

Kasvatustieteellisiä tutkimuksia, numero 17  
Helsinki Studies in Education, number 17

**Eija Väisänen**

**Laskemisen sujuvuus osana matemaattisia taitoja  
Sujuvuuden seuranta ja matemaattisten taitojen tukeminen  
alakoulussa**

Esitetään Helsingin yliopiston kasvatustieteellisen tiedekunnan suostumuksella  
julkisesti tarkastettavaksi Helsingin yliopiston auditoriossa XV, Fabianinkatu 33  
lauantaina 16. joulukuuta 2017 klo 10

Helsinki 2017

**Esitarkastajat**

Professori Minna Kyttälä, Turun yliopisto

Professori Janne Lepola, Turun yliopisto

**Kustos**

Professori Pirjo Aunio, Helsingin yliopisto, Oslon yliopisto

**Ohjaaja**

Professori Pirjo Aunio, Helsingin yliopisto, Oslon yliopisto

Professori emeritus Jarkko Hautamäki, Helsingin yliopisto

**Vastaväittäjä**

Professori Mikko Aro, Jyväskylän yliopisto

Yliopistopaino Unigrafia, Helsinki

ISBN 978-951-51-3813-2 (nid.)

ISBN 978-951-51-3814-9 (pdf)

Helsingin yliopisto, Kasvatustieteellinen tiedekunta

Kasvatustieteellisiä tutkimuksia, numero 17

---

**Eija Väisänen**

## **Laskemisen sujuvuus osana matemaattisia taitoja**

Sujuvuuden seuranta ja matemaattisten taitojen tukeminen alakoulussa

---

### **Tiivistelmä**

Tässä väitöstutkimuksessa seurattiin laskemisen sujuvuuden kehitystä toiselta viidennelle luokalle ja sen yhteyttä lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. Lisäksi tarkasteltiin kahden alakouluikäisille suunnatun harjoitusohjelman kykyä vaikuttaa lasten matemaattisiin taitoihin.

Ensimmäisessä seurantatutkimuksessa seurattiin kahden koululuokan lasten laskutaidon muutosta toiselta neljännelle luokalle sekä pyrittiin selittämään myöhempää laskemisen sujuvuutta aiemman laskemisen sujuvuuden, lukemisen sujuvuuden, sukupuolen, nimeämisnopeuden ja vanhempien koulutuksen avulla (osatutkimus III). Toisessa seurantatutkimuksessa (osatutkimus IV) lapsista muodostettiin toisella luokalla arvioidun laskemisen ja lukemisen sujuvuuden perusteella sujuvuusryhmät (ei-sujuva laskija, ei-sujuva lukija, sujuva molemmissa taidoissa), joiden sujuvuutta sekä laskemisessa että lukemisessa seurattiin viidennen luokan syksyyn saakka. Ryhmiä verrattiin toisiinsa myös nimeämisnopeuden suhteen. Interventiotutkimuksia oli kaksi. Niistä ensimmäisessä (osatutkimus I) osallistujat olivat saman koulun kolmelta luokka-asteelta (2., 3. ja 4.), ja harjoitusohjelma perustui aiempiin interventiotutkimuksiin (mm. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant & Hamlett, 2005). Toisessa interventiotutkimuksessa (osatutkimus II) osallistujat olivat ensimmäisellä luokalla. Tässä osatutkimuksessa käytetty harjoitusohjelma oli muokattu Minäkin lasken! –harjoitusohjelmasta (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010). Osatutkimuksissa I ja IV kuvattiin myös lasten yksilöllistä kehitystä tutkituissa taidoissa.

Laskemisen sujuvuus eri luokka-asteilla oli voimakkaasti yhteydessä keskenään. Ääneen lukemisen sujuvuus oli yhteydessä päässä laskettavien tehtävien sujuvuuden kanssa, äänetön sanantunnistus sekä päässä että algoritmien avulla laskettavien tehtävien sujuvuuden kanssa. Lapset, jotka olivat sujuvuudeltaan heikkoja laskijoita, olivat usein suhteellisen heikkoja myös lukemisen sujuvuudessa. Lasten myöhempää laskemisen sujuvuutta kyettiin parhaiten selittämään aiemmalla laskemisen sujuvuudella. Toisen luokan talvella arvioidulla laskemisen sujuvuudella kyettiin selittämään kaksi kolmasosaa kolmannen luokan kevään laskemisen sujuvuudesta ja vielä viidesosa neljännen luokan kevään laskemisen sujuvuudesta. Lukemisen sujuvuus, nimeämisnopeus, lapsen sukupuoli tai vanhempien koulutus eivät lisänneet merkittävästi selitysosuutta. Viidennellä luokalla alkujaan pelkästään laskemisessa tai lukemisessa ei-sujuvat lapset olivat saavuttaneet laskemisen sujuvuudessa luokka-asteensa keskimääräisen tason.

Interventiotutkimukset (osatutkimukset I ja II) osoittivat, että lasten matemaattisia taitoja voidaan tukea alakoulussa erilaisin systemaattisin harjoitusohjelmin, mutta parhaita tuloksia saadaan varhaisessa vaiheessa toteutetuilla interventioilla. Ensimmäisellä luokalla toteutetussa interventiossa harjoitusryhmän lapset saavuttivat varhaisissa matemaattisissa taidoissa vertailuryhmän lapset. Toisella luokalla olleet lapset hyötyivät toteutetusta interventiosta paremmin kuin siihen osallistuneet kolmas- tai neljäsluokkalaiset. Yksittäisten lasten välillä oli eroja siinä, miten he hyötyivät interventiosta. Molemmissa interventioissa tuesta hyötyminen oli merkittävintä lapsilla, joilla matemaattisissa taidoissa ilmeneviin heikkouksiin ei liittynyt muuta oppimiseen vaikuttavaa pulmaa.

Tutkimuksen perusteella laskemisen sujuvuuden kehitystä olisi tärkeä seurata systemaattisesti koko alakoulun ajan. Varsinkin toisen luokan aikana arvioitu laskemisen sujuvuus ennakoivat hyvin myöhempää sujuvuutta, myös algoritmien avulla laskettaessa. Seurannassa kannattaa ottaa huomioon myös lukemisen sujuvuus. Tällöin kiinnitetään jo varhaisessa vaiheessa huomiota myös päällekkäisiin sujuvuuspulmiin.

---

*Avainsanat:* alakoulu, interventiotutkimus, laskemisen sujuvuus, lukemisen sujuvuus, matematiikan oppimisvaikeudet, oppimisen tukeminen, seurantatutkimus

**Eija Väisänen**

**Calculation fluency as a part of mathematical skills**

Development of arithmetic and calculation fluency and support of mathematical skills in elementary school

---

**Abstract**

The first purpose of this thesis was to investigate the development of calculation fluency, and the relationship between reading fluency and naming speed in Finnish children from second to fifth grade. The second purpose of this thesis was to investigate the effectiveness of two mathematical intervention programmes on learning of low-performing children.

The main aim of the first longitudinal study (Study III) was to follow up the development of calculation fluency from second to fourth grade in two classes. The second aim was to predict children's later calculation fluency with previous calculation fluency, reading fluency, naming speed, gender, and parent's level of education. In the second longitudinal study (Study IV), children were classified as non-fluent in calculation, non-fluent in reading, and fluent in both academic skills. Calculation and reading fluency of all three groups were followed up to grade 5. The groups were also compared on naming speed. In this thesis, there were two intervention studies. The first intervention study (Study I) was conducted with children from three grades (2<sup>nd</sup>, 3<sup>rd</sup>, and 4<sup>th</sup>). The intervention programme used in Study I was designed based on previous intervention studies (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant & Hamlett, 2005). Study II was conducted with children from the first grade. The intervention programme used in Study II was adapted from the "I count too!" programme (Minakin lasken) (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010). In Studies I and IV, the results were also examined from the perspective of individual differences.

In the longitudinal studies (Study III and IV), the differences between groups in calculation fluency were stable during the research period. If a child had difficulties in calculation fluency, they most likely had problems also in reading fluency. Calculation fluency was best predicted by previous calculation fluency. The results suggest that calculation fluency in second grade predicts over 65 % of the variance in calculation fluency in fourth grade. Reading fluency, naming speed, gender, or parent's level of education had no direct effects on calculation fluency. In grade 5, the children, who had separate problems in calculation or reading fluency had closed their gap to their classmates' fluency. Children who

had co-occurring fluency problems on reading and calculation fluency had slower naming speed.

The results from the intervention studies (Study I and II) show that intensified instruction can be used successfully to support mathematical skills in elementary school. It is necessary to identify low performance early enough, because in the intervention study (Study II) conducted with first grade children, the instruction group experienced significant development, especially in counting skills. In Study I, the instruction group in grade 2 experienced better development than intervention groups in grade 3 or 4. However, there were significant differences between children in the intervention group in both studies. In both intervention studies, the development was most significant in the children who had no severe learning difficulties.

Findings suggest that systematic monitoring of the developmental process in calculation is necessary in the elementary school years. There are some potentially shared components in calculation and reading fluency. The screening for at-risk development in reading and calculation should be done at the same time, and screening should be continued after the early school years. It should be noticed early enough, if the child has co-occurring problems in calculation and reading fluency.

---

*Keywords:* calculation fluency, intensified intervention, intervention study, longitudinal study, mathematical learning difficulties, primary school, reading fluency

## Kiitokset

Olen toiminut opettajana yli 30 vuotta, ja nauttinut niistä. Kuitenkin olen aina halunnut tietää hiukan enemmän asioista, joiden parissa työskentelen. Luokanopettajakoulutuksessa Rauman opettajankoulutuslaitoksella jäin valmistumiseni jälkeen professori Sirkku Ahon tutkimusassistentiksi puoleksi vuodeksi. Halusin kuitenkin tietää ja kokea ”oikeaakin” opettajantyötä. Koska halusin tietää oppimisesta lisää, hakeuduin erillisiin erityisopettajan opintoihin Jyväskylän yliopistoon. Sen jälkeen oli selvää, että haluan jatkaa opintojani yhä tavoitteellisemmin.

Suuret kiitokset väitöskirjani ohjaajalle professori Pirjo Auniolle. Hän on uskonut minuun silloinkin, kun usko on itseltä loppunut. Häneltä on aina löytynyt aikaa vastata kysymyksiin, kysyä uusia kysymyksiä ja sopivalla tavalla työntää eteenpäin. Kiitokset työni toiselle ohjaajalle professori emeritus Jarkko Hautamäelle. Hänen viisaat kommenttinsa ja neuvonsa pakottivat tarkastelemaan työtä kokonaisuutena, ja ohjasivat loppuvaiheessa erittäin rakentavasti kokonaisuuden muotoutumista. Lämpimät kiitokset myös lisensiaattityöni ohjaajille Turun yliopistossa; professori Marja Vauras ja professori Kaarina Merenluoto. Ilman heidän tukeaan ja neuvojaan ei ensimmäinen osa tästä tutkimuspolusta olisi jatkunut seuraaviin vaiheisiin.

Työni esitarkastajille, professori Minna Kyttälälle ja professori Janne Lepolalle, osoitan lämpimät kiitokset huolellisesta paneutumisesta työhöni ja arvokkaista huomioista, kommentteista ja kuitenkin kannustavasta palautteesta. Olen myös kiitollinen saadessani vastaväittäjäkseni professori Mikko Aron.

Kiitokset Pirjon tutkimusryhmän jäsenille, joista useat jo ovat edenneet tutkijanurallaan pitkälle: Riikka Mononen, Johan Korhonen, Ulrika Ekstam, Henrik Husberg ja Heidi Hellstrand. Teidän arvokkaat kommenttinne ja kannustavat sananne ovat valaneet minuun uskoa työni valmistumisesta. Kiitokset kaikille opettajakollegoilleni ja esimiehilleni vuosien varrella eri kouluissa. Koen, että työtäni ja opintojani on arvostettu. Minulla on ollut ilo saada työskennellä kouluissa, joissa on ollut halu muutokseen ja kokeiluihin. Kiitokset ymmärtäväsyydestä ja kannustuksesta lähiesimiehilleni tutkimuksen teon aikana.

Olen viettänyt enemmän ja vähemmän intensiivisesti jatko-opintojeni ja väitöskirjani parissa lähes kymmenen vuotta. Kiitokset hyvälle ystävälleni Marja Viherlehdolle siitä, että olet vetänyt minut aina sopivasti arkeen, kun opinnot ovat tuntuneet liian painavilta. Kiitos opettajakollegalleni Tuula Vätölle. Olet aina ollut valmis auttamaan ja tarvittaessa osallistumaan opetuskokeiluun, mittausten tekoon ja lopuksi sijaistamaan minua opintovapaani aikana. Kiitos ”mentoorilleni” Anneli Liisanantille. Olen ollut onnekas, kun olen saanut tehdä luokanopettajaurani sinun kanssasi! Olet aina rohkaissut ja kannustanut minua ylittä-

mään omat rajani ja kokeilemaan jotakin uutta, olipa se sitten erityisopettajakoulutus tai jatko-opintojen aloitus.

Kiitokset vanhemmilleni Tuija ja Martti Leinolle siitä, että koulutusta on arvostettu. Ja lopuksi, muttei vähäisimpänä. Kiitokset perheelleni, joka on sietänyt aikuisopiskelijaa, joka haluaa välillä uppoutua omaan maailmaansa ja opintoihinsa. Kiitos aviopuolisolleni Karille, joka vuosia on jaksanut kannustaa, tukea ja arvostaa opintojani. Kertaakaan et ole arvostellut minua opinnoistani ja niiden vaatimasta panostuksesta. Olemme molemmat saaneet paneutua siihen, mitä rakastamme: sinä rakentamiseen ja käsillä tekemiseen ja minä opiskeluun. Kiitokset aikuisille lapsilleni, Eerolle ja Emmille, joiden paneutuminen omiin opintoihinsa ja rohkeus uusien haasteiden vastaanottamiseen on ollut minulle ilon aiheen lisäksi esimerkkinä.

Keravalla, lokakuussa 2017

Eija Väisänen



# Sisältö

KIIITOKSET.....	7
<b>1 JOHDANTO .....</b>	<b>13</b>
1.1 Aritmeettiset taidot .....	14
1.1.1 Aritmeettisten taitojen kehitys.....	15
1.1.2 Laskemisen sujuvuus.....	16
1.1.3 Matemaattisissa taidoissa heikkojen osaajien piirteitä .....	19
1.2 Matemaattisten taitojen yhteydet muihin tekijöihin .....	21
1.2.1 Lukemisen sujuvuus .....	22
1.2.2 Nimeämisnopeus .....	23
1.2.3 Muita taustatekijöitä .....	24
1.3 Heikkojen osaajien oppimisen tukeminen matematiikassa .....	25
1.3.1 Tehokkaan opetuksen piirteitä.....	26
1.3.2 Interventiotutkimukset alakouluikäisillä .....	28
1.4 Sujuvuus- ja interventiotutkimusten yhteenveto tähän tutkimukseen liittyen.....	30
<b>2 METODOLOGISET RATKAISUT .....</b>	<b>32</b>
2.1 Tämän tutkimuksen tutkimuskysymykset .....	32
2.2 Tutkimuksen toteutus .....	33
<b>3 OSATUTKIMUSTEN SISÄLLÖT LYHYESTI .....</b>	<b>41</b>
3.1 Osatutkimus I .....	41
3.1.1 Tavoitteet.....	41
3.1.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus .....	41
3.1.3 Mittarit.....	42
3.1.4 Analyysit .....	43
3.1.5 Tulokset.....	43
3.1.6 Johtopäätökset .....	43
3.2 Osatutkimus II .....	44
3.2.1 Tavoitteet.....	44

3.2.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus.....	45
3.2.3 Mittarit .....	46
3.2.4 Analyysit.....	46
3.2.5 Tulokset .....	46
3.2.6 Johtopäätökset .....	47
3.3 Osatutkimus III.....	48
3.3.1 Tavoitteet .....	48
3.3.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus.....	48
3.3.3 Mittarit .....	49
3.3.4 Analyysit.....	49
3.3.5 Tulokset .....	50
3.3.6 Johtopäätökset .....	50
3.4 Osatutkimus IV.....	51
3.4.1 Tavoitteet .....	51
3.4.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus.....	51
3.4.3 Mittarit .....	52
3.4.4 Analyysit.....	53
3.4.5 Tulokset .....	53
3.4.6 Johtopäätökset .....	54
4 JOHTOPÄÄTÖKSET JA POHDINTA .....	56
4.1 Päätulokset.....	56
4.2 Tutkimuksen teoreettinen merkitys .....	58
4.3 Ehdotuksia käytännön opetustyöhön .....	61
4.3.1 Oppimisen ja tuen tarpeen seuranta.....	62
4.3.2 Hyvän harjoitusjakson ominaisuuksia .....	63
4.4 Tutkimuksen rajoitukset ja jatkotutkimusehdotuksia .....	66
LÄHTEET.....	69
LIITTEET .....	87

## **Taulukot**

Taulukko 1. Osatutkimusten aineistot

## **Kuviot**

Kuvio 1. Laskemisen sujuvuus suhteessa matemaattisiin taitoihin

## **Liitteet**

Liite A. Kaikkien tutkimuksissa käytettyjen mittarien tiedot

## Alkuperäiset artikkelit

Väitöskirja perustuu seuraaviin neljään artikkeliin, jotka on esitelty tekstissä roomalaisin numeroin. Artikkelit on julkaistu kustantajien luvalla.

- I Väisänen, E. (2011). Matematiikkainterventio osa-aikaisessa erityisopetuksessa. *NMI-Bulletin* 21(4), 23–41
- II Väisänen, E. & Aunio, P. (2014). Matematiikkainterventio heikkojen ensiluokkalaisten oppimisen tukena. *Varhaiskasvatuksen tiedelehti JECER* 3(2), 48–75
- III Väisänen, E. & Aunio, P. (2016). Laskemisen sujuvuus toiselta neljännelle luokalle sekä yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. *Psykologia* 51(4), 244–261
- IV Väisänen, E. & Aunio, P. (käsikirjoitus hyväksytty julkaistavaksi). Alakoululaisten laskemisen ja lukemisen sujuvuuden seuranta

Ensimmäinen tutkimusartikkeli pohjautuu Turun yliopistossa tehtyyn kasvatustieteen liseniaattityöhön (2010), jossa ohjaajina olivat professori Marja Vauras ja dosentti Kaarina Merenluoto.

# 1 Johdanto

Matemaattiset taidot, erityisesti laskeminen, vaikuttavat arkielämässä monin tavoin. Koulussa matematiikka on oppiaine, joka herättää voimakkaitakin tunteita ja jossa menestymisellä on merkitystä kouluviihtyvyyden, hyvinvoinnin ja jatko-opiskelun kannalta. Suomalaislasten asenteessa matematiikan opiskelua kohtaan on ollut havaittavissa huolestuttavaa kehitystä: matematiikasta paljon pitävien ja osaamiseensa luottavien oppilaiden määrä on laskenut vuodesta 2011 (Vettenranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro, 2016) ja nuorten kiinnostus matematiikkaa kohtaan jää useita OECD-maita heikommaksi (Kupari & Välijärvi, 2005). Uusimmassa TIMMS-tutkimuksessa havaittiin, että suomalais-ten neljäsluokkalaisten matematiikan osaaminen oli jonkin verran laskenut aiempaan verrattuna ja pojilla osaaminen oli laskenut enemmän kuin tytöillä, erityisesti lukujen ja laskutoimitusten sisältöalueella (Vettenranta ym., 2016). Pitkittäistutkimuksen perusteella matemaattisen osaamistason eriytyminen tapahtuu jo varhaisina kouluvuosina, vaikka näkyikin selvemmin peruskoulun päättövaiheessa ja jatko-opinnoissa (Metsämuuronen & Tuohilampi, 2017). Matemaattisten oppimisvaikeuksien yhteydessä henkilöllä on todettu vaikeuksia koulun lisäksi työelämässä, lisäksi he usein kokevat fyysisen ja psyykkisen hyvinvointinsa suhteellisen heikoksi (Cohen Kadosh, Dowker, Heine, Kaufmann & Kucian, 2013). Suomalais- tutkimuksissa havaittiin, että oppimisvaikeudet koulussa (pojilla erityisesti matematiikan taitoihin liittyen) olivat yhteydessä henkilön kokemaan akateemiseen hyvinvointiin ja ennustivat hänen koulutuspolkuaan, tämän lisäksi ne kasvattivat opintojen keskeyttämisriskiä (Hakkarainen, 2016; Korhonen, 2016). Matemaattisissa taidoissa huomiota olisi kiinnitettävä erityisesti peruslaskutaitoihin, koska ne muodostavat matemaattisen osaamisen perustan (Julin & Rautopuro, 2016).

