen $c(t)$ suhteen. Kotitaloudet ovat tällöin indifferenttejä kulutuksen ajoituksen suhteen, mikäli vielä pätee $r = \rho$, jolloin yhtälöstä (3.32) seuraa $\dot{c}/c = 0$.

Kun hetkellisen hyödyn oletetaan olevan muotoa (3.34), voidaan yhtälö (3.32) kirjoittaa muodossa

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(r - \rho). \tag{3.35}$$

Yhtälöä (3.32) kutsutaan *Euler–yhtälöksi*.

Yritykset

Yritykset tuottavat talouden ainoaa lopputuotetta CES-teknologian avulla. Tuotantofunktio on siis tuttua muotoa

$$Y = F(K, L) = C[\alpha K^{\psi} + (1 - \alpha)L^{\psi}]^{1/\psi} = Lf(k).$$

Yrityksen optimointiongelmana on maksimoida tuotot palkka- ja pääomakustannusten suhteen, siis

$$\max_{K,L} \; F(K, L) - w'L - (r' + \delta)K,$$

missä δ on pääoman kulumista (poistoja) kuvaava parametri. Ensimmäisen kertaluvun ehdoiksi saadaan

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = L \cdot \frac{1}{L} f'(k) - (r' + \delta) = 0 \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = f(k) - kf'(k) - w' = 0, \tag{3.37}$$

mistä seuraavat yhtälöt $r' = f'(k^*) - \delta$ ja $w' = f(k^*) - k^* f'(k^*)$ yrityksen maksamalle korko- ja palkkatasolle. Koska työ- ja rahamarkkinat oletetaan täydellisesti kilpailluiksi, pätee $r' = r$ ja $w' = w$.

Koska nyt käsitellään suljettua taloutta, jonka hyödyke- ja rahamarkkinat ovat suljetut, on kotitalouksien varallisuus sama kuin yritysten käytössä oleva pääoma, toisin sanoen $a \equiv k$.[15] Tällöin Ramseyn talouskasvun liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa muodossa

$$\dot{k} = f(k) - c - (n + \delta)k \tag{3.38}$$

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}(f'(k) - (\rho + \delta)). \tag{3.39}$$

Näiden lisäksi kirjoitetaan vielä transversaalisuusehto eksplisiittisesti muodossa

$$\lim_{t \to \infty} k \cdot \exp\left\{ -\int_0^t [f'(k) - \delta - n] \mathrm{d}\tau \right\} = 0. \tag{3.40}$$

3.4.2 Tasaisen kasvun tilan olemassaolo

Kuten Solow-Swan –kasvumallin tapauksessa, myös Ramseyn kasvumallissa tasaisen kasvun tilan olemassaolo riippuu erityisesti substituutiojoustosta. Ramseyn mallissa tämän tuloksen johtaminen on kuitenkin hieman monimutkaisempaa kuin Solow-Swan–mallin tapauksessa. Aloitetaan kirjoittamalla kulutuksen ja pääomaintensiteetin kasvunopeudet:

$$g_k = \frac{\dot{k}}{k} = C[\alpha + (1 - \alpha)k^{-\psi}]^{1/\psi} - \frac{c}{k} - (n + \delta) \tag{3.41}$$

$$g_c = \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left[\alpha C[\alpha + (1 - \alpha)k^{-\psi}]^{(1-\psi)/\psi} - (\rho + \delta)\right]. \tag{3.42}$$

Lasketaan ensin

$$\frac{\partial g_c}{\partial k} = -\frac{\alpha C}{\theta}(1 - \alpha)(1 - \psi)k^{-\psi-1}[\alpha + (1 - \alpha)k^{-\psi}]^{(1-2\psi)/\psi} < 0.$$

[15] Avoimen talouden tapauksessa tavallisesti $a \neq k$, eli yritykset voivat hankkia pääomaa myös maan ulkopuolelta. Tällöin siis GNP ei ole sama kuin GDP.

Kotitalouksien kulutusintensiteetin kasvunopeus laskee siis tasaisesti (kaikilla k) pääomaintensiteetin kasvaessa. Säästäminen henkilöä kohden voidaan kirjoittaa muodossa $s = f(k) - c < f(k)$, sillä kulutus ei voi ylittää kokonaistuotantoa $f(k)$. Lisäksi $s \geq 0$. Näin ollen pääomaintensiteetin vaikutukselle pääomaintensiteetin kasvunopeuteen voidaan muodostaa epäyhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_k}{\partial k} &= \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{f(k)-c}{k} - (n+\delta)\right) \\
&< \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{f(k)}{k} - (n+\delta)\right) \\
&< -Ck^{-\psi-1}(1-\alpha)[\alpha + (1-\alpha)k^{-\psi}]^{(1-\psi)/\psi} < 0.
\end{aligned}$$

Pääomaintensiteetin kasvunopeus laskee siis myös tasaisesti (kaikilla k) pääomaintensiteetin kasvaessa. Ylläolevat tulokset eivät riipu substituutiojouston suuruudesta, joten talouden konvergenssi syntyy mallin oletuksista. Erona neoklassiseen kasvuteoriaan, jossa per capita -arvoisten suureiden kasvu lopulta tyrehtyy, voi kansantalous nyt konvergoida myös kohti tilaa, jossa $g_k^* > 0$ eli kasvu jatkuu koko ajan.

Tarkastellaan nyt, millä ehdoilla talous saavuttaa jatkuvan kasvun tai jää tasaisen kasvun tilaan. Erotetaan jälleen korkean substituutiojouston ($\sigma > 1$) ja matalan substituutiojouston ($\sigma < 1$) tapaukset.

Kun $\sigma > 1$, $\lim_{K\to\infty} \partial Y/\partial K = \lim_{k\to\infty} f'(k) = \lim_{k\to\infty} f(k)/k = C\alpha^{1/\psi}$, ja pääoman rajatuottavuus on aina suurempi kuin $C\alpha^{1/\psi}$, koska sama pätee myös pääomaintensiteetin kasvunopeudelle — se on nollasta poikkeava kaikilla k. CES-tuotantofunktion käyttäminen rikkoo siis Inada-ehtoa, joten konvergenssia tasaisen kasvun tilaan ei tapahdu. Talous on endogeenisen, jatkuvan kasvun tilassa, jolloin pääomaintensiteetti ja tuotanto henkeä kohden kasvavat rajatta.

Tarkastellaan nyt syntyvää talouskasvua kvalitatiivisesti. Oletetaan, että pääomaintensiteetin kasvunopeus on asymptoottisesti vakio, eli on olemassa g_k^*. Erotetaan kaksi tapausta, $g_k^* > 0$ ja $g_k^* < 0$. Ensimmäisessä tapauksessa pääoma ja tuotanto henkeä kohden siis kasvavat endogeenisesti rajatta, jolloin raja-arvon $t \to \infty$ tarkastelu on sama kuin raja-arvon $k \to \infty$ tarkastelu. Tällöin yhtälöstä (3.42) saadaan kulutusintensiteetin kasvunopeuden asymptoottiseksi arvoksi

$$\lim_{t\to\infty} g_c = \frac{1}{\theta}[\lim_{k\to\infty} f'(k) - (\rho+\delta)] \begin{cases} > 0 & \text{kun} \quad \psi > 0 \text{ ja } C\alpha^{1/\psi} > \rho + \delta \\ < 0 & \text{kun} \quad \psi > 0 \text{ ja } C\alpha^{1/\psi} < \rho + \delta \\ < 0 & \text{kun} \quad \psi < 0 \end{cases}. \tag{3.43}$$

Vastaavasti, kun $g_k^* < 0$, pääoma ja tuotanto per capita pienenevät endogeenisesti kohti lopputilaa $k^* = y^* = 0$ kun $t \to \infty$. Tällöin kulutusintensiteetin kasvunopeuden asymptoottiseksi arvoksi saadaan

$$\lim_{t\to\infty} g_c = \frac{1}{\theta}[\lim_{k\to 0} f'(k) - (\rho+\delta)] \begin{cases} = \infty & \text{kun} \quad \psi > 0 \\ > 0 & \text{kun} \quad \psi < 0 \text{ ja } C\alpha^{1/\psi} > \rho+\delta \\ < 0 & \text{kun} \quad \psi < 0 \text{ ja } C\alpha^{1/\psi} < \rho+\delta \end{cases} . \tag{3.44}$$

Oletetaan nyt yhtälössä (3.41), että pääoman kasvunopeudella on olemassa asymptoottinen arvo g_k^*. Tällöin yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$g_k^* \cdot k = f(k) - c - (n+\delta)k,$$

mistä voidaan kirjoittaa lauseke kulutukselle henkilöä kohden:

$$c = f(k) - (n+\delta+g_k^*)k.$$

Derivoidaan tätä lauseketta ajan suhteen; lopputulokseksi saadaan

$$\dot{c} = \dot{k}\,[f'(k) - (n+\delta+g_k^*)]. \tag{3.45}$$

Hakasulkeissa oleva lauseke on aidosti positiivinen.[16] Ylläoleva yhtälö tarkoittaa, että c:n ja k:n aikaderivaattojen — ja siten myös kasvunopeuksien — täytyy olla samanmerkkisiä. Sovelletaan tätä tulosta aiemmin laskettuihin g_c:n asymptoottisiin arvoihin. Kun $g_k^* > 0$, on $g_c^* \gtrless 0$ riippuen ψ:n ja muiden parametrien arvoista. Yllä mainittu samanmerkkisyysehto täyttyy, kun $\psi > 0$ ja $C\alpha^{1/\psi} > \rho+\delta$.

Vastaavasti, kun $g_k^* < 0$, havaitaan, että myös $g_c^* < 0$ kun $\psi < 0$ ja $C\alpha^{1/\psi} < \rho+\delta$. Näiden kahden tapauksen lisäksi on vielä olemassa kolmas mahdollinen ratkaisu, jolloin $g_k^* = g_c^* = 0$. Tämä tilanne vastaa tasaisen kasvun tilaa, jolloin per capita -muuttujien arvo ei enää muutu. Tapaus $g_k^* > 0$, $g_c^* > 0$ vastaa tilannetta, jossa talous kasvaa rajatta. Päinvastaisessa tapauksessa $g_k^* < 0$, $g_c^* < 0$ talous pienenee asymptoottisesti kohti nollaa. Ramseyn kasvumallissa mahdolliset talouskasvun muodot tuotannon käyttäessä CES-tuotantofunktioita voidaan siis tiivistää muodossa

Väittämä 6. *Olkoon tuotannossa käytössä CES-teknologia. Tällöin Ramseyn kasvumallissa on kolme mahdollista talouskasvun tilaa. Mallin parametrien arvoista riippuu, mihin seuraavista tiloista päädytään:*

1. *$g_k^* > 0, g_c^* > 0$ kun $\psi > 0$ ja $C\alpha^{1/\psi} > \rho+\delta$. Tällöin talous kasvaa endogeenisesti rajatta ($k \to \infty$ kun $t \to \infty$).*

[16] Tämä seuraa transversaalisuusehdosta (3.40) huomioimalla, että $\exp(\ln k) = \exp(\int_0^t \dot{k}/k \;\mathrm{d}\tau) = \exp(\int_0^t g_k \,\mathrm{d}\tau)$.

2. *$g_k^* < 0$, $g_c^* < 0$ kun $\psi < 0$ ja $C\alpha^{1/\psi} < \rho + \delta$. Tällöin per capita -suureet pienenevät endogeenisesti kohti nollaa. On olemassa triviaali tasaisen kasvun tila $k^* = c^* = 0$.*

3. *Muilla parametrien arvoilla $g_k^* = g_c^* = 0$, jolloin talous on tasaisen kasvun tilassa ja on olemassa asymptoottinen pääomaintensiteetin tasaisen kasvun tila $0 < k^* < \infty$.*

Ramseyn kasvumallissa on siis samanlaiset talouskasvun tilat kuin Solow-Swan–mallissa. Tulokset ovat lähes identtiset — talouden kehitys riippuu substituutiojoustosta, ja Ramseyn mallin tapauksessa myös poistoista sekä kuluttajien aikapreferenssistä. Liitteessä E analysoidaan Ramseyn kasvumallin talouskasvun tilat eksaktisti. Lopputuloksena havaitaan, että väittämä 6 pätee edelleen. Lisäksi liitteessä on tarkasteltu, miten siirtyminen tasaisen kasvun tilaan (eksogeeninen kasvu) tai tasaisen kasvunopeuden tilaan (endogeeninen kasvu) tapahtuu.

Koska molemmat ylläolevat ehdot riippuvat lausekkeesta $C\alpha^{1/\psi}$, joka on identtinen Solow-Swan -kasvumallin vastaavissa ehdoissa esiintyvän lausekkeen kanssa, voidaan todeta, että Solow-Swan–mallille todistettu väittämä 2 pätee myös Ramseyn kasvumallin tapauksessa: substituutiojouston nostaminen suurentaa todennäköisyyttä sille, että talous saavuttaa endogeenisen kasvun tilan tai välttää jatkuvan pienenemisen tilan.

Kotitalouksien kärsivällisyys vaikuttaa positiivisesti endogeenisen kasvun todennäköisyyteen — mitä kärsivällisempiä kotitaloudet ovat, sitä todennäköisemmin talous siirtyy jatkuvan kasvun tilaan tai välttää jatkuvan pienenenmisen tilan. Tämä johtuu siitä, että kärsivälliset kotitaloudet ovat valmiita siirtämään kulutustaan tulevaisuuteen ja säästämään nykyhetkellä. Tällöin säästäminen ja investoinnit ovat aluksi korkeammat, mikä nopeuttaa pääoman kertymistä ja talouskasvua.

3.4.3 Endogeenisen kasvun tila

Kuten edellisessä luvussa todettiin, jatkuva endogeeninen kasvu on mahdollista Ramseyn kasvumallissa. Ehtona endogeenisen kasvun syntymiselle oli ehto $C\alpha^{1/\psi} > \rho + \delta$. Tästä ehdosta voidaan päätellä, että talous voi siirtyä endogeenisen kasvun tilaan, jos substituutiojousto on $\sigma > 1$ ja riittävän korkea. Samoin kuin Solow-Swan-mallin tapauksessa, korkeampi substituutiojousto nostaa todennäköisyyttä päätyä jatkuvan kasvun tilaan. Tämä seuraa derivaatasta $\partial[C\alpha^{1/\psi}]/\partial\sigma > 0$. Väittämä 2 pätee siis myös Ramseyn kasvumallin tapauksessa. Siirtyminen voi tapahtua myös, mikäli kotitaloudet ovat riittävän kärsivällisiä kulutuksen suhteen, jolloin tekijä ρ on pieni.

Luvussa 3.4.2 laskettiin asymptoottinen kasvunopeus talouden päätyessä endogeenisen kasvun tilaan. Sen todettiin olevan

$$g_k^* = g_c^* = \frac{1}{\theta}[C\alpha^{1/\psi} - (\rho + \delta)] > 0.$$

Ylläolevan lausekkeen substituutiojoustosta riippuvan osan derivaatta substituutiojouston suhteen on positiivinen, kuten edelisessä luvussa todettiin. Niinpä Solow-Swan–mallille todistettu väittämä 3 substituutiojouston vaikutuksesta jatkuvan kasvun nopeuteen pätee myös Ramseyn kasvumallin tapauksessa, sillä $\partial g_k^*/\partial\sigma > 0$. Korkeampi substituutiojousto nostaa siis myös Ramseyn kasvumallin tapauksessa pitkän tähtäimen kasvunopeutta endogeenisen kasvun tilassa.

Myös muut eksogeeniset tekijät vaikuttavat kasvunopeuteen. Koska $\partial g_k^*/\partial\rho < 0$, kasvunopeus on sitä suurempi, mitä pienempi ρ on eli mitä kärsivällisempiä kotitaloudet ovat kulutuksen suhteen. Kotitalouksien korkea preferenssi tasoittaa kulutustaan yli ajan laskee pitkän tähtäimen kasvunopeutta, sillä $\partial g_k^*/\partial\theta < 0$. Tämä johtuu siitä, että jos kotitaloudet haluavat tasoittaa kulutustaan, ne kuluttavat suhteessa enemmän nykyhetkellä. Tällöin investointeihin jää vähemmän kulutettavaa nyt, mikä hidastaa pääoman kertymistä ja talouskasvua.

3.4.4 Tasaisen kasvun tilan taso

Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan tasoon voidaan laskea samalla tavalla kuin Solow–Swan–mallin tapauksessa. Liitteessä E on ratkaistu pääomaintensiteetin taso tasaisen kasvun tilassa Ramseyn mallin tapauksessa. Tulokseksi saadaan

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\left(\frac{\rho+\delta}{C\alpha^{1/\psi}}\right)^{\frac{\psi}{1-\psi}} - 1\right]\right)^{-1/\psi} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{X}{1-X}\right)^{1/\psi}, \tag{3.46}$$

missä $X \doteq [(C\alpha^{1/\psi})/(\rho+\delta)]^{\psi/(1-\psi)}$. Substituutiojouston vaikutus selviää laskemalla derivaatta $\partial k^*/\partial\sigma$. Liitteessä G saadaan lopputulokseksi

$$\frac{\partial k^*}{\partial\sigma} > 0 \ \text{ jos } \ y_0 > (\rho+\delta)(k_0+\mu_0). \tag{3.47}$$

Täten substituutiojouston vaikutukselle tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetin tasoon pätee väittämä

Väittämä 7. *Olkoon talous tasaisen kasvun tilassa. Tällöin korkeampi substituutiojousto nostaa pääomaintensiteetin tasoa, jos alkuhetkellä talouden muuttujille pätee* *ehto* $y_0 > (\rho+\delta)(k_0+\mu_0)$. *Mikäli tämä ehto ei täyty, substituutiojouston nostaminen päinvastoin laskee pääomaintensiteetin tasoa tasaisen kasvun tilassa.*

Väittämä voi päteä myös kun $y_0 < (\rho+\delta)(k_0+\mu_0)$. Tällöin substituutiojouston vaikutus riippuu substituutiojoustosta ja mallin muista parametreista liitteessä H johdettujen yhtälöiden mukaisesti.

Nyt laskettu tulos eroaa Solow–Swan-kasvumallille lasketusta tuloksesta. Olennaisin ero on substituutiojouston vaikutuksen ehdollisuus: pääomaintensiteetti tasaisen kasvun tilassa nousee vain, mikäli mallin parametrit täyttävät mainitun epäyhtälön. Mitä korkeampi on alkutilan tuotanto per capita ja mitä matalampi taas alkutilan pääomaintensiteetti ja rajasubstituutiosuhde, sitä todennäköisemmin epäyhtälö täyttyy. Kotitalouksien kulutusintensiteetti ja poistot vaikuttavat negatiivisesti epäyhtälön täyttymiseen.

Arvioidaan mainitun ehdon täyttymistä realistisilla parametrien arvoilla; Barro ja Sala-i-Martin (2004, s. 58) esittävät, että Yhdysvaltain pitkän tähtäimen talouskasvussa realistiset arvot ovat ρ = 0,02 (2 %) vuodessa, δ = 0,05 (5 %) vuodessa. Tällöin ehto substituutiojouston positiiviselle vaikutukselle tasaisen kasvun tilan tasoon on

$$y_0 > 0,07 \cdot (k_0+\mu_0).$$

Koska yksinkertaistaen $y = rk + w$ ja $\mu_0 = w_0/r_0$, on $k_0+\mu_0 \approx y_0/r_0$. Ehdon täyttyminen riippuu siis korkotasosta alkuhetkellä. Jos pääoman korkokanta on riittävän korkea ($r_0 \approx 0,07$), vaikuttaa substituutiojousto positiivisesti tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetin tasoon.

3.4.5 Konvergenssinopeus

Mikäli talous päätyy tasaisen kasvun tilaan luvussa 3.4.2 määriteltyjen ehtojen mukaisesti, voidaan substituutiojouston vaikutusta konvergenssinopeuteen tutkia tekemällä Ramseyn mallin liikeyhtälöiden (3.41) ja (3.42) logaritmis-lineaarinen approksimaatio tasaisen kasvun tilan läheisyydessä. Lopputulokseksi saadaan liitteessä H yhtälö pääomavarannon keskimääräiselle kasvunopeudelle välillä $[0,t]$:

$$\frac{1}{t}\ln\frac{k(t)}{k_0} = \frac{1-e^{-\lambda t}}{t}\ln\frac{k^*}{k_0}, \tag{3.48}$$

missä konvergenssinopeutta kuvaava vakio λ on

$$
\begin{aligned}
(3.49) \quad \lambda = & -\frac{\rho - n}{2} \\
& + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho - n)^2 + 4\left(\frac{\rho+\delta}{\theta\sigma}\right)\left[\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{\sigma-1} - 1\right]\left[(n+\delta) - (\rho+\delta)\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{1-\sigma}\right]}.
\end{aligned}
$$

Samoin kuin luvussa 3.3.5, mitä suurempi vakio λ on, sitä nopeammin maan talous konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaan. Substituutiojouston vaikutusta konvergenssinopeuteen voidaan tarkastella laskemalla derivaatta $\partial\lambda/\partial\sigma$. Liitteessä H saadaan tulokseksi

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma} < 0.$$

Tämä tulos on kuitenkin ehdollinen; tulos pätee varmasti vain, jos $y_0 > (\rho+\delta)(k_0 + \mu_0)$. Väittämän 7 kohdalla esitetty huomautus pätee siis myös tässä tapauksessa. Substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen voidaan nyt tiivistää väitteenä 8.

Väittämä 8. *Oletetaan, että talous on eksogeenisen kasvun tilassa ja konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaa. Tällöin korkeampi substituutiojousto hidastaa konvergenssia, jos ehto $y_0 > (\rho+\delta)(k_0 + \mu_0)$ pätee talouden alkuarvoille.*

Tämä vaikutus siis eroaa Solow-Swan–mallista, jossa korkeampi substituutiojousto voi myös nopeuttaa konvergenssiä tasaisen kasvun tilaan. Tämä tapahtuu tosin vain, jos alkutilan suhteellinen pääomaintensiteetti on korkeampi kuin tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetti. Koska ehto substituutiojouston positiiviselle vaikutkselle konvergenssinopeuteen on sama kuin vaikutukselle tasaisen kasvun tilan tasoon, edellisessä luvussa mainittu tarkastelu ehdon täyttymisestä realistisilla parametrien arvoilla pätee myös konvergenssinopeuden tapauksessa.

Käytännössä väittämä 8 tarkoittaa, että mitä korkeampi substituutiojousto on, sitä kauemmin maalta kestää siirtyä tasaisen kasvun tilaan. Talouden kasvunopeus säilyy tällöin korkeana pidempään, jolloin talous kasvaa nopeammin kuin alhaisemmalla substituutiojoustolla.

Luku 4

Kansainvälinen kauppa ja talouskasvu

Luvussa 3 tarkasteltiin pääoman ja työvoiman välisen substituutiojouston vaikutusta talouskasvuun. Luvussa todettiin, että substituutiojouston tasolla on merkittävä vaikutus sekä syntyvän talouskasvun muotoon että mahdollisen jatkuvan kasvun nopeuteen ja tasaisen kasvun tilan tasoon. Käytetyssä mallissa tarkasteltiin kuitenkin vain suljettua yhden maan taloutta, joten mallista puuttuu tyystin Itä-Aasian maille ominainen ja merkittävä ulkomaankauppa.

Kasvuihmeiden pääoman kasautumiseen perustuvan selityksen täydentämiseksi tarkastellaan tässä luvussa Venturan (1997) esittämää mallia, jossa tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto vaikuttaa edelleen talouskasvuun. Olennainen lisä lukuun 3 verrattuna on maiden välituotteilla käymä kansainvälinen kauppa ja sen vaikutus maan talouskasvuun sekä koko maailman tulojakauman kehitykseen.

4.1 Kansainväliset kytkökset ja talouskasvu

Tarkastellaan ensiksi, miksi kansainväliset kytkökset tavallisesti oletetaan useimmiten olemattomiksi talouskasvua tarkasteltaessa. Ventura (1997) esittää kritiikkiä tätä oletusta kohtaan, ja argumentoi, että kytkösten huomioiminen muuttaa huomattavasti talouskasvun empiiristen tosiasioiden tulkintaa. Seuraava teksti perustuu mainittuun Venturan artikkeliin.

Kasvuihmeiden lisäksi toinen merkittävä toisen maailmansodan jälkeinen empiirinen havainto on *ehdollinen konvergenssi*. Ehdollisella konvergenssilla tarkoitetaan sitä, että koulutuksen ja hallituksen toimien vaikutusten eliminoimisen jälkeen köyhät maat kasvavat nopeammin kuin rikkaat (Barro, 1991).[1] Nykyisten talouskasvun teorioiden selitys ehdolliselle konvergenssille perustuu kahdelle oletukselle. Ensinnäkin yleisesti oletetaan, että muiden tekijöiden pysyessä vakiona sijoituksien (pääoman) tuottavuus riippuu negatiivisesti maan tulotasosta. Toiseksi oletetaan, että maiden väliset taloudelliset yhteydet ovat heikot. Koska maat, joiden investointien tuottavuus on suuri, myös kasvavat nopeiten, seuraa ehdollinen konvergenssi ensimmäisestä oletuksesta. Jotta maiden väliset sijoitusten tuottavuuserot eivät häviäisi *arbitraasiehdon* perusteella, joudutaan tekemään mainittu toinen oletus.

Investointien tuottavuuserojen syntymekanismista ei kuitenkaan ole yksimielisyyttä. Malleissa, jotka painottavat pääoman kasaantumista, köyhien maiden korkokanta on korkeampi, koska pääomaa on niissä suhteessa suhteellisesti vähemmän. Malleissa, jotka sen sijaan painottavat innovaation ja teknologian leviämisen olennaisuutta korkoerojen syntymisessä, köyhien maiden korkeampi korkokanta perustuu siihen, että ne pystyvät imitoimaan (kopioimaan) olemassaolevia tuotteita halvemmalla kuin rikkaat maat pystyvät niitä innovoimaan. Molemmat selitykset perustuvat kuitenkin siihen, että pääomainvestointien laskevat tuotot pystytään perustelemaan tavalla tai toisella. Tämän jälkeen kansainvälisten kytkösten heikkouden perusteella argumentoidaan, että nämä laskevat investointien tuotot heijastuvat suoraan investointien korkokantojen eroiksi.[2]

Ylläolevissa ehdollisen konvergenssin selityksissä on kaksi ongelmaa. Ensinnäkin ne perustuvat pitkälti oletukseen siitä, että sijoittajat eivät pysty hyödyntämään eri maiden välillä olevia korkotasoeroja (arbitraasia). Vaikka empiirisesti kansainvälisten pääomavirtojen on todettu olevan verrattain pieniä (Frankel, 1991), tämä ei riitä selittämään suurten korkotasoerojen pitkäaikaista olemassaoloa.