Matemaattisten taitojen tukemisessa tarvitaan tutkimukseen perustuvaa tietoa sopivista menetelmistä ja käytänteistä. Tutkimusperustainen tuki (*evidence based practice*) tarkoittaa harjoitusmenetelmää, joka on teoreettisesti perusteltu ja sen on luotettavissa tutkimuksissa todettu edistävän merkittävästi lasten oppimista (Björn, Aro & Koponen, 2015; Cook, Tankersley & Landrum, 2013). On ehdotettu, että Suomen kolmiportaiseen tukimalliin voitaisiin esimerkiksi matematiikassa ottaa käyttöön tuen kolmivaihemalli, jonka avulla oppijan saamaa tukea ja siitä hyötymisen arviointia voitaisiin yhtenäistää, vastaavasti kuin RTI-mallissa useissa englanninkielisissä maissa (Björn ym., 2015). Matematiikan tuen kohdentuminen oikeille lapsille sekä tuen vaikuttavuuden arviointi tarvitsevat seurantatutkimusta (Räsänen, Närhi & Aunio, 2010).

Tämän väitöskirjan tavoitteena on tutkia, miten laskemisen sujuvuus alkujaan sujuvuudeltaan erilaisilla lapsilla kehittyy alakoulun aikana ja millainen on las-

kemisen sujuvuuden yhteys lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa. Toisena tavoitteena on tutkia kahden matematiikan harjoitusohjelman vaikuttavuutta matemaattisilta taidoiltaan heikkojen alakoululaisten tukemisessa. Väitöskirjan osatutkimuksissa interventiotutkimukset esitellään ensin, sen jälkeen sujuvuuden seurantatutkimukset. Tämä järjestys perustuu siihen, että interventiotutkimukset herättivät tarpeen seurata lasten laskemisen sujuvuuden muutosta pidempikestoisesti ja laajemmin. Teoreettisen sisällön kannalta on kuitenkin loogisempaa lähteä liikkeelle sujuvuuden kehityksestä ja edetä sen tukemiseen.

## 1.1 Aritmeettiset taidot

Aritmeettiset taidot pitävät laajasti määriteltynä sisällään useita osataitoja kuten numeromerkin, lukusanan ja lukumäärän tunnistaminen ja vertailu, aritmeettisten faktojen hallitseminen ja laskuproseduurien osaaminen sekä aritmeettisten sääntöjen ymmärtäminen (Dowker, 1998, 2015). Aritmeettisten faktojen hallinnalla tarkotetaan yksinkertaisten yhteen- ja vähennyslaskujen (esimerkiksi  $7+8=15$ ) sekä kertotaulujen vastausten osaamista suoraan muistista palauttaen (”ulkoa”). Laskuproseduurien osaamisella tarkoitetaan peruslaskutoimitusten algoritmien käytön hallitsemista (esimerkiksi allekkain laskeminen yhteenlaskussa), joka on tarpeen moninumeroisilla luvuilla laskettaessa. Aritmeettiset säännöt taas liittyvät laskutoimitusten keskinäiseen yhteyteen (esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskun käänteisyys) sekä niitä koskeviin laskusääntöihin (esimerkiksi vaihdannaisuus ja liitännäisyys yhteenlaskussa). Aritmeettisiin taitoihin kuuluu myös taidon soveltaminen sanallisesti esitetyn laskutehtävän (ns. suljettu tehtävä) ymmärtäminen ja oikean laskutoimituksen tai -toimituksien valitseminen sen ratkaisemiseksi (Dowker, 1998). Yksittäisellä aritmeettisellä osataidolla voidaan havaita hierarkkiset kehitysvaiheet. Yksilön kehitys eri osataidoissa voi olla eritahtista ja yksilöjen väliset osaamiserot aritmeettisissä taidoissa suuriakin (Dowker, 1998, 2015). Aritmeettiset taidot tukevat työskentelyä myös ns. avoimissa ongelmatehtävissä, joissa tehtävällä ei ole yhtä oikeaa ratkaisutapaa eikä vastausta (Laine, Näveri, Ahtee & Pehkonen, 2016). Aritmetiikkaan eivät varsinaisesti kuulu esimerkiksi geometria tai algebra, mutta niissäkin aritmetiikkaa käytetään tehtävänratkaisun apuna. Riittävän hyvä (virheetön ja nopea) aritmetiikan hallinta, sujuvuus, tukee muiden matemaattisten taitojen käyttöä, soveltamista ja myös kehitystä (Carr & Alexeev, 2011).

Lapsen kehitys eri matemaattisissa taidoissa (esimerkiksi aritmeettiset taidot, algebrallinen ajattelu, geometria) on erilaista, ja vaikka jossakin olisi vaikeutta voi suoriutuminen toisella taitoalueella olla jopa ikätasoista (Dowker, 2015; Geary, 2004; Jordan, Wylie & Mulhern, 2015). Esi- ja alkuopetusikäisten lasten matemaattiset taidot voidaan jakaa lukumääräisyyden tajuun, laskemisen taitoihin, matemaattisten suhteiden hallintaan sekä aritmeettisiin perustaitoihin (Aunio & Räsänen, 2015, ks. myös Krajewski & Schneider, 2009; Sarama & Cle-

ments, 2009; Wright, Martland & Stafford, 2006). Näiden varhaisten matemaattisten taitojen riittävän hyvä hallinta on tärkeää sekä myöhemmälle aritmetiikan omaksumiselle että matemaattisen ajattelun laajentamiselle esimerkiksi yksinumeroisten kokonaislukujen yhteenlaskusta murto- ja desimaalilukuihin sekä niiden laskutoimituksiin (Bryant, Bryant, Shin & Pfannenstiel, 2014; Koponen, Aunola, Ahonen & Nurmi, 2007; Sarama & Clements, 2009).

### 1.1.1 Aritmeettisten taitojen kehitys

Kouluikäisten lasten aritmeettisten taitojen kehityksestä on toistaiseksi niukemmin tietoa kuin alle kouluikäisten taidoista, ja olemassa oleva tieto kohdentuu pääasiassa yhteen- ja kertolaskuun. Kohtalaisen yksimielisiä ollaan siitä, että aritmetiikan taidoissa konseptuaalisen (käsitteellisen) ja proseduraalisen (menetelmällisen) tiedon hallinta eivät kehity toisiinsa nähden tietyssä järjestyksessä, vaan usein kehitys tapahtuu rinnakkain ja lisäksi matemaattisten strategioiden ja sääntöjen (vaihdannaisuus, liitännäisyys, laskutoimitusten käänteisyys toisilleen) oppiminen tukee laskutaitojen kehitystä (Cowan, 2003; Dowker, 1998; Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007). Lasten väliset kehityserot aritmeettisissä taidoissa ovat suuria (Dowker, 1998, 2015). Gearyn mukaan koulu muokkaa lasten aritmeettisten taitojen kehitystä yhdenmukaisemmaksi, koska käsitteelliset rakenteet muokkautuvat samankaltaisemmiksi (Geary, 1994).

Yksittäisen aritmeettisen osataidon, esimerkiksi yhteen- tai vähennyslaskutaidon, kehittymisessä voidaan havaita hierarkkiset kehitysvaiheet. Taidot kehittyvät yksinumeroisten yhteen- ja vähennyslaskujen ratkaisemisesta aluksi konkreetteja välineitä ja sormia apuna käyttäen kohti kehittyneempiä laskustrategioita ja laskun vastauksen palautusta suoraan muistista (Butterworth, 1999; Carr & Alexeev, 2011; Fuson, 1992; Murata, 2004; Rusanen & Räsänen, 2012; Verschaffel ym., 2007). Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehityksessä on pitkittäistutkimuksessa havaittu olevan muutoskohta parin kouluvuoden jälkeen (noin 7–8 -vuotiaana), jolloin suurin osa lapsista käyttää tärkeimpänä strategiaanaan laskun tuloksen palautusta suoraan muistista (Clarke, Clarke & Horne, 2006). Joidenkin tutkijoiden mukaan kyseessä voi muistista palautuksen (”ulkoa muistamisen”) rinnalla tai tilalla olla tehokas erilaisten strategioiden käyttö (Dowker, 1998; Geary, 2004; Landerl & Kölle, 2009; Price & Ansari, 2013). On epätodennäköistä, että lapsi ilman opetusta omaksuisi kehittyneempiä laskustrategioita yhteenlaskussa (Gaidoschik, 2012; Murata, 2004) tai esimerkiksi kerto-tauluja ja lukujen kerrannaisia (Sherin & Fuson, 2005). Lasten välisten erojen aritmetiikan taidoissa on havaittu olevan suurimmillaan toisella luokalla, sen jälkeen erot kaventuvat mutta säilyvät merkitsevinä ainakin neljännelle luokalle saakka (Paukkeri, Pakarinen, Lerkanen & Poikkeus, 2015).

Dowker on jakanut yhteen- ja vähennyslaskujen oppimisen seuraaviin vaiheisiin: 1) alkava laskutaito, 2) laskujen tulosten osaaminen kymmeneen saakka, 3) yksinkertaiset laskut, 4) kaksinumeroisilla luvuilla laskeminen ilman kymmenylitystä, 5) kaksinumeroisilla luvuilla laskeminen kymmenylityksen kanssa, 6) kolminumeroisilla luvuilla laskeminen. Näistä ensimmäinen ja toinen vaihe saavutettaisiin yleensä seitsemänteen ikävuoteen mennessä, kolmas ja neljäs kahdeksan vuoden ikään mennessä ja viides yhdeksänteen ikävuoteen mennessä. Lasten väliset erot ovat kuitenkin hyvin suuria erityisesti kymmenylityksen hallinnassa (Dowker, 1998). Gaidoschik (2012) on todennut, että mikäli lapsi ensimmäisen luokan puolivälissä käyttää laskun vastauksen löytämisen apuna johtamista toisista laskuista (esimerkiksi ”melkein tuplat”, ”viiden voima”), on todennäköisempää, että hän ensimmäisen luokan lopulla kykenee palauttamaan tuloksen näissä tehtävissä suoraan muistista kuin mikäli hän olisi käyttänyt luokan puolivälissä strategianaan luetellen laskemista.

Algoritmien avulla monimutkainen, useampinumeroisilla luvuilla suoritettava lasku pyritään hajottamaan useaksi helpommaksi osalaskuksi. Algoritmien ”ulkoasu” (lukujen asettelu) voi kuitenkin peittää taustalla olevan matemaattisen ajattelun (erityisesti kerto- ja jakolaskussa), ja laskutoimitus on mahdollista suorittaa mekaanisesti ymmärtämättä sen sisältöä ja esimerkiksi lukujen suuruusluokkaa (Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Verschaffel ym., 2007). Suhteellisen yksimielisiä ollaan siitä, että lasten tulisi oppia laskualgoritmi kuhunkin neljään peruslaskutoimitukseen eli yhteen-, vähennys- kerto ja jakolaskuun (Verschaffel ym., 2007). Algoritmien käytön sujuvuuden kannalta on tarpeellista osata aritmeettiset faktat (esimerkiksi kertotaulut) suoraan muistista palauttamalla (Geary, 2011; Gersten, Jordan & Flojo, 2005).

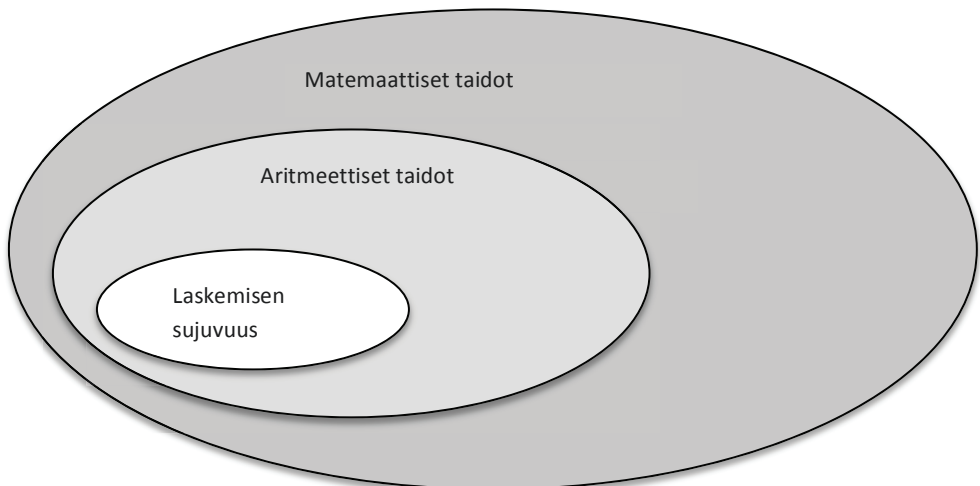
### 1.1.2 Laskemisen sujuvuus

Laskemisella tarkoitetaan usein arkikielessä sekä lukujen luettelemista (1, 2, 3, ...), lukumäärän selvittämistä että laskutehtävän (esimerkiksi yhteenlaskun) tuloksen ratkaisemista. Tässä väitöskirjassa laskemisella viitataan näistä jälkimmäiseen, aritmeettisen laskutehtävän ratkaisemiseen. Sujuvuudella tarkoitetaan laskemisen yhteydessä yleensä laskujen tuloksen antamisen nopeutta (Chong & Siegel, 2008; Hecht, Torgesen, Wagner & Rashotte, 2001; Petrill, Logan, Hart, Vincent, Thompson, Kovas & Plomin, 2012). Nopeutta voidaan arvioida tällöin joko yksittäisen vastauksen antamiseen kuluvana reaktioaikana (esim. Carr & Alexeev, 2011) tai oikeiden vastausten määränä aikarajallisessa testissä (esim. Chong & Siegel, 2008; Koponen ym., 2016; Martin, Cirino, Barnes, Ewing-Cobbs, Fuchs, Stuebing & Fletcher, 2012). Näistä jälkimmäinen on tutkimuksissa yleisempää. Lisäksi eräissä tutkimuksissa on erikseen kiinnitetty huomiota virheiden määrään, laatuun tai molempiin (Carr & Alexeev, 2011; Hakkarainen, Haring, Holopainen, Lappalainen & Mäkihönko, 2014; Mazzocco, Devlin &



McKenney, 2008). Laskemisen sujuvuuden merkitystä korkeammalle matemaatiikalle voidaan verrata fonologisen dekodauksen sujuvuuden merkitykseen luetun ymmärtämiselle (Locuniak & Jordan, 2008). Jotta lapsi kykenee ymmärtämään lukemaansa, on hänellä oltava riittävän hyvä tekninen lukutaito. Jotta lapsi kykenee ratkaisemaan matemaattisia ongelmia, on hänellä oltava riittävän sujuva peruslaskutaito. Tämä riittävän sujuva lasku- tai lukutaito ei kuitenkaan yksin takaa taidon soveltamisen onnistumista. Liiallinen nopeuden korostaminen voi tapahtua asiasisällön ymmärtämisen kustannuksella. Matemaattisessakin osaamisessa on tiedettävä, milloin kannattaa luottaa nopeaan, intuitiiviseen vastaustapaan, milloin taas miettiä asiaa syvällisemmin, hitaammin (ks. Kahnemann, 2012).

**Kuva 1.** Laskemisen sujuvuus suhteessa matemaattisiin taitoihin



Peruslaskutoimitusten sujuvuuden puutetta pidetään yleisesti yhtenä selkeimpänä matemaattisten oppimisvaikeuksien tunnusmerkkinä (Geary, 2004; Hart, Petrill & Thompson, 2010; Mazzocco ym., 2008; Petrill ym., 2012; Vukovic & Siegel, 2010). Laskemisen sujuvuuden kehityksen kannalta olennaisia matemaattisia taitoja ovat pienten lukujen (1–9) aritmeettisten faktojen hallitseminen sekä numeerisen prosessoinnin (esimerkiksi lukujen vertailu ja lukujonotaidot) kyvyt (Landerl, 2014; Locuniak & Jordan, 2008). Jotta laskeminen sujuvoituisi lapsen tulee kyetä esimerkiksi yhteenlaskussa siirtymään hitaista, sormien käyttöön tai lukujen luettelemiseen perustuvista laskutavoista kohti kehittyneempiä strategioita ja vastausten tai osavastausten palautusta suoraan muistista (Fuson, 1992; Geary, 2004, 2011; Gersten ym., 2005). Alakouluikäisillä kaksosilla tehdyssä

tutkimuksessa laskemisen sujuvuuden havaittiin olevan aikarajoittamattomasta matematiikan osaamisesta erillinen matemaattinen osataito, jolla saattaa olla geneettistä taustaa (Petrill ym., 2012).

Laskemisen sujuvuuden on todettu olevan yhteydessä myöhempään yleiseen matemaattiseen osaamiseen (Geary, 2011), joskin yksittäisen lapsen kehitys laskemisen sujuvuudessa ja muissa matematiikan osa-alueissa, esimerkiksi sanallisissa tehtävissä, voi olla hyvin erilaista (Dowker, 1998; Jordan, Mulhern & Wylie, 2009). Useissa tutkimuksissa on todettu, että matematiikassa hyvin heikkojen alakouluikäisten taitotaso pysyy joko suhteellisen stabiilina muihin nähden tai jää heistä jopa yhä enemmän jälkeen (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Branum-Martin, Fletcher & Stuebing, 2012; Geary, Hoard, Nugent & Bailey, 2012; Petrill ym., 2012). Mikäli lapsen laskemisen sujuvuus ei ole ollut hyvin heikkoa (heikoin 25%), hän usein hitaasti saavuttaa sujuvuudessa muiden tasoa (Geary ym., 2012). Seurantatutkimuksessa havaittiin, että lasten väliset erot pienenevät toiselta neljännelle luokalle, joskin säilyivät edelleen merkitsevinä (Paukkeri ym., 2015).

Pelkkä aritmeettisten faktojen osaaminen eri riitä, vaan lapsen on myös ymmärrettävä laskusuoritukseen liittyvä matemaattinen sisältö kyetäkseen soveltaamaan opittua taitoa uusiin tilanteisiin (Cowan, 2003). Esimerkiksi laskutaidon kehittyminen sujuvaksi yksinumeroisilla luvuilla laskemisesta eteenpäin niin, että se on sujuvaa myös algoritmien avulla laskettaessa (proseduraalinen tieto eli menetelmien osaaminen) vaatii, että lapsella on ymmärrys kymmenjärjestelmästä eli numeroiden paikan merkityksestä luvun suuruusluokalle (konseptuaalinen eli käsitteellinen tieto) (Verschaffel ym., 2007). Usein vaikeudet hallita yksinumeroisten lukujen aritmeettisiä faktoja (yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 1–20 ja kertotaulut) ennakoivat pysyviä vaikeuksia matematiikan oppimisessa (Gersten ym., 2005; Vukovic & Siegel, 2010), ja tämä voi näkyä hankaluuksina esimerkiksi jakolaskun ymmärtämisessä ja ongelmanratkaisussa. Moninumeroisilla kokonaisluvuilla laskemisen sujuvoituminen kestää useita vuosia ja vaatii laskualgoritmien käytön hallintaa (Rittle-Johnson & Siegler, 1998; Verschaffel ym., 2007). Hyvä kymmenjärjestelmän rakenteen ymmärtäminen tukee laskemisen sujuvuutta kokonaislukujen lisäksi myös desimaaliluvuilla (Verschaffel ym., 2007).

Laskemisen sujumattomuus vaikuttaa tutkimusten valossa pysyvämmältä kuin laskualgoritmien osaamattomuus. Chong ja Siegel (2008) tutkivat algoritmien käytön (allekkain tai jakokulmassa ratkaistuja laskuja rajoittamattomassa ajassa) ja aritmeettisten yhdistelmien (aikarajattuja yhteen-, vähennys- ja kertolaskuja) hallinnan kehitystä toiselta viidennelle luokalle. Tutkimuksessa lapset, jotka toisella luokalla kuuluivat heikoimpaan neljännekseen algoritmien käytössä, saavuttivat tässä taidossa alkujaan tavanomaisesti suoriutuneita. Sen sijaan lapset, jotka toisella luokalla kuuluivat heikoimpaan neljännekseen aritmeettisten yhdistelmien sujuvuudessa, eivät saavuttaneet tavanomaisesti suoriutuvia

tässä taidossa, vaan ero lasten välillä kasvoi (Chong & Siegel, 2008). Sujuvuus on myös yksi, muttei ainoa, selittäjä algoritmien hallinnalle (Fuchs ym., 2006; Gersten ym., 2005).

### 1.1.3 Matemaattisissa taidoissa heikkojen osaajien piirteitä

Matemaattisten vaikeuksien ulospäin näkyvänä piirteenä pidetään yleisesti laskemisen hitautta, työläyttä ja virheellisuutta vielä muutaman kouluvuoden jälkeenkin (Geary, 2013; Gersten ym., 2005; Karagiannakis, Baccaglioni-Frank & Papadatos, 2014; Mazzocco ym., 2008; Mazzocco & Räsänen, 2013; Price & Ansari, 2013; Robinson, Menchetti & Torgesen, 2002; Vukovic & Siegel, 2010). Niihin voi olla ainakin kaksi syytä: suoraan muistista palautettavien aritmeettisten faktojen vähäinen määrä tai kehittymättömät laskustrategiat (Geary, 2004, 2013; Geary ym., 2012; Gersten ym., 2005; Jordan, Hanich & Kaplan, 2003; Landerl & Kölle, 2009; Price & Ansari, 2013; Rusanen & Räsänen, 2012). Ulkoa muistettujen faktojen niukkuuteen voivat vaikuttaa esimerkiksi numeerisen prosessoinnin hitaus sekä virheellisen tiedon inhibointiin tai säilömuistiin liittyvät vaikeudet (Geary 2011, 2013; Jordan ym., 2003; Landerl & Kölle, 2009). Ikätasoon nähden kehittymättömissä strategioissa lapsi käyttää esimerkiksi sormiaan tai ikäistään selvästi nuoremmille tyypillisiä strategioita laskun ratkaisemisessa (Gersten ym., 2005; Price & Ansari, 2013; Rusanen & Räsänen, 2012). Opettajien mainitsemina matemaattisissa taidoissa heikkojen osaajien piirteinä korostuvat sanallisesti esitettyjen ja moniosaisten tehtävien ratkaisemisen vaikeudet (Bryant, Bryant & Hammill, 2000).

Heikon suoriutumisen raja on eri tutkimuksissa vaihdellut heikoimmasta kymmenestä prosentista heikoimpaan 35 prosenttiin (Price & Ansari, 2013). Heikkoja suorituksia pitäisi olla vähintään kahdelta eri mittauskerralta ennen kuin taitojen puutteista voidaan olla kohtalaisen varmoja, koska lasten normaalisakin kehityksessä on suurta vaihtelua (Geary, 2013; Price & Ansari, 2013). Oppimisvaikeuden riski (*at-risk*) on lapsilla, jotka kuuluvat ikäryhmänsä heikoimpaan 35 prosenttiin (Geary, 2013). Heillä tämän riskin taustalla voi olla useita ympäristöön, esimerkiksi koti- tai koulutilanteeseen, liittyviä tekijöitä, mutta muuten he eivät välttämättä eroa tavanomaisesti suoriutuvista lapsista (Mazzocco, 2005). Yleisimmin heikon suoriutumisen rajana pidetään standardoiduissa matemaattisia taitoja mittaavissa testeissä testitulosten perusteella heikoimpaan neljännekseen jäävää suoriutumista vähintään kahdella mittauskerralla (Geary, 2013; Mazzocco & Thompson, 2005; Stock, Desoete & Royers, 2010; Vukovic & Siegel, 2010). Lapset, joiden suoriutuminen jää heikoimpaan 11–25 prosenttiin (*LA, MD, math disabilities*), eroavat tavanomaisesti suoriutuvista edellistä ryhmää selvemmin määrällisen osaamisensa puolesta ja heillä heikon suoriutumisen taustalla voi aiemmin mainittujen sosiaalisten ja kouluun

liittyvien syiden lisäksi olla useita tekijöitä kuten vaikeuksia esimerkiksi työmuistissa (Chong & Siegel, 2008) tai kielellisissä taidoissa (Desoete, 2015).

Vielä tätäkin ryhmää heikommin matemaattisissa tehtävissä suoriutuvista lapsista ainakin osalla vaikeutta voidaan pitää pysyvänä, neurologispohjaisena dyskalkuliana (*DD, MLD, mathematical learning difficulties, math difficulties*) eli laskemiskyvyn häiriönä, jonka esiintyvyys on noin kolmesta kuuteen prosenttiin väestöstä (Desoete, Ceulemans, DeWeerd & Pieters, 2012; Geary, 2013; Mazzocco, 2005; Mazzocco & Räsänen, 2013; Price & Ansari, 2013). Dyskalkuliassa vaikeus näkyy erityisesti aritmetiikan perustaitojen heikkoutena huolimatta normaalista älykkyydestä ja asianmukaisesta opetuksesta (ICD-10: Terveysten- ja hyvinvoinnin laitos, 2011). Sen taustalla on vaikeuksia lukumäärän havaitsemisessa ja tunnistamisessa (Chu, vanMarle & Geary, 2013; Price & Ansari, 2013) sekä numeerisen tiedon prosessoinnissa (De Smedt & Gilmore, 2011).

Matemaattisissa taidoissa heikkojen lasten ryhmäpiirteet vaihtelevat sen mukaan, mikä asetetaan heikkouden rajaksi (Mazzocco & Thompson, 2005), mutta kehityksen ei yleensä katsota eroavan tavanomaisesti kehittyvien linjasta, se tapahtuu vain hitaammin (Geary, 2013; Landerl & Kölle, 2009; Verschaffel ym., 2007). Osa tutkijoista pitää eroa heikkojen osajien ja dyskalkulian kriteerit täyttävien lasten välillä myös laadullisena (Butterworth, 2005; Desoete ym., 2012). Heidän mukaansa vaikeudet lukumäärien hahmottamisessa ovat dyskalkuliassa niin merkittäviä ja pysyviä, ettei eroa voi pitää pelkästään hitaammasta kehityksestä johtuvana. Heikkojen osajien ero tavanomaisesti suoriutuviin lapsiin sen sijaan vaikuttaa nimenomaan hitaammalta kehitykseltä. Heillä päiväkotiyksikössä todettu ero lukumäärien hahmottamisessa hävisi toiselle luokalle tultaessa, eikä eroa alunperinkään ollut lukusanojen ja numeromerkkien osalta (Desoete ym., 2012).

Kaikkia edellä mainittuja matemaattisissa taidoissa heikosti suoriutuvien lasten ryhmiä yhdistävänä piirteenä pidetään aritmeettisten taitojen heikkoa sujuvuutta. Muutamissa tutkimuksissa on tarkasteltu erilaisten oppimisvaikeuksien yhteydessä esiintyviä kognitiivisia ja akateemisia profiileja ja etsitty niistä yhtäläisyyksiä tai eroja (Cirino, Fuchs, Elias, Powell & Schumacher, 2015; Compton, Fuchs, Fuchs, Lambert & Hamlett, 2012). Comptonin ryhmän seuranta-tutkimuksessa lasten lukemisen ja laskemisen taitoja seurattiin kolmannelta viidennelle luokalle. Alkujaan laskutaidossa heikoimpaan 15:een prosenttiin kuuluvien lasten kognitiivinen profiili ei eronnut tavanomaisesti suoriutuvien profiilista esimerkiksi työmuistin tai kielellisten taitojen osalta, toisin kuin lukemisessa heikkojen lasten kognitiivinen profiili. Akateemisissa taidoissa lapsilla, joiden laskutaito oli heikko, oli vahvuuksia lukemiseen liittyvissä taidoissa (esimerkiksi luetun ymmärtämisessä) ja lukutaidoltaan heikoilla lapsilla oli puolestaan vahvuuksia laskemisessa, joten tutkimukset puolsivat näiden oppimisvaikeuksien spesifisyyttä (Compton ym., 2012).

Ensimmäisen luokan oppilaisiin kohdistuvassa tutkimuksessa selvitettiin erilaisiin oppimisvaikeuksiin (spesifi vs. päällekkäiset lukemiseen ja matematiikkaan liittyvät vaikeudet) liittyviä kognitiivisia profiileja sekä lisäksi erilaisia matemaattisia taitoja (Cirino ym., 2015). Oppimisvaikeuden raja-arvona tutkimuksessa pidettiin lapsen tulokset jäämistä heikoimpaan 25 prosenttiin joko lukemisen tai matemaattisten taitojen mittauksissa. Matemaattisten taitojen osalta tarkastelussa käytettiin myös tiukempaa raja-arvoa, heikointa kymmentä prosenttia. Lapsilla, joilla oli vaikeuksia pelkästään matemaattisissa taidoissa, suoritustaprofiili oli tasainen ilman erityisiä vahvuuksia tai heikkouksia. Lukemisessa heikoilla lapsilla oli vahvuuksia prosessointinopeudessa ja ei-kielellisessä päätteilyssä, mutta heikkouksia kielellisten taitojen tuloksissa ja jossain määrin myös työmuistissa. Lapsilla, joilla oli vaikeuksia sekä matemaattisissa taidoissa että lukemisessa, oli heikkouksia fonologisessa tietoisuudessa sekä nopeassa nimeämisessä. Tämä erotti heidät pelkästään matemaattisissa tehtävissä heikosti suoriutuneista lapsista. Kuitenkin kun sama vertailu tehtiin käyttäen tiukempaa matemaattisten taitojen raja-arvoa (heikoin 10 %), pelkästään matemaattisissa tai sekä matemaattisissa taidoissa että lukemisessa heikkojen ryhmän välillä ei ollut eroa kognitiivisten suoritusten profiileissa (Cirino ym., 2015).

## 1.2 Matemaattisten taitojen yhteydet muihin tekijöihin

Lasten matemaattisten taitojen kehityksen eroihin vaikuttavat varhaisten matemaattisten taitojen (mm. matemaattisten suhteiden ymmärtäminen ja non-verbaali lukumäärän hahmottaminen, ks. esim. Aunio & Räsänen, 2015) lisäksi useat tekijät kuten yleiset kognitiiviset kyvyt, neurologiset tekijät, kielelliset ja motoriset taidot, sosiaaliset tekijät sekä lapsen saama opetus ja sen perustana oleva opetussuunnitelma (Cragg & Gilmore, 2014, Desoete, 2015; Geary, 2013; Jordan ym., 2015; Landerl, 2014). Esimerkiksi alle kouluikäisten lasten spontaani huomion kiinnittäminen lukumääriin (SFON) oli yhteydessä aritmeettisiin taitoihin toisella luokalla (Hannula, Lepola & Lehtinen, 2010). Aritmetiikan vaikeuksien yhteydessä lapsilla havaitaan varsin usein vaikeuksia myös lukemisessa, tarkkaavuudessa, motoriikassa tai visuo-spatiaalisessa työmuistissa (Landerl, 2014; LeFevre, Berrigan, Vendetti, Kamawar, Bisanz, Skwarchuk & Smith-Chant, 2013; Li & Geary, 2013). Erityisesti laskemisen sujuvuutta ja sen kehitystä on selitetty aiemman matemaattisen osaamisen lisäksi yleisellä älykkyydellä (Dowker, 1998; Geary, 2011; Ramos-Christian, Schleser & Varn, 2008), kielellisillä taidoilla (Desoete, 2015; Donlan, 1998), työmuistilla (Branum-Martin ym., 2012; Chong & Siegel, 2008; Cragg & Gilmore, 2014; Geary, 2008; Kyttä-lä, 2008; Locuniak & Jordan, 2008; Price & Ansari, 2013) ja tarkkaavuudella (Branum-Martin ym., 2012; Fuchs, Compton, Fuchs, Paulsen, Bryant & Hamlett, 2005; Fuchs ym., 2006).

### 1.2.1 Lukemisen sujuvuus

Lapsen matemaattisten ja kielellisten taitojen, suppeammin lukutaidon, välinen yhteys on ollut esillä monissa tutkimuksissa, mutta vain osassa laskemisen sujuvuus on ollut erityisenä tarkastelukohteena. Locuniak ja Jordan (2008) vertasivat laskemisen sujuvuutta matematiikassa dekodauksen sujuvuuteen lukemisessa. Samalla tavoin kuin dekodauksen sujuvuudella (äänteiden ja tavujen tunnistamisen ja yhdistämisen automatisoituminen) on merkitystä luetun ymmärtämiselle on laskemisen sujuvuudella merkitystä laajemmin matematiikan oppimiselle (Locuniak & Jordan, 2008). On esitetty, että suuri osa perinnöllisistä tekijöistä, jotka vaikuttavat lapsen matemaattiseen osaamiseen, olisi yhteisiä lukutaitoon vaikuttavien tekijöiden kanssa (Geary, 2013; Kovas, Haworth, Harlaar, Petrill, Dale & Plomin, 2007). Mikäli lapsella on lukemiseen tai laajemmin kieleen liittyviä vaikeuksia, aritmeettisten taitojen kehitys on usein hitaampaa kuin pelkästään matemaattisten vaikeuksien yhteydessä (Geary, 2004; Jordan, Kaplan & Hanich, 2002; Vukovic & Siegel, 2010). Alle kouluikäisenä arvioidun fonologisen tietoisuuden on todettu selittävän sekä lukemisen että laskemisen sujuvuutta kouluiässä (Barnes, Raghobar, English, Williams, Taylor & Landry, 2014). Molempien taitojen sujuvuudella on kaksostutkimuksessa (Hart ym., 2010) havaittu yhteisiä (geneettisiä) taustatekijöitä, joskin jatkotutkimuksen perusteella laskemisen sujuvuus liittyisi lähemmin yleiseen matemaattiseen osaamiseen (Petrill ym., 2012).

Toiselta kolmannelle luokalle jatkuneessa seurantatutkimuksessa sanojen lukusujuvuus ja lausetasoinen ymmärtäminen selittivät aritmeettisten taitojen (laskutaito ja sanalliset tehtävät) kehitystä ja lapset, joilla oli päällekkäisiä lukemisen ja matemaattisten taitojen oppimisvaikeuksia, kehittivät matematiikan osaamisessaan kaikkein hitaimmin (Jordan ym., 2002). Branum-Martinin ja kollegojen tutkimuksessa (2012) merkityksellisten sanojen lukusujuvuus selitti kolmas- ja neljäsluokkalaisten laskemisen sujuvuutta (Branum-Martin ym., 2012). Toisissa tutkimuksissa merkityksellisten sanojen lukemisen sujuvuus on kuitenkin selittänyt ainoastaan sanallisesti esitettyjen laskutehtävien ratkaisutaitoa, ei laskemisen sujuvuutta (Fuchs ym., 2006; Geary, 2011). Epäsanojen lukemisen sujuvuudella on kyetty selittämään sekä laskemisen sujuvuutta että sujuvuuden kehitystä alakouluiässä (Chong & Siegel, 2008; Fuchs ym., 2006; Vukovic & Siegel, 2010). Seurantatutkimuksessa toiselta viidennelle luokalle merkityksellisten ja epäsanon lukusujuvuus yhdessä lausetasoinen ymmärtäminen kanssa selittivät laskemisen sujuvuuden kehitystä, mutta lukutaidon selityskyky pieneni merkittävästi, kun fonologisen prosessoinnin vaikutus kontrolloitiin (Hecht ym., 2001).

Vaikka laskemisen ja lukemisen sujuvuuden vaihtelulla on havaittu yhteyksiä ja yhteisiä tekijöitä (Geary, 2011; Koponen, Aunola ym., 2007), voi lapsen laskemisen sujuvuus olla heikkoa sujuvasta lukutaidosta huolimatta (Jordan ym., 2003; Landerl, Fussenegger, Moll & Willburger, 2009). Esimerkiksi lukutaidon

sujuvuuden kyky selittää myöhempää laskemisen sujuvuutta heikkeni, kun fonologisen prosessoinnin (Hecht ym., 2001) tai työmuistin (Locuniak & Jordan, 2008) vaikutus kontrolloitiin. On esitetty oletus, että päällekkäisissä lukemisen ja matemaattisten taitojen vaikeuksissa kyse olisikin lähinnä fonologisen prosessoinnin heikkouksista, sen sijaan pelkissä matemaattisissa oppimisvaikeuksissa ongelmat liittyisivät lukumäärien erojen havaitsemiseen ja ymmärtämiseen (Fuchs, Fuchs & Compton, 2012; Robinson ym., 2002).

### 1.2.2 Nimeämisnopeus

Nimeämisnopeuden (eli kyvyn nopeasti nimetä sarjallisesti esitettyjä tuttuja visuaalisia ärsykeitä) yhteys lukutaidon kanssa on todennettu useasti (Georgiou & Parrila, 2013; Heikkilä, Närhi, Aro & Ahonen, 2009; Heikkilä, Torppa, Aro, Närhi & Ahonen, 2015; Koponen, Salmi, Eklund & Aro, 2012; Willburger, Fussenegger, Moll, Wood & Landerl, 2008). Kansainväliset tutkimukset ovat osoittaneet, että nimeämisnopeudella olisi yhteyttä myös matemaattisten taitojen kanssa. Sekä yksittäisissä tutkimuksissa (Geary ym., 2012; Vukovic & Siegel, 2010) että meta-analyysissä (Shin & Bryant, 2015) on todettu, että lapset, joilla oli selvää vaikeutta matemaattisissa taidoissa, olivat nimeämisnopeudeltaan hitaampia kuin matemaattisissa taidoissa tavanomaisesti suoriutuvat lapset. Kun seurattiin nimeämisnopeuden muutosta päiväkotiyästä kahdeksannelle luokalle, havaittiin päiväkotiyässä matemaattisilta taidoiltaan kaikkein heikoimpien (heikoin 10 %) lasten kirjainten ja värien nimeämisnopeuden pysyvän koko seuranta-ajan hitaampana kuin matemaattisilta taidoiltaan tavanomaisilla lapsilla (Mazzocco & Grimm, 2013). Samassa tutkimuksessa todettiin, että tavanomaisesti tai vain hieman keskitasoa heikommin (heikoin 25 %) matemaattisissa tehtävissä suoriutuneiden lasten nimeämisen hitaus säilyi ainoastaan värien osalta. Nimeämisnopeudella on todettu olevan yhteyttä lapsen laskemisen sujuvuuden (Koponen, Aunola ym., 2007; Koponen ym., 2016) sekä erityisesti heikkojen laskijoiden laskusujuvuuden kehityksen kanssa (Chong & Siegel, 2008; Fuchs ym., 2005; Geary ym., 2012). Lapsilla, joilla on kielellisiä vaikeuksia, on nimeämisnopeuden havaittu olevan yhteydessä kykyyn palauttaa nopeasti mieleen aritmeettisiä faktoja (Koponen, Aro, Räsänen & Ahonen, 2007).

Nimeämisnopeuden ja matemaattisten taitojen yhteyttä arvioitaessa on tutkimuksissa käytetty kummassakin mitattavassa kohteessa osin erilaisia mittaustapoja. Joissakin tutkimuksissa on nimeämisnopeuden arvioinnissa käytetty vain yksittäistä osatehtävää, esimerkiksi esineiden (Koponen, Aunola ym., 2007) tai numeroiden (Landerl ym., 2009; Vukovic & Siegel, 2010) nimeämistä, toisissa taas useampaa osatehtävää (Heikkilä ym., 2009; Heikkilä ym., 2015; Mazzocco & Grimm, 2013). On myös tutkimuksia, joissa pienten lukumäärien (1–4) nopeaa nimeämistä on käytetty yhtenä osatestinä (Willburger ym., 2008), samoin lukumäärien ja numeromerkkien nimeämistä (Krajewski & Schneider, 2009).

Matemaattisia taitoja arvioivissa mittareissa on laskemisen sujuvuus yleisesti ollut osana (esim. Chong & Siegel, 2008; Fuchs ym., 2005; Vukovic & Siegel, 2010; Willburger ym., 2008), mutta tuloksia tarkasteltaessa se on voitu sisällyttää yleiseen matemaattiseen osaamiseen (esim. Georgiou, Tziraki, Manolitis & Fella, 2013). Tällöin nimeämisnopeuden yhteyttä erityisesti laskemisen sujuvuuden kanssa on vaikea arvioida.