Toinen edellä mainittujen empiiristen konvergenssitulosten selitysten ongelma on, että ne eivät juuri jätä tilaa Itä-Aasian kasvuihmeiden selittämiseen. Jos pääoman laskevat tuotot ovat tärkeitä, miksi korkotaso ja kasvunopeus eivät ole laskeneet nopeasti pääoman kertyessä? Miksi laskevien rajatuottojen laki ei päde niihin? Jos kerran talouden kansainvälistymisasteen oletetaan olevan matala, miksi ulkomaankaupan osuus näiden maiden talouskasvussa on ollut merkittävä? Eikö näiden maiden teollisuustuotteiden viennin voimakas nousu liity millään tavalla niiden nopeaan talouskasvuun?

Konvergenssilöydökseen löytyy lisäksi käsitteellinen ongelma: useimmat talouskasvun teoriat selittävät, miksi ja miten yhden maan kasvunopeus vaihtelee ajan suhteen (aikasarjaongelma). Konvergenssitutkimusten selittämiseksi tärkein kysymys olisi kuitenkin, miksi jotkut maat kasvavat nopeammin kuin toiset (vertailuongelma). Yllä mai-

[1] Tämän tuloksen ovat vahvistaneet myös muut tutkimukset, esimerkiksi Mankiw ym. (1992).
[2] Katso esimerkiksi Barro ja Sala-i-Martin (2004).

nittu oletus maiden välisten kytkösten puuttumisesta tarkoittaa, että aikasarjaongelma ja vertailuongelma ovat itse asiassa yhteneväiset. Pääasiallinen syy tämän helpottavan oletuksen tekemiselle on, että se yksinkertaistaa huomattavasti kansainvälistä talouskasvun vertailua. Suljettujen maiden maailmassa riittää, kun tiedämme miten yksittäisen suljetun maan talous kehittyy. Empiirisisesti on kuitenkin todettu, että maan käymän ulkomaankaupan laajuudella on merkittävä yhteys talouskasvuun (Lee, 1993; Levine ja Renelt, 1992), joten kansainväliset kytkökset pitäisi pystyä ottamaan huomioon talouskasvua mallinnettaessa.

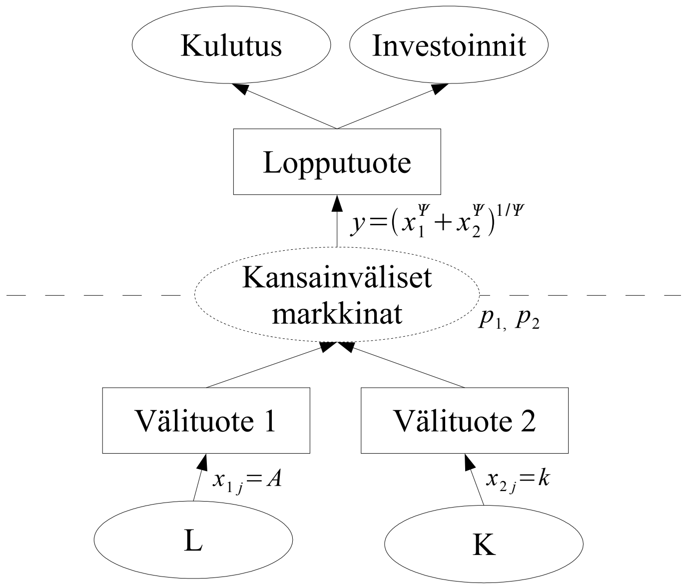
Vastaukseksi näihin ongelmiin ja kysymyksiin konstruoidaan nyt Venturaa seuraten talouskasvun malli, jossa maat voivat vuorovaikuttaa keskenään käymällä kauppaa välituotteilla. Mallin avulla voidaan paremmin erottaa toisistaan yhden maan talouden kasvunopeuden ajallinen kehitys ja maiden välisten kasvunopeuserojen vertailu. Osoittautuu, että avoimessa maailmassa ehdollinen konvergenssi ei merkitse sitä, että tuotantoteknologialle pätisivät laskevat rajatuotot.

4.2 Kansainvälisen hyödykekaupan ja talouskasvun malli

Oletetaan, että maailmassa on J kappaletta maita. Jokaisessa maassa $j = 1,\ldots,J$ tuotetaan samaa lopputuotetta, jota käytetään kokonaisuudessaan joko kulutukseen tai investointeihin. Lopputuotetta ei kaupata ulkomaille, vaan se tuotetaan ja kulutetaan kokonaan maan sisällä. Lopputuotetta käytetään myös arvonmäärittäjänä (numeraire), ja sen arvo normeerataan ykköseksi. Lopputuotteen tuottamiseen käytetään kahta välituotetta, $i = 1,2$, joita myös tuotetaan jokaisessa maassa. Näiden tuottamiseen käytetään kahta tuotannontekijää, pääomaa ja työvoimaa. Kaikki maiden sisäiset markkinat ovat täydellisen kilpailtuja eli niillä toimivat yritykset eivät tuota voittoa.

Välituotteita voi ostaa ja myydä kansainvälisillä hyödykemarkkinoilla. Nämä hyödykemarkkinat oletetaan kitkattomiksi, joten kansainväliseen kauppaan ei liity mitään ylimääräisiä kustannuksia, kuten kuljetuskustannuksia tai tullimaksuja. Näin ollen kaikkien maiden lopputuotesektorin yritykset voivat hetkellä t ostaa välituotteita samoihin hintoihin $p_1(t)$ ja $p_2(t)$. Lopputuotesektorin kannalta on yhdentekevää, missä maassa välituotteet on valmistettu. Mallia voidaan havainnollistaa kaavion 4.1 avulla.

Tuotannontekijät ovat sidottuja maahansa eli ne eivät voi liikkua maasta toiseen. Palkkatasoa hetkellä t maassa j merkitään $w_j(t)$:llä ja vastaavasti pääoman korkotasoa $r_j(t)$:llä. Pääoman oletetaan olevan pysyvää, toisin sanoen pääomasta ei tehdä pois-



Kaavio 4.1: *Avoimen talouden kolmen tuotantosektorin malli.*

toja. Tämä oletus yksinkertaistaa yhtälöitä jonkin verran, muttei vaikuta talouskasvun kvalitatiivisiin tuloksiin.

Lopputuotteen valmistamiseksi välituotteita yhdistämällä on kaikkien maiden kaikilla yrityksillä käytössään CES-tuotantoteknologia. Niiden tuotantofunktio on muotoa

(4.1) $$y=(x_{1j}^{\psi}+x_{2j}^{\psi})^{1/\psi},$$

missä $\psi \equiv 1-1/\sigma$, ja σ on tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto, ja x_{ij} on maan j edustavan yrityksen käyttämä (ostama) määrä välituotetta i. Kaikki suureet on tässä oletettu intensiivisiksi, toisin sanoen ne on jaettu työvoiman määrällä. Substituutiojouston σ oletetaan olevan sama jokaisessa maassa — toisin sanoen yhtälön (4.1) määrittelemä tuotantoteknologia on kaikkien maiden vapaasti käytettävissä.

Välituotemarkkinat ovat myös täydellisen kilpaillut; näillä markkinoilla yritykset käyttävät tuotannontekijöinä maansa pääomaa ja työvoimaa, ja lopputuotteena on välituotteita 1 ja 2. Työvoiman tuottavuus vaihtelee maasta toiseen. Merkitään maan j työvoiman tuottavuutta maassa A_j:llä. Termin A_j voidaan ymmärtää sisältävän myös työvoiman tehokkuutta Hicks-neutraalisti parantavat teknologiat, infrastruktuurin tason ja mahdolliset valtion talouskasvun vauhdittamiseen tähtäävät politiikat. Maailman tuottavuuden keskiarvo on A.

Oletaan mahdollisimman yksinkertaiset tuotantofunktiot välituotteiden valmistuksessa: yksi työläinen tuottaa A_j yksikköä välituotetta 1, toisin sanoen $X_{1j}=A_jL_j$, ja yksi yksikkö pääomaa tuottaa yhden yksikön välituotetta 2, eli $X_{2j} = K_j$. Näin ollen sektoria 1 voidaan sanoa työvoimavaltaiseksi ja se voidaan mieltää esimerkiksi maataloussektorina. Sektori 2 taas on pääomavaltainen ja sen voidaan ymmärtää edustavan modernia teollisuustuotantoa.

Merkitään kunkin maan osuutta koko maailman väestöstä π_j:llä. Kaikkien maiden väestöjen oletetaan kasvavan samalla nopeudella n, joten osuudet pysyvät vakioina. Valitaan joka maasta edustava kuluttaja (ikuisesti elävä kotitalous), jonka kulutusta henkilöä kohden hetkellä t merkitään $c_j(t)$:llä. Maan j pääomaintensiteetti hetkellä t on $k_j(t)$. Jätetään kuitenkin jatkossa merkintöjen yksinkertaistamisen vuoksi eksplisiittinen aikariippuvuus pois yhtälöistä, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole. Merkitään lisäksi mallin per capita -suureiden maailman keskiarvoja[3] w:llä, r:llä, c:llä, k:lla.

4.2.1 Kotitalouksien toiminta

Käytetään talouskasvun tarkasteluun Ramseyn kasvumallia. Tällöin voidaan suoraan hyödyntää luvussa 3.4 saatuja tuloksia, kun huomioidaan nyt asetetut parametrien arvot ja rajoitukset. Oletetaan ensin, että kotitalouden hetkellistä hyötyä kuvaa ajan suhteen vakiosubstituutiojoustoinen funktio (3.34), jossa on asetettu $\theta = 1$. Tällöin maan j edustavan kotitalouden hyötyfunktio on

$$u = \int_0^\infty \ln c_j(t) e^{-(\rho - n)t} \mathrm{d}t, \tag{4.2}$$

missä ρ on kuvaa kuluttajan aikapreferenssiä (subjektiivista diskonttaustekijää): mitä pienempi ρ, sitä kärsivällisempi kuluttaja on. Kärsivällisempi kuluttaja on valmis siirtämään kulutustaan myöhemmäksi nykyhetken kustannuksella. Aluksi odotetaan, että kuluttajien aikapreferenssi on sama joka maassa.

Jotta ylläoleva hyötyfunktio olisi arvoltaan äärellinen on tehtävä oletus $\rho > n$. Lisäksi oletetaan, että $\rho < 1$. Tämä jälkimmäinen ehto takaa endogeenisen kasvun esiintymisen substituutiojouston ollessa riittävän korkea.

Koska pääomien liikkuminen maiden välillä ei ole sallittua, on edustavan kotitalouden budjettirajoite maassa j henkeä kohden -suureilla ilmaistuna

$$c_j + \dot{k}_j + nk_j = r_j k_j + w_j. \tag{4.3}$$

Rajoitteen vasen puoli edustaa kokonaismenoja: kulutusta, uusia investointeja tuotannon pääomaan ja pääoman jakamista laajenevan väestön kesken (nykyisen pääoma-

[3] Toisin sanoen $x \doteq \sum_j^J \pi_j x_j$ suureelle x.

tason jakaminen uusille sukupolville). Rajoitteen oikealla puolella ovat kuluttajan tulot: aiemmista investoinneista (pääomavarannosta) saatavat pääomatulot ja palkkatulot. Tulojen ja menojen pitää olla tasapainossa jokaisella hetkellä t.

Ramseyn mallin talouden liikeyhtälöt saadaan, kun edustava kotitalous optimoi hyötyään (4.2) budjettirajoitteensa (4.3) suhteen dynaamisesti (joka hetkellä t). Liikeyhtälöt johdettiin luvussa 3.4 yleisen CES-tuotantofunktion tapauksessa. Ottaen huomioon nyt käsiteltävän mallin parametreille tehdyt oletukset saadaan kulutukselle c_j ja pääomaintensiteetille k_j liikeyhtälöt

$$r_j = \rho + \frac{\dot{c}_j}{c_j}, \tag{4.4}$$

$$\dot{k}_j = (r_j - n)k_j + w_j - c_j, \tag{4.5}$$

missä muuttujien aikariippuvuus on jätetty notaation selkeyttämisen vuoksi pois. Näiden yhtälöiden lisäksi on mallin ratkaistavuuden varmistamiseksi asetettava *transversaalisuusehto*, jota käsiteltiin enemmän luvussa 3.4. Transversaalisuusehto saa tässä mallissa muodon

$$\lim_{t\to\infty} \frac{k_j}{c_j} e^{-(\rho-n)t} = 0. \tag{4.6}$$

Johdetaan nyt mallin ennustamat tulokset suljetun maan talouskasvulle tarkastelemalla talouden toimijoiden optimointia sektoreittain.

4.2.2 Lopputuoteyrityksen toiminta

Lopputuotesektorilla maassa j toimiva edustava yritys ottaa välituotteiden hinnat p_1 ja p_2 annettuina ja valitsee välituotemäärät x_{1j} ja x_{2j} siten, että voitto

$$\Pi_j = (x_{1j}^{\psi} + x_{2j}^{\psi})^{1/\psi} - p_1 x_{1j} - p_2 x_{2j} \tag{4.7}$$

on mahdollisimman suuri. On syytä huomata, että välituotteiden määrät x_{ij} tarkoittavat tässä nimenomaan lopputuotesektorin *käyttämiä* määriä; niillä ei välttämättä ole mitään tekemistä saman maan välituotesektorien tuottamien välituotteiden määrän kanssa. Koska lopputuote käytetään kokonaisuudessaan suljetun maan sisällä kulutukseen ja investointeihin, ja sen hinta on normeerattu ykköseksi, on maan lopputuotteen tuotanto on sama kuin kansantalouden kokonaistuotanto yhtälössä (4.3). Näin ollen lopputuotesektorin yritys maksimoi voittonsa ensimmäisen kertaluvun ehtojen $\partial \Pi_j / \partial x_{ij} = 0$ mukaisesti, ottaen hinnat p_1 ja p_2 annettuina. Tällöin saadaan välituotteiden kysyntäfunktiot

$$x_{ij} = p_i^{1/(\psi-1)}(r_j k_j + w_j), \qquad i = 1,2. \tag{4.8}$$

Koska lopputuotteen yksikkökustannusten tulee olla samat kuin lopputuotteen hinnan (tämä seuraa täydellisen kilpailun oletuksesta), saadaan ylläolevaa kysyntäfunktiota soveltaen välituotteiden hinnoille yhtälö

$$p_1^{1/(\psi-1)} + p_2^{1/(\psi-1)} = 1. \tag{4.9}$$

Lopputuotteen hinta on täten sama joka maassa, sillä välituotteiden hinnat p_1 ja p_2 ovat samat kaikille maille.

4.2.3 Välituoteyritysten toiminta

Kuten mallissa on määritelty, kahta eri välituotetta tuotetaan omilla sektoreillaan täydellisesti kilpailluilla markkinoilla. Lisäksi ne ottavat tuotannontekijöiden hinnat ja tuotteidensa hinnat annettuna. Huomioiden tässä luvussa edellä määritellyt tuotantoteknologiat, välituotesektorien yritysten voitoille pätevät yhtälöt

$$\Pi_{1j} = A_j p_1 x_1 - w_j x_1, \tag{4.10}$$

$$\Pi_{2j} = p_2 x_2 - r_j x_2. \tag{4.11}$$

Soveltaen näihin optimointiehtoja $\partial\Pi_{ij}/\partial x_i = 0$ havaitaan, että tuottajat ovat valmiita käyttämään kuinka paljon tahansa tuotannontekijöitä, mikäli tuotannotekijöiden hinnat ovat

$$w_j = A_j p_1, \tag{4.12}$$

$$r_j = p_2. \tag{4.13}$$

Jos tuotannontekijöiden hinnat ylittävät tai alittavat nämä arvot, yritysten kysyntä niille on nolla tai ääretön. Kysyntä on siis tyyppiä ”kaikki tai ei mitään”.

Huomattavaa on myös, että palkkataso riippuu vain työvoiman tuottavuudesta A_j. Näin ollen *Treflerin ehdollinen tuotannontekijöiden hinnantasoituslause (conditional factor-price-equalization theorem)*[4] pätee mallissa: jos kahden maan työvoiman tuottavuus on yhtä suuri, on myös niiden palkkataso eli tuotannontekijän hinta sama. Yhtälö (4.13) merkitsee, että korkokannat r_j ovat samat joka maassa, vaikka tuotannontekijät (erityi-

---

[4] Trefler (1993) on todennut tämän väitteen pitävän paikkaansa empiirisesti.

sesti pääoma) eivät liikukaan maasta toiseen. Tässä mallissa välituotteiden kansainväliset markkinat korvaavat täysin tuotannontekijöiden liikkuvuuden — kauppa välituotteilla on itse asiassa epäsuora tapa käydä kauppaa tuotannontekijöillä.

4.3 Suljetun maan talouskasvu

Tutkitaan seuraavaksi, minkälaista talouskasvua mallissa esiintyy. Tarkastellaan aluksi maailmaa, jossa on vain yksi maa. Tämä tilanne on analoginen yhden suljetun maan tai koko maailman talouskasvun tarkastelun kanssa. Maakohtainen indeksi j voidaan tällöin jättää pois suureista. Johdetaan ensin välituotteiden hinnan muodostuminen pääomaintensiteetin kasvaessa, ja analysoidaan saatujen tulosten avulla talouskasvun tuloksia suljetun maan tapauksessa.

4.3.1 Välituotteiden hintojen muodostuminen

Koska maailmassa on vain yksi valtio, ei kansainvälistä hyödykekauppaa voi käydä. Tällöin välituotteiden hinnat p_1 ja p_2 määräytyvät pelkästään maan sisäisten tekijöiden perusteella ja riippuvat valtion pääomaintensiteetistä ja työvoiman tuottavuudesta. Yhtälöstä (4.8) saadaan

$$\frac{x_1}{x_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/(1-\psi)}, \tag{4.14}$$

josta edelleen

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\psi} = \left(\frac{k}{A}\right)^{1-\psi}, \tag{4.15}$$

missä on tehty oletus siitä, että kaikki tuotannontekijät käytetään, toisin sanoen kaikki pääoma on sijoitettu ja väestö on täystyöllistetty. Tällöin $x_1 = AL$ ja $x_2 = K$, joista seuraa $x_2/x_1 = k/A$. Kun $\Pi = 0$, saadaan lopputuotesektorin voittofunktiosta (4.7)

$$\begin{aligned} & (x_1^{\psi} + x_2^{\psi})^{1/\psi} = p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \Rightarrow \quad & p_2 = r = (A^{\psi} + k^{\psi})^{(1-\psi)/\psi} k^{\psi-1}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Yhtälöistä (4.15) ja (4.16) seuraa nyt

$$p_1 = w/A = p_2 \left(\frac{k}{A}\right)^{1-\psi} = (A^{\psi} + k^{\psi})^{(1-\psi)/\psi} A^{\psi-1}. \tag{4.17}$$

Yhtälöt (4.16) ja (4.17) määrittelevät maan korko- ja palkkatason, kun kansantalouden pääomaintensiteetti k ja työvoiman tuottavuus A on annettu. Suljetun maan tapauksessa molemmat hinnat riippuvat pääomaintensiteetistä, toisin sanoen $p_1 = p_1(A,k)$ ja $p_2 = p_2(A,k)$. Tarkastellaan hintojen muuttumista pääomaintensiteetin kasvaessa:

$$\frac{\partial p_1}{\partial k} = \underbrace{(1-\psi)}_{>0} A^{\psi-1} k^{\psi-1} (A^{\psi} + k^{\psi})^{(1-2\psi)/\psi} > 0, \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial k} = \underbrace{(\psi-1)}_{<0} A^{\psi} k^{\psi-2} (A^{\psi} + k^{\psi})^{(1-2\psi)/\psi} < 0, \tag{4.19}$$

kun muistetaan, että $\psi \in]-\infty, 1]$. Pääomavarannon kasvaminen ja pääomaintensiteetin nousu nostaa palkkoja. Nousu johtuu työvoiman ylikysynnästä, ja hinnat reagoivat tasapainottamaan tämän tilanteen. Vastaavasti korkotaso laskee pääomaintensiteetin kasvaessa. Tämä johtuu pääoman tuottavuuden laskemisesta tuotannon laskevien rajatuottojen vuoksi.

4.3.2 Liikeyhtälöiden johtaminen

Hyödyntämällä kansantalouden kokonaistuloille (eli palkka- ja pääomatulojen summalle) yllä laskettuja välituotteiden hintoja (4.16) ja (4.17) huomataan, että kokonaistuotanto riippuu vain pääomaintensiteetistä, tuottavuusparametrista A ja substituutiojoustosta σ:

$$y = p_1 A + p_2 k = f(k) = (A^{\psi} + k^{\psi})^{1/\psi}. \tag{4.20}$$

Tuotantofunktio on CES-tuotantofunktion muotoinen, ja palautuu aikaisemmassa esseessä käsiteltyyn normalisoituun muotoon $y = C[\alpha k^{\psi} + (1-\alpha)]^{1/\psi}$, kun huomioidaan mallissa tehty oletus $\theta = 1$ ja verrataan tuotannontekijätermien kertoimia. Merkitsemällä $\alpha C^{\psi} = 1$ ja $(1-\alpha)C^{\psi} = A^{\psi}$ nähdään, että yhtälö (4.20) saadaan valitsemalla yleisessä CES-tuotantofunktiossa

$$C = (1 + A^{\psi})^{1/\psi}, \tag{4.21}$$

$$\alpha = 1/C^{\psi} = 1/(1 + A^{\psi}). \tag{4.22}$$

Tuotantofunktion pitkän tähtäimen raja-arvo korkean substituutiojouston tapauksessa mallin parametrit huomioiden on $C\alpha^{1/\psi} = 1$. Matalan substituutiojouston tapauksessa vastaava raja-arvo on 0.

Kuten luvussa 3.2 nähtiin, pätee CES-tuotantofunktioille $\partial^2 y / \partial k^2 < 0$, eli pääoman rajatuotot laskevat pääomaintensiteetin noustessa. Pääoman kertyminen siis hidastuu koko ajan, ja asymptoottisen kasvun laatu riippuu rajatuottavuuden raja-arvosta, kun $k \to \infty$.

Sijoittamalla saadut r:n ja w:n lausekkeet (4.13) ja (4.12) Ramsay-mallin liikeyhtälöihin (4.4) ja (4.5) ja huomioiden välituotteiden suhteellisen hinnan yhtälö (4.15) saadaan johdettua suljetun talouden määrittelevät liikeyhtälöt kulutukselle ja pääomaintensiteetille:

$$\frac{\dot{c}}{c} = (A^{\psi} + k^{\psi})^{(1-\psi)/\psi}\, k^{\psi-1} - \rho \tag{4.23}$$

$$\dot{k} = (A^{\psi} + k^{\psi})^{1/\psi} - nk - c, \tag{4.24}$$

joista voidaan kirjoittaa liikeyhtälöt kasvunopeuksille:

$$g_c = \left(1 + \frac{A^{\psi}}{k^{\psi}}\right)^{(1-\psi)/\psi} - \rho \tag{4.25}$$

$$g_k = \left(1 + \frac{A^{\psi}}{k^{\psi}}\right)^{1/\psi} - n - \frac{c}{k}. \tag{4.26}$$

Kuten erillisessä paperissa todetaan, on $\partial g_k / \partial k < 0$. Mikäli mallin muut parametrit, erityisesti työn tuottavuus A, otetaan huomioon päädytään ehdolliseen konvergenssiin: suhteessa köyhemmät maat kasvavat nopeammin kuin rikkaat.

4.3.3 Pitkän tähtäimen talouskasvu

Tarkastellaan nyt suljetun talouden pitkän tähtäimen kehitystä. Kuten aiemmin Solow–Swan-kasvumallin tapauksessa, erotetaan perustapauksina korkean substituutiojouston ja matalan tapaukset. Korkean substituutiojouston tilassa $\sigma > 1$, mitä vastaa parametrin ψ arvo $\psi > 0$. Tällöin jatkuva endogeeninen kasvu on mahdollista, mikäli ehto $C\alpha^{1/\psi} > \rho + \delta$ on voimassa. Sijoittamalla tähän ehtoon käsitellyssä mallissa tehdyt oletukset $\delta = 0$ ja yhtälöt (4.21) ja (4.22) saadaan epäyhtälö $1 > \rho$, mikä on identtisesti voimassa mallissa tehdyn oletuksen perusteella. Talous on siis aina endogeenisen kasvun tilassa, jos $\sigma > 1$.

Endogeenisen kasvun tilassa pääoma- ja kulutusintensiteetti kasvavat asymptoottisesti nopeudella

$$g_k^* = g_c^* = \frac{1}{\theta}[C\alpha^{1/\psi} - (\rho + \delta)] = 1 - \rho > 0. \tag{4.27}$$

Yllä oleva tulos saadaan sijoittamalla mallissa tehdyt oletukset $\theta = 1$ ja $\delta = 0$ sekä parametrien C ja α määrittelyt (4.21) ja (4.22) yleiseen ratkaisuun. Koska $g_k > 0$ kaikilla k, kasvaa pääomaintensiteetti rajatta kun $t \to \infty$. Tällöin ei siis ole olemassa tasaisen kasvun tilaa k^*. Korkean substituutiojouston tapauksessa $\sigma > 1$ (eli kun $\psi > 0$) on pääoman rajatuottavuus $f'(k)$ tunnetusti

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial y}{\partial k} = \lim_{k\to\infty} f'(k) = C\alpha^{1/\psi} = 1, \tag{4.28}$$

missä on jälleen sijoitettu parametrien C ja α määrittelyt käytetyssä mallissa.