Erilaiset nimeämisnopeuden ja matemaattisten taitojen mittaustavat ovat voineet vaikuttaa siihen, että saadut tulokset niiden keskinäisestä yhteydestä ovat jossain määrin ristiriitaisia. Willburgerin ja kollegojen tutkimuksessa nimeämisnopeus oli hidasta sekä dysleksian että dyskalkulian yhteydessä; dyskalkuliassa erityisesti lukumäärien nopea nimeäminen (Willburger ym., 2008). Joissakin tutkimuksissa taas nimeämisen hitaus ei ole liittynyt matemaattisiin oppimisvaikeuksiin (Heikkilä ym., 2015; Landerl ym., 2009). Matemaattisten vaikeuksien yhteydessä havaittu nimeämisnopeuden hitaus voikin liittyä tutkimuksessa huomiotta jääneeseen lukemisen vaikeuteen (Willburger ym., 2008), koska nimeämisnopeuden on todettu olevan erityisen hidasta lapsilla, joilla on vaikeuksia sekä lukemisessa että matemaattisissa taidoissa (Cirino ym., 2015; Heikkilä ym., 2009; Landerl ym., 2009; Willburger ym., 2008). Desoeten (2015) mukaan matematiikan vaikeuksien yhteydessä vain lukumäärien nopeassa nimeämisessä olisi hitautta. Tämä sopisi yhteen matemaattisiin oppimisvaikeuksiin yleisesti liitettyjen lukumäärien havaitsemisen ja käsittämisen vaikeuksien kanssa (Fuchs ym., 2012; Robinson ym., 2002).

On myös mahdollista, että nimeämisnopeuden ja matemaattisten taitojen kehityksen yhteys ajoittuu lähinnä koulun alkuvaiheeseen (Gersten ym., 2005; Hecht ym., 2001; kuitenkin Mazzocco & Grimm, 2013) tai varhaisiin matemaattisiin taitoihin (Krajewski & Schneider, 2009). Vaikka lukemisen ja nimeämisnopeuden yhteys on vahvistettu useasti (esim. Heikkilä ym., 2015), ei yhteyttä välttämättä ole havaittu matemaattisen osaamisen ja nimeämisnopeuden välillä (esim. Heikkilä ym., 2015; Landerl ym., 2009). Nimeämisnopeuden ja matemaattisten taitojen välillä havaittuun yhteyteen onkin joskus todettu liittyvän muita tekijöitä, kuten koulunalkuvaiheessa työmuisti tai prosessointinopeus (Georgiou, Tziraki ym., 2013) sekä myöhempinä kouluvuosina päällekkäiset oppimisvaikeudet (Heikkilä ym., 2009).

### **1.2.3 Muita taustatekijöitä**

Vanhempien koulutuksen on yhdessä nimeämisnopeuden ja lukujen luettelutaidon kanssa todettu selittävän moninumeroisilla luvuilla laskemista (Koponen, Aunola ym., 2007). Lisäksi vanhempien koulutuksella on (yhdessä perheen tulotason kanssa) havaittu yhteyttä matemaattisten taitojen kehittymisen kanssa (Jordan ym., 2002; Morgan, Farkas & Wu, 2009). Vanhempien koulutustaustan merkitys lasten koulusuoriutumisen vaihtelulle oli suomalaistutkimuksessa mel-



ko vähäinen (Räsänen & Närhi, 2014). Sen vaikutus saattaa kuitenkin olla kasvussa (Hautamäki, Kupiainen, Marjanen, Vainikainen & Hotulainen, 2013; Vettenranta ym., 2016). Tyttöjen ja poikien välillä ei ole havaittu eri aineistoissa olevan pysyvää systemaattista vaihtelua matemaattisten taitojen kehityksessä (Aunola ym., 2004; Jordan ym., 2002; Metsämuuronen, 2010) tai matemaattisessa osaamisessa (Butterworth, 2005; Dowker, 1998; Paukkeri ym., 2015). Peruskoulun päättövaiheessa poikien päässälaskutaidon on todettu olevan parempaa kuin tytöillä (Hirvonen, 2012), mutta poikien osaamistaso on heikentynyt tyttöjä enemmän ja uusimmassa TIMMS-tutkimuksessa neljäsluokkalaisten tyttöjen matematiikan osaaminen oli parempaa kuin poikien (Vettenranta ym., 2016).

### **1.3 Heikkojen osaajien oppimisen tukeminen matematiikassa**

Parhaiten lasten matemaattista osaamista voidaan tehostaa tehostamalla koko opetusryhmälle tarjottua opetusta (Dennis, Sharp, Chovanes, Thomas, Burns, Custer & Park, 2016). Usein se ei kuitenkaan ole riittävä keino tukemaan heikkoja osaajia. Heikkoja osaajia voidaan tukea esimerkiksi erilaisilla interventioilla. Niillä tarkoitetaan tässä tutkimuksessa systemaattista aikarajoitteista harjoittelujaksoa, jossa tavoitteena on vaikuttaa lapsen oppimisessa havaitun epäsuotuisan kehityksen kääntämiseen suotuisaksi käyttäen esimerkiksi tiettyä harjoitusohjelmaa. Meta-analyysien mukaan matematiikan taitojen tukemiseksi toteutuilla interventioilla on yleensä kyetty vaikuttamaan positiivisesti lasten, erityisesti matemaattisesti heikkojen alakoululaisten, suoriutumiseen (Baker, Gersten & Lee, 2002; Chodura, Kuhn & Holling, 2015; Dennis ym., 2016; Gersten, Chard, Jayanthi, Baker, Morphy & Flojo, 2009; Kunsch, Jitendra & Sood, 2007; Slavin & Lake, 2008). Interventiossa käytetyn menetelmän tehokkuuteen vaikuttavan yksittäisen tekijän löytäminen on kuitenkin vaikeaa, koska useimmissa on käytössä monia toisiaan tukevia menettelytapoja (esimerkiksi opettajan eksplisiittinen opetus ja oppilaan kannustaminen ajattelemaan tehtävänratkaisuaan ääneen). Meta-analyysissä on voitu keskittyä erityisesti yksilöopetuksen (Coding, Burns & Lukito, 2011) tai vertaisoppimisen (Kunsch ym., 2007) tehokkuuden arviointiin. Tuloksissa on myös jossain määrin eroja sen perusteella, onko kyseessä ollut erityisesti heikoille osaajille suunnatun harjoitusjakson (Chodura ym., 2015; Dennis ym., 2016; Gersten, Chard ym., 2009) vai kaikille (myös heikoille osaajille) yhteisesti suunnatun opetuksen tehokkuuteen vaikuttavien tekijöiden arviointi (Slavin & Lake, 2008).

### 1.3.1 Tehokkaan opetuksen piirteitä

Hyvin suunnitellussa opetuksessa sisällöt etenevät systemaattisesti vaikeutuen, matemaattisten käsitteiden käyttö on täsmällistä, kertausta on riittävästi ja oppituntien rakenne on selkeä (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008; Fuchs, Fuchs, Powell, Seethaler, Cirino & Fletcher, 2008; Kucian & von Aster, 2015). Erityisesti heikoille osaajille suunnatuissa matemaattisten taitojen harjoitusohjelmissa tehokkuutta lisäävinä piirteinä ovat eksplisiittinen opetus ja havainnollistusvälineiden systemaattinen käyttö opetuksen tukena, riittävän harjoittelumäärän tarjoaminen sekä lapsen osaamisen systemaattinen seuranta (Chodura ym., 2015; Dennis ym., 2016; Fuchs & Fuchs, 2001; Fuchs ym., 2008; Gersten, Beckman, Clarke, Foegen, Marsh, Star & Witzel, 2009; Gersten, Chard ym., 2009; Hunt, Valentine, Bryant, Pfannenstiel & Bryant, 2016; Kroesbergen & Van Luit, 2003). Osin erilaisiin tuloksiin tehokkaimmista opetusmenetelmistä vaikuttaa se, ajatellaanko hyötyä heikon (heikoin 11–25 %) vai erittäin heikon (heikoin 10 %) osaajan kannalta (Chodura ym., 2015). Erityisesti kaikkein heikoimpien lasten opetuksessa eksplisiittinen yksilöopetus (Chodura ym., 2015; Kroesbergen & Van Luit, 2003) havainnollistuvälineitä käyttäen (Gersten, Chard ym., 2009) on tehokkainta.

Eksplisiittisessä opetuksessa opettajalla on keskeinen rooli, kun opetetaan uutta asiaa tai menettelytapaa. Lapsella on kuitenkin jatkuvasti aktiivinen rooli omassa oppimisessaan. Opettaja mallintaa opittavat käsitteet ja menettelytavat (yhdistää asian konseptuaalisen eli käsitteellisen ja proseduraalisen eli menetelmällisen puolen), esimerkiksi kymmenylityksen yhteenlaskussa, ajatellen ääneen sekä mahdollisesti käyttäen apuna visuaalista tukea. Tämän jälkeen lapsi harjoittelee opetettua asiaa annetun mallin mukaan (Dennis ym., 2016; Fuchs & Fuchs, 2001; Haapasalo, 2004; Hattie, 2012; Kroesbergen & Van Luit, 2003). Opettaja varmistaa, että oppijalla on mahdollisuus harjoitella opittua menetelmää riittävästi useissa tilanteissa, ensin opettajan ohjaamana, sitten yhä itsenäisemmin ja uusiin tilanteisiin soveltaen (Bryant ym., 2014; Hattie, 2012). Eksplisiittiseen opetukseen voidaan liittää oppijoiden kannustaminen ääneenajatteluun tehtävän-suorituksen aikana tai esimerkiksi parityö opitun asian harjoitteluvaiheessa (Fuchs, Fuchs, Hamlett & Appleton, 2002; Gersten, Beckman ym., 2009). Myös ongelmakeskeinen lähestymistapa voidaan yhdistää tähän, esimerkiksi ennen uuden asiasisällön eksplisiittistä opetusta (DeCaro & Rittle-Johnson, 2012). Tästä voi olla hyötyä erityisesti oppijan sisäisen motivaation herättämisessä. Eksplisiittiseen opetukseen kuuluvan mallien mukaisen toiminnan lisäksi lapsia pitää opettaa käyttämään erilaisia ratkaisustrategioita (Bryant ym., 2000; Gersten ym., 2005; Koponen, 2008; Robinson ym., 2002; Torbeyns, Verschaffel & Ghesquiére, 2004; Tournaki, 2003). Kun lapsi osaa useampia strategioita tehtävän ratkaisemiseksi, hän kykenee varmistamaan toista strategiaa käyttäen tuloksen, josta on epävarma (Geary, 1994).

Havainnollistusvälineiden käytöllä opittavaa sisältöä voidaan tehdä konkreettisemmaksi, mutta niiden valinnassa ja eri välineiden määrässä on huomioitava selkeys ja johdonmukaisuus (Fuchs, Fuchs & Hollenbeck, 2007; Gersten, Beckman ym., 2009; Kroesbergen & Van Luit, 2003). Joissakin tilanteissa havainnollistuksen eteneminen konkreettisesta välineestä semi-konkreettiin (esimerkiksi viivakuvio) kautta abstraktiin numeeriseen muotoon voi olla hyvä ratkaisu, joissakin opetustilanteissa kaikkia vaiheita ei ehkä tarvita. Yksi väline voi olla paras tapa havainnollistaa tiettyä matemaattista asiaa, toisen havainnollistamiseen sopii paremmin joku toinen (Witzel, Mink & Riccomini, 2011). Opettajan on, lapsen vaikeudet ja opittava sisältö huomioiden, valittava juuri kyseiseen opetustilanteeseen sopivimmat välineet tai muut havainnollistustavat (Witzel ym., 2011). Havainnollistamista siihen valituin välinein on jatkettava riittävän pitkään ja niin, että myös lapsella olisi mahdollisuus käyttää samoja välineitä (Bryant, Roberts, Bryant, DiAndreth-Elkins, 2011). Lisäksi konkreettisten havainnollistusvälineiden, havainnollistavien kuvien ja abstraktin matemaattisen käsitteen välinen yhteys pitää tuoda kyllin selvästi esille (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008; Frye, Baroody, Burchinal, Carver, Jordan & McDowell, 2013; Kaufmann, Handl & Thöny, 2003; Laine & Huhtala, 2003).

Riittävän harjoittelumäärän takaamiseksi erilaiset, vaihtelevat opetustavat ja työskentelymuodot ovat tarpeen. Heikkojen lasten tueksi toteutetuissa interventiotutkimuksissa ovat sekä pienryhmä- että yksilöopetus olleet tehokkaita, mutta positiivista vaikutusta oppimisen tehostumiseen on ollut myös vertaisoppimisella ja pari- tai ryhmätyöskentelyllä (Baroody, 1999; Dennis ym., 2016; Fuchs ym., 2007). Vaikka eri-ikäisten, osaamiseltaan siten erilaisten lasten työskentely yhdessä on todettu tehokkaaksi oppimisen edistäjäksi myös heikoilla osaajilla (Dennis ym., 2016; Gersten, Chard ym., 2009), se ei välttämättä tue riittävästi kaikkein heikoimpia osaajia (Kroesbergen & Van Luit, 2003). Pelimäiset harjoitteet ja esimerkiksi tietokoneohjelmat tukevat hyvin opittavan asian harjoittelua, mutta yleensä eivät ole riittävä keino uuden asian oppimisessa etenkin heikolle osaajalle (Baroody, 1999; Fuchs ym., 2007). Erityisesti laskemisen sujuvuuden tueksi tarkoitetuissa harjoitusohjelmissa on hyvä olla myös nopeutettuja tai muuten aikarajattuja harjoituksia (Fuchs ym., 2013). Parhaita tuloksia on saatu harjoitusohjelmilla, jotka ovat keskittyneet hyvin rajattuun sisältöön (esimerkiksi laskemisen sujuvuuden lisäämiseen yhteenlaskuissa), ja harjoittelussa on ollut erilaisia opetuksellisia elementtejä (esimerkiksi toistoharjoittelu, havainnollistusvälineiden käyttö ja pelit) mukana (Coddling ym., 2011; Cohen Kadosh ym., 2013; Dennis ym., 2016; Kunsch ym., 2007). Intervention keston vaikutusta sen tehokkuuteen on usein vaikea arvioida, koska eroja on kokonaiskestossa, harjoituskertojen tiheydessä ja yksittäisen opetustuokion kestossa. Yleensä tehokkaisuus interventioissa harjoitusohjelman mukaiset opetustuokioiden toteutetaan tiheällä aikavälillä (useita kertoja viikossa), jolloin kokonaiskesto jää alle kolmeen kymmeneen viikkoon (Coddling ym., 2011; Kroesbergen & Van Luit, 2003; Kunsch

ym., 2007). Interventiossa käytettävän harjoitusohjelman toteutukselle on oltava kyllin tarkat ohjeet (Bryant ym., 2011) ja ohjaajan on oltava hyvin perehtynyt harjoitusohjelmaan. Oppimistulokset ovat olleet parempia interventioissa, joissa toteuttajana on ollut valitun harjoitusohjelman käyttöön erikoistunut henkilö joko yksin tai opettajan työparina verrattuna siihen, että opettaja olisi toteuttanut jakson yksin (Dennis ym., 2016).

Lapsen osaamisen systemaattinen seuranta tarkoittaa, että opetuksessa seurataan säännöllisesti tuen tarvetta ja toteutettavan tuen aikana seurataan tuesta hyötymistä (Fuchs ym., 2007; Gersten, Dimino & Haymond, 2011). Sekä meta-analyyseissä että yksittäisissä interventiotutkimuksissa mainitaan tehokkaan heikoille osaajille suunnatun opetuksen edellytyksenä se, että opettaja tai ohjaaja on hyvin selvillä lapsen lähtötasosta ja seuraa hänen edistymistään systemaattisesti, jotta harjoitusjaksoa voidaan tarvittaessa muokata (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008; Kucian & von Aster, 2015). Saatujen seurantatietojen pohjalta opittavia sisältöjä, opetusmenetelmiä, etenemisnopeutta ja myös tuen astetta muokataan paremmin lapsen tarpeita vastaavaksi (Fuchs ym., 2007; Gersten, Beckman ym., 2009). Tämä on tärkeä osa ns. RTI-mallia, joka on kehitetty tuen suunnittelun ja siitä hyötymisen arviointiin (Clarke, Lembke, Hampton & Hendricker, 2011; Gersten ym., 2011), suomeksi siitä on käytetty nimeä interventioavastemalli (Björn ym., 2015). Harjoitusjaksoon pitäisi valita opetussuunnitelmasta kaikkein keskeisimmät, myöhemmän oppimisen kannalta välttämättömät sisällöt ja varmistaa niiden omaksuminen (Powell, Fuchs & Fuchs, 2013). Tehtävien vaikeustason sovittaminen lapsen todettuun taitotasoon tehostaa oppimista (Dennis ym., 2016; Fuchs & Fuchs, 2001), mutta voi joskus olla lapsen osaamista rajaavaa ellei suoritustason saavuttamista jatkuvasti seurata ja mahdollisuuksien mukaan myös nosteta lapselle asetettua tavoitetasoa (Chodura ym., 2015).

### **1.3.2 Interventiotutkimukset alakouluikäisillä**

Mikäli havaitaan, että matemaattisissa taidoissa tukea tarvitsevan lapsen opetuksessa on tarpeen käyttää laadukkaan perusopetuksen lisäksi jotakin muutakin menetelmää, ovat tutkimusperustaiset tukimuodot ja harjoitusohjelmat ensisijaisia (Cook, Tankersley, Cook & Landrum, 2008). Interventiotutkimuksissa, joissa tarkastelukohteena on erityisesti heikkojen osaajien oppimisen tukeminen, lapset on valittu joko todennettujen matemaattisten vaikeuksien (Kantelinen, 2013; Montis, 2000) tai niiden riskin (Dyson, Jordan & Glutting, 2011; Fuchs ym., 2007; Fuchs ym., 2013) perusteella. Heikkojen osaajien määrittely on eri tutkimuksissa vaihdellut. Usein rajana on ollut lapsen kuuluminen käytetyn matemaatiikan testin perusteella heikoimpaan 20–25 prosenttiin, mutta käytänteissä on runsaasti vaihtelua (Mazzocco, 2005).

Minäkin lasken! –harjoitusohjelmalla on aiempien interventiotutkimusten perustella kyetty edistämään päiväkotij- ja esiopetusikäisten lasten varhaisia matemaattisia taitoja, erityisesti lukukäsitteen hallintaa (Aunio ym., 2005; Lusetti & Aunio, 2012; Van Luit & Schopman, 2000). Muillakin alle kouluikäisille suunnatuilla harjoitusohjelmilla on saavutettu positiivisia tuloksia lukukäsitteen ja laskemisen strategioiden kehityksessä (Dyson ym., 2011; Kantelinen, 2013). Monosen ja kollegojen (2014) tutkimuksessa käytetyllä harjoitusohjelmalla (RightStart) ei varsinaisesti saavutettu parempia tuloksia tavanomaiseen esiopetusmatematiikkaan verrattuna, mutta sekä harjoitusohjelma että tavanomainen esiopetuksen matematiikanopetus auttoivat alkujaan matemaattisilta valmiuksiltaan heikkoja lapsia saavuttamaan laskemisen taidoissa tavanomaisesti suoriutuvien lasten tason esiopetusvuoden aikana (Mononen ym., 2014). Sujuvuuden parantaminen yhteen- ja vähennyslaskuissa on ollut tärkeä osa harjoitusohjelmia jo ensimmäiseltä luokalta alkaen, esimerkiksi nopeutetun harjoittelun avulla (Fuchs ym., 2007; Fuchs ym., 2013). Sisältöjen sopivan etenemistahdin löytäminen on eräs haaste heikkojen lasten opetuksen tukemisessa (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Hunt ym., 2016; Kantelinen, 2013).

Toisella ja kolmannella luokalla on interventioilla usein pystytty vahvistamaan aritmetiikan taitoja ja lisäämään laskemisen sujuvuutta (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs ym., 2007; Tournaki, 2003), varsinkin jos on käytetty useita harjoittelu- ja ohjausmuotoja, esimerkiksi strategioiden opetusta yhdistettynä toistoharjoitteluun. Pääasiallisesti tämän ikäisten lasten harjoitusohjelmat on toteutettu pienryhmissä (3–4 lasta) tai osana luokkaopetusta (poikkeuksena yksilöopetus Tournaki, 2003). Yksittäisen harjoitus-tuokion pituus on yleensä ollut vähintään 30 minuuttia, lyhimmillään vain 15 minuuttia (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Tournaki, 2003). Yleensä tuokioita on ollut useita viikossa. Harjoitusjakson kokonaiskesto on vaihdellut 15:stä 24:ään viikkoon. Kolmannesta luokasta ylöspäin toteutetuissa interventiotutkimuksissa eivät lapset yleensä ole kyenneet saavuttamaan aritmetiikan taidoissa oman ikäluokkansa tasoa, vaikka edistystä olisikin tapahtunut (Kaufmann ym., 2003; Koponen, Aro & Ahonen, 2009; Mentula, 2004). Osaltaan tämä johtuu siitä, että useilla lapsilla on näissä tutkimuksissa ollut merkittäviä oppimisvaikeuksia, esimerkiksi dyskalkulia (Mentula, 2004; Montis, 2000) tai kielellinen erityisvaikeus (Koponen, Aro, Räsänen & Ahonen, 2007).