Matalan substituutiojouston tapauksessa ($\sigma < 1$) taas tasaisen kasvun tilan syntymiselle pätee ehto $C\alpha^{1/\psi} > \rho + \delta$. Mikäli tämä ehto täyttyy, siirtyy talous kohti tasaisen kasvun tilaa satulapisteuraa pitkin. Kuten korkean substituutijouston tapauksessa sijoittamalla mallin parametrien määrittelyt mainittuun ehtoon saadaan aina voimassa oleva epäyhtälö $1 > \rho$. Matalan substituutiojouston tapauksessa talous on siis aina tasaisen eksogeenisen kasvun tilassa, jolloin talous kasvaa väestön kasvunopeudella n.

Tasaisen kasvun tilassa luonnollisesti

$$g_k^* = g_c^* = 0, \tag{4.29}$$

ja koska pääomaintensiteetti konvergoi tällöin kohti tasaisen kasvun tilan arvoa k^*, on pääoman rajatuottavuus asymptoottisesti

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\partial y}{\partial k} = f'(k^*) = \rho + \delta = \rho, \tag{4.30}$$

mikä seuraa tasaisen kasvun tilan määrittelevästä ehdosta $f'(k^*) = \rho + \delta$. Jos $k_0 < k^*$, sekä c että k kasvavat positiivisellä, hidastuvalla nopeudella kohti tasaisen kasvun tilaa.

Suljetun maan tapauksessa voitiin suoraan soveltaa aiemmin yleisessä tapauksessa Ramseyn kasvumallille johdettuja tuloksia. Kuten yllä nähtiin, on nyt käytetyn mallin parametrit valittu niin, että talous voi päätyä vain endogeenisen kasvun tilaan (kun $\sigma > 1$) tai tasaisen eksogeenisen kasvun tilaan (kun $\sigma < 1$). Erona yleiseen tapaukseen talous ei voi joutua jatkuvan pienentymisen tilaan.

4.3.4 Tasaisen kasvun tila

Tarkastellaan nyt talouden kehitystä, kun se päätyy tasaisen kasvun tilaan. Kuten yllä nähtiin, tämä tapahtuu aina kun $\psi < 0$. Tällöin pääomaintensiteetiksi tasaisen kasvun tilassa saadaan yleisen tapauksen yhtälöstä (3.46)

$$k^* = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{X}{1-X}\right)^{1/\psi} = \left(A^\psi \frac{\rho^{\psi/(\psi-1)}}{1-\rho^{\psi/(\psi-1)}}\right)^{1/\psi} = A(\rho^{\psi/(1-\psi)}-1)^{-1/\psi}, \tag{4.31}$$

missä on sovellettu mallin parametrien yhtälöitä (4.21) ja (4.22) aiemmin laskettuun yleisen tapauksen yhtälöön.[5] Sijoitetaan saatu k^*:n lauseke tuotantofunktioon, jolloin saadaan tuotanto työntekijää kohden tasaisen kasvun tilassa:

$$f(k^*) = (A^\psi + k^\psi)^{1/\psi} = A\left(\frac{\rho^{\psi/(1-\psi)}}{\rho^{\psi/(1-\psi)}-1}\right)^{1/\psi}. \tag{4.32}$$

Tuotanto työntekijää kohden riippuu siis vain työvoiman tuottavuudesta, kotitalouksien kulutuspreferensseistä ja substituutiojoustosta. Substituutiojouston vaikutus pääomaintensiteetin tasoon tasaisen kasvun tilassa nähdään laskemalla derivaatta $\partial k^*/\partial\psi$. Tämä derivaatta on luvussa 3.4. Tulokseksi saatiin tällöin $\partial k^*/\partial\psi > 0$. Näin ollen substituutiojouston nostaminen nostaa tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteettiä ja siten myös tuotantoa työntekijää kohden.

Lasketaan vielä tasaisen kasvun tilan arvojen (4.31) ja (4.32) avulla pitkän tähtäimen arvot välituotteiden hinnoille (4.16) ja (4.17):

$$p_1^* = \lim_{t\to\infty}[f(k) - kf'(k)] = \begin{cases} \infty & \text{jos} \quad \psi > 0 \\ A(1-\rho^{\frac{\psi}{\psi-1}})^{\frac{\psi-1}{\psi}} & \text{jos} \quad \psi < 0 \end{cases} \tag{4.33}$$

$$p_2^* = f'(k^*) = \begin{cases} 1 & \text{jos} \quad \psi > 0 \\ \rho & \text{jos} \quad \psi < 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

Välituotteiden suhteellinen hinta p_1/p_2 kasvaa siis rajatta, kun pääomaintensiteettin kasvaessa rajatta substituutijouston ollessa korkea. Tämä on järkevä tulos, sillä kuten edellä on todettu, tässä tapauksessa talous on jatkuvan endogeenisen kasvun tilassa ja pääoman kasvunopeus on suurempi kuin väestön kasvunopeus. Välituotesektorien tuotantoteknologioiden vuoksi työvoimasta tulee suhteellisesti yhä harvinaisempaa, jolloin luonnollisesti pelkästään työvoimaa tuotannontekijänään käyttävän tuotantosektorin välituotteen hinta nousee. Mallin parametrien arvot lukuunottamatta ehtoa $\psi > 0$ eivät vaikuta tähän tulokseen.

Matalan substituutiojouston tapauksessa $\psi < 0$ suhteellinen taas lähestyy äärellistä vakioarvoa, joka riippuu työvoiman tuottavuudesta, kotitalouksien kulutuspreferesseistä ja substituutiojouston tasosta. Tässä tapauksessa talous on tasaisen kasvun tilassa, jol-

[5] Tulos voidaan johtaa myös suoraan kulutusintensiteetin kasvunopeuden yhtälöstä (4.25), kun tasaisen kasvun tilassa $g_k = g_c = 0$.

loin pääomaintensiteetti lähestyy vakioarvoa, eivätkä henkeä kohden mitatut suureet enää muutu. Tulos välituotteiden suhteellisten hintojen saavuttamasta vakioarvosta on sopusoinnussa muiden ehdosta seuraavien tulosten kanssa.

4.3.5 Konvergenssinopeus

Mikäli $\sigma < 1$, talous konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaa. Tutkitaan nyt substituutiojouston vaikutusta tämän konvergenssin nopeuteen. Tekemällä kulutuksen ja pääomaintensiteettien kasvunopeuksien liikeyhtälöille logaritmis-lineaarinen approksimaatio tasaisen kasvun tilan ympäristössä saadaan ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmä. Tämän yhtälöryhmän ratkaisuksi yleisessä tapauksessa johdettiin luvussa 3.4 tulos

$$\ln\frac{k(t)}{k_0} = (1-e^{-\lambda t})\ln\frac{k^*}{k_0}, \tag{4.35}$$

missä konvergenssinopeutta kuvaa vakio λ. Mitä suurempi λ on, sitä nopeammin talous konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaa. Sijoittamalla konvergenssinopeuden yleisen tapauksen kaavaan (3.49) nyt käsiteltävän mallin vakioiden arvot saadaan konvergenssinopeuden lausekkeeksi[6]

$$\lambda = -\frac{\rho-n}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\rho-n)^2 + \frac{4}{\sigma}(\rho-\rho^{2-\sigma})(\rho^\sigma-n)}. \tag{4.36}$$

Tarkatellaan nyt substituutiojouston vaikutusta konvergenssinopeuteen. Luvussa 3.4 laskettiin tarvittava derivaatta $\partial\lambda/\partial\sigma$ Ramseyn mallin yleisessä tapauksessa. Sijoittamalla Venturan mallin parametrien arvot saatuun tulokseen nähdään, että derivaatta on negatiivinen kaikilla mahdollisilla parametrien arvoilla. Täten mallin tapauksessa pätee väittämä 9:

Väittämä 9. *Olkoon substituutiojousto $\sigma < 1$, jolloin talous kasvaa eksogeenisesti ja konvergoi kohti tasaisen kasvun tilaa. Tällöin substituutiojouston nostaminen hidastaa konvergenssiä kaikilla talouden parametrien arvoilla.*

Tämä väittämä pätee ehdoitta ainoastaan mallissa käytetyillä parametrien arvoilla. Kuten luvussa 3.4 todettiin, yleisessä tapauksessa tulos on ehdollinen ja riippuu talouden arvoista alkuhetkellä.

[6] Venturan (1997) artikkelissa on tässä kohtaa virheellinen tulos. Artikkelissa derivaatta $\partial g_c/\partial \ln k = (\rho^{1/\sigma}-\rho)/\sigma$ on laskettu väärin. Oikea tulos on $(\rho^{2-\sigma}-\rho)/\sigma$. Tämä ei kuitenkaan vaikuta lopputulokseen.

4.4 Avoimen maailman talouskasvu

Tarkastellaan nyt, miten talouskasvun luonne muuttuu, kun maiden on mahdollista vuorovaikuttaa keskenään kitkattomien kansainvälisten hyödykemarkkinoiden välityksellä. Koska maailmatalous kokonaisuudessaan on suljettu, pätevät maiden yhteenlaskettujen pääomaintensiteettien ja kulutusten arvolle suljetun valtion liikeyhtälöt (4.23) ja (4.24). Jakamalla yhtälöt työvoiman määrällä nähdään, että sama pätee myös pääomaintensiteettien ja kulutusten maailman keskiarvoille. Maailmantalouden keskiarvot k ja c kehittyvät siis mainittujen Ramseyn kasvumallin liikeyhtälöiden mukaisesti.[7] Mikäli tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto on riittävän korkea ($\sigma > 1$), maailmantalous kasvaa endogeenisesti rajatta luvussa 4.3 johdettujen tulosten mukaisesti. Matalan substituutiojouston tapauksessa maailmantalous päätyy tasaisen kasvun tilaan ja kasvaa eksogeenisesti väestön kasvunopeudella.

Avoimessa maailmassa välituotteiden hinnat muodostuvat maailman pääomaintensiteettien keskiarvon perusteella, eikä yksittäisen (pienen) maan toiminnalla ole vaikutusta hintoihin. Kuten aiemmin suljetun maan tapauksessa, ottavat kaikki lopputuote– ja välituotesektorien yritykset välituotteiden hinnat annettuina. Mallin määrittelystä seuraa, että maat eroavat toisistaan vain alkutilanteen pääomaintensiteettiensä ja tuotannon tehokkuutensa suhteen.[8] Koko maailman talous noudattaa yllä mainittuja Ramseyn mallin liikeyhtälöitä. Tutkitaan nyt, miten yksittäisten maiden asema muuttuu maailmantalouden kehittyessä.

4.4.1 Suhteellisten pääomaintensiteettien kehitys

Eulerin yhtälöstä (4.4) voidaan ratkaista eksplisiittisesti maan j kulutusintensiteetti ajan, pääomaintensiteetin ja palkkatason funktiona. Tulokseksi johdetaan liitteessä I

$$c_j = (\rho - n)\left[k_j + \int_t^{\infty} w_j(\tau) e^{-(\bar{r}_j - n)(\tau - t)} \mathrm{d}\tau\right], \tag{4.37}$$

missä $\bar{r}_j = (1/t)\int_0^t r_j(t)\mathrm{d}t$. Kun tämä tulos sijoitetaan pääomaintensiteetin liikeyhtälöön (4.5) ja muistetaan, että $w_j = A_j p_1$ ja $r_j = p_2$, voidaan johtaa liikeyhtälö maan j

---

[7] Tämä tulos voidaan johtaa eksplisiittisesti derivoimalla keskiarvojen määritelmiä $c = \sum_j \pi_j c_j / J$ ja $k = \sum_j \pi_j k_j / J$ ja käyttämällä yksittäisen maan liikeyhtälöitä (4.4) ja (4.5); lopulta päädytään kuitenkin samaan tulokseen.

[8] Maat eroavat toisistaan myös suhteellisen väestömääränsä π_j suhteen. Tämä ei kuitenkaan vaikuta maan talouskasvuun. Poikkeuksena tästä on kasvuihmeiden syntyminen, jota tarkastellaan luvussa 4.5. Tällöin maan oletetaan pysyvän kooltaan pienenä.

suhteelliselle pääomaintesiteetille $k_j^R \doteq k_j/k$ (johto liitteessä J). Liikeyhtälöksi saadaan

$$\dot{k}_j^R = \phi(k_j^R - A_j^R), \tag{4.38}$$

missä $A_j^R \doteq A_j/A$ maan työvoiman suhteellinen tehokkuus ja ajasta riippuva tekijän ϕ määritelmäksi saadaan

$$\phi \doteq \frac{A}{k}\left[(\rho - n)\int_t^\infty p_1(\tau)e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau - p_1\right]. \tag{4.39}$$

Maan suhteellinen pääomaintensiteetti k_j^R kertoo, miten maan pääomaintensiteetti suhtautuu maailman maiden pääomaintensiteetin keskiarvoon. Jos $k_j^R > 1$, on maan pääomaintesiteetti suurempi kuin maailman keskiarvo, ja vastaavasti tapauksessa $k_j^R < 1$ pienempi kuin maailman keskiarvo. Tekijä ϕ siis sekä vaikuttaa suhteellisen pääomaintensiteetin kasvunopeuteen, että määrittää kasvun suunnan — lähestyykö suhteellisten pääomaintesiteettien jakauma tuottavuuksien jakaumaa vai ei. On myös syytä huomata, että k_j^R sekä tekijä ϕ riippuvat ajasta.

Samanlainen luonnehdinta pätee suhteelliselle tehokkuudelle A_j^R, lukuunottamatta aikariippuvuutta, sillä maiden työvoiman tehokkuudet oletetaan vakioiksi. Oletetaan, että $\phi < 0$ ja että maan suhteellinen pääomaintensiteetti on pienempi kuin suhteellinen työvoiman tuottavuus. Tällöin yhtälöstä (4.38) nähdään, että työvoiman tuottavuutta nostavat toimenpiteet (kuten esimerkiksi koulutustason nostaminen tai sopivien tuotantoteknologioiden käyttöönottaminen) nostavat suhteellista työvoiman tuottavuutta A_j^R ja täten kiihdyttävät pääomaintensiteetin kasvunopeutta.

Differentiaaliyhtälö (4.38) voidaan ratkaista integroimalla; ratkaisuksi saadaan

$$k_j^R = A_j^R + e^{\bar{\phi}t}[k_j^R(0) - A_j^R] \tag{4.40}$$

Tämä yhtälö määrittää, miten maan suhteellinen pääomaintensiteetti kehittyy ajan funktiona, kun välituotteiden hinnat, tuotannontekijöiden maailman keskiarvot ja pääomaintensiteettien sekä työvoiman tuottavuuden alkuarvot on annettu.[9]

Suhteellisen pääomaintensiteetin määritelmästä seuraa $\ln k_j^R = \ln k_j - \ln k$. Derivoidaan

[9] Jotta kaikkien maailman maiden suhteellinen pääomaintensiteetti pysyisi varmasti aidosti positiivisena on tehtävä oletus

$$\min_{j\in\{1,\ldots,J\}} k_j^R(0)/A_j^R > \max_t\, 1 - e^{-\bar{\phi}t}.$$

Jos suhteellinen pääomaintensiteetti olisi negatiivinen, olisi myös maan pääomaintensiteetti negatiivinen, mikä ei ole realistinen tulos. Tämä ehto voidaan osoittaa yhtälön (4.40) avulla. Jaetaan yhtälö ensin (4.40) puolittain termillä $A_j^R \exp\bar{\phi}t$. Jotta ehto $k_j^R > 0$ olisi voimassa kaikilla j ja t, täytyy köyhimmänkin maan ($\min_{j\in\{1,\ldots,J\}}$) suurempi kuin aikatekijän $1 - \exp\bar{\phi}t$ suurin arvo, mikä on yllä mainittu ehto.

tämä nyt ajan suhteen, jolloin saadaan hyödyllinen yhtälö

$$\frac{\dot{k}_j^R}{k_j^R} = \frac{\dot{k}_j}{k_j} - \frac{\dot{k}}{k}, \tag{4.41}$$

joka voidaan kirjoittaa muodossa $g_{k_j^R} = g_{k_j} - g_k$ (tai $g_{k_j} = g_k + g_{k_j^R}$). Suhteellisen pääomaintensiteetin kasvunopeus mittaa siis sitä, kuinka paljon nopeammin maan j pääomaintensiteetti kasvaa maailman pääomaintensiteetin keskiarvon kasvunopeuteen nähden. Jos suhteellisen pääomaintensiteetin kasvunopeus on positiivinen, kasvaa maan pääomaintensiteetti nopeammin kuin maailman keskiarvo, ja maasta tulee keskiarvoon verrattuna suhteellisesti rikkaampi.

Mikäli välituotteen 1 hinnan (ja siten myös palkkojen) kasvunopeus on riittävän matala, on tekijä ϕ negatiivinen.[10] Tällöin maiden, joiden suhteellinen pääomaintensiteetti on matalampi kuin työvoiman suhteellinen tehokkuus (toisin sanoen suhteellisesti köyhien maiden) pääomaintensiteetti kasvaa suhteellisesti nopeammin kuin rikkaiden maiden. Tämä voidaan nähdä yhtälöstä (4.38): jos $\phi < 0$ ja $k_j^R < A_j^R$, on pääomaintensiteetin kasvunopeus positiivinen. Tästä seuraa, että maiden pääomaintensiteettien jakauma lähestyy asymptoottisesti maiden työvoiman tuottavuuden jakaumaa. Jos $\phi > 0$ on seurauksena sen sijaan jakaumien etääntyminen toisistaan, jolloin myös suhteelliset erot kasvavat. Tämä voidaan tiivistää väittämänä 10.

Väittämä 10. *Mikäli palkkatason kasvunopeus on riittävän matala, tekijä ϕ on negatiivinen. Tällöin maat, joiden pääomaintensiteetti on matala suhteessa maan työvoiman tuottavuuteen kasaavat pääomaa nopeammin.*

Väittämä 10 voidaan intuitiivisesti perustella seuraavasti: Mallissa kaikki maat käyttäytyvät kuten kuluttajat, joiden nykyhetkeen verrattu tulotaso pysyy vakiona ja optimoivat kulutustaan tulojensa nettonykyarvo huomioiden. Tällöin kulutukselle hetkellä 0 voidaan johtaa yhtälö (katso Barro ja Sala-i-Martin (2004, s. 94))

$$c(0) = \nu(0)[a(0) + \tilde{w}(0)], \tag{4.42}$$

missä $\tilde{w}(0)$ on kotitalouden ansaitsemien palkkojen nykyhetkeen diskontattu arvo ja $\nu(0)$ on kotitalouden kulutusalttius, joka määrittyy yhtälöstä

$$\frac{1}{\nu(0)} = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \mathrm{d}t.$$

Koska kaikkien maiden kulutuspreferenssit ovat samat, ne käyttävät saman osuuden omaisuudestaan joka hetkellä. Täten kaikkien maiden koko omaisuuden kasvunopeus

[10] Tämä tulos johdetaan liitteessä K palkkojen kasvunopeuden ollessa vakio.

on sama. Yhtälöstä (4.42) nähdään, että omaisuuden kasvunopeus on painotettu keskiarvo pääomavarannon ja palkkojen nettonykyarvon kasvunopeuksista. Yhtälöstä (4.17) seuraa, että palkkojen nettonykyarvon kasvunopeus on sama kaikissa maissa, sillä palkkojen kasvunopeus ei riipu maan sisäisistä ominaisuuksista. Palkkojen *taso* voi sen sijaan vaihdella maasta toiseen.

Jos palkkojen kasvunopeus on matala, täytyy kuluttajien kerätä pääomaa nopeammin pitääkseen kokonaisvarallisuuden kasvunopeuden samana. Tarvittava pääoman kasaantumisvauhti riippuu pääoman osuudesta kuluttajan kokonaisvarallisuudesta. Mitä pienempi pääoman osuus on, sitä nopeammin pääomaa täytyy kerätä, jotta kuluttaja pysyisi optimaalisella kulutuspolulla.

4.4.2 Maailman tulojakauman pitkän tähtäimen kehitys

Tarkastellaan nyt, miten maailmatalouden tulojakauma kehittyy pitkällä tähtäimellä. Kuten edellisessä luvussa todettiin, tämä kehitys riippuu tekijän ϕ etumerkistä. Määritellään muuttuja χ kulutusintensiteetin ja pääomaintensiteetin suhteena $\chi \doteq c/k$. Liitteessä L osoitetaan, että itse asiassa $\phi = \dot{\chi}/\chi$, eli tekijä ϕ on sama kuin kulutus- ja pääomaintensiteettien suhteen χ kasvunopeus. Tulojakauman kehitys riippuu siis kulutuksen ja pääoman välisen suhteen kasvunopeudesta. Jos tämä suhde kasvaa, konvergoi maailman pääomaintensiteettien jakauma kohti työvoiman tuottavuuden jakaumaa. Jos taas kuluksen ja pääoman suhde pienenee, jakaumat divergoivat.

Kirjoitetaan nyt maailman kulutus– ja pääomaintensiteettien keskiarvojen kasvunopeuksien liikeyhtälöt (4.25) ja (4.26) muuttujien k ja χ avulla:

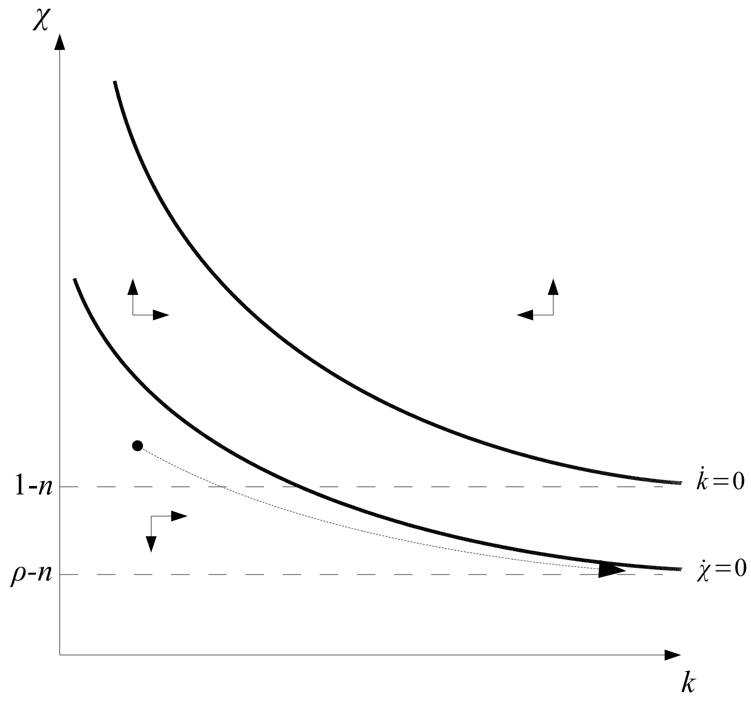
$$\frac{\dot{\chi}}{\chi} = \chi - \rho + n - (1 + (A/k)^{\psi})^{(1-\psi)/\psi} \cdot (A/k)^{\psi}, \tag{4.43}$$

$$\frac{\dot{k}}{k} = (1 + (A/k)^{\psi})^{1/\psi} - (n + \chi). \tag{4.44}$$

Tulojakauman pitkän tähtäimen kehitystä voidaan nyt analysoida tarkkailemalla muuttujien k ja χ asymptoottista käyttäytymistä vaihediagrammien avulla. Huomataan ensin, että asymptoottisesti pätee aina $g_{\chi} = 0$[11], eli kulutuksen ja pääoman suhde ei enää muutu. Tällöin määritelmänsä mukaisesti tekijä ϕ on identtisesti nolla. Pääomaintensiteettien jakauma pysyy siis asymptoottisesti vakiona riippumatta siitä, kasvaako maailmantalous endogeenisesti vai ei.

Transition aikana pääomaintensiteettien jakauman käyttäytyminen ei kuitenkaan ole

[11] Tämä tulos on johdettu luvussa 3.4.

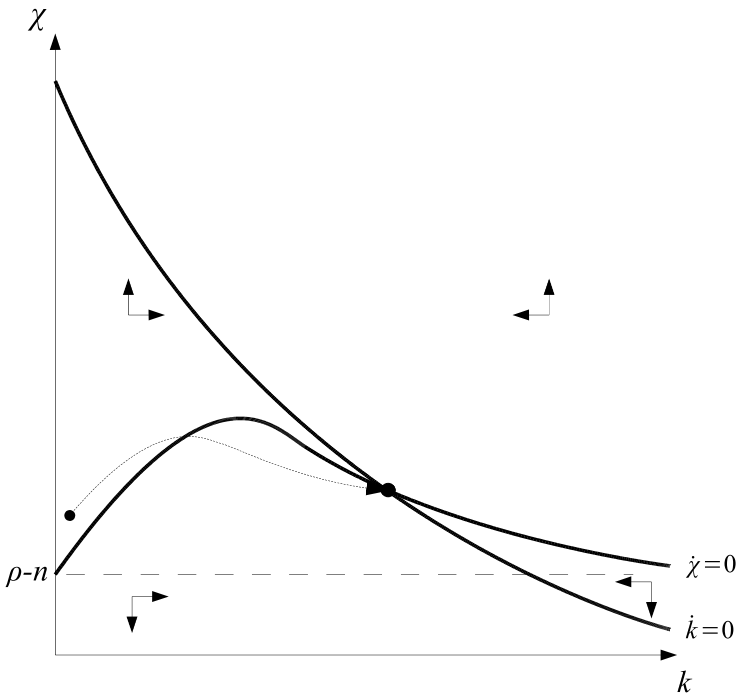


Kaavio 4.2: *Pääomaintensiteetin ja kulutus-pääomaintensiteetti–suhteen vaihediagrammi, kun $\sigma > 1$ (Ventura, 1997).*

yksikäsitteistä. Havaitaan, että jakauman kehitys riippuu itse asiassa tuotannon substituutiojoustosta. Kuten luvussa 4.3 osoitettiin, kun substituutijousto $\sigma > 1$, kasvaa maailmantalous endogeenisesti rajatta ja $k \to \infty$. Kaaviossa 4.2 on esitetty vaihediagrammina talouden kehitys korkean substituutiojouston tapauksessa. Vaihediagrammin singulaariurien funktiot johdetaan yhtälöistä (4.43) ja (4.44) asettamalla $g_\chi = 0$, $g_k = 0$ ja ratkaisemalla saatava yhtälöistä χ pääomaintenstiteetin k:n suhteen, jolloin saadaan kaksi funktiota $\chi_1 = f_1(k)$, $\chi_2 = f_2(k)$. Kaavion singulaariurien asymptoottiset arvot voi johtaa luvun 4.3 tulosten perusteella.

Korkean substituutiojouston tapauksessa talous kehittyy pitkin kaavioon 4.2 merkittyä satulapisteuraa. Tällä uralla χ laskee monotonisesti, joten $g_\chi < 0$. Maailman pääomaintensiteettien jakauma lähestyy tällöin monotonisesti tuottavuuksien jakaumaa.

Kun $\sigma < 1$ voi talous kehittyä kahdella mahdollisella tavalla. Kaaviossa 4.3 on esitetty tapaus, jossa substituutiojousto on riittävän korkea, jotta tasaisen kasvun tila sijaitsee singulaariuran $\dot{\chi} = 0$ laskevalla osalla. Tällöin matalasta pääomaintensiteetin arvosta lähtevän talouden kasvaessa kasvaa χ ensin ja laskee leikattuaan singulaariuransa. Täten pääomaintensiteettien jakauma liikkuu ensin pois päin työvoiman tuottavuuksien jakaumasta, mutta maailmantalouden saavutettua tietyn kehitysvaiheen konvergoi lopulta kohti tuottavuuksien jakaumaa.

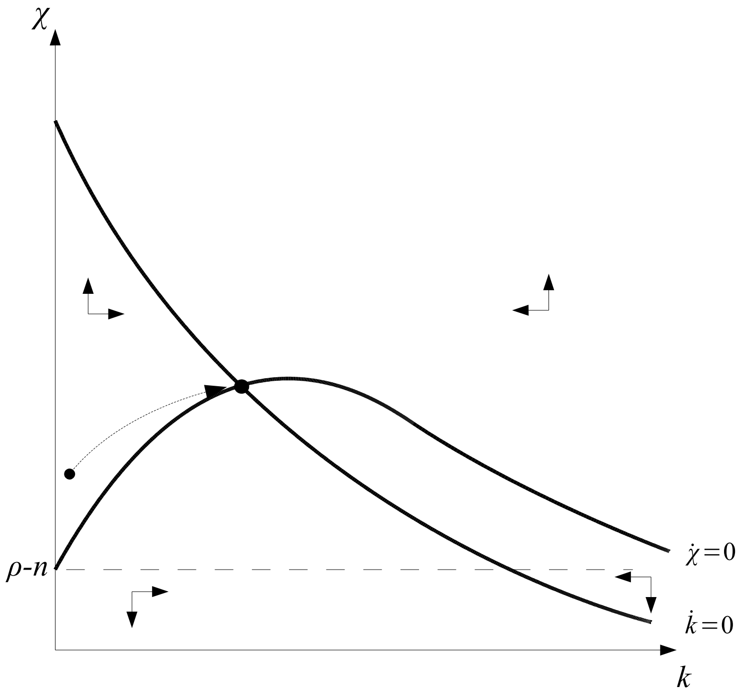


Kaavio 4.3: *Pääomaintensiteetin ja kulutus-pääomaintensiteetti–suhteen vaihediagrammi, kun* $\sigma < 1$ *ja substituutiojousto on riittävän korkea.*

Sen sijaan kaaviossa 4.4 on kuvattu tilanne, jossa edelleen $\sigma < 1$, mutta substituutiojousto on niin matala, että tasaisen kasvun tila sijaitsee singulaariuran $\dot{\chi} = 0$ nousevalla osalla. Tällöin talouden konvergoidessa kohti tasaisen kasvun tilaa kasvaa χ monotonisesti. Tällöin $\phi > 0$ ja maailman pääomaintensiteettien jakauma liikkuu yhä kauemmas työvoiman tuottavuuksien jakaumasta. Maailmantalouden pääomaintensiteettien jakauman kehitys voidaan nyt tiivistää muodossa

Väittämä 11. *Mikäli palkkojen kasvunopeus on riittävän matala, ja pääoman ja työvoiman välinen substituutiojousto on riittävän suuri, lähestyy maailman pääomaintensiteettien jakauma asymptoottisesti työvoiman tuottavuuksien jakaumaa.*

Tulos on järkevä, sillä mitä korkeampi tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto on, sitä hitaammin maailmantalouden palkat nousevat. Substituutiojouston ollessa korkea pystytään kasaantuneella pääomalla korvaamaan tehokkaasti tuotannossa työvoimaa. Tämä hillitsee työvoiman suhteellisesta harventumisesta johtuvia palkkojen nousupaineita. Palkkojen riittävän hidas kasvunopeus taas on välttämätön ehto sille, että pääomaintensiteettien jakauma lähestyy tuottavuuksien jakaumaa.



Kaavio 4.4: *Pääomaintensiteetin ja kulutus-pääomaintensiteetti–suhteen vaihediagrammi, kun* $\sigma < 1$ *ja substituutiojousto on riittävän matala.*

4.5 Kasvuihmeiden syntyminen

Kuten jo johdannossa kuvattiin, eräs toisen maailmansodan jälkeisen ajan olennaisimmista taloudellisista ilmiöistä on kasvuihmeiden ilmeneminen. Tietyt Itä-Aasian maat kasvoivat pitkään ennennäkemättömän nopeasti. Kuten Young (1995) on osoittanut, ihmeet voidaan selittää tavanomaisen kasvuteorian avulla tuotannontekijöiden kasaantumisen kautta. Tuottavuuden kasvu ei ole ollut ratkaiseva tekijä kasvuihmeiden syntymisessä. Vaikka maiden säästämisaste onkin ollut korkea, olisi maiden kasvunopeuksien pitänyt jo palata neoklassisen kasvuteorian mukaan tavanomaiselle tasolle.

Kasvuihmemaiden kehitykseen on voimakkaan talouskasvun ohella kuulunut myös maiden teollisen tuotannon ja viennin voimakas kasvu. On siis syytä tutkia, mikä yhteys näillä kahdella ilmiöllä on. Tarkastellaan nyt Venturan mallin avulla, kuinka pienen, parametreiltaan poikkeavan ja avoimen maan talouskasvu eroaa maailmantalouden keskiarvoista. Osoittautuu, että markkinoiden avoimuus ja kansainvälinen hyödykekauppa voivat olla ratkaisevassa tekijässä maan talouskasvussa, ja parhaimmillaan synnyttää kasvuihmeen.

4.5.1 Poikkeavan maan talouskasvu

Tähän saakka on oletettu, että maailman maat ovat identtisiä lukuun ottamatta niiden työvoiman tuottavuutta ja pääomavarantoa alkuhetkellä. Tutkitaan nyt, miten kuluttajien aikapreferenssin, väestökasvun nopeuden ja pääomalle maksettavan koron eroaminen muusta maailmasta vaikuttavat maan kasvunopeuteen.

Oletetaan ensin, että tarkkailtavan maan pääoman korkokanta on $p_2(1+\theta_j)$, missä θ_j kuvaa (prosentuaalista) eroa kotimaan ja muun maailman korkotasojen välillä. Tämä korkotasojen ero voi syntyä esimerkiksi erilaisen verotuksen, investointitukiaisten tai pääoman tehokkuutta parantavan teknologian käyttämisestä. Koska mallissa oletetaan, että kansainvälisiä pääomamarkkinoita ei ole olemassa, korkotasojen ero on ylläpidettävissä.[12]

Tarkastellaan nyt kooltaan pientä avointa taloutta. Tätä voidaan kuvata ehdolla $\pi_j k_j^R \approx 0$. Oletetaan lisäksi, että mallin parametreille pätevät seuraavat epäyhtälöt:

$$n - n_j \geq p_2^* \theta_j + (\rho - \rho_j) > 0, \tag{4.45}$$

missä p_2^* on maailmanmarkkinoiden pitkän tähtäimen korkotaso, joka riippuu substituutiojoustosta. Luvussa 4.3 osoitettiin, että korkean substituutiojouston tapauksessa ($\sigma > 1$) on $p_2^* = 1$. Jos taas substituutiojousto on matala ($\sigma < 1$) on $p_2^* = \rho$. Ensimmäinen epäyhtälö merkitsee maan väestönkasvu olevan riittävän hidas sen kulutuspreferensseihin nähden. Ehtoa tarvitaan, jotta maa pysyisi aina kooltaan pienenä. Toinen epäyhtälö taas kertoo, että maan kulutuspreferenssit ovat riittävän kärsivälliset maailman keskiarvoon (ja korkotason eroon) verrattuna. Tämä ehto tarvitaan kasvuihmeen syntymiseksi.

Koska maan oletetaan pysyvän pienenä, voidaan koko maailman keskiarvojen kehitystä edelleen approksimoida liikeyhtälöillä (4.25) ja (4.26). Liitteessä M johdetaan epähomogeenisen maan suhteelliselle pääomaintensiteetille liikeyhtälö

$$\dot{k}_j^R = [\phi + p_2\theta_j + (\rho - \rho_j)]k_j^R - \phi_j A_j^R, \tag{4.46}$$

missä tekijän ϕ määritelmä on sama kuin luvussa 4.4. Maakohtainen tekijä ϕ_j on

$$\phi_j \doteq \frac{A}{k}\left[(\rho_j - n_j)\int_t^\infty p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2(1+\theta_j)-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau - p_1\right]. \tag{4.47}$$

[12] Mikäli kansainväliset pääomavirrat oletetaan pieniksi, voi korkotasojen ero olla silti ylläpidettävissä. Tämä riippuu korkotasojen eron lähteestä. Mikäli $\theta_j > 0$ hallituksen kotimaisille yrityksille suomien tukiaisten vuoksi, vierasmaalaiset yritykset eivät pysty hyödyntämään korkotasojen eroa. Jos taas korkotasojen ero johtuu hallituksen investointien kautta luodusta infrastruktuurista, korkotaso ei ole ylläpidettävissä, sillä vierasmaalaiset yritykset pystyvät hyötymään tästä infrastruktuurista.

Jos yllä asetetaan $\theta_j = 0$, $\rho_j = \rho$ ja $n_j = n$, palautuu yhtälö ϕ:n määritelmään (4.39).

Parametrien erojen vaikutusta talouskasvuun voidaan nyt arvioida liikeyhtälöstä (4.46). Jos k_j^R, A_j^R ja n_j pidetään vakioina, riippuu ero suhteellisen pääomaintensiteetin kasvussa ainoastaan liikeyhtälön hakasulkeissa olevasta tekijästä. Mitä pienempi kotitalouksien aikapreferenssi ρ_j on, sitä nopeammin pääomaintensiteetti ja talous kokonaisuudessaan kasvavat. Kärsivällinen maa kuluttaa suhteessa vähemmän varallisuudestaan, jolloin se myös pystyy investoimaan enemmän ja täten kasvamaan nopeammin.

Myös korkotasojen ero θ_j vaikuttaa talouskasvuun. Yhtälöstä (4.46) nähdään, että pääomaintensiteetti kasvaa sitä nopeammin, mitä suurempi korkotasojen välinen ero maan ja muun maailman välillä on. Koska korkotaso on korkeampi kuin muussa maailmassa, palkkojen nettonykyarvo on matalampi, jolloin myös kulutuksen taso on pienempi. Kyseessä on korkean korkotason tulovaikutus.

Väestön kasvunopeus vaikuttaa maan talouden kasvunopeuteen monimutkaisemmin. Ensinnäkin, korkea väestön kasvunopeus merkitsee sitä, että suuri osa säästöistä käytetään laajentuvan väestön saattamiselle samalle pääomaintensiteetin tasolle. Tällöin jää vähemmän käytettäväksi pääomaintensiteetin kasvattamiseen. Toiseksi, nopea väestönkasvu suurentaa palkkojen nettonykyarvoa, sillä tulevaisuudessa kotitalouteen kuuluu yhä enemmän palkansaajia. Tämä lisää kulutusta nykyhetkellä. Kolmanneksi, korkea väestön kasvunopeus johtaa matalampaan taipumukseen kuluttaa varallisuutta.

4.5.2 Pitkän tähtäimen talouskasvu

Avoimesti kansainvälistä kauppaa käyvän, parametreiltaan poikkeavan ja kooltaan pienen maan talouskasvu voi poiketa merkittävästi vastaavan suljetun maan talouskasvusta. Avoimen maan suhteellisen pääomaintensiteetin kasvunopeudelle pätee seuraava väite:

Väittämä 12. *Oletetaan, asymptoottisesti kooltaan pieni (eli $\lim_{t\to\infty} \pi_j k_j^R \approx 0$) ja avoin maa j käy kauppaa kansainvälisillä hyödykemarkkinoilla, jolloin maan suhteellisen pääomaintensiteetin kehitystä kuvaa yhtälö* (4.46). *Tällöin maan suhteellisen pääomaintensiteetin (aidosti positiivinen) kasvunopeus on*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\dot{k}_j^R}{k_j^R} = p_2^* \theta_j + \rho - \rho_j.$$

Aloitetaan väittämän todistus ratkaisemalla epähomogeenisen maan suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälö. Yhtälöstä saadaan ratkaistua suhteellisen pääomaintensiteetin kehitys korkokannan, tekijän ϕ sekä pääomaintensiteetin ja tuottavuuden alkuarvojen funktiona. Lopputulokseksi saadaan[13]

$$k_j^R(t) = e^{(\bar{\phi}+\bar{p}_2\theta_j+\rho-\rho_j)t}\left[k_j^R(0) - A_j^R\int_0^t \phi_j e^{-(\bar{\phi}+\bar{p}_2\theta_j+\rho-\rho_j)\tau}\mathrm{d}\tau\right], \tag{4.48}$$

missä kaavan yksinkertaistamiseksi on kirjoitettu $\bar{\phi} \doteq (1/t)\int_0^t \phi \mathrm{d}t$, toisin sanoen $\bar{\phi}$ on tekijän ϕ keskiarvo välillä $[0,t]$. $\bar{p}_2$ määritellään vastaavasti. Koska $\lim_{t\to\infty}\phi = 0$ (katso luku 4.4.2), ja oletuksena on $k_j^R(t) > 0$, seuraa yhtälöstä (4.48) tulos $\lim_{t\to\infty} k_j^R = \infty$.

Lasketaan nyt maan suhteellisen pääomaintensiteetin pitkän tähtäimen kasvunopeus. Tämä saadaan suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälöstä (4.46) jakamalla se puolittain termillä k_j^R. Ottamalla raja-arvo $t \to \infty$ saadaan

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_j^R}{k_j^R} = \lim_{t\to\infty}\phi + p_2^*\theta_j + \rho - \rho_j - A_j^R \cdot \lim_{t\to\infty}\frac{\phi_j}{k_j^R}. \tag{4.49}$$

Aiemmin todettiin, että $\lim_{t\to\infty} k_j^R = \infty$. Jotta ylläolevan yhtälön viimeisen termin raja-arvo olisi nolla, täytyy vielä todistaa, että $\lim_{t\to\infty}\phi_j$ on äärellinen. Tämä raja-arvo voidaan laskea suoraan määritelmästä (4.47). Olettamalla, että maa pysyy kooltaan aina pienenä (eli $\lim_{t\to\infty}\pi_j k_j^R \approx 0$)[14] saadaan raja-arvoksi

$$\lim_{t\to\infty}\phi_j = \frac{Ap_1^*}{k^*}\cdot\left[\frac{\rho_j - p_2^*(1+\theta_j)}{p_2^*(1+\theta_j) - n_j}\right], \tag{4.50}$$

mikä on äärellinen kaikilla substituutiojouston arvoilla.[15] Yhtälöstä (4.49) saadaan nyt

---

[13] Venturan artikkelissa on tässä kohtaa kaksi virhettä: ensinnäkin artikkelin alaviitteen kaavan $k_j^r(t)$ pitäisi tietenkin olla $k_j^R(t)$. Toiseksi, yhtälön (4.48) tekijän ϕ_j sisältävän integraalin eksponenttitermin merkki on väärä (artikkelissa positiivinen, pitäisi olla negatiivinen).

[14] Tämä ehto on itse asiassa yhtäpitävä aiemmin asetetun ehdon $n - n_j \geq p_2^*\theta_j + \rho - \rho_j$ kanssa. Tämä voidaan todistaa tarkastelemalla termin $\pi_j k_j^R$ kasvua. Derivoimalla funktio $\ln \pi_j k_j^R$ ajan suhteen saadaan yhtälö

$$g_{\pi_j k_j^R} = \dot{\pi}_j/\pi_j + \dot{k}_j^R/k_j^R.$$

Olkoon talous määritelmän mukaisesti pieni hetkellä $t = 0$. Jotta se myös aina pysyisi pienenä, täytyy asymptoottisesti päteä $\lim_{t\to\infty} g_{\pi_j k_j^R} \leq 0$. Koska määritelmän mukaisesti $\dot{\pi}_j/\pi_j = n_j - n$ ja yhtälöstä (4.51) saadaan $\dot{k}_j^R/k_j^R = p_j^*\theta_j + \rho - \rho_j$, päädytään mainittuun ehtoon $n - n_j \geq p_2^*\theta_j + \rho - \rho_j$.

[15] Tapaus $\sigma < 1$ on suoraviivainen; tällöin sekä k^* että p_1^* ovat äärellisiä. Korkean substituutiojouston tapaus $\sigma > 1$ on ongelmallisempi, sillä tällöin sekä k että p_1 lähestyvät asymptoottisesti ääretöntä (katso yhtälö (4.33). Tällöin täytyy todistaa, että raja-arvo $\lim_{k\to\infty} p_1/k$ on äärellinen. Tämä tapahtuu huomaamalla, että p_1 voidaan kirjoittaa tuottavuuden ja pääomaintensiteetin funktiona muodossa (4.17). Tällöin saadaan laskettavaksi raja-arvo

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_1}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{(1 + A^\psi/k^\psi)^{(1-\psi)/\psi}\cdot A^{\psi-1}}{k^\psi} = 0 < \infty.$$

Näin ollen lausekkeen (4.50) raja-arvo on äärellinen kaikilla substituutiojouston arvoilla.

väittämän tulos

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\dot{k}_j^R}{k_j^R} = p_2^*\theta_j + \rho - \rho_j. \tag{4.51}$$

Maan suhteellinen pääomaintensiteetti kasvaa siis asymptoottisesti aidosti positiivisella nopeudella $p_2^*\theta_j + \rho - \rho_j$. Huomattavaa tuloksessa on, että se pätee tuotantoteknologiasta riippumatta — siis sekä substituutiojouston matalilla että korkeilla arvoilla. Kasvunopeus voi erota maailman keskiarvosta myös, vaikka korkotasojen ero θ olisikin nolla. Tällöin maan kotitalouksien pitää olla keskimääräistä kärsivällisempiä.

Korkean substituutiojouston tapauksessa ($\sigma > 1$) maailmantalous kasvaa endogeenisesti, ja maailmantalouden pääomaintensiteetin asymptoottinen kasvunopeus on $1-\rho$. Koska $g_{k_j^R} = g_{k_j} - g_k$, kasvaa parametreiltaan poikkeavan maan j pääomaintensiteetti tällöin nopeudella $1+\theta_j-\rho$. Tämä on itse asiassa sama kasvunopeus, kuin jos maa olisi suljettu eikä kävisi kauppaa muiden maiden kanssa. Pienen maan ei siis tarvitse uhrata pitkän tähtäimen kasvunopeuttaan avatessaan markkinansa kansainväliselle hyödykekaupalle. Kansainvälinen kauppa mahdollistaa siis suuretkin pysyvät maiden väliset kasvunopeuserot, vaikka maiden tuotannotekijöiden hinnat olisivatkin sidoksissa kansainvälisiin välituotteiden hintoihin.

Vastaavasti matalan substituutiojouston tapauksessa ($\sigma < 1$) maailmantalous konvergoi kohti tasaisen eksogeenisen kasvun tilaa, ja asymptoottinen maailman pääomaintensiteetin kasvunopeus on tällöin 0. Yhtälö (4.51) pätee kuitenkin edelleen maan j suhteellisen pääomaintensiteetin kasvunopeudelle, joten maan pääomaintensiteetti kasvaa nopeudella $\rho(1+\theta_k) - \rho_j > 0$. Pieni maa, jonka säästämisaste on korkea (tai vastaavasti kotitalouksien aikapreferenssi on matala, tai korkotaso on korkea) ja väestönkasvu on hidas, voi siis kasvaa endogeenisesti, vaikka maailman tuotantoteknologia johtaisikin laskevien tuotantojen vuoksi tasaisen kasvun tilaan. Avaimena jatkuvaan kasvuun on maan avaaminen kansainväliselle hyödykekaupalle — suljetussa maassa laskevat rajatuotot hidastaisivat lopulta talouden kasvun väestökasvun tasolle.

Maan talouskasvu voi olla pitkällä tähtäimellä positiivista vain, jos käytetty teknologia on asymptoottisesti lineaarinen kasaantuvan tuotannontekijän (eli tässä tapauksessa pääoman) suhteen. Verrataan nyt suljetun ja avoimen talouden kansantuotteita, kun talouden kaikki sektorit on laskettu yhteen. Suljetussa taloudessa välituotteiden hinnat (yhtälöt (4.16) ja (4.17)) riippuvat maan pääomaintensiteetistä ja työvoiman tuottavuudesta. Tällöin sijoittamalla mainitut hinnat edustavan kotitalouden tulofunktion tulopuolelle (4.3) saadaan kansantuotteeksi työntekijää kohden

$$y_{\text{suljettu}} = (k_j^\psi + A_j^\psi)^{1/\psi}. \tag{4.52}$$

Suljetussa taloudessa pääomaintensiteetin kasvaminen muuttaa aina hintoja. Sen sijaan kooltaan pienessä ja avoimessa, hyödykekauppaa kansainvälisesti käyvässä taloudessa välituotteiden hinnat määräytyvät maailmantalouden keskiarvojen perusteella. Pienen maan sisäiset olosuhteet eivät vaikuta näihin keskiarvoihin, joten avoimen maan kansantuotteeksi työntekijää kohden muodostuu

$$y_{\text{avoin}} = p_1 A_j + p_2 k_j. \tag{4.53}$$

Maan avaaminen kansainväliselle kaupalle vastaa siis pitkällä tähtäimellä lineaarisen tuotantoteknologian valitsemista. Lineaarinen tuotantoteknologia taas mahdollistaa jatkuvan keskiarvoja nopeamman kasvun, eli *kasvuihmeet*.

4.5.3 Tuotantorakenteen kehitys

Vaikka nyt käytetty malli onkin liian yksinkertainen kuvatakseen realistisesti nopeasti kasvavan talouden kehitystä, voidaan sen avulla tehdä mielenkiintoisia päätelmiä maan tuotantorakenteen muutumisesta. Tavanomaisissa kasvumalleissa tuotannon perusrakenne ei muutu kasvun aikana. Pääomaintensiteetin kasvaminen ja pääoman kasaantuminen johtavat työvoiman ylikysyntään ja pääoman ylitarjontaan. Nämä taas johtavat palkkatason nousemiseen ja korkotason laskemiseen, kuten luvussa 4.3 nähtiin. Nämä hintamuutokset puolestaan kannustavat yrityksiä käyttämään yhä pääomaintensiivisempää teknologiaa tuotannossaan. Talous tuottaa koko ajan samoja hyödykkeitä tuotantoteknologian vähitellen muuttuessa. Talouskasvu perustuu tällaisissa malleissa *pääoman syventymiseen (capital deepening)*.

Nyt esitetty malli kuvaa talouskasvua erilaisella mekanismillä. Kuten yllä, pääomaintensiteetin kasvaessa työvoimasta tulee suhteessa harvaa ja pääomasta ylitarjontaa. Hintojen muutoksen sijaan työn kasvunut kysyntä ja pääoman ylitarjonta purkautuvat *tuotantorakenteen muutoksen* kautta. Pääomaintensiivisempien tuotantomenetelmien käyttöönoton sijaan kasvuihmemaiden talous käyttää pääoman suhteellisen kasvun laajentamalla pääomaintensiivisiä tuotannonaloja ja kutistamalla työvoimaintensiivisiä aloja. Tämä taloudellisen toiminnan uudelleenjärjestely nostaa pääoman kysyntää ja laskee työvoiman kysyntää. Kansainvälisen hyödykekaupan avulla avoimet maat voivat mukautua korkeampaan pääomaintensiteettin hintojen pysyessä vakiona. Tällaisissa malleissa talouskasvu johtaa tuotantorakenteen muutokseen pääomarakenteen syventymisen sijaan.

Tässä tutkielmassa tarkastellussa mallissa talouden tuotantorakenteen muutos on helposti nähtävissä. Oletetaan, että maailma on tasaisen kasvun tilassa, jolloin tuotannontekijöiden hinnat ovat vakiot. Tällöin pääomaintensiteetin kasvaessa maan välituotesektori 2 laajenee sektorin 1 pysyessä samana (koska $x_{1j} = A_j$ ja $x_{2j} = k_j$). Koska valittujen tuotantoteknologioiden välinen pääomaintensiteetin ero on erittäin suuri (itse asiassa ääretön), on pääoman kertymisestä johtuva tuotantorakenteen muutos mahdollisimman pieni.

Rybczynskin kansainvälisen kaupan lauseen mukaan maan pääomavarantojen kasvaminen johtaa suhteessa vähintään saman suuruiseen laajentumiseen pääomaintensiivisemmällä tuotantosektorilla ja vähintään saman suuruiseen kutistumiseen työvoimaintensiivisemmällä sektorilla. Nyt käsitellyssä mallissa on kyse rajatapauksesta, sillä pääomaintensiivisen sektorin laajentuminen on suoraan verrannollinen pääomaintensiteetin kasvuun, ja työvoimaintensiivinen sektori pysyy vakiosuuruisena. Ventura (1997) osoittaa, ettei tuotantorakenteen muutos millään tuotantoteknologioilla voi olla pienempi kuin nyt käytetyssä mallissa.