Ylemmillä luokilla (kolmannelta luokalta ylöspäin) toteutetuissa interventiotutkimuksissa on tavoiteltu yhteen- ja vähennyslaskun sujuvuuden lisäksi kertotaulufaktojen oppimista ulkoa (Burns, Kanive & DeGrande, 2012; Mentula, 2004; Skarr, Zielinski, Ruwe, Sharp, Williams & McLaughlin, 2014; Woodward, 2006). Näissä tutkimuksissa on havaittu, että vaikka faktojen osaaminen paraneekin heikoilla osaajilla merkittävästi, heidän osaamisensa ei yleensä saa-

vuta muiden osaamistasoa. Myös sanallisten tehtävien<sup>1</sup> ratkaisutaito on ollut monissa ylemmille luokille suunnatuissa interventioissa joko päätavoitteena (Fuchs ym., 2002; Jitendra, Griffin, Deatline-Buchman & Sczesniak, 2007; Kajamies, Vauras & Kinnunen, 2010) tai osana opetellun aritmetiikantaidon harjoittelua ja soveltamista (Bottge, Ruenda, Grant, Stephens & Laroque, 2010; Fuchs ym., 2007). Sanallisten tehtävien harjoitusohjelmat on totutettu joko osana luokkaopetusta (mukana sekä tavanomaisesti suoriutuvia että heikkoja osaajia) tai pienryhmissä (heikkoja osaajia), ja muutamassa on käytetty tietokoneohjelmaa tukena (Bottge ym., 2010; Fuchs ym., 2002; Kajamies ym., 2010). Kaikissa sanallisten tehtävien ratkaisun tukemiseen tähtäävissä interventiotutkimuksissa on saavutettu positiivista kehitystä heikkojen lasten tehtävänratkaisutaidossa, joskin on myös todettu yksilötasolla kehityksen olevan hyvin erilaista (Kajamies ym., 2010). Opettajan käyttämä eksplisiittinen ohjaus tehtävätyypin tunnistamisessa ja tehtävän ratkaisemisessa on osoittautunut heikkojen lasten tukemisessa tietokoneharjoittelua tuloksellisemmaksi menetelmäksi myös ylemmillä luokilla (Fuchs ym., 2002).

## 1.4 Sujuvuus- ja interventiotutkimusten yhteenveto tähän tutkimukseen liittyen

Sujuvuus- ja interventiotutkimusten tulokset voidaan tiivistää kolmeen kohtaan:

1. Laskemisen sujuvuuden erot eri lasten välillä pysyvät yleensä melko samanlaisina niin, että sujuvuudeltaan heikon laskijan sujuvuus on heikkoa myös myöhempinä vuosina muihin verrattuna. Mikäli laskemisen sujuvuus on heikkoa, ilmenee kohtalaisen usein heikkoa sujuvuutta myös lukemisessa, joidenkin tutkimusten perusteella myös nimeämisen hitautta (Aunola ym., 2004; Branum-Martin ym., 2012; Chong & Siegel, 2008; Cirino ym., 2015; Compton ym., 2012; Geary, 2011; Geary ym., 2012; Landerl ym., 2009; Vukovic & Siegel, 2010).
2. Laskemisen sujuvuus on merkittävä tekijä sekä algoritmien käytön hallinnan että yleisen matematiikan osaamisen kannalta ja kehittyneempien laskustrategioiden oppiminen vaatii opetusta (Fuchs ym., 2006; Gaidoschik, 2012; Geary, 2004 ja 2011; Gersten ym., 2005; Mazzocco ym., 2008; Petrill ym., 2012; Vukovic & Siegel, 2010).
3. Matemaattisten taitojen harjoitusohjelmilla on usein pystytty vaikuttamaan positiivisesti esiopetus- ja alakouluikäisten lasten matemaattisiin taitoihin, joskaan alkujaan tavanomaisesti suoriutuvien taitotasoa ei ole yleensä kyetty saavuttamaan (Baker ym., 2002; Bryant, Bryant, Gers-

---

<sup>1</sup> Sanallisilla tehtävillä tarkoitetaan tässä kirjallisia tarinamuotoisia tehtäviä, joissa oikea ratkaisu löytyy aritmetiikan avulla, erona ongelmanratkaisutehtäviin, joissa ratkaisu- vaihtoehtoja voi olla useita (Laine ym., 2016; Leppäaho, 2007).

ten, Scammacca & Chavez, 2008; Burns ym., 2012; Chodura ym., 2015; Dennis ym., 2016; Fuchs ym., 2007; Gersten, Chard ym., 2009; Kunsch ym., 2007).

## 2 Metodologiset ratkaisut

Lasten matemaattisten taitojen kehittyminen ja tukeminen on ollut yhä laajemman kiinnostuksen kohde, mutta kiinnostus on kohdistunut lähinnä pienten lasten matemaattisten taitojen kehityksen ymmärtämiseen ja harjoitusohjelmien tutkimiseen. Etenkin suomalaisia alakouluikäisten lasten laskemisen sujuvuuden seurantatutkimuksia on vielä niukasti. Samoin on vielä varsin vähän alakoulun matematiikan opetuksen tukemiseen sopivien harjoitusohjelmien vaikuttavuustutkimuksia.

### 2.1 Tämän tutkimuksen tutkimuskysymykset

Tässä väitöskirjatutkimuksessa aritmeettista taitoa, laskemisen sujuvuutta, tarkasteltiin yhteydessä sekä aiempaan sujuvuuteen että lukemisen sujuvuuteen, nimeämisnopeuteen, lapsen sukupuoleen ja vanhempien koulutukseen. Lasten matemaattiseen osaamiseen pyrittiin vaikuttamaan kahden harjoitusohjelman avulla. Tutkimuksen kohderyhmänä olivat alakouluikäiset (7–12 -vuotiaat). Päähuomio tutkimuksessa oli heikoissa osajissa (heikoin 11–25 %), joskin mukana interventio- ja seurantatutkimuksissa saattoi olla kaikkein heikoimpaankin kymmenekseen kuuluvia lapsia, joiden vaikeuksien syvyyttä ei aiemmin ollut havaittu.

Tavoitteena oli tutkia:

1. Millainen oli lasten laskemisen sujuvuus eri luokka-asteilla sekä miten se oli yhteydessä erityisesti lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden kanssa? (osatutkimukset III ja IV)
2. Millaisia olivat lasten laskemisen sujuvuuden muutoksen yksilölliset suoritusprofiilit? (osatutkimus IV)
3. Minkälaisia vaikutuksia saatiin kahdella eri harjoitusohjelmalla heikkojen alakoululaisten matemaattisten taitojen tukemisessa? (osatutkimukset I ja II)

Seurantatutkimuksissa (osatutkimukset III ja IV) lasten laskemisen ja lukemisen sujuvuutta ja niiden muutosta seurattiin toiselta luokalta eteenpäin. Kolmannessa osatutkimuksessa seuranta jatkui neljännelle luokalle, ja laskemisen sujuvuutta selitettiin lukemisen sujuvuudella, nimeämisnopeudella, lapsen sukupuolella ja vanhempien koulutuksella. Neljännessä osatutkimuksessa lasten laskemisen ja lukemisen sujuvuutta seurattiin toiselta viidennelle luokalle, ja verrattiin tapahtunutta muutosta sujuvuudeltaan alkujaan erilaisten lapsiryhmien välillä. Lisäksi siinä etsittiin sujuvuudeltaan heikkojen lasten yksilöllisistä suoritusprofiileista kehityslinjoja. I ja II osatutkimuksissa käytettiin harjoitus- ja vertailuryhmäase-



telmaa. Ensimmäisessä osatutkimuksessa kehitettiin aiempien interventiotutkimusten (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs ym., 2005; Kaufmann ym., 2003) pohjalta harjoitusohjelma, jolla pyrittiin tukemaan toisella, kolmannella ja neljännellä luokalla opiskelevien luokkatasoonsa nähden heikkojen lasten matemaattisten taitojen kehitystä. Tutkimuksessa kuvattiin myös viiden lapsen yksilöllistä hyötymistä interventiosta. Toisessa osatutkimuksessa muokattiin alun perin alle kouluikäisille tarkoitettua Minäkin lasken! – harjoitusohjelmaa (Van Luit, Aunio & Räsänen, 2010) ensimmäiselle luokalle sopivammaksi ja tarkasteltiin ohjelman mukaisen intervention vaikuttavuutta lasten matemaattisten taitojen oppimiseen.

Tämän väitöskirjan teoria- ja pohdintaosassa käytetään asiasisältöön perustuvaa järjestystä, mutta osatutkimukset esitellään kronologisessa järjestyksessä, joka myös antaa kuvan tutkimuksen rakentumisesta tiettyjen ongelmien ympärille. Ensimmäisessä osatutkimuksessa osallistujat ovat täysin eri lapsiryhmä kuin kolmessa muussa osatutkimuksessa. Ensimmäinen osatutkimus luo pohjan sekä seuraavalle interventiotutkimukselle (osatutkimus II) että tuesta hyötymisen ja osaamisen muutoksen seurannan tarpeelle (osatutkimukset III ja IV). Osatutkimuksessa II harjoitusjakson muokkaamisessa on käytetty apuna ensimmäisestä osatutkimuksesta saatuja kokemuksia. Tutkimuksen harjoitus- ja vertailuryhmissä on lapsia useammalta koululta, ja kaikki ovat samalta luokka-asteelta (1.luokka). Laskemisen sujuvuuden ja siinä tapahtuvien muutosten seurannan tarve nousi esille tässäkin osatutkimuksessa, koska lasten hyötyminen interventiosta oli erilaista ja eritahtista. Kolmannessa ja neljännessä osatutkimuksessa seurattiin kahden koululuokan lasten laskemisen ja lukemisen sujuvuutta. Näillä luokilla opiskeli lapsia, jotka olivat osallistuneet myös osatutkimukseen II. Seurannan aikana ilmeni, että sujuvuutta olisi syytä tarkastella laajemmassa perspektiivissä, jolloin mukaan otettiin nimeämisnopeus. Väitöskirjan pohdintaosassa tuloksia käsitellään tutkimuskysymyksissä esitellyssä järjestyksessä, joka on tutkimuksen toteuttamisjärjestystä loogisempi lapsen matemaattisen osaamisen ja siinä ilmenevien tuen tarpeiden kannalta.

## 2.2 Tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin pääasiassa yhdellä pääkaupunkiseudulla sijaitsevalla koululla, jossa samojen lasten laskemisen sujuvuutta seurattiin ensimmäiseltä viidennelle luokalle. Interventiotutkimuksissa mukana oli myös kolme muuta koulua. Ensimmäinen osatutkimus (I) oli muista osatutkimuksista erillinen, eivätkä siihen osallistuneet lapset olleet mukana myöhemmissä osatutkimuksissa. Osatutkimukseen I osallistui kaikkiaan sata lasta, joista kymmenen kuului harjoitusryhmään. Lapset olivat toiselta, kolmannelta ja neljänneltä luokalta. Toiseen osatutkimukseen (II) osallistui 57 lasta, jotka kaikki olivat tutkimuksen alkaessa

ensimmäisellä luokalla. Tässä osatutkimuksessa oli mukana kolme koulua; kahdella näistä oli sekä matemaattisilta valmiuksiltaan heikkojen harjoitus- että vertailuryhmä, yhdellä vain vertailuryhmä. Yhden koulun kahdella luokalla opiskelevat lapset (poislukien harjoitus- ja vertailuryhmäläiset) muodostivat tavanomaisesti suoriutuneiden vertailuryhmän. Osatutkimuksissa III ja IV seurattiin kahden yleisopetuksen koululuokan lasten laskemisen ja lukemisen sujuvuuden muutosta toiselta luokalta eteenpäin, IV osatutkimuksessa viidennen luokan syyslukukaudelle saakka. Osallistujia seurantatutkimuksissa oli 43 ja 42. III ja IV osatutkimuksen seurantaluoilla opiskeli lapsia, jotka olivat mukana myös osatutkimuksessa II.

### ***Matemaattiset taidot***

Matemaattisia taitoja arvioitiin osatutkimuksissa I, II ja IV joko BANUCA- (Räsänen, 2005) tai RMAT-testillä (Räsänen, 2004). Osatutkimuksessa I lapsen luokka-asteen mukaisten matematiikan oppisisältöjen hallintaa arvioitiin kunkin luokka-asteen Makeko-kokeella (Ikäheimo, Putkonen & Voutilainen, 2002) ja taitojen seurannassa käytettiin myös väitöskirjan tekijän itsensä laatimia yhteen- ja vähennyslaskun päässälaskusarjoja. Osatutkimuksessa II lasten varhaisten matemaattisten taitojen (tässä osatutkimuksessa käytetty nimitystä esimatemaattiset taidot) kehitystä arvioitiin Lukukäsitetestillä (Van Luit, van de Rijt & Aunio, 2006). Osatutkimuksissa III ja IV laskemisen sujuvuutta arvioitiin Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävillä (TTT<sub>1</sub>) (Koponen, Salminen, Aunio & Polet, 2011) sekä Lukila- ja Lukima-kokeilla (Tasola, 1967, 1968, 1970). Muut paitsi Makeko-kokeet ja Lukukäsitetesti ovat testiohjeen mukaan aikarajattuja. Laskemisen sujuvuuden (osatutkimukset III ja IV) arviona käytettiin tiettyssä aikarajassa oikein vastattujen tehtävien määrää. Mittareista muut paitsi Lukukäsitetesti ovat kokonaan kynä+paperi –tehtäviä.

Ensimmäisessä osatutkimuksessa käytetyt *päässälaskusarjat* olivat väitöskirjan tekijän itsensä laatimia, mutta perustuivat aiemmissa tutkimuksissa käytettyihin (Torbeyns ym., 2004). Tehtäväsarjoja oli kaikkiaan neljä, joissa jokaisessa 20 tehtävää. Tehtävät olivat päässä laskettavia yhteen- ja vähennyslaskuja lukualueella 0–20. Laskuista ei otettu mukaan niitä, joissa molemmat tekijät olivat pienempiä kuin neljä. Vähennyslaskut olivat käänteisiä yhteenlaskuille, ja summasta vähennettiin aina suurempi yhteenlaskettavista (esimerkiksi 9+5; 14-9). Tehtävälissä oli vuorotellen yhteen- ja vähennyslasku. Tehtävät näytettiin taululla yksi kerrallaan ja samalla testaaja luki tehtävän ääneen. Lapset merkitsivät tehtävän vastauksen vastauspaperiinsa. Vastausaikaa yhtä tehtävää kohden oli viisi sekuntia. Ensimmäisellä mittauskerralla jouduttiin toisluokkalaisten lasten kanssa vastausaikaa pidentämään kahdeksaan sekuntiin. *Makeko-kokeet* (Ikäheimo ym. 2002) ovat kunkin luokka-asteen matematiikan opetussuunnitelmaan (vuoden 2004 opetussuunnitelma) perustuvia kokeita. Tässä tutkimuksessa käytettiin toisen, kolmannen ja neljännen luokan keväälle tarkoitettuja

kokeita. Koska kokeet käsittävät koko luokka-asteen matematiikan oppisisällön, on niissä tehtäviä useilta matematiikan osa-alueilta aritmeettisten faktojen hallinnasta geometriaan.

Toisessa osatutkimuksessa lasten varhaisia matemaattisia taitoja<sup>2</sup> arvioitiin *Lukukäsitetestin* (Van Luit ym., 2006) avulla. Se on 4–7½ -vuotiaiden lasten lukukäsitteen hallinnan mittaamiseen suunniteltu standardoitu testi. Testissä on 40 osatehtävää, jotka on jaettu kahdeksaan taitoalueeseen (vertailu, luokittelu, vastaavuus, järjestäminen, lukusanojen luetteleminen, samanaikainen ja lyhentyneet laskeminen, tuloksen laskeminen sekä lukukäsitteen soveltaminen). Näistä neljä ensimmäistä mittaavat suhdetaitoja (maksimipistemäärä 20), neljä jälkimmäistä lukujonotaitoja (maksimipistemäärä 20). Kokonaistuloksen lisäksi lapsen tulosta voidaan tarkastella erikseen näillä kahdella taitoalueella. I ja II osatutkimuksessa käytetty *BANUCA* (Räsänen, 2005) on lukukäsitteen ja laskutaidon hallinnan standardoitu testi 7–9-vuotiaille lapsille. Testin tehtävien maksimipistemäärä on 79. Tehtäväsarjoja on kaikkiaan yhdeksän (lukumäärän vertailu, yhteen- ja vähennyslasku, määrän ja luvun vastaavuus, lukujonot, lukujen vertailu, sanotun ja kirjoitetun luvun vastaavuus, laskujen laskeminen sekä aritmeettinen päättely). Testistä voidaan kokonaistuloksen lisäksi käyttää kahta lyhytversiota: lukukäsitteen hallinta ja laskutaito. Molempien lyhytversioiden maksimipistemäärä on 36. Osatutkimuksessa II käytettiin lisäksi *BANUCA*sta irrotettua tehtäväyhdistelmää, johon kuuluivat lukumäärän vertailu, yhteenlasku sekä määrän ja luvun vastaavuus (maksimipistemäärä 20). I ja IV osatutkimuksessa käytetty *RMAT*-testi (Räsänen, 2004) on peruslaskutaidon hallintaa mittaava standardoitu testi 9–12-vuotiaille. Testissä on kaikkiaan 56 tehtävää. Tehtävistä 42 mittaa peruslaskutaitoja (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) kokonaisluvuilla. Näiden lisäksi tehtäviä on murto- ja desimaaliluvuista (5 tehtävää), laskujärjestyksestä (1), yhtälöratkaisusta (2) sekä mittayksikkömuunnoksista (6).

*Matematiikan tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävät (TTT<sub>1</sub>)* (Koponen ym., 2011) ovat matematiikassa tukea tarvitsevien lasten löytämiseksi laadittuja tehtäväkokonaisuuksia esiopetuksesta toiselle luokalle. Tässä tutkimuksessa näistä käytettiin vain toisen luokan syksyn arviointitehtävän aikarajattuja yhteen- ja vähennyslaskuja (lukualueena 0–20). Tehtävissä lapsen pitää minuutin aikana ratkaista mahdollisimman monta kirjallisesti esitettyä laskutehtävää (esimerkiksi 9+4; 11-10). Maksimipistemäärä kummassakin tehtäväsarjassa on 20. Lapsen saamaa pistemäärää käytettiin hänen laskusujuvuutensa arviona.

*Lukila- ja Lukima-kokeet* (Tasola 1967, 1968, 1970) ovat kansa- ja peruskoulun alaluokille tarkoitettuja koulukokeita. Tässä tutkimuksessa niistä käytettiin vain mekaanisten laskusuoritusten nopeutta mittaavia tehtäväsarjoja, joissa lapsen tulee merkitä oikea vastaus mahdollisimman moneen tehtävään kokeen aikarajassa. Vaikka kokeet ovat vanhoja, mittaavat ne tälläkin hetkellä keskeisiä

<sup>2</sup> Tässä osatutkimuksessa käytetty nimitystä esimatemaattiset taidot

taitoja ja muodostavat vaikeutuvan koesarjan laskemisen sujuvuuden muutoksen seurantaan. Kaikissa Lukila- ja Lukima-kokeissa tehtävät ovat asteittain vaikeutuvassa järjestyksessä. Lukila I–II ja II–III-kokeissa tehtävät ovat päässä laskettavia. Lukila I–II-kokeessa lukualueena on 0–29 (esimerkiksi 5+6; 16+12-21), Lukila II–III-kokeessa 0–36 (esimerkiksi 18-13; 9+15+12). Lukima III-kokeissa tehtävät on asetettu laskualgoritmiin, ja lukualue laajenee tuhansiin. Lukima IIIA-kokeessa on yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä (esimerkiksi 682-237; 487+752+897). Lukima IIIB-kokeessa mukana on myös kertolaskuja (esimerkiksi 7 x 1267). Lapsen kussakin mittauksessa saamaa pistemäärää (oikein ratkaistut tehtävät) käytettiin hänen laskusujuvuutensa arviona.

### ***Lukemisen sujuvuus***

Lukemisen sujuvuutta arvioitiin osatutkimuksissa III ja IV Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävän epäsanojen (TTT<sub>2</sub>) ja tekstin (TTT<sub>3</sub>) lukemisen tehtävillä (Puolakanaho, Heinola, Eklund, Hintikka & Hämäläinen, 2011), YTTE-testin tekstin ääneenlukemisen tehtävällä (Kajamies, Poskiparta, Annevirta, Dufva & Vauras, 2003) sekä ALLU-lukutestin teknisen lukutaidon mittarilla (Lindeman, 1998). Lisäksi osatutkimuksessa III oli käytössä Sanaketjutesti (Nevala & Lyytinen, 2002).

Toisella ja kolmannelle luokalle lukemisen sujuvuutta arvioitiin ääneen lukemisen perusteella, ja siten mittaukset perustuivat lähinnä fonologiseen dekooodaukseen. *Lukemisen tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävät* (Puolakanaho ym., 2011) ovat luku- ja kirjoitustaidossa tukea tarvitsevien lasten löytämiseksi laadittuja tehtäväkokonaisuuksia esiopetuksesta toiselle luokalle. Tässä tutkimuksessa niistä käytettiin vain toisen luokan kevään lukemisen yksilötehtäviä. Tehtävissä lapsen piti lukea ääneen epäsanonja ja tekstiä (Marsu). Lukemisen sujuvuuden arviona käytettiin testin aikarajassa oikein luettujen sanojen määrää. Lukemisvirheiden määrää ei erikseen huomioitu. *YTTE-testistä* (Kajamies ym., 2003) käytettiin kolmannen luokan ääneen lukemisen testiä (Vilpe-kissa kiipeilee tikkailla). Tässäkin testissä lukemisen sujuvuuden arviona käytettiin testiajassa oikein luettujen sanojen määrää, eikä lukuvirheiden määrää tai laatua arvioitu erikseen.

Neljännellä ja viidennellä luokalla lukemisen sujuvuutta arvioitiin äänettömän sanantunnistuksen perusteella, eli ortografiseen prosessointiin perustuen. Erilaiset mittaustavat valittiin sillä perusteella, että niiden ajateltiin toimivan parhaiten kyseisessä ikäryhmässä lukemisen sujuvuuden ja sujumattomuuden arvioinnissa. *ALLU-lukutesti* (Lindeman, 1998) on peruskoulun 1.–6.-luokille normitettu lukutaidon testi. Siitä käytettiin osatutkimuksissa III ja IV teknisen lukutaidon osatestejä TL 5A ja 5B. Niissä lapsen tulee tietyissä aikarajassa merkitä sanavälit sanaketjuihin (2–4 sanaa). Neljännellä luokalla käytettiin osatestiä 5B ja viidennellä osatestiä 5A. Testit ovat rinnakkaisia, ja ne on normitettu luokka-asteille 4.–6. Lapsen lukemisen sujuvuuden arviona käytettiin löydetty-

jen sanojen määrää. *Sanaketjutesti* (Nevala & Lyytinen, 2002) on 2.–6.-luokkalaisten lasten teknisen lukutaidon mittaamiseen suunniteltu standardoitu testi. Testissä on neljä osatestiä, jotka kaikki ovat aikarajattuja. Ensimmäisessä osatestissä lapsen tulee merkitä sanarajat sanaketjuihin, toisessa etsiä merkityksettömät sanat ja kolmannessa etsiä sanoissa olevat kirjoitusvirheet ja merkitä niiden kohta. Neljännessä osatestissä lapsen tulee merkitä tavurajat sanoihin. Kolmesta ensimmäisestä osatestistä voidaan laskea lapsen taitotasojen keskiarvo, joka testikäsi- ja kirjainmateriaalin mukaan saattaa olla joissain tapauksissa luotettavampi teknisen lukutaidon arvioinnissa kuin yksittäiset osatetit. Osatutkimuksessa III käytettiin tätä kolmen taitotason keskiarvoa lapsen lukemisen sujuvuuden arvioinnissa.

### ***Muut mittarit***

Osatutkimuksessa II käytettiin lasten ryhmittelemisessä harjoitus- ja vertailuryhmiin apuna kouluilla käytössä ollutta erityisopettajien koulun aloitusvaiheeseen laatimaa perustaitojen hallinnan alkuseulaa sekä Ensiaskleet – tehtäväsarjaa (Hautamäki, Hautamäki & Kupiainen, 2010; Koulutuksen arviointikeskus, 2010). Lisäksi osatutkimuksissa II ja IV käytettiin Nopean sarjallisen nimeämisen testiä (NSN) (Ahonen, Tuovinen & Leppäsaari, 2003). Perustaitojen hallinnan alkuseulassa oli sekä kielellisiä että matemaattisia valmiuksia arvioivia tehtäviä. Osatutkimuksessa II käytettiin niistä BANUCAn tehtävähdistelmän lisäksi *visuaalista hahmotusta* arvioivaa pisteikkötehtävää. Siinä lapsen tuli piirtää mallikuvion mukainen kuvio tyhjiin pisteikköön. Piirrostehtäviä oli kaikkiaan viisi. *Ensiaskleet –tehtäväsarja* (Hautamäki ym., 2010; Koulutuksen arviointikeskus, 2010) kartoittaa lapsen kouluvalmiuksia ja oppimaan oppimisen taitoja. Siinä on kaikkiaan kahdeksan osatehtävää, jotka mittaavat visuaalispatiaalista ajattelua ja työmuistia, tarkkuutta kuuntelemisessa, yksinkertaisten lukumäärien tunnistamista, opettajan saneleman reitin piirtämistä, kuvioita yhdistävän säännön löytämistä sekä keskittymisen ja tarkkaavuuden ylläpitoa. Lisäksi lapsi piirtää omakuvan. Osatutkimuksissa III ja IV lasten nimeämisnopeutta arvioitiin *Nopean sarjallisen nimeämisen testillä* (Ahonen ym., 2003). Testistä käytettiin neljää osasarjaa (värit, kirjaimet, numerot ja esineet), joissa kussakin on 50 nimettävää yksikköä. Jokaisessa osasarjassa mitataan lapsen nimeämiseen käyttämä kokonaisaika sekä lasketaan nimeämisvirheet. Nimeämisvirheiden määrä oli tässä tutkimuksessa hyvin pieni, joten osatutkimuksissa käytettiin ainoastaan kunkin osasarjan suoritusaikaa.

### ***Lisäinformaatio ja aineiston käsittely***

Osatutkimuksessa I oli käytössä edellä mainittujen ohella tutkijan oppitunneista pitämät muistiinpanot, joiden avulla arvioitiin harjoitusjakson sisältöjen ja menetelmien toimivuutta käytännössä. Lisäksi yksilökuvauksissa olivat käytössä lasten mahdolliset tutkimuslausunnot. Vanhempien koulutustaustaa kysyttiin kyseilylomakkeella osatutkimuksessa III. Interventiotutkimuksissa (osatutkimukset I

ja II) tulosten analysoinnissa käytettiin Friedmanin testiä, lisäksi ensimmäisessä osatutkimuksessa käytettiin toistettujen mittausten varianssianalyysiä ja toisessa osatutkimuksessa Mann-Whitneyn  $U$ -testiä sekä Wilcoxonin testiä. III ja IV osatutkimuksissa ryhmien välisten erojen arvioinnissa käytettiin Mann-Whitneyn  $U$ -testiä. Kolmannessa osatutkimuksessa käytettiin lisäksi parittaisten otosten  $t$ -testiä ja laskemisen sujuvuuden tulosten selittämässä regressioanalyysiä. Efektikoko ( $r$ ) laskettiin II ja IV osatutkimuksessa kaavan  $Z/\sqrt{N}$  mukaan (Field, 2009).

### **Harjoitusohjelmat**

Interventiotutkimuksissa (osatutkimukset I ja II) käytettiin kahta harjoitusohjelmaa. Molemmat toteutettiin pienryhmissä kertaviikkoisesti (45 min/kerta). Kummankin intervention kesto oli 22 viikkoa, ja ne toteutettiin yhden kouluvuoden aikana. Harjoitusjakson tuntien pitäjät olivat päteviä erityisopettajia, ja heillä oli usean vuoden työkokemus. Ensimmäisessä osatutkimuksessa käytetty harjoitusohjelma oli tutkijan itsensä laatima ja perustui aiempiin interventiotutkimuksiin (mm. Bryant, Bryant, Gesten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs ym., 2005; Kaufmann ym., 2003) sekä ohjeisiin, miten tukea lasta, jolla on matemaattisia oppimisvaikeuksia (esim. Butterworth & Yeo, 2004). Laaditun harjoitusohjelman päätavoite oli vahvistaa artimeettisten faktojen hallintaa sekä yhteen- ja vähennyslaskustrategioita (esim. luvun ”hajotelmat”). Osatutkimuksessa II käytössä ollut harjoitusohjelma oli muokattu Minäkin lasken! -harjoitusohjelmasta (Van Luit ym., 2010) lisäämällä siihen yhteen- ja vähennyslaskutaitoa tukevia osia. Tutkimuksen osallistujat, mittarit, harjoitusohjelmat ja analyysimenetelmät on kuvattu kokoavasti taulukossa 1. Liitteessä A on kuvattu tarkemmin käytettyjä mittareita. Harjoitusohjelmat ja niiden sisältö on kuvattu tarkemmin kyseisten osatutkimusten yhteydessä.

Taulukko 1. Osatutkimusten aineistot

	Ajankohta ja osallistujat	Tutkimustavoite	Tutkimusasetelma	Mittarit	Analyysimenetelmät
I	2006–07 $N = 100$ ( $n_1 + n_2$ ) $n_1 = 10$ (harjoitusryhmä) $n_2 = 90$ (vertailuryhmä) Iän vaihteluväli 7v 10kk– 9v 2kk (2., 3. ja 4. luok- ka) 1 koulu, 5 luokkaa	Harjoitusjakson (22 x 45 min) vaikuttavuuden tarkastelu  Yksittäisten lasten kehi- tyksen kuvailu	intervenotitutkimus	Makeko Päässälakukokeet (4 sarjaa) BANUCA RMAT Oppituntimuiistiinpanot Lasten tutkimus- lausunnot	Toistettujen mittaus- ten varianssianalyysi Friedmanin testi Korrelaatio (Pearson)
II	2010–11 $N = 57$ ( $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ ) $n_1 = 9$ (harjoitusryhmä, 7+2 lasta, A ja B koulut) $n_2 = 7$ (vertailuryhmä 5+2 lasta, A ja B koulut) $n_3 = 5$ (kontrollikoulu C) $n_4 = 36$ (vertailuryhmä, vain koulu A) 3 koulua A, B, C (5 luokkaa) iän ka 84,6 kk (80–91 kk) $n_1 + n_2 + n_4$ lapsista suurin osa myös osatutkimuk- sissa III ja IV	Minäkin laske- harjoitusohjelman sovel- luksen (22 x 45 min) vaikuttavuuden tarkaste- lu	intervenotitutkimus	Lukukäsiteläsi BANUCA Perustaitojen hallinnan alkuseula Ensiaskelleet	Mann-Whitneyn U- testi Friedmanin testi Wilcoxonin testi Efektikoko (r)

III	2011–14 N = 43 1 koulu, 2 luokkaa iän ka alussa 96,1 kk (92–103 kk)	Laskemisen sujuvuuden selitys lukemisen suju- vuudella, nimeämisno- peudella, lapsen suku- puolella ja/tai vanhempi- en koulutuksella	seurantatutkimus	TTT <sub>1</sub> Lukila- ja Lukima-kokeet TTT <sub>2</sub> ja TTT <sub>3</sub> (epäsanat ja teksti) YTTE (Viipe-kissa) Sanakeijutesti ALLU TL 5B NSN Kysely vanhempien koulutuksesta	Parittaisten otosten t- testi Korrelaatio (Pearson) Mann-Whitneyn U- testi Regressioanalyysi (enter)
IV	2011–15 N = 42 1 koulu, 2 luokkaa (sa- mat kuin osatutkimuk- sessa III) iän ka alussa 96,1 kk (92–103 kk)	Laskemisen ja lukemi- sen sujuvuudeltaan erilaisten lapsiryhmien sujuvuuden seuranta ja yhteydet laskemisen ja lukemisen sujuvuuden sekä nimeämisnopeu- den välillä. Yksilöllisten suori- tusprofiilien vertailu	seurantatutkimus	TTT <sub>1</sub> Lukila- ja Lukima-kokeet RMAT TTT <sub>2</sub> ja TTT <sub>3</sub> (epäsanat ja teksti) YTTE (Viipe-kissa) ALLU TL 5B ja 5A NSN	Mann-Whitneyn U- testi Efektikoko (r)



## 3 Osatutkimusten sisällöt lyhyesti

Tämä väitöskirja koostuu neljästä osatutkimuksesta, jotka esitellään niiden toteuttamisen mukaisessa kronologisessa järjestyksessä. Osatutkimuksissa III ja IV seurataan laskemisen ja lukemisen sujuvuutta pääasiassa samoilla lapsilla, jotka ovat mukana myös osatutkimuksessa II.

### 3.1 Osatutkimus I

#### 3.1.1 Tavoitteet

Ensimmäisen osatutkimuksen tavoitteena oli koota, kokeilla ja edelleen kehittää osa-aikaiseen erityisopetukseen soveltuva harjoitusjakso matematiikan oppimisen tueksi. Koostettua harjoitusjaksoa kokeiltiin toisella, kolmannella ja neljännessä luokalla. Osatutkimuksessa verrattiin interventioon osallistuneiden lasten matemaattisen osaamisen muutosta suhteessa samoilla luokilla opiskelevien muiden lasten osaamisen muutokseen. Lisäksi tutkimuksessa seurattiin viiden interventioon osallistuneen lapsen yksilöllistä matemaattisten taitojen muutosta harjoitusjakson aikana sekä viisi kuukautta sen päättymisestä, jotta myös pidempiaikaisista vaikutuksista saataisiin tietoa.

#### 3.1.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin eteläsuomalaisen koulun 2.–4.-luokilla, ja siihen osallistui kaikkiaan sata lasta. Intervention harjoitusjaksoon ja sen vaikuttavuuden arvioitiin heistä osallistui kymmenen lasta ( 4 poikaa ja 6 tyttöä), joista nuorin oli harjoitusjakson alussa 7v 10kk ja vanhin 10v 2kk. Lapset valittiin kunkin luokka-asteen syksyn Makeko-kokeen (Ikäheimo ym., 2002) sekä opettajan arvion perusteella. Interventioon osallistuneiden lasten suoriutuminen Makeko-kokeessa oli heikkoa suhteessa omaan luokkaan tai he opettajan arvion mukaan tarvitsivat säännöllisesti paljon tukea oppitunneilla. Jokaiselta tutkimukseen osallistuneelta luokka-asteelta harjoitusjakson tunneille osallistui neljä lasta. Kolmannen luokan ryhmästä kaksi lasta ei osallistunut varsinaiseen tutkimukseen poissulkukriteerien perusteella. Kenelläkään interventiotutkimukseen osallistuneella ei ollut tutkimuksen alkaessa todennettuna huomattavia kielellisiä tai tarkkaavuuden vaikeuksia ja kaikkien äidinkieli oli suomi. Interventiotutkimuksen vertailuryhmänä toimivat samoilla luokilla opiskelevat muut lapset. Tapaustutkimusosuudessa on kuvattu tarkemmin viiden interventioon osallistuneen lapsen matemaattisen osaamisen muutosta harjoitusjakson kuluessa sekä viisi kuukautta sen päätyttyä.

Intervention harjoitusjakson sisältö suunniteltiin aiempien interventiotutkimusten johtopäätöksiä (mm. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Fuchs ym., 2005; Kaufmann ym. 2003) sekä matematiikan oppimisvaikeuksien yhteydessä opetukselle esitettyjä suuntaviivoja (Butterworth & Yeo, 2004) noudattaen. Harjoitusjakson kesto oli 22 viikkoa, ja jakson tunnit toteutettiin kertaviikkoisesti, 45 minuutin oppitunteina. Jokaisella luokka-asteella oli oma ryhmänsä, mutta sisältö oli kaikille yhteinen. Oppitunnit toistuivat rakenteellisesti samanlaisina (10 min keskittymis- ja virittelyosa + 20 min opetus- ja harjoitteluosa + 10 min pelimäinen harjoite).

### 3.1.3 Mittarit

Lasten matematiikan taitoja arvioitiin kunkin luokka-asteen Makeko-kokeella (Ikäheimo ym., 2002). Jokaiselle luokka-asteelle on oma kokeensa, ja kunkin luokka-asteen kevään koe on sama kuin seuraavan luokka-asteen syksyn koe (kokeita voidaan siis pitää syksyllä tai keväällä). Tässä tutkimuksessa Makeko-kokeita käytettiin sekä harjoitusjakson alussa että lopussa. Tutkimuksessa käytetyt päässälaskukokeet olivat väitöskirjan tekijän itsensä laatimia. Niiden esikuvana olivat aiemmissa interventiotutkimuksissa (mm. Torbeyns ym., 2004) käytetyt päässälaskukokeet. Tutkimusta varten laadittiin neljä mahdollisimman samantasoista kirjallisesti ja suullisesti esitettyä päässälaskusarjaa lukualueelta 0–20. Päässälaskukokeissa oli kullakin mittauskerralla 20 tehtävää. Päässälaskukokeiden reliabiliteetti (Cronbachin alfa) tässä aineistossa oli hyvä (0.873). Päässälaskutaitojen arviointikertoja oli kuusi (mittauskerroilla 5 ja 6 kahta ensimmäistä sarjaa käytettiin vaihtamalla laskujen esitysjärjestys käänteiseksi). Suoritusajaksi yhtä tehtävää kohden suunniteltiin viittä sekuntia, mutta ensimmäisellä mittauskerralla aikaa oli toisluokkalaisilla pidennettävä kahdeksaan sekuntiin. Toisella luokalla olevat lapset tekivät ensimmäisellä mittauskerralla erilaisen laskusarjan kuin muut (tehtävänasettelultaan väljempi), mutta tehtävät olivat samoista sarjoista poimittuja ja määrä sama.

Yksilöllistä tapauskuvailua varten kunkin lapsen lukukäsitteen ja laskutaidon hallintaa arvioitiin ikäkaudelle soveltuvalla testillä. Toisella luokalla olevilla lapsilla testinä käytettiin BANUCA-testiä (Räsänen, 2005), kolmannella ja neljännellä luokalla RMAT-testiä (Räsänen, 2004). Näitä testejä käytettiin tutkimuksen alussa ennen harjoitusjaksoa, harjoitusjakson päättyessä sekä viisi kuukautta päättymisen jälkeen. Yksilöllisessä tapauskuvailussa sekä intervention ja harjoitusjakson sisällön arvioinnissa käytettiin myös tutkijan laatimia oppituntimuistiinpanoja. Tapauskuvailussa käytettiin hyväksi myös lapsista käytettävissä olleita tutkimuslausuntoja. Käytettyjen mittarien tarkempi kuvaus on liitteessä A.

### 3.1.4 Analyysit

Makeko-kokeiden maksimipistemäärä on erilainen eri luokka-asteiden kokeissa, eikä kokeilla ole normitettua vertailuaineistoa. Jotta vertailu lasten eri luokka-asteilla saamien pistemäärien välillä oli mahdollista, mittauksissa käytettiin muuttujana lapsen saaman pistemäärän prosenttiosuutta maksimipistemäärästä. Loogisuuden vuoksi myös päässälaskukokeiden tuloksissa käytettiin samaa tapaa. BANUCA- ja RMAT-testeistä käytettiin raakapistemääriä. Harjoitusohjelman vaikuttavuutta arvioitiin toistettujen mittausten varianssianalyysillä, jonka tuloksia tarkennettiin Friedmanin testillä. Yksilöllisissä tapauskuvailuissa käytettiin kuvailevia tunnuslukuja.

### 3.1.5 Tulokset

Toteutetun intervention avulla pystyttiin jossain määrin vaikuttamaan lasten päässälaskutaitoihin, joskaan ryhmätasolla positiivinen muutos ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Interventiolla tavoiteltua matemaattisten taitojen, erityisesti oman luokka-asteen matematiikan taitojen, omaksumisen tukemista ei saavutettu, vaan havaittavissa oli lähinnä aiemmin opittujen taitojen vahvistumista. Yksilöllisten kehityskulkujen tarkastelussa havaittiin lasten erilainen hyötyminen interventiosta sekä erilainen tuen tarve jatkossa. Matematiikan taitojen kehittämisen kannalta eniten interventiosta hyötyivät ne lapset, joilla ei ollut erityisiä oppimisvaikeuksia (esimerkiksi kielellisiä tai muistiin liittyviä) matematiikan taitovajeiden taustalla. Kaikilla lapsilla hyötymistä oli erityisesti työskentelytaitojen kehittymisessä.