Esitetty malli on sopusoinnussa Itä-Aasian maiden kasvun taustalla olevan avaintekijän kanssa: niiden teollisuustuotteiden viennin osuus bruttokansantuotteesta kasvoi dramaattisesti. Käsittämällä mallin pääomaintensiivinen välituotesektori teollisuustuotteiden valmistamiseksi ja työvoimaintensiivinen välituotesektori perinteiseksi tuotantosektoriksi (esimerkiksi maatalоussektoriksi) nähdään, että malli selittää kasvuihmemaiden tuotantorakenteen muutoksen ja erityisesti vientituotesektorien kasvun.

Koska välituotteiden kysyntäfunktiot (4.8) ovat homoteettisiä, käyttävät kaikki maat saman osuuden kokonaistuloistaan teollisuustuotteisiin. Merkitään tätä osuutta κ:lla. Tällöin teollisuustuotteiden viennin osuus maan j bruttokansantuotteesta on[16]

$$(1-\kappa)\frac{\kappa(k_j^R - A_j^R)}{\kappa(k_j^R - A_j^R) + A_j^R}. \tag{4.54}$$

Tästä nähdään, että pääomavaltaiset maat ovat teollisuustuotteiden nettoviejiä, kun taas työvoimavaltaiset maat ovat vuorostaan nettotuojia. Tämä seuraa siitä, että yhtälön nimittäjä on aina positiivinen, joten merkki riippuu pelkästään osoittajasta. Osoittaja on positiivinen, kun $k_j^R > A_j^R$ eli maan suhteellinen pääomaintensiteetti on suurempi kuin suhteellinen tuottavuus. Ylläolevasta voi samoin myös päätellä keskimääristä nopeammin kasvavien maiden (joille siis $g_{k_j^R} > 0$) siirtyvän nettotuojista nettoviejiksi niiden suhteellisen tulotason (pääomaintensiteetin) kasvaessa. Juuri näin on käynyt Itä-Aasian maiden kohdalla.

[16] Tulos voidaan johtaa, kun muistetaan, että teollisuustuotteiden viennin arvo on $p_2(k_j - k)$ ja bruttokansantuote on $p_1 A_j + p_2 k_j$. Jaetaan nämä kaksi toisillaan ja muistetaan, että määritelmästä seuraa $\kappa \doteq p_2 k/(p_1 A + p_2 k)$.

Luku 5

Johtopäätökset

Itä-Aasian maiden pitkään nopeana jatkunut talouskasvu on ollut yksi merkittävimmistä toisen maailmansodan jälkeisistä talouden kehityksen empiirisistä tosiasioista. Tässä tutkielmassa on tarkasteltu kahta potentiaalista selitystä näille *kasvuihmeille*. Molemmat selitykset ovat pyrkineet osoittamaan, että jatkuva talouskasvu on mahdollista ilman teknologian kehitystä, kasvun perustuessa pelkästään pääoman kasaantumiseen. Tämä vaihtoehtoinen selitys on tarpeen, sillä tavallinen neoklassinen kasvuteoria ennustaa kasvunopeuden hidastuvan ilman teknologian kehitystä.

Ensimmäinen käsitelty malli perustui de La Grandvillen (1989), Klumpin ja de La Grandvillen (2000) sekä Klumpin ja Preisslerin (2000) artikkeleihin. De La Grandvillen esittämän hypoteesin mukaisesti riittävän korkea tuotannontekijöiden välinen substituutiojousto mahdollistaa jatkuvan endogeenisen kasvun. Substituutiojouston todettiin vaikuttavan paitsi endogeenisen kasvun esiintymiseen, myös kasvun nopeuteen. Vaikka endogeenistä kasvua ei syntyisikään, vaikuttaa substituutiojousto joka tapauksessa suotuisasti mahdolliseen tasaisen kasvun tilaan. Nämä vaikutukset todettiin sekä Solow-Swan–kasvumallissa että Ramseyn kasvumallissa. Lisäksi substituutiojouston todistettiin vaikuttavan myös konvergenssinopeuteen. Tämä vaikutus on kuitenkin ehdollinen, ja riippuu käytetystä talouskasvun mallista.

Toinen käsitelty malli huomioi substituutiojouston lisäksi kansainvälisen hyödykekaupan vaikutuksen maan talouskasvuun. Malli perustuu Venturan (1997) artikkeliin. Mallin antama kuva kansainvälisestä talouskasvusta poikkeaa suljetun maan tapauksesta: ehdollisen konvergenssin tulos ei ole osoitus laskevista rajatuotoista. Olennaista on myös havainto, että yhden maan talouskasvun ajallinen kehitys ja maiden jakauman kehitys on syytä erottaa toisistaan.

Venturan malli ennustaa myös kasvuihmeiden synnyn silloinkin, kun kokonaisteknologia ei pysty ylläpitämään jatkuvaa endogeenistä kasvua (eli kun substituutiojousto on liian matala). Kooltaan pieni maa pystyy tällöinkin kasvamaan maailman keskiarvoja nopeammin, mikäli kotitaloudet ovat riittävän kärsivällisiä, maan väestönkasvu on riittävän hidasta ja palkkataso ei nouse liian nopeasti. Valtion harjoittama korkoeroa ylläpitävä talouspolitiikka voi lisäksi edelleen nopeuttaa maan talouskasvua.

Kasvun lähde molemmissa malleissa on pääoman kasautuminen, sillä teknologia ja työvoiman tuottavuus oletetaan vakioksi. Korkeaan substituutiojoustoon perustuvan mallin jatkuva kasvu syntyy siitä, että asymptoottisesti tuotantoteknologian rajatuotot eivät laske nollaan. Tästä seuraa, että pääomaintensiteetin kasvunopeus ja täten talouskasvu pysyy aina positiivisena. Kotitalouksien korkeampi säästämisaste paitsi nostaa todennäköisyyttä jatkuvalle endogeeniselle kasvulle myös nopeuttaa talouskasvua. Täten neoklassisen kasvuteorian tasovaikutuksen sijaan säästämisasteella on vaikutus kasvunopeuteen. Vastaava vaikutus on väestönkasvun hidastumisella.

Kansainväliseen kauppaan perustuvassa Venturan mallissa jatkuvan kasvun mahdollistaa maan käymä kauppa välituotteilla. Pienen maan pääomaintensiteetin kehitys ei vaikuta välituotteiden hintoihin maailmanmarkkinoilla, vaan hinnat pysyvät vakioina. Tällöin sopeutuminen korkeampaan pääomaintensiteettiin tapahtuu välituotteiden hintojen sijaan tuotantosektorien välisten resussien jakautumisen muutoksella. Toisin sanoen talouden resursseja siirretään yhä pääomaintensiivisemmille (uusille) aloille, sen sijaan, että otettaisiin käyttöön pääomaintensiivisempiä tuotantoteknologioita entisillä tuotantosektoreilla. Tähän resurssien siirtymiseen perustuvaa talouskasvua tukevat sekä kotitalouksien kärsivällisyys kulutuksen suhteen että hidas väestönkasvu.

Substituutiojouston korkeaan tasoon perustuvassa mallissa jatkuvaa kasvua ei pysty suoraan tukemaan talouspolitiikalla. Hallitus voi kuitenkin epäsuorasti vaikuttaa talouskasvun syntymiseen, nopeuteen ja tulotasoon sellaisin keinoin, jotka nostavat säästämisastetta ja hidastavat väestönkasvua. Sama johtopäätös pätee myös kansainvälisen kaupan mallissa. Tämän lisäksi valtio pystyy vaikuttamaan kasvunopeuteen suoraan ylläpitämällä korkojen tasoeroa maan ja muun maailman välillä. Tämä voi tapahtua muun muassa erilaisten tukiaisten kautta. Olennaista on luonnellisestikin myös maan avoimuus kansainväliselle kaupalle ja tämän kaupankäynnin pienet (tässä tutkielmassa olemattomiksi oletetut) kustannukset.

Vaikka substituutiojouston riittävän korkeaan tasoon perustuva malli ennustaakin yksikäsitteisesti jatkuvan endogeenisen kasvun syntymisen tietyin ehdoin, on substituutiojoustossa itsessään monia käsitteellisiä ongelmia. Ensinnäkin, matemaattisesti täytyy olla tarkka mallin määrittelyn suhteen, sillä eri määrittelyt voivat johtaa eriäviin tuloksiin. Käytetyt CES-tuotantofunktiot on syytä *normalisoida*, jotta voidaan tarkastella vain ja ainoastaan substituutiojouston vaikutusta talouskasvuun.

Toiseksi, substituutiojouston merkitys itsessään on epämääräinen. Sillä voidaan tarkoittaa joko tuotannontekijöiden välisen korvattavuuden helppoutta (Hicks, 1932), yrittäjien valittavissa olevien tuotantoteknologioiden joustavuutta (Yuhn, 1991) tai kansantalouden yleistä tehokkuutta (de La Grandville, 1989). Joka tapauksessa on syytä huomata, ettei kyseessä ole makrotalouden tasolla kyseessä pelkkä tekninen substituutiojousto, vaan siihen vaikuttaa (ja sisältyy) myös institutionaalisia tekijöitä. Näitä ovat muun muassa työmarkkinajärjestöjen asema, maan markkinoiden kilpailutilanne, innovaatioiden levittämisen tehokkuus ja hyvin toimivat finanssi- ja rahapolitiikka (Klump ja Preissler, 2000). Näiden tekijöiden vaikutuksesta substituutiojoustoon ei kuitenkaan ole tarkkaa käsitystä. Mielenkiintoinen jatkotutkimusaihe voisi olla teknologisen kehityksen ja tuotannon substituutiojouston välinen vuorovaikutus ja vaikutus talouskasvuun. Klump ym. (2004) ovatkin jo tutkineet aihetta, joka liittyy myös *suunnattuun tekniseen kehitykseen*.

Näin ollen substituutiojouston tasoon perustuva selitys kasvuihmeille ei ole kovin hyvä, sillä se ei pysty eristämään talouskasvun synnyn selitystä pelkästään pääoman kasaantumiseen. Substituutiojouston tasoa määriteltäessä joudutaan ottamaan huomioon institutionaaliset ja talouspoliittiset tekijät, jotka pyrittiin jättämään tarkastelun ulkopuolelle.

Viimeinen kritiikki substituutijoustoon perustuvaa talouskasvua ja de La Grandvillen hypoteesia kohtaan on empiiristen testien puute. Ainoastaan Yuhn (1991) on tehnyt maakohtaisen testin substituutiojouston vaikutuksesta Etelä-Korean talouskasvuun. Tämä testi on tosin hypoteesiä tukeva, joten olisi mielenkiintoista nähdä lisää substituutiojouston vaikutusta mittaavia empiirisiä selvityksiä.

Myöskään kansainväliseen kauppaan perustuva Venturan malli ei ole täydellinen. Malli on tarkoituksellisesti yksinkertainen, ja siitä jää puuttumaan osa Ramseyn kasvumallissa mahdollisista talouskasvun ilmiöistä, kuten jatkuvan pienenemisen tila. Välituotteiden tuotantoteknologia on oletettu erittäin yksinkertaiseksi laskujen yksinkertaistamiseksi (vaikka Ventura todistaakin liitteissä tulosten pätevän myös monimutkaisimmillakin teknologoioilla). Lisäksi mallissa on oletettu, että lopputuotesektorin tuotannon substituutiojousto on sama kaikissa maissa. Käytännössä tämä merkitsisi, että kaikissa maissa olisi käytettävissä sama tuotantoteknologia. Tämä ei ole realistinen oletus, joten mallia voisi laajentaa ottamalla huomioon antamalla maiden tuotantoteknologioiden (substituutiojoustojen) erota toisistaan.

Malli olettaa kuljetuskustannukset olemattomiksi, mikä on mallin suurin puute. On selvää, että kuljetuskustannuksilla ja muilla kansainvälisen kaupan kustannuksilla (esimerkiksi tullit) on vaikutusta hintojen muodostumiseen. Myös tarkasteltavan maan talouden koko on rajoitettu: maan oletetaan olevan myös asymptoottisesti niin pieni, että sen toiminta ei vaikuta maailmanmarkkinoiden hintoihin. Malli ei kerro suoraan, miten kooltaan suuren maan kasvu eroaa pienen maan kasvusta.

Yleisesti ottaen nyt käsitellyt mallit antavat kuitenkin mielenkiintoisen vaihtoehtoisen selityksen talouskasvulle ja kasvuihmeiden synnylle. Koska kasvuihmeiden syntyyn ovat todennäköisesti vaikuttaneet kaikki luvussa 2 mainitut selitykset, on nyt esitetyt mallit hyvä mieltää teknologiseen kehitykseen perustuvia kasvumalleja täydentäviksi. Erityisesti Venturan malli antaa erittäin intuitiivisen kuvan talouskasvusta kansainvälisessä ympäristössä yksinkertaisen mallin avulla, ja onnistuu vielä kuvaamaan kasvuihmevaltion talouden kehityksen empiirisiä tuloksia tukevalla tavalla.

Lähteet

Allen, R. G. D. (1938): *Mathematical Analysis for Economists*. St. Martin's Press, New York.

Arrow, K. J., H. B. Chenery, B. S. Minhas ja R. M. Solow (1961): Capital-Labor Substitution And Economic Efficiency. *Review Of Economics And Statistics*, **43(3)**, 225–250.

Barro, R. J. ja X. Sala-i-Martin (2004): *Economic Growth*, 2. painos. MIT Press, London.

Barro, R. J. (1991): Economic Growth in a Cross Section of Countries. *Quarterly Journal of Economics*, **106(2)**, 407–443.

Berndt, E. R. (1976): Reconciling Alternative Estimates of the Elasticity of Substitution. *Review of Economics and Statistics*, **58**, 59–68.

Blanchard, O. (1997): The Medium Run. *Brookings Papers on Economic Activity*, **1997(2)**, 89–159.

Bloom, D., D. Canning ja P. Malaney (1999): Demographic Change and Economic Growth in Asia. *CID Working Papers, Center for International Development, Harvard University*, **15**.

Bosworth, B. ja S. Collins (2003): The Empirics of Growth: An Update. *Brooking Papers on Economic Activity*, **2003(2)**, 113–179.

Brown, M. ja J. S. de Cani (1963): Technological Change and the Distribution of Income. *International Economic Review*, **4(3)**, 289–309.

Collins, S. ja B. Bosworth (1996): Economic Growth in East Asia: Accumulation Versus Assimilation. *Brooking Papers on Economic Activity*, **1996(2)**, 135–203.

Duffy, J. ja C. Papageorgiou (2000): A Cross-Country Empirical Investigation of the Aggregate Production Function Specification. *Journal of Economic Growth*, **5(1)**, 87–120.

Felipe, J. (1997): Total Factor Productivity Growth in East Asia: A Critical Survey. *Asian Development Bank, Economics and Development Resource Center Report Series*, **65**.

Frankel, J. (1991): Quantifying International Capital Mobility in the 1980s. Teoksessa *National Saving and Economic Performance*. Bernheim, D. ja J. Shoven, toimittajat. University of Chicago Press, Chicago.

Frankel, J., D. Romer ja T. Cyrus (2000): Trade and Growth in East Asian Countries: Cause and Effect? Teoksessa *NICs After the Asian Miracle*. Singer, H., N. Hatti ja R. Tandon, toimittajat. BR Publishing, India.

Hicks, J. R. (1932): *The Theory of Wages*. Macmillan, London.

Jones, C. I. (1995): R&D-Based Models of Economic Growth. *Journal of Political Economy*, **103**, 759–784.

——— (1997): On the Evolution of the World Income Distribution. *Journal of Economic Perspectives*, **11(3)**, 19–36.

——— (2002): *Introduction to Economic Growth*, 2. painos. W. W. Norton & Company, New York.

——— (2003): Growth, Capital Shares, and a New Perspective on Production Functions. *Federal Reserve Bank of San Francisco: Proceedings*.

Kaldor, N. (1961): Capital Accumulation and Economic Growth, sivut 177–222. Teoksessa *The Theory of Capital*. Lutz, F. A. ja D. C. Hague, toimittajat. St MartinŠs Press, New York.

Karagiannis, G., T. Palivos ja C. Papageorgiou (2005): Variable Elasticity of Substitution and Economic Growth: Theory and Evidence, sivut 21–38. Teoksessa *New Trends in Macroeconomics*. Diebolt, C. ja C. Kyrtsou, toimittajat. Springer Verlag, New York.

Kim, J.-I. ja L. J. Lau (1994): The Sources of Economic Growth of the East Asian Newly Industrialized Countries. *Journal of the Japanese and International Economics*, **8**, 235–271.

Klump, R. ja O. de La Grandville (2000): Economic Growth and the Elasticity of Substitution: Two Theorems and Some Suggestions. *American Economic Review*, **90(1)**, 282–291.

Klump, R., P. McAdam ja A. Willman (2004): Factor Substitution and Factor Augmenting Technical Progress in the US: A Normalized Supply-Side System Approach. *European Central Bank Working Paper Series*, **367**.

Klump, R. ja H. Preissler (2000): CES Production Functions and Economic Growth. *Scandinavian Journal Of Economics*, **102(1)**, 41–56.

Krugman, P. (1994): The Myth of East Asia's Miracle. *Foreign Affairs*, **73**, 65–78.

de La Grandville, O. (1989): In Quest Of The Slutsky Diamond. *American Economic Review*, **79(3)**, 468–481.

Lee, J.-W. (1993): International Trade, Distortions and Long-Run Economic Growth. *International Monetary Fund Staff Papers*, **40(2)**, 299–328.

Levine, R. ja D. Renelt (1992): A Sensitivity Analysis of Cross-Country Growth Regressions. *American Economic Review*, **82(4)**, 942–963.

Lucas, R. E. (1988): On the Mechanics of Economic Development. *Journal of Monetary Economics*, **22(3)**, 3–42.

——— (1993): Making a Miracle. *Econometrica*, **61(2)**, 251–272.

Mankiw, N. G., D. Romer ja D. Weil (1992): A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *Quarterly Journal of Economics*, **107(2)**, 407–437.

McFadden, D. (1963): Constant Elasticity of Substitution Production Functions. *Review of Economic Studies*, **30(2)**, 73–83.

Morishima, M. (1967): A Few Suggestions on the Theory of Elasticity. *Keizai Hyoron (Economic Review)*, **16**, 149–150.

Nelson, R. ja H. Pack (1999): The Asian Miracle and Modern Growth Theory. *The Economic Journal*, **109**, 416–436.

Papageorgiou, C. ja M. Saam (2005): Two-Level CES Production Technology in the Solow and Diamond Growth Models. Working Paper 2005-07, Department of Economics, Louisiana State University.

Pitchford, J. (1960): Growth and the Elasticity of Substitution. *Economic Record*, **36**, 491–503.

Pritchett, L. (1997): Divergence, Big Time. *Journal of Economic Perspectives*, **11(3)**, 3–17.

Ramsey, F. (1928): A Mathematical Theory of Saving. *Economical Journal*, **38**, 543–559.

Rodrik, D. (1994): King Kong Meets Godzilla: The World Bank and the East Asian Miracle. Teoksessa *Miracle or Design? Lessons from the East Asian Experience, Policy Essay No. 11*. Fishlow, A., toimittaja. Overseas Development Council, Washington, D.C.

Romer, P. (1990): Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, **98(5)**, 71–102.

Sarel, M. (1996): Growth in East Asia: What We Can and What We Cannot Infer. *International Monetary Fund Economic Issues*, **1**.

Solow, R. M. (1956): A Contribution To The Theory Of Economic Growth. *Quarterly Journal Of Economics*, **70(1)**, 65–94.

Trefler, D. (1993): International Factor Price Differences: Leontief Was Right!. *Journal of Political Economy*, **101(6)**, 961–987.

Uzawa, H. (1962): Production Functions with Constant Elasticities of Substitution. *Review of Economic Studies*, **29(81)**, 291–299.

Ventura, J. (1997): Growth and Interdependence. *Quarterly Journal Of Economics*, **112(1)**, 57–84.

Young, A. (1995): The Tyranny of Numbers: Confronting the Statistical Realities of the East Asian Growth Experience. *Quarterly Journal of Economics*, **110(3)**, 641–680.

Yuhn, K. H. (1991): Economic-Growth, Technical Change Biases, And The Elasticity Of Substitution - A Test Of The De La Grandville Hypothesis. *Review Of Economics And Statistics*, **73(2)**, 340–346.

Liitteet

A CES-tuotantofunktion yleisen muodon johtaminen

Kappaleessa 3.1 esitetty CES-tuotantofunktioiden yleinen muoto voidaan johtaa lähtien substituutiojoustokertoimen määritelmästä (3.1). Tämä funktion johtaminen löytyy artikkelista (Brown ja de Cani, 1963, liite II). Tässä on esitetty johtamisen pääkohdat.

Kirjoitetaan määritelmän perusteella differentiaaliyhtälö $y = f(k)$:lle:

$$\sigma k f'(k) f(k) = k[f'(k)]^2 - f'(k) f(k). \tag{A-1}$$

Tekemällä sijoitus $k = e^u$ voidaan tämä yhtälö kirjoittaa muodossa

$$\sigma f f'' - (f')^2 = (\sigma - 1) f' f, \tag{A-2}$$

Missä derivoinnit tapahtuvat u:n eikä k:n suhteen. Tehdään nyt sijoitus $z \equiv f'$, josta seuraa $z' = f''$ ja $\mathrm{d}z/\mathrm{d}f = f''/f$. Näiden määritelmien avulla differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sigma f \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}f} - z = (\sigma - 1) f. \tag{A-3}$$

Tämä voidaan ratkaista tekemällä yrite $z = f^\alpha$, josta $z' = \alpha f^{(\alpha-1)}$. Tulokseksi saadaan yhtälö $\sigma \cdot \alpha - 1 = \sigma - 1$, mistä voidaan ratkaista $\alpha = 1$. Näin ollen yhtälön (A-3) yleisenä ratkaisuna on $z = C_0 f$, missä C_0 on alkuehdoista määräytyvä vakio. Etsitään erityisratkaisu tekemällä yrite $z_p = C(f) f$, missä $C(f)$ on yleinen f:n funktio. $C(f)$:lle saadaan differentiaaliyhtälö

$$\frac{C'(f)}{1 - C(f)} = \frac{\sigma - 1}{\sigma} \cdot \frac{1}{f}. \tag{A-4}$$

Differentiaaliyhtälön (A-3) erityisratkaisuksi saadaan siis tästä ratkaisemalla

$$z_p = f - C_1 f^{1/\sigma}, \tag{A-5}$$

missä C_1 on integrointivakio[1], jonka arvo määräytyy ongelman alkuarvojen perusteella. Differentiaaliyhtälö (A-3) täydelliseksi ratkaisuksi saadaan siis

$$z = f + C_2 f^{1/\sigma} \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}. \tag{A-6}$$

Erotetaan nyt kaksi tapausta substituutiojoustovakion arvon mukaan: $\sigma = 1$ ja $\sigma \neq 1$. Kun $\sigma = 1$ voidaan yhtälö (A-6) ratkaista yksinkertaisesti; ratkaisu on muotoa

$$f(u) = C_3 e^{u(1+C_2)} \Rightarrow f(k) = C_3 k^{1+C_2}. \tag{A-7}$$

Mikäli $\sigma \neq 1$, voidaan differentiaaliyhtälö (A-6) ratkaista tekemällä sijoitus $w \equiv f^{1/\sigma}$. Ratkaisuksi saadaan (pitkähköjen algebrallisten manipulaatioiden jälkeen)

$$f(k) = (C_4 k^{\psi} - C_2)^{1/\psi} \Leftrightarrow f^{\psi} - C_4 k^{\psi} = -C_2, \tag{A-8}$$

missä $\psi = 1 - \sigma^{-1}$. Lopullisen ratkaisun löytämiseksi täytyy vielä soveltaa skaalautuvuusehtoa. Erotetaan taas tapaukset $\sigma = 1$ ja $\sigma \neq 1$. Kun $\sigma = 1$, f:n differentiaaliyhtälön ratkaisu on yhtälön (A-7) mukainen. Tällöin $h = k^{1+C_2}/f$ muuttuu lineaarisesti. Olkoon nyt $Y(h) = Y(k^{1+C_2}/f)$ tuotantofunktio. Y on n:nen asteen homogeeninen funktio, kun

$$nY = kY_k + fY_f = k(1+C_2)k^{C_2}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}h} - k^{1+C_2}/f\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}h} = C_2 h\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}h}. \tag{A-9}$$

Ylläolevasta saadaan differentiaaliyhtälö Y:n ja h:n välille. Tämä yhtälö on ratkaistavissa, ja ratkaisuna on

$$Y = C_5 h^{n/C_2} = C_5 k^{n(1+C_2)/C_2} f^{-n/C_2}. \tag{A-10}$$

Kirjoittamalla ylläolevassa yhtälössä integrointivakiot hieman eri tavalla havaitaan, että kyseessä on itse asiassa Cobb-Douglas -tuotantofunktio $Y = CK^{\beta}L^{1-\beta}$, joka on n:nen asteen homogeeninen funktio, toisin sanoen kun $n < 1$ saadaan laskevat skaalatuotot, ja vastaavasti nousevat skaalatuotot kun $n > 1$.

Vastaavasti tapauksessa $\sigma \neq 1$ sovelletaan skaalautuvuusehtoa. Nyt $h \equiv f^{\psi} - C_6 k^{\psi}$, ja

$$nY = kY_k + fY_f = \psi h\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}h}. \tag{A-11}$$

[1] Jatkossa alkuehtojen perusteella määrittyviä integrointivakioita merkitään C_i:llä, missä $i = 2, 3, 4, \ldots$.

Saadaan siis jälleen differentiaaliyhtälö Y:lle h:n funktiona. Tämän ratkaisuna on

(A-12) $$Y = C_6[f^{\psi} - C_4 k^{\psi}]^{n/\psi},$$

joka on siis muotoa

(A-13) $$Y = \gamma_1[K^{\psi} + \gamma_2 L^{\psi}]^{n/\psi},$$

mikä on yleisin mahdollinen muoto kahden tuotannontekijän CES-tuotantofunktiolle. Huomattavaa on erityisesti skaalautuvuustekijä n, joka määrää skaalaetujen olemassaolon. Jos $n = 1$, pätevät tuotannossa vakioskaalatuotot, kuten tutkielmassa suurimmalta osalta oletetaan.

B Substituutiojouston vaikutus tuotannon tasoon

Laskettavana on siis derivaatta $\partial f(k)/\partial\sigma$. Kirjoitetaan ensin pääomatulojen osuus kokonaistuloista muodossa

$$\pi \doteq \frac{kf'(k)}{f(k)} = \frac{k^\psi}{k^\psi + \tilde{\alpha}} = \frac{k^\psi k_0^{1-\psi}}{k^\psi k_0^{1-\psi} + \mu_0}, \tag{B-1}$$

missä on hyödynnetty parametrin α määritelmää (3.15). Tämän avulla voidaan myös kirjoittaa lauseke pääoman tulo-osuuden alkuhetken arvolle sijoittamalla ylläolevaan lausekkeeseen arvo $k = k_0$:

$$\pi_0 = \frac{k_0}{k_0 + \mu}. \tag{B-2}$$

Näiden avulla voidaan tuotantofunktio kirjoittaa pääoman tulo-osuuden ja sen alkuarvon lausekkeena:

$$y = f(k) = \frac{y_0}{k_0}\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^{1/\psi} \cdot k.$$

Sijoittamalla tämä Solow-Swan-mallin pääomaintensiteetin liikeyhtälöön (3.19) saadaan mallin liikeyhtälö tulo-osuuden ja pääomaintensiteetin funktiona:

$$\dot{k} = \left[s\frac{y_0}{k_0}\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^{1/\psi} - n\right]k. \tag{B-3}$$

Huomataan nyt, että $\partial\sigma/\partial\psi = 1/\sigma^2$. Näin ollen derivaatat voidaan laskea suoraan muuttujan ψ suhteen. Pääoman tulo-osuuden π määritelmästä (B-1) seuraa, kun $k \neq k_0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi}{\partial\sigma} &= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\pi}{\partial\psi} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{(k^\psi k_0^{1-\psi} + \mu_0)^2}\left[k^\psi k_0^{1-\psi}(k^\psi k_0^{1-\psi} + \mu_0) - (k^\psi k_0^{1-\psi})^2\right]\ln\left(\frac{k}{k_0}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}(1-\pi)\pi\ln\left(\frac{k}{k_0}\right).\end{aligned} \tag{B-4}$$

Vastaavasti voidaan laskea tuotantofunktion derivaatta substituutiojouston suhteen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(k)}{\partial\sigma} &= \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial f(k)}{\partial\psi} \\ &= -\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\psi^2}y_0\frac{k}{k_0}\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^{1/\psi}\left[\ln\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right) + (1-\pi)\ln\left(\frac{k}{k_0}\right)^\psi\right],\end{aligned} \tag{B-5}$$

missä on hyödynnetty yllä laskettua pääoman tulo-osuuden derivaattaa. Huomataan nyt, että tulo-osuuden π määritelmästä (B-1) ja sen arvosta alkutilassa π_0 voidaan johtaa yhtälö

(B-6) $$\frac{\pi(1-\pi_0)}{\pi_0(1-\pi)} = \left(\frac{k}{k_0}\right)^{\psi}.$$

Näin ollen yhtälö (B-5) saa lopulta muodon

(B-7) $$\frac{\partial f(k)}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\psi^2}y\left[\pi \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right) + (1-\pi)\ln\left(\frac{1-\pi_0}{1-\pi}\right)\right].$$

Koska σ^2, ψ^2 ja y ovat positiivisia, riippuu derivaatan etumerkki hakasulkeissa olevasta termistä. Koska logaritmifunktio on aidosti konkaavi, pätee sille $\ln X < X - 1$ kun $X \neq 1$. Täten hakasulkeissa oleva termi voidaan kirjoittaa muodossa

(B-8) $$\pi \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi}\right) + (1-\pi)\ln\left(\frac{1-\pi_0}{1-\pi}\right) < \pi_0 - \pi + 1 - \pi_0 - (1-\pi) = 0,$$

joten $\partial f(k)/\partial \sigma > 0$, kuten väittämässä 1 esitetään.

C Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilaan Solow–Swan-mallissa

Vaikutus tasaisen kasvun tilan tasoon

Väittämän 4 todistamiseksi kirjoitetaan ensin tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteetin yhtälö (3.22) muodossa

(C-1) $$k^* = \left[\frac{1-\alpha(\sigma)}{\alpha(\sigma)}\frac{\pi^*}{1-\pi^*}\right]^{1/\psi},$$

missä π^* on pääoman tulo-osuus kokonaistuloista tasaisen kasvun tilassa:

(C-2) $$\pi^* = \alpha(\sigma)\left[\frac{C(\sigma)k^*}{y^*}\right]^{\psi} = \alpha(\sigma)\left[\frac{sC(\sigma)}{n+\delta}\right]^{\psi} = \frac{k_0^{1-\psi}}{k_0+\mu_0}\left(\frac{sy_0}{n+\delta}\right)^{\psi}.$$

Kirjoitetaan lisäksi tulo-osuuden arvolle alkuhetkellä

(C-3) $$\pi_0 = \alpha(\sigma)\left[\frac{C(\sigma)k_0}{y_0}\right]^{\psi}.$$

Koska $\alpha(\sigma) \doteq k_0^{1-\psi}/(k_0^{1-\psi}+\mu_0)$, voidaan laskea derivaatta (huomioiden, että $\partial\psi/\partial\sigma = 1/\sigma^2$)

(C-4) $$\frac{\partial\alpha(\sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\psi}\frac{1}{\sigma^2}\alpha(\sigma)[1-\alpha(\sigma)]\ln k_0^{\psi}.$$

Tulo-osuus tasaisen kasvun tilassa, π^*, taas riippuu substituutiojoustosta seuraavasti:

(C-5) $$\frac{\partial\pi^*}{\partial\sigma} = \frac{1}{\psi}\frac{1}{\sigma^2}\pi^*\ln\left(\frac{\pi^*}{\pi_0}\right).$$

Yhtälöistä (C-1), (C-2) ja (C-3) yhdessä seuraa

(C-6) $$\frac{\pi^*(1-\pi_0)}{\pi_0(1-\pi^*)} = \left(\frac{k^*}{k_0}\right)^{\psi}.$$

Näiden aputulosten avulla voidaan nyt yhtälöstä (C-1) laskea substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteettiin:

(C-7) $$\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{k^*}{\psi}\ln k^* + \frac{k^*}{\psi}\left\{\frac{1}{\pi^*(1-\pi^*)}\frac{\partial\pi^*}{\partial\sigma} - \frac{1}{\alpha(\sigma)[1-\alpha(\sigma)]}\frac{\partial\alpha(\sigma)}{\partial\sigma}\right\}.$$

Sijoittamalla tähän yllä lasketut osittaisderivaatat ja huomioimalla, että logaritmifunktion monotonisesta konkaaviudesta johtuen epäyhtälö $\ln x < x-1$ pätee kaikilla $x > 1$, voidaan johtaa tulos

(C-8) $$\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\psi^2}\frac{k^*}{1-\pi^*}\left\{\pi^* \ln\left(\frac{\pi_0}{\pi^*}\right) + (1-\pi^*)\ln\left(\frac{1-\pi_0}{1-\pi^*}\right)\right\} > 0,$$

mikä oli todistettavana.

Vaikutus konvergenssinopeuteen

Laskettavana on siis derivaatta $\partial\lambda/\partial\sigma$, missä

(C-9) $$\lambda = (n+\delta)\left\{1-\alpha(\sigma)\left(\frac{sC(\sigma)}{n+\delta}\right)^{\psi}.\right\}$$

Havaitaan ensiksi, että yhtälöistä (C-2) ja (C-3) yhdessä seuraa

(C-10) $$\ln\left(\frac{\pi^*}{\pi_0}\right) = \psi \ln\left(\frac{y_0/k_0}{y^*/k^*}\right).$$

Substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen pystytään nyt kirjoittamaan yllä lasketun derivaatan $\partial\pi^*/\partial\sigma$ ja yhtälön (C-10) avulla muodossa

(C-11) $$\begin{aligned}\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma} &= -(n+\delta)\frac{\partial\pi^*}{\partial\sigma} = -(n+\delta)\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{\psi^2}\pi^*\ln\left(\frac{\pi^*}{\pi_0}\right)\\ &= -(n+\delta)\frac{1}{\sigma^2}\pi^*\ln\left(\frac{y_0/k_0}{y^*/k^*}\right).\end{aligned}$$

D Ramseyn kasvumallin liikeyhtälöiden johto

Ramseyn talouskasvun mallissa kansantalouden edustava kotitalous maksimoi omaa hyötyfunktiotaan (tässä oletettu yleinen hetkellinen hyötyfunktio $u[c(t)]$, jolla oletetaan olevan sopivat ominaisuudet)

(D-1) $$U = \int_0^\infty u[c(t)]e^{-(\rho-n)t}\mathrm{d}t$$

joka hetkellä t ottaen huomioon budjettirajoitteen[2]

(D-2) $$c(t) + \dot{k}(t) + nk(t) = r(t)k(t) + w.$$

Dynaaminen maksimointiongelma voidaan kirjoittaa Lagrangen funktiona

(D-3) $$\begin{aligned}\mathscr{L}\{c,k,\mu,t\} = &\int_0^\infty u[c(t)]e^{-(\rho-n)t}\,\mathrm{d}t \\ &+ \int_0^\infty \mu(t)\left[(r(t)-n)k(t) + w - c(t) - \dot{k}(t)\right]\mathrm{d}t \\ &+ \nu k(T)e^{-\bar{r}(T)T},\end{aligned}$$

missä $\mu(t)$ on (dynaaminen) Lagrangen kerroin, jota kutsutaan myös pääoman *varjohinnaksi (shadow price)*. Lisäksi $\bar{r}(T) = (1/T)\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t$, toisin sanoen korkokannan keskiarvo välillä $[0,T]$. ν on viimeisen *transversaalisuusehdon* Lagrangen kerroin. Funktion tilamuuttujia ovat kotitalouksien kulutusintensiteetti $c(t)$ ja pääomaintensiteetti $k(t)$.

Kyseessä on dynaaminen optimointiongelma, jonka ratkaisemiseksi on olemassa valmiit standardimenetelmät[3]. Kirjoitetaan ensin ongelmaa vastaava Hamiltonin funktio:

(D-4) $$\mathscr{H}\{c,k,\mu,t\} = u[c(t)]e^{-(\rho-n)t} + \mu(t)[(r(t)-n)k(t) + w - c(t)].$$

Hamiltonin funktiossa on merkitty eksplisiittisesti riippuvat muuttujat: c ja k ovat tilamuuttujat, joiden arvot riippuvat ajasta. Lisäksi Hamiltonin funktio riippuu myös suoraan ajasta t (eksponenttitermin kautta). Hamiltonin funktiosta voidaan optimoinnin avulla ratkaista mallin liikeyhtälöt. Ensinnäkin

(D-5) $$\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial c} = u'(c)e^{-(\rho-n)t} - \mu(t) = 0$$

(D-6) $$\Rightarrow \mu(t) = u'(c)e^{-(\rho-n)t}.$$

---

2 Tässä, kuten jatkossakin, jätetään muuttujien aikariippuvuus merkitsemättä eksplisiittisesti notaation yksinkertaistamiseksi. Kaikki muuttujat riippuvat ajasta, jollei toisin mainita.

3 Katso esimerkiksi Barro ja Sala-i-Martin (2004, liite A.3)

Yhtälö (D-6) on varjohinnan $\mu(t)$ liikeyhtälö ratkaistuna. Derivoimalla yhtälö ajan suhteen saadaan liikeyhtälö

$$\text{(D-7)} \qquad \begin{aligned} \dot{\mu}(t) &= -(\rho - n)u'(c)e^{-(\rho-n)t} + u''(c)\dot{c}\cdot e^{-(\rho-n)t} \\ &= -u'(c)e^{-(\rho-n)t}\left[(\rho - n) - \frac{\dot{c}\cdot u''(c)}{u'(c)}\right] \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\text{(D-8)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial k} &= \mu(t)(r(t)-n) = -\dot{\mu}(t) \\ &\Leftrightarrow u'(c)(r(t)-n)e^{-(\rho-n)t} = u'(c)e^{-(\rho-n)t}\left[(\rho - n) - \frac{\dot{c}\cdot u''(c)}{u'(c)}\right] \end{aligned}$$

$$\text{(D-9)} \qquad \Rightarrow r(t) - \rho = -\frac{u''(c)\cdot c}{u'(c)}\cdot\frac{\dot{c}}{c}$$

missä on hyödynetty yhtälöitä (D-6) ja (D-7).

Viimeisenä sovelletaan transversaalisuusehtoa

$$\text{(D-10)} \qquad \nu e^{-\bar{r}(T)T} = \mu(T).$$

Koska $k(t) \geq 0\ \forall t$, pätee

$$\text{(D-11)} \qquad k(T)e^{-\bar{r}(T)T} \geq 0,$$

ja edelleen

$$\text{(D-12)} \qquad \nu k(T)e^{-\bar{r}(T)T} = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \mu(T)k(T) = 0$$

$$\text{(D-13)} \qquad \Rightarrow u'[c(T)]k(T)e^{-(\rho-n)t} = 0.$$

Koska yhtälö (D-13) pätee kaikilla T, saadaan lopullinen transversaalisuusehto rajalla $T \to \infty$:

$$\text{(D-14)} \qquad \lim_{T\to\infty} u'[c(T)]k(T)e^{-(\rho-n)T} = 0.$$

Ehdosta $\partial\mathscr{H}/\partial\mu = 0$ saadaan triviaalisti kuluttajan budjettirajoite (D-2). Yhteenkoottuna on siis ratkaistu Ramsayn talouskasvumallin mukaiset kuluttajan hyödyn (D-1)

$c(t)$:n ja $k(t)$:n suhteen maksivoivat liikeyhtälöt

(D-15) $$r(t) = \rho + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

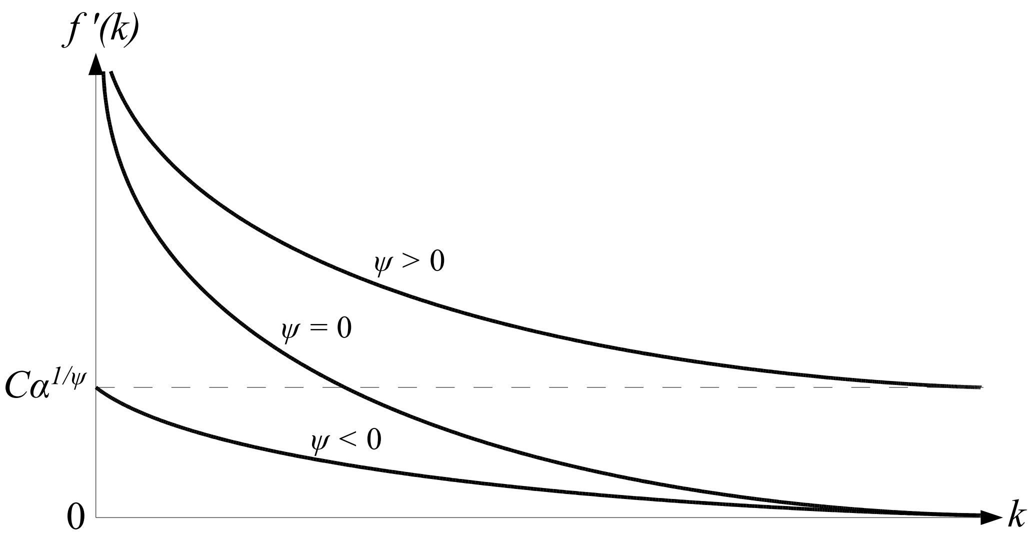
(D-16) $$\dot{k}(t) = [r(t) - n]k(t) + w - c(t)$$

(D-17) $$\lim_{T\to\infty} u'[c(T)]k(T)e^{-(\rho-n)T} = 0.$$

E Ramseyn mallin talouskasvun eksakti analyysi

Tarkasteltaessa, millaista kasvua Ramseyn kasvumallissa syntyy, täytyy analyysi jakaa osiin parametrien mukaan. Ensimmäinen jako tapahtuu substituutiojouston mukaan: erotetaan tapaukset $\psi > 0$ (korkea substituutiojousto) ja $\psi < 0$ (matala substituutiojousto). Kuten yllä esitetyssä kvalitatiivisessa analyysissä, myös nyt tarkastellaan rajatuottavuuden raja-arvoja, kun $k \to \infty$ tai $k \to 0$, riippuen substituutiojouston tasosta. Näitä raja-arvoja verrataan arvoihin $\rho + \delta$ ja $n + \delta$, jolloin asymptoottinen pääoma- ja kulutusintensiteetin kasvunopeus voi olla positiivinen, nolla tai negatiivinen. Antamalla ρ:n ja n:n vaihdella, pitäen lauseke $C\alpha^{1/\psi}$ vakiona, saadaan kolme tapausta kumpaakin ψ:n tilaa kohden — tapaus $n > \rho$ on mahdoton kotitalouksien hyötyfunktion äärellisyysoletuksen (yhtälö (3.30)) perusteella. Käsitellään nämä tapaukset kohta kohdalta, ja merkitään $\tilde{C} \doteq C\alpha^{1/\psi}$.

Kaikkia kohtia tarkasteltaessa on hyödyllistä käyttää kaaviota E-1, joka kuvaa rajatuottavuuden pääomaintensiteetin funktiona arvoilla $\psi > 0$ ja $\psi < 0$. Koska $f''(k) < 0 \; \forall k$, $\min f'(k) = C\alpha^{1/\psi}$ kun $\psi > 0$ ja $\max f'(k) = C\alpha^{1/\psi}$ kun $\psi < 0$.[4] Kunkin tapauksen talouskasvun laatu riippuu siitä, miten nämä ääriarvot suhteutuvat vakioihin $n + \delta$ ja $\rho + \delta$.



Kaavio E-1: *Rajatuottavuus pääomaintensiteetin funktiona*

[4] Oikeastaan $\inf f'(k)$ ja $\sup f'(k)$, sillä kyseiset arvot saavutetaan vain raja-arvoina. Tämän tarkastelun kannalta käsitteillä ei kuitenkaan ole käytännön eroa.

1) $\psi > 0, \tilde{C} > \rho + \delta > n + \delta$

Koska $\psi > 0$, on $\min f'(k) = \tilde{C}$. Niinpä Ramseyn kasvumallin liikeyhtälö kulutusintensiteetille (3.39) on aina positiivinen eli $\dot{c} > 0 \ \forall c, k$. Siispä myös $g_c > 0 \ \forall c, k$, ja erityisesti $g_c^* = \lim_{k\to\infty} g_c > 0$, $\lim_{t\to\infty} c = \infty$.

Tarkastellaan seuraavaksi pääomaintensiteetin kasvunopeutta

$$g_k = \frac{f(k)}{k} - (n+\delta) - \frac{c}{k}.$$

Ottamalla raja-arvo $k \longrightarrow \infty$ nähdään, että

(E-1)
$$g_k^* = C\alpha^{1/\psi} - (n+\delta) - \lim_{k\to\infty} \frac{c}{k},$$

missä on käytetty aiemmin laskettua raja-arvoa $\lim_{k\to\infty} f'(k) = \lim_{k\to\infty} f(k)/k = C\alpha^{1/\psi}$. Samalla tavoin saadaan raja-arvo

(E-2)
$$g_c^* = \frac{1}{\theta}[C\alpha^{1/\psi} - (\rho+\delta)] > 0.$$

Mikäli olisi $g_c^* > g_k^*$, $\lim_{k\to\infty} c/k = \infty$, mistä seuraa $g_k^* = -\infty$. Tällöin $k \longrightarrow -\infty$, mikä on ristiriidassa oletuksen $k \longrightarrow \infty$ kanssa. Täten tapaus $g_c^* > g_k^*$ täytyy hylätä mahdottomana. Jos taas olisi $g_c^* < g_k^*$, $\lim_{k\to\infty} c/k = 0$, jolloin $g_k^* = C\alpha^{1/\psi} - (n+\delta)$. Transversaalisuusehdosta (3.40) seuraa kuitenkin epäyhtälö $C\alpha^{1/\psi} - g_k^* > n + \delta$ kun huomioidaan, että $\lim_{k\to\infty} f'(k) = C\alpha^{1/\psi}$. Täten myös tapaus $g_c^* < g_k^*$ on ristiriidassa oletusten kanssa. Niinpä ainoaksi mahdolliseksi jää tapaus $g_c^* = g_k^*$. Tällöin

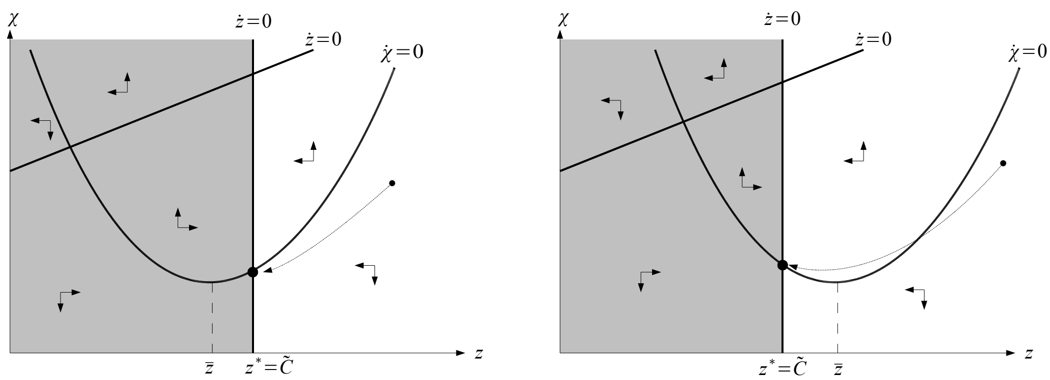
(E-3)
$$\varphi = \lim_{k\to\infty} \frac{c}{k} = C\alpha^{1/\psi} - (n+\delta) - \frac{1}{\theta}[C\alpha^{1/\psi} - (\rho+\delta)]$$

ja pääomaintensiteetti sekä kulutus per capita kasvavat asymptoottisesti tasaisella nopeudella

(E-4)
$$g_c^* = g_k^* = \frac{1}{\theta}[C\alpha^{1/\psi} - (\rho+\delta)].$$

Tällöin talous on siis endogeenisen kasvun tilassa ja tasaisen kasvun tilaa ei ole.

Siirtymistä alkutilasta tähän tasaisen *kasvunopeuden* tilaan on mahdollista analysoida vielä tarkemmin. Merkitsemällä $z \doteq f(k)/k > 0$ ja $\chi \doteq c/k > 0$ voidaan yhtälöt (3.41)



(a) $\theta > 1-\psi$ (b) $\theta < 1-\psi$

Kaavio E-2: *Vaihediagrammit z:n ja χ:n suhteen kun (a) $\theta > 1-\psi$, (b) $\theta < 1-\psi$.*

ja (3.42) kirjoittaa muodossa

$$g_z = \left[(z/\tilde{C})^{-\psi} - 1\right](z - \chi - (n+\delta)) \tag{E-5}$$

$$g_\chi = \frac{\tilde{C}}{\theta}\left[(z/\tilde{C})^{1-\psi} - 1\right] - (z - \tilde{C}) + (\chi - \varphi), \tag{E-6}$$

missä $\tilde{C} \doteq C\alpha^{1/\psi}$ ja $\varphi \doteq (\tilde{C} - \delta)(1 - 1/\theta) + \rho/\theta - n$. Ylläolevien yhtälöiden johto on esitetty erillisessä liitteessä F. z on pääoman keskimääräinen tuottavuus, ja χ kotitalouden kulutuksen suhde pääomatasoon.

Etsitään ensin kasvuyhtälöiden singulaariurat, toisin sanoen milloin $\dot{z} = 0$ ja $\dot{\chi} = 0$. Yhtälöstä (E-6) saadaan singulaariuralle $\dot{\chi} = 0$ funktio $\chi = \varphi - \left[(z/\tilde{C})^{1-\psi} - 1\right] + (z - \tilde{C})$. Tämä funktio saa minimiarvonsa, kun $z = \bar{z} = \tilde{C}((1-\psi/)\theta)^{1/\psi}$. Koska $\partial\dot{\chi}/\partial\chi > 0\ \forall\chi$ pyrkii χ:n arvo pois tältä singulaariuralta. Vastaavasti yhtälöstä (E-5) voidaan nähdä, että tilannetta $\dot{z} = 0$ vastaavat singulaariurat $z^* = \tilde{C}$ ja $\chi = z - (n+\delta)$.

Tilanne voidaan kuvata z:n ja χ:n välisenä vaihediagrammina. Riippuen parametrien arvoista saadaan hieman erilaiset kuviot — molemmat tapaukset on piirretty kaaviossa E-2. Kuvioissa oleva harmaa alue on mahdoton alue, sillä $f(k)/k = z \geq \tilde{C}$. Kun $\theta > 1 - \psi$, on $\bar{z} < z^* = \tilde{C}$. Tämä tilanne on piirretty kaaviossa 2(a). Tässä tapauksessa siirtyminen tasaisen kasvunopeuden tilaan tapahtuu tasaisesti pitkin satulapistepolkua siten, että z sekä χ laskevat monotonisesti kohti tasapainotilaa, jossa $z^* = \tilde{C}$ ja $\chi^* = \varphi$ (ja siis $g_z = g_\chi 0$). Tämä siirtymäpolku on piirretty kuvioon.

Tapauksessa $\theta < 1 - \psi$ on $\bar{z} > z^*$. Tällöin vakaan kasvunopeuden tila on edelleen olemassa, ja siihen päästään satulapistepolkua pitkin, mutta siirtyminen tasapainotilaan ei tapahdu täysin monotonisesti: z laskee kyllä monotonisesti kohti tasapainoarvoaan $z^* = \tilde{C}$, mutta $\dot{\chi} > 0$ lähestyttäessä tasapainopistettä $\chi^* = \varphi$. Mikäli alkutila on riittävän lähellä tasapainotilaa, voi χ myös nousta monotonisesti. Tapauksen $\theta < 1-\psi$ vaihediagramma ja siirtymäpolku on piirretty kaavioon 2(b).