Harjoitustuntien rakenne (virittelyosa, opetusosa ja peli) oli hyvin toimiva ja sisältö nykymuodossaan parhaiten toiselle luokalle sopiva. Havainnollistusvälineiden käytössä huomattiin, että niiden määrä kannattaa pitää varsin pienenä ja erityistä huomiota on kiinnitettävä niiden käytön ja matematiikan symbolikielen yhdistämiseen.

### 3.1.6 Johtopäätökset

Toteutetun intervention avulla saatiin jossain määrin vaikutettua lasten päässälaskutaitoihin, mutta oman luokka-asteen uusien oppisisältöjen omaksumisen tukemiseen se ei ollut riittävä tuki etenkin kolmas- ja neljäsluokkalaisilla. Aiemmissakin tutkimuksissa on todettu, että vaikka lasten matemaattiset taidot paranisivat, ei ero tavanomaisesti suoriutuviin katoa (Fuchs ym., 2005; Kaufmann ym., 2003). Interventioon osallistuneista toisen luokan oppilaista monen suoritus oli sen päättyessä luokka-asteen keskitason tuntumassa. Toisaalta heidän eronsa keskitasoon ei alun alkaenkaan ollut yhtä suuri kuin kolmas- ja neljäsluokkalaisilla. Vaikka toteutettu harjoitusjakso ei ryhmätasolla pystynytään tukemaan lasten matematiikan oppimista toivotulla tavalla, yksilötasolla hyötyä

oli havaittavissa. Tämä on tullut esille myös aiemmissa tutkimuksissa (mm. Kaufmann ym., 2003). Harjoitustuntien aikana hyötyminen näkyi matematiikan osaamisen lisäksi esimerkiksi lasten työskentelytaitojen paranemisena. Eniten toteutetusta interventiosta hyötyivät ne lapset, joilla ei ollut erityisiä (tiedossa olevia) syitä matematiikan taitovajeiden taustalla. Harjoitusjaksolla tarjotusta tuesta heikoimmin hyötäneellä lapsella ilmeni tutkimuksen aikana oletettua suurempia kielellisiä vaikeuksia, joten niiden yhteydessä tarjottu tuki oli liian heikko. Tosin interventio antoi jatkoon kannalta hyödyllistä lisätietoa hänenkin osaamisestaan ja siinä ilmenevistä puutteista. Myös aiemmin on todettu, että interventiosta saatava hyöty voi olla tieto, että tukea on yksittäisen lapsen kohdalla vahvistettava entisestään (Fuchs ym., 2007).

Tässä tutkimuksessa käytetty harjoitusohjelma soveltuisi sellaisenaan toiselle luokalle koko lukuvuoden kestäväksi tukimuodoksi, koska jakson sisällöt olivat lähellä tämän luokka-asteen oppisisältöjä (pidemmän keston eduista ks. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008). Kolmannella ja neljännellä luokalla olevilla lapsilla harjoitusjakson kesto olisi hyvä tiivistää kolmesta neljään kuukauteen (kaksi harjoituskertaa viikossa), koska jakson sisällöt ovat jo etäällä luokka-asteen sisällöistä (vrt. Kaufmann ym., 2003). Matemaattisten peruskäsitteiden merkityksen avaaminen ja peruslaskutaitojen vahvistaminen olivat kuitenkin selvästi tarpeellisia näilläkin luokka-asteilla oleville lapsille. Mikäli harjoitusjaksoa heidän kohdallaan tiivistettäisiin kestoaltaan lyhyemmäksi, lapsen yksilöllistä tuen tarvetta jatkossa sekä mahdollisia lisätutkimuksia päästäisiin suunnittelemaan ehkä nopeammin. Huolella suunniteltu ja toteutettu interventiojakso antaa lisätietoa lapsen oppimisesta ja työskentelystä.

## 3.2 Osatutkimus II

### 3.2.1 Tavoitteet

Toisen interventiotutkimuksen tavoitteena oli tarkastella Minäkin lasken! –harjoitusohjelman (Van Luit ym., 2010) sovelluksen vaikuttavuutta ensimmäisellä luokalla olevien lasten matemaattiseen osaamiseen. Koulun alussa matemaattisilta taidoiltaan heikoimmista lapsista muodostettiin harjoitus- ja vertailuryhmät, ja harjoitusryhmän lapset saivat ohjelman mukaista opetusta yhden opitunnin (45 min) viikossa kahdeksan kuukauden ajan. Lasten esimatemaattisia taitoja<sup>3</sup> ja lukukäsitteen ja laskutaidon hallintaa arvioitiin harjoitusjakson päättyessä sekä viivästetysti toisen luokan alussa.

---

<sup>3</sup> Tässä osatutkimuksessa nimitystä esimatemaattiset taidot käytetään viittaamaan lapsen varhaisiin matemaattisiin taitoihin, erityisesti suhde- ja lukujonotaitoihin.

### 3.2.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin eteläsuomalaisen kunnan kolmella koululla ensimmäisten luokkien oppilaista kootulla ryhmällä (57 lasta, joista 30 tyttöä ja 27 poikaa). Lasten iän keskiarvo tutkimuksen alkaessa oli 84,6 kuukautta, eli noin 7 vuotta (iän vaihteluväli 80–91 kk). Lapset, joiden tulos kouluilla käytössä olleessa alkuseulassa jäi matemaattisia valmiuksia kartoittavissa tehtävissä heikoimpaan kolmannekseen, valikoituivat matemaattisten taitojen suhteen heikkojen ryhmään ( $n=21$ ). Tähän ryhmään valikoituneet lapset eivät eronneet tavanomaisesti suoriutuneista iän eivätkä sukupuolijakauman suhteen. Oppimisvalmiuksiltaan (kouluvalmius ja oppimaan oppimisen taidot) ryhmä oli hieman tavanomaisesti suoriutuneiden ryhmää heikompi.

Matemaattisilta taidoiltaan koulun alkuseulan perusteella heikosti suoriutuneet lapset tekivät tarkemman matemaattisten valmiuksien kartoituksen (Lukukäsitetesti), jonka perusteella kahdella koululla (koulut A ja B) tässä testissä heikoimmin suoriutuneet yhdeksän lasta (7 tyttöä ja 2 poikaa) valikoituivat harjoitusryhmään, hieman paremmin suoriutuneet seitsemän lasta (5 tyttöä ja 2 poikaa) vertailuryhmään. Tähän ratkaisuun päädyttiin tutkimuseettisistä syistä, jotta eniten tuen tarpeessa olevat lapset saivat suurimman mahdollisen tuen. Kolmannen koulun (koulu C) kaikki viisi alkuseulan perusteella heikkojen ryhmään valikoitunutta lasta muodostivat oman vertailuryhmänsä. Harjoitus- ja vertailuryhmien lapset eivät eronneet toisistaan iän, sukupuolijakauman, matemaattisten valmiuksien, visuaalisen hahmotuksen eivätkä oppimisvalmiuksien tai ajattelua arvioivien tehtävien suhteen. Koulun A ensimmäisillä luokilla opiskelevat muut lapset muodostivat tavanomaisesti suoriutuneiden ryhmän ( $n=36$ ).

Alku- ja loppumittaus samoin kuin harjoitusjakso toteutettiin lukuvuonna 2010–11. Viivästetty loppumittaus toteutettiin kuusi kuukautta harjoitusjakson päättymisestä, syksyllä 2011 lasten ollessa toisella luokalla. Harjoitusjakso oli muokattu Minäkin lasken! harjoitusohjelmasta lisäämällä siihen yhteen- ja vähennyslaskutaitoja tukevia osia. Opetustunnit (45 min/kerta) toteutettiin kahdella koululla (koulut A ja B) kertaviikkoisesti kahdeksan kuukauden aikana kolmessa pienryhmässä. Pienryhmissä oli kahdesta neljään lasta. Vertailuryhmän lapsista jotkut saivat koululla muuta osa-aikaista erityisopetusta, pääasiassa lukemisen oppimisen tueksi. Vertailukoululla C lapset saivat tarvittaessa osa-aikaista erityisopetusta myös matemaattisissa taidoissa, mutta se ei perustunut mihinkään erityiseen harjoitusohjelmaan eikä muodostanut systemaattista harjoitusjaksoa. Viivästetty loppumittaus toteutettiin vain niissä kouluissa (A ja B), joissa harjoitusjaksokin toteutettiin. Kaikkien erityisopetustuntien pitäjät olivat päteviä erityisopettajia, joilla oli usean vuoden työkokemus. Kaikkien mittausten tekijä oli sama erityisopettaja, joka piti oppitunnit.

### 3.2.3 Mittarit

Matemaattisilta valmiuksiltaan heikkojen ryhmän lapset valittiin koululla käytössä olleen perustaitojen alkuseulan perusteella. Seulatehtävästä käytettiin BANUCA-testistä (Räsänen, 2005) irrotettua tehtäväyhdistelmää (lukumäärän vertailu, yhteenlasku, määrän ja luvun vastaavuus) sekä visuaalista hahmotustehtävää, jossa lapsen piti piirtää mallin mukainen kuvio vieressä olevaan tyhjiin pisteikköön. Alkuseulan osatehtävien perusteella heikkojen ryhmän ja tavanomaisesti suoriutuneiden lasten oppimisvalmiuksia (kouluvalmiudet ja oppimaan oppimisen taidot) arvioitiin tarkemmin Ensiaskeleet-tehtäväsarjalla (Hautamäki ym., 2010; Koulutuksen arviointikeskus, 2010). Lapset valittiin harjoitus- tai vertailuryhmään Lukukäsitetestin (Van Luit ym., 2006) tuloksen perusteella ja samalla testillä seurattiin heidän kehitystään. Testissä on kaikkiaan 40 tehtävää, joista 20 mittaa suhdetaitoja ja 20 lukujonotaitoja. Testin kokonaistuloksesta käytettiin nimitystä esimatemaattiset taidot. Harjoitusohjelmaan osallistuneiden lasten taitojen kehitystä arvioitiin lisäksi loppu- ja viivästetyssä loppumittauksessa BANUCA-testillä (Räsänen, 2005). Sen tehtäväosioista koottiin kolme kokonaisuutta: lukukäsitteen hallinta, laskutaito sekä koko testin yhteistulos. Mittarit on kuvattu tarkemmin liitteessä A.

### 3.2.4 Analyysit

Heikkojen ja tavanomaisesti suoriutuneiden lasten ryhmien vertailukelpoisuutta sukupuolen, iän ja oppimisvalmiuksien suhteen arvioitiin Mann-Whitneyn *U*-testillä. Harjoitus- ja vertailuryhmien välisiä eroja edellä mainituissa tekijöissä sekä esimatemaattisissa taidoissa arvioitiin niin ikään Mann-Whitneyn *U*-testillä. Lisäksi eri mittauskertojen välistä muutosta arvioitiin Friedmanin testin ja Wilcoxonin testin avulla. Efektikoot on laskettu jakamalla testin *Z*-arvo havaintojen määrän neliöjuurella (Field, 2009). Tulosten kuvailussa on käytetty hyväksi myös mittarien käsikirjoissa esitettyjä normiaineistoja.

### 3.2.5 Tulokset

Harjoitusryhmä oli tutkimuksen alussa esimatemaattisilta taidoiltaan selvästi vertailuryhmää jäljessä ja vastasi testin normiaineistoon verrattuna keskimäärin 6-vuotiaan tasoa. Harjoitusryhmä erosi heikompana erityisesti lukujonotaidoiltaan ( $p < .01$ ) ja siltä osin ryhmän lapset kuuluivat ikäryhmänsä heikoimpaan 10 prosenttiin. Suhdetaitojen hallinnassa ryhmien välillä ei ollut eroa. Harjoitusryhmän lapset saavuttivat vertailuryhmäläisiä etenkin lukujonotaidoissa, joissa ryhmien välillä ei ollut eroa harjoitusjakson päättyessä (loppumittaus). Siinä vaiheessa lasten taidot molemmissa ryhmissä kuuluivat testin normiaineistoon verrattuna ikäryhmänsä heikoimpaan kolmannekseen sekä lukujonotaitojen että koko testin tuloksen suhteen. Harjoitusryhmässä lasten keskinäiset erot luku-

jonotaidoissa (tulosten keskihajonta) olivat loppumittauksessa suurempia kuin alkumittauksessa. Viivästetyssä loppumittauksessa harjoitus- ja vertailuryhmien välillä ei ollut eroja, ja molemmissa ryhmissä lasten tulokset vastasivat normiaineiston 7½-vuotiaan keskimääräistä tasoa. Kummassakin ryhmässä lasten keskinäiset erot (ryhmien keskihajonta) olivat pienentyneet.

Harjoitusryhmän tulos lukukäsitteen ja laskutaidon hallinnan testissä (BANUCA) ensimmäisen luokan keväällä (loppumittaus) vastasi testin normiaineiston ensimmäisen luokan syksyn keskimääräistä tulosta sekä koko testin että sen lyhytversioiden osalta. Harjoitusryhmässä testin kokonaistulos oli loppumittauksessa merkitsevästi heikompi kuin vertailuryhmässä, mutta lyhyttesteissä ero ei ollut tilastollisesti merkitsevä. Viivästetyssä loppumittauksessa ryhmien välillä ei ollut merkitsevää eroa koko testin eikä lyhyttestien osalta. Molempien ryhmien tulokset kuuluivat normiaineistoon verrattuna ikäryhmänsä heikoimpaan neljännekseen.

Harjoitus- ja vertailuryhmissä tapahtui seuranta-ajalla merkitsevää muutosta esimatemaattisissa taidoissa kokonaisuutena sekä erikseen suhde- ja lukujonotaidoilla arvioituna. Esimatemaattisissa taidoissa tuloksen muutos oli harjoitusryhmässä voimakkaampaa ( $p < .05$ ) kuin vertailuryhmässä. Toteutetun intervention avulla pystyttiin vaikuttamaan harjoitusryhmäläisten esimatemaattisten taitojen, erityisesti lukujonotaitojen, kehitykseen. Lukukäsite- tai laskutaitojen kehitykseen ei toteutetulla interventiolla pystytty vaikuttamaan; ryhmien välillä ei ollut eroa tulosten muutosta tarkasteltaessa.

### 3.2.6 Johtopäätökset

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, voidaanko ensimmäisen luokan alussa esimatemaattisilta taidoiltaan heikkojen lasten matemaattisten taitojen kehitystä tukea systemaattisen harjoittelun avulla. Alkuarvion perustella esimatemaattisilta taidoiltaan kaikkein heikoimmista muodostettu harjoitusryhmä pystyi saavuttamaan alkujaan hieman vahvemmin suoriutunutta vertailuryhmää esimatemaattisissa taidoissa, erityisesti lukujonotaidoissa. Toteutetun intervention avulla pystyttiin vahvistamaan näiden taitojen kehitystä.

Harjoitusryhmässä lasten keskinäiset erot kasvoivat alku- ja loppumittauksen välillä, vertailuryhmässä näin ei tapahtunut. Harjoitusryhmän lasten väliset erot kuitenkin tasaantuivat viivästetyssä loppumittauksessa toisen luokan alussa. Mahdollisesti osalla lapsista taitojen kehitys vaati aikaa ja kypsymistä, ei pelkkää opetusta ja oppimista. Samankaltaiseen tulokseen on päädytty aiemmissakin tutkimuksissa (mm. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008). Suurin muutos harjoitusryhmäläisten taidoissa tapahtui alku- ja loppumittauksen välillä, sen jälkeen sekä harjoitus- että vertailuryhmän taitojen muutos oli samankaltaista. Voidaan ajatella, että interventiolla kyettiin antamaan siihen osallistuneille lapsille sellaista

tukea, että heidän taitojensa kehitys ei enää eronnut vertailuryhmän lasten taitojen kehityksestä. Samankaltaiseen tulokseen on päädytty aiemmin alle kouluikäisillä (Dyson ym., 2011). Osa lapsista kehittyi taidoissaan hyvinkin nopeasti (loppumittaukseen mennessä), ja heillä mahdollisesti alkujaan heikon suoriutumisen taustalla on ollut harjoituksen puute. Osalla hyötyminen oli vähäisempää eivätkä he saavuttaneet samalla tavoin muita lapsia. Mahdollisesti heillä on vähäisemmän hyötymisen taustalla muita oppimiseen vaikuttavia tekijöitä tai erityisiä matemaattisia vaikeuksia ja tuen tarve siten jatkuvampaa (mm. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008).

Harjoitusjakson sisällöt vaikuttivat oikean suuntaisilta, mutta mahdollisesti niissä olisi pitänyt painottaa vielä enemmän koulumatematiikkaan liittyviä käsitteitä ja sisältöjä, esimerkiksi aritmeettisten faktojen hallintaa ja laskustrategioita (ks. Clements & Sarama, 2011). Tulosten perusteella osa lapsista olisi tarvinnut tukea jo aiemmin, esiopetuksen tai varhaiskasvatuksen aikana, erityisesti lukumäärien havaitsemiseen sekä lukumäärän ja numeromerkin välisen yhteyden ymmärtämiseen (Chu, vanMarle & Geary, 2013; Göbel, Watson, Lervåg & Hulme, 2014). Jotta varhaisia oppimisaukkoja ei pääsisi syntymään, lasten taitojen kehitystä tulisi seurata säännöllisesti ja systemaattisesti. Ennakoiva tuki voisi ainakin joissakin tapauksissa ehkäistä syvempien taitovajeiden syntymistä.

### **3.3 Osatutkimus III**

#### **3.3.1 Tavoitteet**

Seurantatutkimuksen tarkoituksena oli selvittää laskemisen sujuvuuden yhteyttä lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden sekä lapsen sukupuolen ja vanhempien koulutuksen kanssa kolmen vuoden seuranta-aikana. Lisäksi aiemman laskemisen sujuvuuden, lukemisen sujuvuuden sekä nimeämisnopeuden avulla pyrittiin selittämään myöhempiä laskemisen sujuvuuden tuloksia.

#### **3.3.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus**

Tutkimus toteutettiin eteläsuomalaisen koulun kahdella yleisopetuksen luokalla lukuvuosina 2011–14. Suurin osa lapsista oli mukana myös osatutkimuksessa II, osa interventioon osallistuneiden ryhmässä. Tutkimukseen osallistuneet lapset ( $N = 43$ ) olivat seurannan alkaessa toisella luokalla (iän *ka* 96 kk, vaihteluväli 92–103 kk) ja heidän suoriutumistaan laskemisen ja lukemisen sujuvuustehtävissä seurattiin kaksi kertaa lukuvuodessa. Tutkimuksessa käytettyjä laskemisen ja lukemisen tietoja kerättiin osana oppimisen ja tuen tarpeen seuranta. Lisäksi seurannan loppuvaiheessa keväällä 2014 arvioitiin kaikkien siihen osallistuneiden lasten nimeämisnopeus ja huoltajilta kysyttiin heidän koulutustaustaansa.



Pääosan mittauksista teki tämän väitöskirjan tekijä, osan teetti koulun erityisopettaja.

### 3.3.3 Mittarit

Laskemisen sujuvuuden arvioinnissa käytettiin Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävää (TTT<sub>1</sub>) (Koponen ym., 2011) sekä Lukila- ja Lukima-kokeita (Tasola 1967, 1968, 1970). Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävästä käytettiin vain aikarajattujen yhteen- ja vähennyslaskujen yhteistulosta, Lukila I–II ja II–III sekä Lukima III-mittareista mekaanisten laskusuoritusten nopeutta mittaavia tehtäväsarjoja. Toisen ja kolmannen luokan laskemisen sujuvuuden tehtävissä oli päässä laskettavia yhteen- ja vähennyslaskuja, neljännellä luokalla yhteen-, vähennys- ja jälkimmäisellä mittauskerralla myös kertolaskuja sijoitettuna laskualgoritmiin. Laskemisen sujuvuuden arvioinnissa käytetyt Lukila- ja Lukimakokeet ovat asteittain vaikeutuvia. Lukemisen sujuvuutta arvioitiin toisella ja kolmannella luokalla ääneen lukemisen sujuvuuden perusteella. Arvioinnissa käytettiin toisella luokalla Tuen tarpeen tunnistamisen epäsanojen (TTT<sub>2</sub>) ja tekstin (TTT<sub>3</sub>) lukemisen listoja (Puolakanaho ym. 2011) sekä YTTE-testin Vilpe-tekstiä (Kajamies ym., 2003). Ääneen lukemisen mittauksissa sujuvuuden arviona käytettiin testiajassa oikein luettujen sanojen määrää. Neljännellä luokalla lukemisen sujuvuutta arvioitiin äänettömän sanantunnistuksen perusteella. Mittareina olivat Sanaketjutesti (Nevala & Lyytinen, 2000) ja ALLU teknisen lukutaidon testi 5B (Lindeman, 1998). Nimeämisnopeus arvioitiin Nopean sargallisen nimeämisen testillä (Ahonen ym., 2003). Käytetyt mittarit on kuvattu tarkemmin liitteessä A. Vanhempien koulutustaustaa kysyttiin kolmiportaisella asteikolla.