Tarkempi analyysi vahvistaa siis kappaleessa 3.4.2 todetun tuloksen $g_c^* = g_k^* > 0$ kun $\psi > 0$ ja $\tilde{C} > \rho + \delta$. Tällöin talous kasvaa endogeenisesti rajatta saavuttaen asymptoottisen nopeuden $g_c^* = g_k^* = (1/\theta)\left[C\alpha^{1/\psi} - (\rho+\delta)\right]$. Siirtyminen tähän tasapainotilaan tapahtuu monotonisesti, kun $\theta > 1-\psi$.

Tulos $g_z^* = 0$ merkitsee, että keskimääräinen tuottavuus $z = f(k)/k$ lähestyy vakioarvoa $C\alpha^{1/\psi}$, kun $k \to \infty$. Koska $g_\chi^* = g_c^* - g_k^* = 0$, kulutus- ja pääomaintensiteetit kasvavat asymptoottisesti samalla nollaa suuremmalla nopeudella. Suhde $c/k = C/K$ on tällöin vakio, ja koko talous kasvaa nopeudella $g_k^* + n$.

2) $\psi > 0$, $\rho+\delta > \tilde{C} > n+\delta$

Koska $\rho + \delta > \tilde{C}$, on olemassa sellainen arvo k^*, jolla $f'(k^*) = \rho+\delta$. Tällöin siis $\dot{c} = 0$, eli kyseessä on singulaariura. Vastaavasti tapausta $\dot{k} = 0$ vastaa singulaariura $c = f(k) - (n+\delta)k$. Koska $\lim_{k\to\infty} f'(k) = \tilde{C} > n+\delta$, on tämä käyrä nouseva kaikilla k:n arvoilla. Nämä kaksi singulaariuraa ja osittaisderivaattojen suunnat on piirretty kaaviossa E-3. Koska muuttujien kasvunopeuksien osittaisderivaatoille pätee epäyhtälö

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \cdot \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} < \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \cdot \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}$$

on mallissa tällöin satulapistepolku, jota pitkin se konvergoi (niin ylhäältä- kuin alhaaltapäin) kohti tasapainopistettä, jossa $g_k^* = g_c^* = 0$. Myös nämä siirtymäpolut on piirretty kaavioon E-3. Kun $\tilde{C} < \rho+\delta$, ei enää synnykään endogeenistä kasvua, vaikka pääoman rajatuottavuus onkin aina nollasta poikkeava. Ehto $\tilde{C} > \rho+\delta$ on siis välttämätön endogeenisen kasvun syntymiselle.

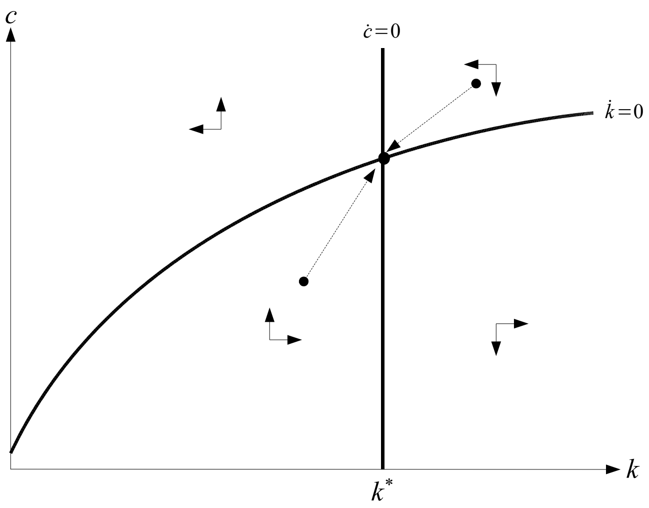
Pääomaintensiteetin taso tasaisen kasvun tilassa voidaan ratkaista yhtälöstä $f'(k^*) = \rho+\delta$; sen arvoksi saadaan

$$\text{(E-7)} \qquad k^* = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\left(\frac{\rho+\delta}{C\alpha^{1/\psi}}\right)^{\frac{\psi}{1-\psi}} - 1\right]\right)^{-1/\psi} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{X}{1-X}\right)^{1/\psi},$$

missä

$$X \doteq \left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\psi}{1-\psi}}.$$

Koska $C\alpha^{1/\psi} < \rho+\delta$ ja $\psi > 0$, on $X < 1$. Koska kaikki X:n parametrit ovat positiivisia, pätee myös $X > 0$. Siis $0 < X < 1$.



Kaavio E-3: *Ramseyn kasvumallin vaihediagrammi kun* $C\alpha^{1/\psi} > n+\delta$

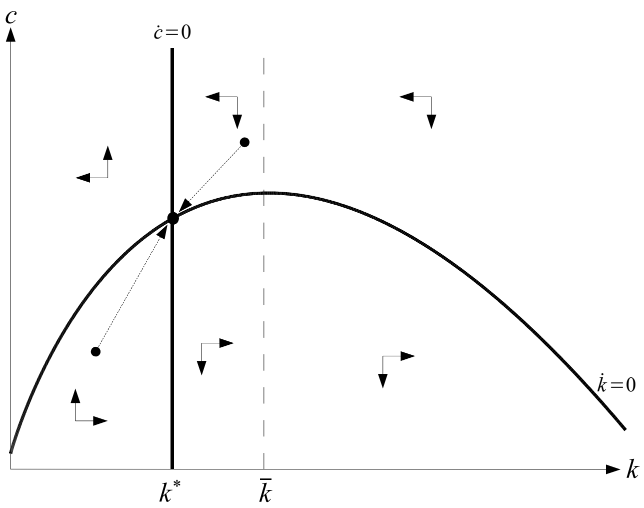
3) $\psi > 0$**,** $\rho+\delta > n+\delta > \tilde{C}$

Koska jälleen on $\rho+\delta > \tilde{C}$, on olemassa sellainen arvo k^*, jolla $f'(k^*) = \rho+\delta$. Samoin kuin edellisessä tapauksessa, tämä suora vastaa singulaariuraa $\dot{c} = 0$. Nyt sen sijaan myös $n+\delta > \tilde{C}$, joten tapausta $\dot{k} = 0$ vastaavalla singulaariuralla $c = f(k) - (n+\delta)k$ on olemassa globaali maksimikohta. Tämä seuraa siitä, että oletuksen $n+\delta > \tilde{C}$ vuoksi funktiolla $\partial c/\partial k = f'(k) - (n+\delta)$ on olemassa nollakohta, sillä jälleen $\lim_{k\to\infty} = \tilde{C}$ ja $f''(k) < 0$. Merkitään funktion $\partial c/\partial k = 0$ ratkaisua $\overline{k}$:lla, toisin sanoen $f'(\overline{k}) = n+\delta$. Singulaarikäyrä $c = f(k) - (n+\delta)k$ on siis nouseva, kun $k < \overline{k}$ ja laskeva, kun $k > \overline{k}$.

Koska mallin oletusten mukaan $\rho > n$, on $f'(k^*) > f'(\overline{k})$. Tällöin tuotantofunktion $f(k)$ konkaaviudesta seuraa $\overline{k} > k^*$. Tilanne voidaan tiivistää kaaviona E-4. Kaavioon on piirretty myös osittaisderivaattojen merkit eri puolilla singulaariuria. Singulaariurien $\dot{c} = 0$ ja $\dot{k} = 0$ havaitaan risteävän yhdessä kohdassa, jonka voidaan todistaa olevan satulapiste. Tämä seuraa epäyhtälöstä samaan tapaan kuin tapauksessa 2:

$$\frac{\partial \dot{c}}{\partial c} \cdot \frac{\partial \dot{k}}{\partial k} < \frac{\partial \dot{c}}{\partial k} \cdot \frac{\partial \dot{k}}{\partial c}.$$

Mallissa on siis satulapiste, jota kohden talous konvergoi pitkin satulapisteuraa. Tämä ura on myös merkitty kaavioon E-4. Konvergenssi voi tapahtua ylhäältä- tai alhaaltapäin, riippuen pääoma- ja kulutusintensiteetin alkuarvoista. Lopulta talous kasvaa väestönkasvunopeudella n ja pääomaintensiteetti tässä tasaisen kasvun tilassa on sama



Kaavio E-4: *Ramseyn kasvumallin vaihediagrammi kun* $C\alpha^{1/\psi} < n+\delta$

kuin tapauksessa 2:

(E-8) $$k^* = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\left(\frac{\rho+\delta}{C\alpha^{1/\psi}}\right)^{\frac{\psi}{1-\psi}} - 1\right]\right)^{-1/\psi} = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{X}{1-X}\right)^{1/\psi}.$$

Kun $\psi < 1$, pätee edelleen $X < 1$, sillä tasaisen kasvun ehdosta seuraa $C\alpha^{1/\psi} > \rho+\delta$ ja $\psi/(1-\psi) < 0$, mistä seuraa $X = ((\rho+\delta)/(C\alpha^{1/\psi}))^{\psi/(1-\psi)} < 1$.

4) $\psi < 0$**,** $\tilde{C} > \rho+\delta > n+\delta$

Kun $\psi < 0$, kuvaa rajatuottavuutta nyt alempi käyrä kaaviossa 3.2. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että rajatuottavuuden maksimiarvo on $C\alpha^{1/\psi}$ ja minimiarvo on 0. Koska $\lim_{k\to\infty} f'(k) = 0$, ei tässä tapauksessa pysty syntymään endogeenistä kasvua, sillä uusien investointien rajatuottavuus laskee kohti nollaa pääomaintensiteetin kasvaessa. Kuten tapauksessa $\psi > 0$, myös nyt tasaisen kasvun tilan saavuttaminen riippuu raja-arvon $C\alpha^{1/\psi}$ ja mallin parametrien suhteesta.

Koska $\tilde{C} > \rho+\delta$, on olemassa k^* siten, että $f'(k^*) = \rho+\delta$. Tämä vastaa singulaariuraa $\dot{c} = 0$. Koska myös $\tilde{C} > n+\delta$[5], on olemassa edellisen tapauksen tapaan $\bar{k}$ siten, että $f'(\bar{k}) = n+\delta$. Singulaariuran $\dot{k} = 0$ yhtälön derivaatalle pätee $\partial c/\partial k > 0$ kun $k < \bar{k}$ ja $\partial c/\partial k < 0$ kun $k > \bar{k}$.

Osoittautuu siis, että tämä tapaus on identtinen edellisen kanssa, ja tilannetta voidaan kuvata kaavion E-4 mukaisella vaihediagrammilla. Laskemalla osittaisderivaa-

[5] Tämä epäyhtälö itse asiassa seuraa suoraan epäyhtälöstä $\tilde{C} > \rho+\delta$ ja oletuksesta $\rho > n$.

tat $\partial \dot{x}_i / \partial x_j$ voidaan todistaa, että myös tässä tapauksessa on olemassa kaavion mukainen vakaa satulapiste, jossa $\dot{c} = \dot{k} = 0$. Konvergenssi tähän tilaan tapahtuu pitkin kaavioon piirrettyä satulapisteuraa. Lopulta talous päätyy tasaisen kasvun tilaan, jossa pääomaintensiteetin arvo on sama kuin tapauksissa 2 ja 3.

5) $\psi < 0$, $\rho + \delta > \tilde{C} > n + \delta$

Koska $\tilde{C} < \rho + \delta$, ei olemassa sellaista k^*, jolle pätisi $f'(k^*) = \rho + \delta$. Tämä seuraa siitä, että $f'(k) \leq \tilde{C} < \rho + \delta \ \forall k$. Näin ollen $\dot{c} < 0 \ \forall c, k$, ja siten myös $g_c^* < 0$. Täten kulutusintensiteetti saavuttaa lopulta triviaalin tasapainotilan $c^* = 0$.

Muistetaan nyt pääomaintensiteetin asymptoottista kasvunopeutta

$$\begin{aligned} g_k^* = \lim_{k \to 0} g_k &= \lim_{k \to 0} \frac{f(k)}{k} - (n + \delta) - \lim_{k \to 0} \frac{c}{k} \\ &= \tilde{C} - (n + \delta) - \lim_{k \to 0} \frac{c}{k}. \end{aligned}$$

Osoitetaan nyt, että $g_k^* < 0$. Koska $\tilde{C} > n + \delta$, ylläolevasta ei voida suoraan todeta väitettä. Tehdään nyt vastaoletus $g_k^* \geq 0$. Vastaoletuksesta seuraa, että $k \to \infty$ kun $t \to \infty$. Tällöin

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} g_k &= \lim_{k \to \infty} f'(k) - (n + \delta) - \lim_{k \to \infty} \frac{c}{k} \geq 0 \\ &= 0 - (n + \delta) - 0 \geq 0, \end{aligned} \tag{E-9}$$

mikä sisältää ristiriidan. Vastaoletus täytyy siis hylätä, joten $g_k^* < 0$. Täten myös pääomaintensiteetti lähestyy lopulta triviaalia tasapainotilaa $k^* = 0$. Talous on siis jatkuvan pienenemisen tilassa, ja lähestyy lopulta tasapainotilaa $k^* = c^* = 0$. Tähän jatkuvan pienenemisen tilaan joudutaan siitä huolimatta, että $\tilde{C} > n + \delta$. Ehto $\tilde{C} > \rho + \delta$ havaitaan siis välttämättömäksi, jotta tapauksessa $\psi < 0$ voitaisiin saavuttaa tasaisen kasvun tila.

6) $\psi < 0$, $\rho + \delta > n + \delta > \tilde{C}$

Koska sekä $\tilde{C} < \rho + \delta$ että $\tilde{C} < n + \delta$, seuraa Ramseyn mallin liikeyhtälöistä (3.38) ja (3.39) suoraan $\dot{c} < 0 \ \forall c, k$ ja $\dot{k} < 0 \ \forall c, k$. Siis $g_c^* < 0$, $g_k^* < 0$, ja pääoma- sekä kulutusintensiteetti lähestyvät lopulta triviaalia tasapainotilaa $k^* = c^*$. Myös tässä tapauksessa talous on jatkuvan pienenemisen tilassa.

Kaikki mahdolliset eksogeenisten parametrien yhdistelmät on nyt käsitelty edellä. Lopputuloksena nähdään, että riippuen substituutiojoustosta ja eksogeenisten parametrien arvoista voi talous joko päätyä endogeenisesti syntyvään tasaisen kasvunopeuden tilaan, exogeeniseen tasaisen kasvun tilaan tai jatkuvan pienentymisen tilaan. Väittämän 6 voidaan todeta pätevän myös eksaktisti. Ylläolevasta analyysistä voidaan myös päätellä, että ehto $\tilde{C} \gtrless n+\delta$ ei vaikuta siihen, millaisen kasvun tilaan talous päätyy. Näin ollen saatu tulos talouskasvun eri tiloille on sama kuin Solow-Swan-mallissa, toisin sanoen kasvun tila riippuu substituutiojoustosta ja pitkän tähtäimen rajatuottavuuden suhteesta kulutusta mallintaviin eksogeenisiin parametreihin.

F Siirtyminen muuttujiin z ja χ

Tehdään siis Ramseyn talouskasvun mallissa muunnos $z \doteq f(k)/k$, $\chi \doteq c/k$. Huomataan ensin, että

(F-1) $$\begin{aligned} f'(k) &= C\alpha k^{\psi-1}[\alpha k^{\psi} + (1-\alpha)]^{(1-\psi)/\psi} \\ &= \alpha C[\alpha + (1-\alpha)k^{-\psi}]^{(1-\psi)/\psi} \\ &= z\left(z/\tilde{C}\right)^{-\psi}, \end{aligned}$$

missä $\tilde{C} \doteq C\alpha^{1/\psi}$. Derivoimalla z:n määritelmää ajan suhteen saadaan

(F-2) $$\dot{z} = \frac{\dot{k}f'(k)}{k} - \frac{\dot{k}f(k)}{k^2} = \frac{\dot{k}}{k}[f'(k) - z].$$

Soveltamalla tähän tulosta (F-1) saadaan lopputulos

(F-3) $$g_z = g_k[(z/\tilde{C})^{-\psi} - 1].$$

Vastaavasti derivoimalla χ:n logaritmia ajan suhteen saadaan

(F-4) $$\frac{\mathrm{d}\ln\chi}{\mathrm{d}t} = \frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k},$$

mistä saadaan yhtälö

(F-5) $$g_{\chi} = g_c - g_k.$$

Siispä Ramseyn liikeyhtälöt voidaan nyt kirjoittaa muodossa

(F-6) $$g_c = g_{\chi} + g_k = \frac{1}{\theta}[f'(k) - (\delta+\rho)]$$

(F-7) $$g_k = z - \chi - (n+\delta).$$

Yhtälöistä (F-3), (F-6) ja (F-7) voidaan nyt johtaa liikeyhtälöt z:lle ja χ:lle:

(F-8) $$g_z = \left[(z/\tilde{C})^{-\psi} - 1\right](z - \chi - (n+\delta))$$

(F-9) $$g_{\chi} = \frac{\tilde{C}}{\theta}\left[(z/\tilde{C})^{1-\psi} - 1\right] - (z - \tilde{C}) + (\chi - \varphi),$$

missä $\varphi \doteq (\tilde{C} - \delta)(1 - 1/\theta) + \rho/\theta - n = (\tilde{C} - \delta - n) - (1/\theta)\cdot(\tilde{C} - \delta - \rho)$. Vakio φ:n positiivisuus $\varphi > 0$ seuraa transversaalisuusehdosta (Barro ja Sala-i-Martin, 2004, liite 4.7).

G Substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan tasoon Ramseyn kasvumallissa

Substituutiojouston σ vaikutus saadaan laskemalla derivaatta

$$\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\psi}.$$

Koska olennaista on, mihin suuntaan substituutiojousto vaikuttaa, ja termi $1/\sigma^2 > 0$, riittää tarkastella, onko derivaatta $\mathrm{d}k^*/\mathrm{d}\psi$ positiivinen vai negatiivinen. Kirjoitetaan ensin k^* muodossa

(G-1) $$k^* = k_0 \cdot \left(\frac{1-X_0}{X_0}\frac{X}{1-X}\right)^{1/\psi},$$

missä $X_0 \doteq k_0/(k_0+\mu_0)$[6]. Lasketaan nyt derivaatta

(G-2) $$\frac{\mathrm{d}\ln k^*}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{1}{\psi^2}\left[\ln\left(\frac{1-X_0}{1-X}\right) + \ln\left(\frac{X}{X_0}\right)\right] + \frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\psi}\frac{1}{X(1-X)}.$$

Koska $\mathrm{d}k^*/\mathrm{d}\psi \equiv k^* \cdot \mathrm{d}\ln k^*/\mathrm{d}\psi$ ja $k^* > 0$, riittää tarkastella ylläolevan lausekkeen derivaatan etumerkkiä. Havaitaan ensin, että X voidaan kirjoittaa muodossa

(G-3) $$X = \left(\frac{y_0}{k_0(\rho+\delta)}\left(\frac{k_0}{k_0+\mu_0}\right)^{1/\psi}\right)^{\psi/(1-\psi)} = \left(BX_0^{1/\psi}\right)^{\psi/(1-\psi)},$$

missä on merkitty $B \doteq y_0/[k_0(\rho+\delta)]$. Lasketaan saadun lausekkeen derivaatta ψ:n suhteen:

(G-4) $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\psi} = X\frac{\mathrm{d}\ln X}{\mathrm{d}\psi} &= X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\psi}\left[\frac{\psi}{1-\psi}\ln B + \frac{1}{1-\psi}\ln X_0\right] \\ &= \frac{X}{(1-\psi)^2}[\ln B + \ln X_0] \\ &= \frac{X}{1-\psi}\ln(BX_0)^{1/(1-\psi)} \\ &= \frac{1}{\psi}\frac{X}{1-\psi}\ln\left(\frac{X}{X_0}\right).\end{aligned}$$

[6] Tästä määritelmästä seuraa $\frac{1-X_0}{X_0} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot k_0^{\psi}$. Ramseyn kasvumallissa muuttujille X ja X_0 ei voida antaa samanlaista suoraa tulkintaa kuin Solow–Swan-kasvumallissa, jossa vastaava muuttuja π yhtyy pääomatulojen osuuteen kokonaistuloista. Ramseyn kasvumallin tasaisen kasvun tason analyysissä käytettyjen muuttujien merkitys on lähinnä yksinkertaistaa laskutoimituksia.

Tätä tulosta hyödyntäen voidaan yhtälö (G-2) kirjoittaa nyt muodossa

$$\text{(G-5)}\quad \frac{\mathrm{d}\ln k^*}{\mathrm{d}\psi} = -\frac{1}{\psi^2}\frac{1}{1-X}\left[(1-X)\ln\left(\frac{1-X_0}{1-X}\right) + X\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \frac{\psi}{1-\psi}\ln\left(\frac{X_0}{X}\right)\right].$$

Koska $X < 1$ ja $\psi^2 > 0$, riittää tarkastella hakasulkeissa olevan lausekkeen etumerkkiä — mikäli se on negatiivinen, on substituutiojouston vaikutus tasaisen kasvun tilan pääomaintensiteettiin positiivinen. Käytetään taas hyödyksi logaritmifunktion aitoa konkaaviutta, josta seuraa $\ln X < X - 1$ kaikilla $X \neq 1$. Tästä seuraa

$$(1-X)\ln\left(\frac{1-X_0}{1-X}\right) < 1 - X_0 - (1-X) = X - X_0$$
$$X\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) < X_0 - X.$$

Käyttämällä näitä epäyhtälöitä nähdään, että yhtälön (G-5) hakasulkeissa oleva termi on

$$\text{(G-6)}\quad (1-X)\ln\left(\frac{1-X_0}{1-X}\right) + X\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) + \frac{\psi}{1-\psi}\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) < \frac{\psi}{1-\psi}\ln\left(\frac{X_0}{X}\right) < \frac{\psi}{1-\psi}\left(\frac{X_0}{X} - 1\right).$$

Niinpä lopputulokseksi saadaan

$$\text{(G-7)}\qquad \frac{\mathrm{d}\ln k^*}{\mathrm{d}\psi} > 0, \quad \text{jos} \quad \frac{\psi}{1-\psi}\left(\frac{X_0}{X} - 1\right) < 0.$$

Tarkastellaan nyt, milloin ylläoleva ehto on voimassa. Huomataan ensin, että X_0/X voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{X_0}{X} = \left[\frac{1}{y_0}(k_0+\mu_0)(\rho+\delta)\right]^{\frac{\psi}{1-\psi}}.$$

Ehto (G-7) on voimassa kahdessa erillisessä tapauksessa: kun $\psi > 0$ ja $(X_0/X) < 1$ tai kun $\psi < 0$ ja $(X_0/X) > 1$. Ensimmäisessä tapauksessa saadaan ehdoksi epäyhtälö

$$\frac{X_0}{X} = \left[\frac{1}{y_0}(k_0+\mu_0)(\rho+\delta)\right]^{\frac{\psi}{1-\psi}} < 1 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{y_0}(k_0+\mu_0)(\rho+\delta)\right] < 1,$$

sillä $\psi > 0$ ja $\psi/(1-\psi) > 0$. Termi $[(k_0+\mu_0)(\rho+\delta)]/y_0$ on parametrien määritelmien perusteella aidosti positiivinen. Tapauksessa $\psi < 0$ taas ehdoksi saadaan

$$\frac{X_0}{X} = \left[\frac{1}{y_0}(k_0+\mu_0)(\rho+\delta)\right]^{\frac{\psi}{1-\psi}} > 1 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{y_0}(k_0+\mu_0) < (\rho+\delta)\right] < 1,$$

mikä seuraa potenssitermin $\psi/(1-\psi)$ negatiivisuudesta. Ylläolevista epäyhtälöistä nähdään, että molemmissa tapauksissa substituutiojouston positiiviselle vaikutukselle tasaisen kasvun tilan tasoon saadaan sama ehto

(G-8) $$y_0 > (\rho+\delta)(k_0+\mu_0).$$

Huomattavaa on, että substituutiojouston taso ei vaikuta tähän ehtoon.

H Konvergenssinopeutta koskevien tulosten johtaminen

Konvergenssinopeuden yhtälön johtaminen

Konvergenssinopeuden λ approksimaatio saadaan tekemällä logaritmis-lineaarinen approksimaatio tasaisen kasvun tilan läheisyydessä. Merkitään $\tilde{k} = \ln k$, $\tilde{c} = \ln c$. Tällöin tasaisen kasvun tilan $(\tilde{c}^*, \tilde{k}^*)$ läheisyydessä voidaan talouden liikeyhtälöt (3.42) ja (3.41) kirjoittaa ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälöryhmänä

$$\text{(H-1)} \qquad \begin{cases} \dot{\tilde{c}} = a_1(\tilde{k} - \tilde{k}^*) \\ \dot{\tilde{k}} = b_1(\tilde{k} - \tilde{k}^*) + b_2(\tilde{c} - \tilde{c}^*). \end{cases}$$

Tämä differentiaaliyhtälöryhmä voidaan ratkaista esimerkiksi derivoimalla alempi yhtälö ajan suhteen ja sijoittamalla ylempi siihen. Näin saatavaan toisen asteen differentiaaliyhtälöön voidaan soveltaa standardisijoitusta $\tilde{k} = \exp \kappa t$. Yleiseksi ratkaisuksi $\tilde{k}$:n suhteen saadaan

$$\text{(H-2)} \qquad \tilde{k}(t) = \tilde{k}^* + C_1 e^{(\frac{1}{2}b_1 + \eta)t} + C_2 e^{(\frac{1}{2}b_1 - \eta)t},$$

missä $\eta \doteq \frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + 4a_1 b_2}$. C_i:t ovat kertoimia, jotka määräytyvät ongelman reunaehtojen $\lim_{t\to\infty} \tilde{k} = \tilde{k}^*$ ja $\tilde{k}(0) = \tilde{k}_0$ perusteella. Koska $\eta > \frac{1}{2}b_1$, on ensimmäisen eksponenttitermin vakio posiitiivinen ja toisen negatiivinen. Tästä seuraa, kun $t \to \infty$,

$$\tilde{k}^* = \tilde{k}^* + C_1 \cdot e^{\infty} + C_2 \cdot 0,$$

jolloin ainoa mahdollinen kertoimen C_1 arvo on 0. Kertoimen C_2 määrittämiseksi tarkastellaan raja-arvoa $t \to 0$, jolloin saadaan yhtälö

$$\tilde{k}_0 = \tilde{k}^* + C_2.$$

Tästä seuraa $C_2 = \tilde{k}_0 - \tilde{k}^*$. Täten lopulliseksi ratkaisuksi saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \tilde{k}(t) = \tilde{k}^* + (\tilde{k}_0 - \tilde{k}^*)e^{-\lambda t} \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{k}(t) - \tilde{k}_0 = (\tilde{k}^* - \tilde{k}_0)(1 - e^{-\lambda t}) \\ \text{(H-3)} \qquad \Rightarrow \quad & \ln \frac{k(t)}{k_0} = (1 - e^{-\lambda t}) \ln \frac{k^*}{k_0}, \end{aligned}$$

missä $\lambda = -\frac{1}{2}b_1 + \eta > 0$ kuvaa talouden konvergenssinopeutta kohden tasaisen kasvun tilaa. Pääomavarannon keskimääräinen kasvunopeus välillä $[0, t]$ voidaan kirjoittaa ylläolevan yhtälön avulla muodossa

$$\text{(H-4)}\qquad \frac{1}{t}\ln\frac{k(t)}{k_0} = \frac{1-e^{-\lambda t}}{t}\ln\frac{k^*}{k_0},$$

mikä on tekstin yhtälö (3.48).

Lasketaan nyt tarvittavat kertoimet a_1, a_2 ja b_2. Nämä saadaan derivoimalla Ramseyn mallin kasvunopeuksien liikeyhtälöitä

$$\text{(H-5)}\qquad \frac{\dot{c}}{c} = h_1(k) = \frac{1}{\theta}[f'(k) - (\rho+\delta)],$$

$$\text{(H-6)}\qquad \frac{\dot{k}}{k} = h_2(c,k) = \frac{f(k)}{k} - \frac{c}{k} - (n+\delta).$$

CES-tuotantoteknologian ollessa kyseessä $f(k) \doteq C\alpha^{1/\psi}[1+(1-\alpha)/\alpha\cdot k^{\psi}]^{1/\psi}$. Huomataan ensin, että tasaisen kasvun tilassa, jolloin $\dot{c} = \dot{k} = 0$, saadaan ylläolevista liikeyhtälöistä yhtälöt (mihin on sijoitettu $k = e^{\tilde{k}}, c = e^{\tilde{c}}$)

$$\text{(H-7)}\qquad 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha}e^{-\psi\tilde{k}^*} = \left(\frac{\rho+\delta}{C\alpha^{1/\psi}}\right)^{\psi/(1-\psi)},$$

$$\text{(H-8)}\qquad e^{\tilde{c}^*-\tilde{k}^*} = C\alpha^{1/\psi}\left(\frac{\rho+\delta}{C\alpha^{1/\psi}}\right)^{1/(1-\psi)} - (n+\delta).$$

Derivoidaan ensin yhtälö (H-5) $\tilde{k}$:n suhteen tasaisen kasvun tilan läheisyydessä. Lopputulokseksi saadaan

$$\text{(H-9)}\qquad a_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \tilde{k}} = -\frac{1}{\theta\sigma}(\rho+\delta)\left[1-\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{\sigma-1}\right],$$

missä on hyödynnetty yhtälöä (H-7) lausekkeen sieventämiseksi. Vastaavasti saadaan yhtälöt

$$\text{(H-10)}\qquad b_1 = \frac{\partial h_2}{\partial \tilde{k}} = \rho - n,$$

$$\text{(H-11)}\qquad b_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \tilde{c}} = (n+\delta) - (\rho+\delta)\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{1-\sigma}.$$

Kaikki ylläolevat tulokset on laskettu tasaisen kasvun tilassa $k = k^*$. Sijoittamalla yhtälöt (H-9)–(H-11) λ:n lausekkeeseen saadaan auki kirjoitettu muoto konvergenssinopeudelle:

$$\text{(H-12)}\quad \lambda = -\frac{1}{2}b_1 + \eta = -\frac{\rho - n}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{(\rho-n)^2 + 4\left(\frac{\rho+\delta}{\theta\sigma}\right)\left[\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{\sigma-1} - 1\right]\left[(n+\delta) - (\rho+\delta)\left(\frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho+\delta}\right)^{1-\sigma}\right]}.$$

Merkitään $X \doteq C\alpha^{1/\psi}/\rho + \delta$. Kappaleessa 3.4.2 johdettiin ehdot tasaisen kasvun tilaan päätymiselle. Korkean substituutiojouston tapauksessa ($\sigma > 1$) pitää olla $X < 1$ ja matalan substituutiojouston tapauksessa ($\sigma < 1$) $X > 1$. Näiden ehtojen avulla voidaan koostaa taulukko H-1.

σ	X	$X^{\sigma-1}$	$X^{1-\sigma}$
< 1	> 1	< 1	> 1
> 1	< 1	< 1	> 1

Taulukko H-1: *Muuttujien arvoja tasaisen kasvun tilassa*

Termien $X^{\sigma-1}$ ja $X^{1-\sigma}$ arvot suhteessa ykköseen eivät siis riipu substituutiojoustosta. Tämä tulos riippuu tasaisen kasvun tilan oletuksesta. Näiden arvojen avulla voidaan päätellä, että yhtälöryhmän kertoimet a_1 ja b_2 ovat aina negatiivisia, ja yhtälön (H-12) neliöjuuritermin tulo $(X^{\sigma-1} - 1)(n - \rho X^{1-\sigma})$ on tällöin aina positiivinen.[7]

Substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen

Lasketaan nyt substituutiojouston vaikutus konvergenssinopeuteen. Tämä tapahtuu laskemalla derivaatta $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\sigma$. On syytä muistaa, että yleisessä tapauksessa tuotantofunktion parametrit C ja α riippuvat substituutiojoustosta. Koska konvergenssinopeus (H-12) riippuu substituutiojoustosta ainoastaan neliöjuuritermissä olevan tulotekijän vuoksi, riittää tarkastella funktion

$$\text{(H-13)}\qquad g(X,\rho,n,\sigma) \doteq \frac{\rho}{\sigma}(X^{\sigma-1} - 1)(n - \rho X^{1-\sigma})$$

riippuvuutta substituutiojoustosta. Koska funktio g on aina positiivinen, voidaan sen riippuvuutta muuttujasta σ tarkastella derivoimalla funktion g logaritmia. Nyt

$$\text{(H-14)}\qquad \ln g = \ln\rho - \ln\sigma + \ln(X^{\sigma-1} - 1) + \ln(n - \rho X^{1-\sigma}),$$

[7] Tässä on jätetty pääoman poistoja kuvaava parametri δ pois, sillä se ei vaikuta tuloksiin ja se voidaan aina palauttaa yhtälöihin tekemällä muunnos $n \mapsto n + \delta$, $\rho \mapsto \rho + \delta$. Tulos seuraa taulukon H-1 arvoista ja Ramseyn mallin perusoletuksesta $\rho > n$.

joten

$$\text{(H-15)}\quad \begin{aligned}\frac{\partial \ln g}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{X^{\sigma-1}}{X^{\sigma-1}-1}\frac{\partial}{\partial \sigma}\{(\sigma-1)\ln X\} - \frac{\rho X^{1-\sigma}}{n-\rho X^{1-\sigma}}\frac{\partial}{\partial \sigma}\{(1-\sigma)\ln X\} \\ &= -\frac{1}{\sigma} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\{(\sigma-1)\ln X\}\left[\frac{nX^{\sigma-1}-\rho X^{1-\sigma}}{(X^{\sigma-1}-1)(n-\rho X^{1-\sigma})}\right].\end{aligned}$$

Hakasuluissa oleva termi on aina negatiivinen, sillä $nX^{\sigma-1} - \rho X^{1-\sigma} < n - \rho X^{1-\sigma} < 0$ ja nimittäjä on aina positiivinen. Derivaatan $\partial\{(\sigma-1)\ln X\}/\partial\sigma$ etumerkin tarkistamiseksi joudutaan muuttuja X kirjoittamaan auki ja derivoimaan saatavaa tuloa. Kappaleessa 3.2 johdettiin normalisoidun CES-tuotantofunktion parametreille lausekkeet alkuarvojen funktiona. Muuttujan X lauseke saa tällöin muodon

$$X = \frac{C\alpha^{1/\psi}}{\rho} = \frac{y_0}{\rho}\frac{k_0^{1/(\sigma-1)}}{(k_0+\mu_0)^{\sigma/(\sigma-1)}},$$

joten

$$\text{(H-16)}\qquad (\sigma-1)\ln X = (\sigma-1)\ln\left(\frac{y_0}{\rho}\right) + \ln k_0 - \sigma\ln(k_0+\mu_0).$$

Derivoimalla tämä yhtälö substituutiojouston suhteen saadaan tulos

$$\text{(H-17)}\qquad \frac{\partial}{\partial \sigma}\{(\sigma-1)\ln X\} = \ln\left(\frac{y_0}{\rho}\right) - \ln(k_0+\mu_0).$$

Derivaatta (H-15) on siis negatiivinen, mikäli ehto

$$\text{(H-18)}\qquad y_0 > \rho(k_0+\mu_0)$$

pätee. Tällöin korkeampi substituutiojousto laskee konvergenssinopeutta — mitä joustavampi talous on (substituutiojoustolla mitattuna), sitä hitaammin konvergenssi kohti tasaisen kasvun tilaa tapahtuu. Mikäli poistot otetaan huomioon, saa ehto tekstissä esitetyn muodon $y_0 > (\rho+\delta)(k_0+\mu_0)$.

I Kulutuksen kehityksen eksplisiittinen ratkaisu

Ratkaistavana on siis kulutuksen eksplisiittinen ratkaisu, kun korkotaso $r(t)$ ja palkkataso $w(t)$ oletetaan tunnetuksi kaikilla t ja kaikki muut parametrit oletetaan vakioiksi. Aloitetaan ratkaisemalla kulutus Eulerin yhtälöstä (4.4). Ratkaisuksi saadaan

$$c(t) = c_0 e^{\int_0^t (r(\tau)-\rho)\mathrm{d}\tau} = c_0 e^{(\bar{r}-\rho)t}, \tag{I-1}$$

missä $\bar{r}(t) \doteq (1/t)\int_0^t r(\tau)\mathrm{d}\tau$ on korkotason $r(\tau)$ keskiarvo välillä $[0,t]$. c_0 on ratkaisun integrointivakio, joka määräytyy myöhemmin. Ratkaistaan vastaavasti nyt pääomaintensiteetti yhtälöstä (4.5). Tämä tapahtuu ratkaisemalla ensin homogeeninen differentiaaliyhtälö $\dot{k} - (r-n)k = 0$, jonka ratkaisuna on

$$k(t) = k_0 e^{(\bar{r}-n)t}. \tag{I-2}$$

Jälleen k_0 on integrointivakio, joka määräytyy myöhemmin. Erityisratkaisu löydetään esimerkiksi varioimalla integrointivakiota eli tekemällä yrite $k_p(t) = h(t)e^{(\bar{r}-n)t}$. Derivoimalla tämä lauseke ja sijoittamalla tulos alkuperäiseen yhtälöön (4.5) saadaan funktiolle $h(t)$ differentiaaliyhtälö

$$\dot{h}(t) = w(t)e^{-(\bar{r}-n)t} - c_0 e^{(n-\rho)t}. \tag{I-3}$$

Tämä voidaan ratkaista suoraviivaisesti integroimalla; ratkaisuna on

$$\begin{aligned} h(t) &= \int_0^t w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau - c_0 \int_0^t e^{(n-\rho)\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{c_0}{n-\rho}[e^{(n-\rho)t} - 1]. \end{aligned} \tag{I-4}$$

Pääomaintensiteetin täydellinen ratkaisu on siis

$$k(t) = e^{(\bar{r}-n)t}\left\{k_0 + \int_0^t w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{c_0}{n-\rho}[e^{(n-\rho)t} - 1]\right\}. \tag{I-5}$$

Sovelletaan nyt transversaalisuusehtoa (4.6). Yllä olevien ratkaisujen avulla voidaan lauseke $k \cdot c^{-1} \cdot \exp\{-(\rho-n)t\}$ kirjoittaa auki muodossa

$$\frac{1}{c_0}\left\{k_0 + \int_0^t w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau - \frac{c_0}{n-\rho}[e^{(n-\rho)t} - 1]\right\}. \tag{I-6}$$

Jotta transversaalisuusehto täyttyisi, täytyy yllä olevassa yhtälössä aaltosulkeissa olevan termin olla identtisesti nolla kun $t \to \infty$. Transversaalisuusehdosta seuraa siis integrointivakiolle c_0 yhtälö

$$c_0 = (\rho - n)\left\{k_0 + \int_0^\infty w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{I-7}$$

Ylläolevasta yhtälöstä voidaan ratkaista k_0 ja sijoittaa saatava lauseke yhtälöön (I-5). Tällöin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} k(t)e^{-(\bar{r}-n)t} &= \frac{c_0}{\rho - n} - \int_t^\infty w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau + \frac{c_0}{\rho - n}[e^{(n-\rho)t} - 1] \\ &= \frac{c_0}{\rho - n}e^{(n-\rho)t} - \int_t^\infty w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)\tau}\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \tag{I-8}$$

$w(t)$:n integraalin alaraja t johtuu siitä, että yhtälössä (I-5) integrointi tapahtuu välillä $[0,t]$. Tästä vähennetään yhtälön (I-7) integrointi välillä $[0,\infty[$. Lopputulokseksi saadaan integrointiväli $[t,\infty[$. Saadusta yhtälöstä voidaan nyt ratkaista $c(t)$ kertomalla puolittain termillä $e^{(\bar{r}-n)t}$, kun lisäksi muistetaan, että $c(t) = c_0 e^{(\bar{r}-\rho)t}$. Lopputuloksek-si saadaan täydellinen ratkaisu kulutukselle ajan funktiona, kun pääomaintensiteetin, korkotason ja palkkatason kehitys tunnetaan:

$$c(t) = (\rho - n)\left\{k(t) + \int_t^\infty w(\tau)e^{-(\bar{r}-n)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau\right\}. \tag{I-9}$$

J Suhteellisten pääomaintensiteettien liikeyhtälön johtaminen

Jaetaan ensin maan j pääomaintensiteetin liikeyhtälö (4.5) k_j:lla, jolloin saadaan pääomaintensiteetin kasvunopeudelle yhtälö

$$\frac{\dot{k}_j}{k_j} = (r_j - n) + \frac{w_j}{k_j} - \frac{c_j}{k_j}. \tag{J-1}$$

Vähennetään tästä maailman pääomaintensiteetin keskiarvon kasvunopeudelle saatu liikeyhtälö (4.26). Tällöin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}_j}{k_j} - \frac{\dot{k}}{k} &= (r_k - n) + \frac{w_j}{k_j} - \left(\frac{c_j}{k_j} - \frac{c}{k}\right) - \left[1 + \left(\frac{A}{k}\right)^{\psi}\right]^{1/\psi} + n \\ &= r_k + \frac{w_j}{k_j} - \left[1 + \left(\frac{A}{k}\right)^{\psi}\right]^{1/\psi} - \left(\frac{c_j}{k_j} - \frac{c}{k}\right). \end{aligned} \tag{J-2}$$

Tarkastellaan ensin ylläolevan yhtälön viimeistä suluissa olevaa termiä. Sen yksinkertaistamiseksi voidaan käyttää liitteessä I ratkaistua kulutusintensiteetin yhtälöä. Sijoittamalla se viimeiseen sulkutermiin saadaan

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_j}{k_j} - \frac{c}{k}\right) &= (\rho - n)\int_t^{\infty} p_1(\tau) e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)} \mathrm{d}\tau \left[1 + \frac{A_j}{k_j} - 1 - \frac{A}{k}\right] \\ &= (\rho - n)\left[\frac{A_j}{k_j} - \frac{A}{k}\right] \int_t^{\infty} p_1(\tau) e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)} \mathrm{d}\tau, \end{aligned} \tag{J-3}$$

missä on jo hyödynnetty välituotemarkkinoiden täydellisestä kilpailusta seuraavaa työvoiman hinnan lauseketta $w_j = A_j p_1$.

Sievennetään seuraavaksi yhtälön (J-2) ensimmäisiä termejä. Kirjoitetaan ne ensin muodossa

$$p_2 + \frac{A_j}{k_j} p_1 - \left[1 + \left(\frac{A}{k}\right)^{\psi}\right]^{1/\psi} = p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} + \frac{A_j}{k_j} - \frac{A}{k} p_1^{\psi/(1-\psi)}\right). \tag{J-4}$$

Hyödyntämällä yhtälöitä (4.9) ja (4.15) voidaan ylläolevan lausekkeen ensimmäinen termi kirjoittaa muodossa

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{A}{k}\right)^{1-\psi} = \frac{A}{k}\left(\frac{k}{A}\right)^{\psi} = \frac{A}{k}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\psi/(1-\psi)} = \frac{A}{k}\left(p_1^{\psi/(1-\psi)} - 1\right), \tag{J-5}$$

joten yhtälö (J-4) supistuu muotoon

(J-6)
$$p_2 + \frac{A_j}{k_j} p_1 - \left[1 + \left(\frac{A}{k}\right)^{\psi}\right]^{1/\psi} = p_1 \left(\frac{A_j}{k_j} - \frac{A}{k}\right).$$

Nyt voidaan kirjoittaa sievennetty muoto yhtälöstä (J-2). Tulokseksi saadaan

(J-7)
$$\frac{\dot{k}_j}{k_j} - \frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{A_j}{k_j} - \frac{A}{k}\right) \left[(\rho - n) \int_t^{\infty} p_1(\tau) e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)} \mathrm{d}\tau - p_1\right].$$

Kerrotaan nyt yllä oleva yhtälö puolittain (k_j/k):lla ja otetaan termi (A/k) yhteiseksi tekijäksi. Koska

(J-8)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{k_j}{k}\right) = \frac{\dot{k}_j}{k} - \frac{\dot{k} \cdot k_j}{k^2},$$

saadaan tällöin kirjoittamalla yhtälö (J-7) suhteellisen pääomaintensiteetin $k_j^R \doteq k_j/k$ ja suhteellisen tuottavuuden $A_j^R \doteq A_j/A$ avulla lopullinen tavoite, liikeyhtälö suhteellisille pääomaintensiteeteille:

(J-9)
$$\dot{k}_j^R = \phi(k_j^R - A_j^R),$$

missä

(J-10)
$$\phi \doteq \frac{A}{k} \left[(\rho - n) \int_t^{\infty} p_1(\tau) e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)} \mathrm{d}\tau - p_1\right].$$

K Suhteellisten pääomaintensiteettien kasvutekijän etumerkki

Oletetaan, että välituotteen 1 hinta nousee tasaisella positiivisella nopeudella[8]. Tällöin hinnan kehitykselle pätee yhtälö

$$p_1(t) = p_1(0)e^{g_{p_1}t} = p_1(0)e^{g_w t}, \tag{K-1}$$

sillä maiden palkkatasot riippuvat lineaarisesti välituotteen 1 hinnasta (tekstin yhtälö (4.12)). Kirjoitetaan nyt suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälön vakio ϕ käyttäen yllä määriteltyä välituotteen 1 hinnan kehityksen yhtälöä. Yhtälö saa tällöin muodon

$$\phi = \frac{Ap_1(0)}{k}\left[(\rho - n)\int_t^{\infty} e^{g_w t} e^{-(\bar{p}_2 - n)(\tau - t)} \mathrm{d}\tau - e^{g_w t}\right]. \tag{K-2}$$

Integraalin arvoksi saadaan

$$\int_t^{\infty} e^{g_w t} e^{-(\bar{p}_2 - n)(\tau - t)} \mathrm{d}\tau = \frac{e^{g_w t}}{p_2(t) - n - g_w}, \tag{K-3}$$

missä on jouduttu tekemään oletus $\bar{p}_2 - n - g_w > 0$ eli $g_w < r - n$, sillä muuten integraali ei saa äärellistä arvoa. Tämän tuloksen avulla yhtälö (K-2) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Ap_1(0)e^{g_w t}}{k}\left[\frac{\rho - n}{p_2(t) - n - g_w} - 1\right] \\ &= \frac{Ap_1(0)e^{g_w t}}{k}\left[\frac{\rho - p_2(t) + g_w}{p_2(t) - n - g_w}\right]. \end{aligned} \tag{K-4}$$

Yllä hakasulkeissa olevan lausekkeen nimittäjä on edellä tehdyn oletuksen perusteella positiivinen, joten vakion ϕ merkki riippuu osoittajasta. ϕ on negatiivinen, jos $\rho - p_2(t) + g_w < 0$. Ehdoksi negatiivisuudelle saadaan siis

$$g_w < p_2(t) - \rho = r - \rho. \tag{K-5}$$

ϕ on siis negatiivinen, mikäli palkkojen kasvunopeus on riittävän pieni. Huomataan vielä lisäksi, että mallin oletuksesta $\rho > n$ seuraa, että yllä lasketun integraalin äärellisyysehto täytyy, mikäli palkkatason kasvunopeus täyttää yllä olevan ehdon.

---

[8] Voitaisiin myös yleisemmin olettaa hinnan nousevan positiivisella nopeudella, jolloin yhtälöissä olisi kasvunopeuden sijaan kasvunopeuden keskiarvo $\bar{g}_w \doteq (1/t)\int_0^t g_w(\tau)\mathrm{d}\tau$. Tulokset olisivat kuitenkin samat.

L Muuttujan χ kasvunopeuden johtaminen

Määritellään muuttuja $\chi \doteq c/k$, eli χ kuvaa kulutuksen suhdetta pääomaintensiteettiin. Lasketaan nyt muuttujan χ kasvunopeus. Kirjoitetaan ensin

$$g_\chi = \frac{\dot{\chi}}{\chi} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{k}}{k}. \tag{L-1}$$

Hyödynnetään nyt jo aiemmin laskettuja tuloksia. Eulerin yhtälöstä (4.4) saadaan $\dot{c}/c = r - \rho$, ja $\dot{k}/k = g_k$:lle saadaan lauseke yhtälöstä (4.26). Sijoittamalla nämä ylläolevaan yhtälöön saadaan

$$g_\chi = [r-\rho] - \left[\left(1 + \frac{A^\psi}{k^\psi}\right)^{1/\psi} - n - \frac{c}{k}\right]. \tag{L-2}$$

Sijoittamalla nyt ylläolevaan yhtälöön liittessä I johdettu kulutusintensiteetin $c(t)$ sekä hyödyntämällä tuotannontekijöiden hintojen lausekkeita (4.12) ja (4.13) sekä yhtälöitä (4.16) ja (4.15) voidaan johtaa lopputulos

$$g_\chi = \frac{A}{k}\left[(\rho - n)\int_t^\infty p_1(\tau)e^{-(\bar{r}-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau - p_1\right]. \tag{L-3}$$

Tämä on sama kuin liitteessä J johdettu funktio ϕ, joten

$$g_\chi = \frac{\dot{\chi}}{\chi} \equiv \phi, \tag{L-4}$$

mikä oli todistettavana.

M Poikkeavan maan suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälön johtaminen

Oletetaan, että maan j kotitalouksien kulutuksen aikapreferenssi ρ_j ja väestön kasvunopeus n_j poikkeavat maailman normaaleista arvoista ρ, n. Lisäksi oletetaan, että maan korkotaso poikkeaa maailman korkotasosta θ_j prosenttia, siis $r_j = p_2(1+\theta_j)$. Koska maa oletetaan pieneksi, voidaan maailman keskiarvojen liikeyhtälöitä edelleen approksimoida liikeyhtälöillä (4.25) ja (4.26).

Sovelletaan ensin liitteen I yhtälöä (I-9) epähomogeenisillä parametrien arvoilla. Tällöin maan j kulutusintensiteetin ratkaisuksi saadaan

(M-1) $$c_j(t) = (\rho_j - n_j)\left\{k_j(t) + \int_t^{\infty} w_j(\tau)e^{-(\bar{r}_j - n_j)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau\right\}.$$

Tehdään nyt samoin kuin liitteessä J, ja sovelletaan ylläolevaa kulutusintensiteetin lauseketta pääomaintensiteetin liikeyhtälöön (4.24). Tällöin saadaan yhtälö

(M-2) $$\frac{\dot{k}_j}{k_j} = p_2(1+\theta_j) + \frac{p_1 A_j}{k_j} - \rho_j - (\rho_j - n_j)\frac{A_j}{k_j}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2(1+\theta_j)-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau.$$

Kirjoitetaan lisäksi koko maailman pääomaintensiteetin keskiarvon liikeyhtälö muodossa

(M-3) $$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{A}{k}p_1^{\psi/(1-\psi)} - \rho - (\rho - n)\frac{A}{k}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2 - n)(\tau - t)}\mathrm{d}\tau.$$

Vähentämällä nyt yhtälö (M-3) yhtälöstä (M-2) saadaan tulos

(M-4)
$$\begin{aligned}
\frac{\dot{k}_j}{k_j} - \frac{\dot{k}}{k} =& p_2(1+\theta_j) + \frac{p_1 A_j}{k_j} - \rho_j - (\rho_j - n_j)\frac{A_j}{k_j}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2(1+\theta_j)-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau \\
&- \frac{A}{k}p_1^{\psi/(1-\psi)} + \rho + (\rho - n)\frac{A}{k}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2 - n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau \\
=& p_2\theta_j + (\rho - \rho_j) + p_1\left(\frac{A_j}{k_j} - \frac{A}{k}\right) \\
&+ (\rho - n)\frac{A}{k}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2 - n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau - \frac{A_j}{k_j}\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2(1+\theta_j)-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Jakamalla tämä saatu yhtälö puolittain suhteellisella pääomaintensiteetillä k_j/k:lla voidaan nyt kirjoittaa suhteellisen pääomaintensiteetin liikeyhtälö

(M-5) $$\dot{k}_j^R = [\phi + p_2\theta_j + (\rho - \rho_j)]k_j^R - \phi_j A_j^R,$$

missä ϕ on määritelty samoin kuin liitteessä J, ja ϕ_j on määritelty seuraavasti:

(M-6) $$\phi_j \doteq \frac{A}{k}\left[(\rho_j - n_j)\int_t^{\infty} p_1(\tau)e^{-(\bar{p}_2(1+\theta_j)-n)(\tau-t)}\mathrm{d}\tau - p_1\right].$$