### 3.3.4 Analyysit

Laskemisen sujuvuuden tulosten vertailun mahdollistamiseksi eri luokka-asteiden välillä tulokset muutettiin prosenteiksi kunkin mittarin maksimipistemäärästä. Laskemisen sujuvuuden tuloksien yhteyttä eri luokka-asteiden välillä sekä yhteyttä lukemisen sujuvuuden, nimeämisnopeuden sekä muiden taustatekijöiden kanssa arvioitiin korrelaatiokertoimella (Pearson). Tyttöjen ja poikien välisiä mahdollista eroa laskemisen sujuvuudessa eri luokka-asteilla arvioitiin Mann-Whitneyn *U*-testillä. Kolmannen ja neljännen luokan laskemisen sujuvuuden tuloksia selitettiin regressioanalyysin avulla sekä aiemman laskemisen sujuvuuden että aiemman laskemisen sujuvuuden, lukemisen sujuvuuden ja nimeämisnopeuden erilaisilla yhdistelmillä.

### 3.3.5 Tulokset

Laskemisen sujuvuuden tulokset eri mittauskerroilla olivat tilastollisesti merkitsevässä ( $p < .01$ ) yhteydessä keskenään lukuun ottamatta ensimmäistä ja viimeistä mittauskertaa. Tulokset päässä lasketuissa aritmetiikan tehtävissä, erityisesti toisen luokan talvella arvioituna, olivat yhteydessä myös algoritmien avulla ratkaistujen tehtäväsarjojen tulosten kanssa. Kunkin lukuvuoden syksyn/talven ja kevään laskemisen mittaustuloksilla oli tilastollisesti merkitsevä ero niin, että kevään tulos oli parempi. Useimmat laskemisen ja lukemisen sujuvuuden mittaustulokset olivat tilastollisesti merkitsevässä yhteydessä keskenään niin, että sujuvuus toisessa taidossa liittyi sujuvuuteen myös toisessa. Ääneen lukemisen sujuvuus oli yhteydessä päässä laskettavien aritmetiikan tehtävien kanssa, mutta ei samassa määrin algoritmiin sijoitettujen laskujen sujuvuuden kanssa. Sen sijaan sanantunnistukseen perustuvat lukemisen sujuvuuden mittaustulokset olivat yhteydessä sekä päässä laskettavien että algoritmiin sijoitettujen laskujen sujuvuuden kanssa. Nimeämisen nopeudella ei ollut yhteyttä laskemisen sujuvuuden tulosten kanssa, ei myöskään vanhempien koulutuksella. Sukupuolella oli yhteyttä laskemisen sujuvuuden kanssa toisen luokan talvella ja kolmannen kevällä niin, että poikien tulokset olivat parempia ( $p < .05$ ), myöhemmin tyttöjen ja poikien tulosten välillä ei ollut eroa.

Kolmannen luokan kevään laskusujuvuuden tuloksista 66 prosenttia pystyttiin selittämään mallilla, jossa olivat mukana toisella luokalla arvioidut laskusujuvuudet ( $TTT_1$  ja Lukila I–II) ja epäsanojen lukemisen sujuvuus sekä esineiden nimeämisnopeus. Lähes yhtä korkeaan selitysosuuteen (63 %) päästiin käyttämällä selittäjänä ainoastaan toisen luokan talvella arvioitua laskemisen sujuvuutta (Lukila I–II). Neljännen luokan kevään laskusujuvuudesta (Lukima IIIA) kyettiin 21 prosenttia selittämään pelkästään toisen luokan talven laskusujuvuuden (Lukila I–II) tuloksella. Samaa tulosta kyettiin hieman heikommin selittämään sekä pelkästään kolmannen luokan laskemisen sujuvuudella (Lukila II–III) että yhdistämällä se esineiden nimeämisnopeuteen ja neljännen luokan syksyllä arvioitua lukemisen sujuvuuteen (Sanaketjutestin teknisen lukutaidon arvio).

### 3.3.6 Johtopäätökset

Tutkimuksen perusteella voitiin todeta, että toisella luokalla arvioitu aritmetiikan sujuvuus ennakoி hyvin myöhempää laskemisen sujuvuutta, myös laskualgoritmeja käytettäessä. Tulos on yhtenevä aiempien tutkimusten kanssa (Fuchs ym., 2006; Hecht ym., 2001; Koponen, Aunola ym., 2007). Lukemisen sujuvuus, vaikka olikin yhteydessä laskemisen sujuvuuden kanssa, ei merkittävästi lisännyt mallien kykyä selittää myöhempää laskemisen sujuvuutta verrattuna pelkän aiemman laskusujuvuuden selityskykyyn. Nimeämisnopeuden merkitys laskemisen sujuvuuden tulosten selityksen kannalta oli vähäisempi kuin oli ennakoitu

aiempien tutkimusten perusteella (Koponen, Aunola ym., 2007). Lasten suoriutumiserot laskemisen sujuvuudessa osoittautuivat varsin pysyviksi. Vaikka lukemisen sujuvuuden merkitys laskemisen sujuvuuden tuloksien selityksessä ei ollutkaan erityisen suuri, oli näiden taitojen sujuvuuden tuloksilla yhteyttä keskenään. Erityisesti äänetön sanantunnistus oli yhteydessä laskemisen sujuvuuden kanssa. Laskemisen ja lukemisen sujuvuuden välinen yhteys on todettu aiemmissakin tutkimuksissa (mm. Branum-Martin ym., 2012; Chong & Siegel, 2008; Koponen, Aunola ym., 2007), joskin on myös havaittu, ettei yhteys välttämättä ole suoraviivainen (Petrill ym., 2012).

Sekä laskemisen että lukemisen sujuvuuden tuloksia kannattaisi seurata yhdessä, esimerkiksi päällekkäistyneiden oppimisvaikeuksien toteamisen avuksi. Seuranta pitää jatkaa alkuluokkien jälkeenkkin, ja lukemisen sujuvuuden arvioinnissa kannattaa ääneen lukemisen rinnalla jo varhain käyttää sanantunnistukseen perustuvia mittareita. Tuen tarpeen tunnistamisen apuna pitäisi erityis- ja luokanopettajilla olla laskemisen sujuvuuden seurantaan soveltuvia mittareita, myös alkuluokkien jälkeen. Seurannassa havaitulle tuen tarpeelle laskemisen sujuvuudessa tarvitaan systemaattista harjoitusta, jossa lasta myös ohjataan erilaisten ratkaisustrategioiden käyttöön. Lisäksi mahdollisesti tarvitaan harjoitusmateriaaleja, joissa tuki kohdentuu sekä laskemisen että lukemisen sujuvuuteen.

### 3.4 Osatutkimus IV

#### 3.4.1 Tavoitteet

Seurantatutkimuksen tarkoituksena oli laskemisen ja lukemisen sujuvuuden muutoksen seuranta toiselta viidennelle luokalle lapsiryhmillä, jotka alkujaan olivat näiden taitojen sujuvuuden perusteella erilaisia. Lisäksi tarkasteltiin sujuvuudeltaan heikkojen lasten (ei-sujuva laskija, ei-sujuva lukija, ei-sujuva molemmissa taidoissa) yksilöllisiä suoritusprofiileja. Sekä ryhmä- että yksilötasolla tarkastelussa oli kognitiivisena taitona mukana nimeämisnopeus.

#### 3.4.2 Osallistujat ja tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin eteläsuomalaisen koulun kahdella yleisopetuksen luokalla lukuvuosina 2011–2015. Suurin osa seurantaan osallistuneista lapsista oli mukana myös osatutkimuksissa II ja III. Tutkimukseen osallistuneet lapset ( $N = 42$ ) olivat seurannan alkaessa kahdeksanvuotiaita (iän *ka* 96,1 kk) ja heidät jaettiin toisella luokalla arvioidun laskemisen ja lukemisen sujuvuuden perusteella eri ryhmiin: ei-sujuvat laskijat ( $n = 7$ ), ei-sujuvat lukijat ( $n = 8$ ), molemmissa taidoissa sujuvat ( $n = 31$ ). Yksilöllisiä suoritusprofiileja laadittaessa ei-sujuvien ryhmien päällekkäisyys poistettiin ja molemmissa taidoissa ei-sujuvia lapsia ( $n = 4$ ) tarkastellaan omana osaryhmänään. Lasten suoriutumista laskemisen ja luke-

misen sujuvuustehtävissä seurattiin viidennen luokan syyslukukaudelle saakka. Tutkimuksessa käytettyjä laskemisen ja lukemisen sujuvuuden tietoja kerättiin osana oppimisen ja tuen tarpeen seuranta. Lisäksi tutkimuksen loppuvaiheessa keväällä 2014 arvioitiin kaikkien siihen osallistuneiden lasten nimeämisnopeus. Pääosan mittauksista teki tutkimuksen tekijä, neljännen ja viidennen luokan mittauksista osan teetti koulun erityisopettaja.

### 3.4.3 Mittarit

Lasten ryhmittely laskemisen sujuvuuden perusteella sujuvien ja ei-sujuvien ryhmiin tehtiin Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävällä (TTT<sub>1</sub>) (Koponen ym., 2011). Siitä käytettiin vain aikarajattujen yhteen- ja vähennyslaskujen yhteistulosta. Laskemisen sujuvuuden seurannassa käytettiin Lukila- ja Lukimakoikeita (Tasola, 1967, 1968, 1970). Näistä mittareista käytettiin mekaanisten laskusuoritusten nopeutta mittaavia tehtäväsarjoja, ja lapsen saamaa oikeiden vastausten määrää käytettiin sujuvuuden mittana. Toisella ja kolmannella luokalla käytetyissä Lukila I–II ja Lukila II–III-kokeiden tehtävissä oli päässä laskettavia yhteen- ja vähennyslaskuja. Neljännellä luokalla käytetyssä Lukima IIIA-kokeessa oli yhteen- ja vähennyslaskuja sijoitettuna laskualgoritmiin, Lukima IIIB-kokeessa lisäksi kertolaskuja laskualgoritmissa. Lukila- ja Lukima-kokeet ovat asteittain vaikeutuvia. Viidennen luokan syksyllä lasten peruslaskutaitojen hallintaa arvioitiin RMAT-testillä (Räsänen, 2004), jossa neljän peruslaskutoimituksen lisäksi on tehtäviä murto- ja desimaaliluvuilla, mittayksikkömuunnoksia sekä yhtälönratkaisua.

Lasten ryhmittely lukemisen sujuvuuden perusteella sujuvien ja ei-sujuvien ryhmiin tehtiin Tuen tarpeen tunnistamisen arviointitehtävän (Puolakanaho ym., 2011) epäsanojen (TTT<sub>2</sub>) ja tekstin (TTT<sub>3</sub>) ääneen lukemisen perusteella. Kolmannellakin luokalla lukemisen sujuvuus arvioitiin ääneen lukemisen perusteella. Mittarina käytettiin YTTE-testin Vilpe-tekstiä (Kajamies ym., 2003). Ääneen lukemisen mittauksissa sujuvuuden arviona käytettiin testiajassa oikein luettujen sanojen määrää. Neljännellä ja viidennellä luokalla lukemisen sujuvuutta arvioitiin äänettömän sanantunnistuksen avulla. Mittarina käytettiin ALLU-lukutestin teknisen lukutaidon testejä 5A ja 5B (Lindeman, 1998). Näissä testeissä lapsen tulee testiajassa erottaa sanaketjujen sanat toisistaan viivoilla. Sujuvuuden arviona käytettiin löydettyjen sanojen määrää. Nimeämisnopeus arvioitiin Nopean sarjallisen nimeämisen testillä (Ahonen ym., 2003), josta käytettiin neljää osatestiä (värit, kirjaimet, numerot ja esineet). Käytettyjen mittarien tarkempi kuvaus on liitteessä A.

### 3.4.4 Analyysit

Ei-sujuvien ryhmän kriteerinä oli lapsen tuloksen jääminen tässä aineistossa heikoimpaan 15 prosenttiin toisen luokan ensimmäisellä mittauskerralla. Lukemisen sujuvuutta arvioitaessa riitti, että lapsen tulos oli heikko joko epäsanojen tai tekstin lukemisessa. Sujuvuudeltaan erilaisten lapsiryhmien laskemisen ja lukemisen mittaustuloksissa, nimeämisnopeudessa sekä sukupuoli- ja ikäjakauksessa ilmeneviä mahdollisia eroja tarkasteltiin Mann-Whitneyn  $U$ -testin avulla. Efektikoot on laskettu jakamalla testin  $Z$ -arvo havaintojen määrän neliöjuurella (Field, 200). Yksilöllisiä suorituskuvaajia laadittaessa eri mittarien tulokset muunnettiin  $z$ -pisteiksi, jotta niistä saatiin paremmin keskenään verrattavia.

### 3.4.5 Tulokset

Kumpikaan ei-sujuvien lasten ryhmä ei eronnut sujuvien ryhmästä iän eikä sukupuolijakauman suhteen. Laskemisen sujuvuudessa ei-sujuvien laskijoiden ryhmän tulokset olivat seurannan alkuvaiheessa selvästi heikompia ( $p < .01$ ) kuin sujuvien tulokset, mutta tulosten eron merkitsevyys heikkeni seurannan aikana eikä viidennellä luokalla ollut enää merkitsevää. Ei-sujuvien laskijoiden ryhmällä myös lukemisen sujuvuus oli keskimääräistä heikompaa ( $p < .05$  ja  $p < .01$ ) yhtä mittauskertaa lukuun ottamatta. Ei-sujuvien lukijoiden tulokset laskemisen sujuvuudessa olivat sujuvia heikompia toisen ja kolmannen luokan jälkimmäisillä mittauserroilla ( $p < .05$ ). Ei-sujuvien lukijoiden ryhmä oli lukusujuvuudeltaan selvästi sujuvien ryhmää heikempi kaikissa ääneen lukemisen mittauksissa ( $p < .01$ ). Neljänneltä luokalta alkaen ei-sujuvien lukijoiden tulokset eivät eronneet sujuvien tuloksista laskemisessa eivätkä lukemisessa. Nimeämisnopeudeltaan ei-sujuvien laskijoiden ryhmä ei eronnut sujuvista. Sen sijaan ei-sujuvilla lukijoilla oli hitautta sekä kirjainten että numeroiden nimeämisessä ( $p < .05$ ) sujuviin verrattuna.

Yksilötarkastelussa lapset, joilla toisella luokalla oli hitautta vain joko laskemisen tai lukemisen sujuvuudessa, saavuttivat laskusujuvuudessa keskimääräisen tason viimeistään viidennellä luokalla. Sen sijaan molemmissa taidoissa ei-sujuvat lapset pysyivät sujuvuudeltaan keskitasoa heikompina sekä laskemisessa että lukemisessa. Lapset, joilla alkujaan oli hitautta vain lukemisessa, paransivat lukusujuvuuttaan vähintään keskitasoiseksi neljännellä luokalla, kun se arvioitiin sanantunnistuksen perusteella. Sen sijaan lapset, joilla alkujaan oli hitautta vain laskusujuvuudessa, olivat jopa hitaampia sanantunnistuksessa kuin ääneen lukemisessa. Nimeämisen hitautta oli useilla lapsista, joilla oli hitautta lukemisen sujuvuudessa (joko yhdessä laskemisen sujuvuuden hitauden kanssa tai ilman sitä). Molemmissa taidoissa ei-sujuvista lapsista kahdella oli huomattavaa hitautta useissa osatehtävissä, erityisesti esineiden nimeämisessä.

### 3.4.6 Johtopäätökset

Tutkimuksen tavoitteena oli seurata laskemisen ja lukemisen sujuvuuden muutosta sujuvuudeltaan alkujaan erilaisilla lapsiryhmillä kolmen vuoden ajan sekä kuvata ei-sujuvien lasten yksilöllisiä suoritusprofiileja. Seurannan perusteella havaittiin, että ei-sujuvien laskijoiden ryhmän laskusujuvuuden tulosten ero sujuvien ryhmän tulosten kanssa pieni seuranta-aikana eikä ollut merkitsevä enää viidennellä luokalla. Laskusujuvuuden eron pieneminen sujuviin nähden on yhdenmukainen aiemman tutkimuksen (Paukkeri ym., 2015) kanssa. Sujuvuusero pieni, kun laskutehtävien ratkaisussa käytettiin laskualgoritmeja. Vastaavaa on havaittu myös aiemmissa tutkimuksissa (Chong & Siegel, 2008). On myös mahdollista, että alkujaan ei-sujuvien laskijoiden ryhmä paransi suoriutumistaan lähinnä matematiikan muilla osa-alueilla kuin aritmetiikassa, ja eron pieneminen erityisesti viidennellä luokalla johtuisi tästä. Tämä olisi myös aiempien tutkimusten mukaista (mm. Dowker, 1998; Jordan ym., 2009). Tätä mahdollisuutta tukisi se, että muiden luokkien mittauksista poiketen viidennellä luokalla mukana oli esimerkiksi mittayksikkömuunnoksia ja laskutoimituksia murtoluvuilla. Lapsiryhmätasolla laskemisen sujuvuuden hitauteen vaikutti liittyvän työläyttä myös lukemisen sujuvuudessa, kuten aiemmissakin tutkimuksissa on havaittu (Chong & Siegel, 2008; Compton ym., 2012; Jordan ym., 2002).

Alkujaan ei-sujuvien lukijoiden ryhmässä laskusujuvuus oli pääsääntöisesti sujuvien ryhmän tasolla. Sujumattomuus lukemisessa ei aiemmissakaan tutkimuksissa ole välttämättä tarkoittanut sujumattomuutta myös laskemisessa (Jordan ym., 2003; Landerl ym., 2009). Alkujaan ei-sujuvien lukijoiden ryhmä saavutti keskitasoisen lukusujuvuuden neljännellä luokalla, kun se arvioitiin äännettömän sanantunnistuksen perusteella. Tämä voisi kertoa siitä, että sujuvuus liittyy eri asiaan ääneen lukemisessa kuin äännettömässä lukemisessa. Nimeämisnopeuden hitaus liittyi ryhmätasolla selvemmin lukemisen kuin laskemisen sujuvuuden hitauteen, kuten on todettu aiemminkin (Landerl ym., 2009).

Lasten yksilöllisiä suoritusprofiileja tarkasteltaessa havaittiin, että mikäli lapsella oli alkujaan hitautta ainoastaan laskemisen sujuvuudessa, hän saavutti siinä sujuvien tason viidennellä luokalla. Lukemisen sujuvuuden muutoksessa lasten suoritusprofiileissa oli eroa sen mukaan, kummassa taidossa (laskeminen vai lukeminen) sujuvuus alkujaan oli ollut heikkoa. Pelkästään laskemisessa ei-sujuvilla lapsilla ääneenlukemisen sujuvuus saattoi olla kohtalaisen hyvää, sanantunnistuksessa parhaimmillaankin keskitasoista. Sen sijaan useat lapset, joilla alkujaan oli hitautta ainoastaan lukemisen sujuvuudessa, suoriutuivat paremmin sanantunnistuksen kuin ääneenlukemisen tehtävissä. Heistä osa oli laskusujuvuudeltaan erittäin taitavia, ja kaikki olivat sujuvien tason tuntumassa useimpina mittauskertoina. Lasten yksilölliset suoritusprofiilit vahvistavat tältä osin aiempia tuloksia laskemisen ja lukemisen sujuvuuden erillisyydestä (Cirino ym., 2015; Compton ym., 2012; Willburger ym., 2008). Lapsista, joilla sujuvuus oli heikkoa sekä laskemisessa että lukemisessa, kukaan ei saavuttanut pysyvästi

sujuvien tasoa kummassakaan taidossa. Tämäkin tulos on yhtenevä aiempien kanssa päällekkäisten laskemisen ja lukemisen pulmien vaikutuksista (mm. Cirino ym., 2015; Jordan ym., 2002). Nimeämisen hitaus liittyi erityisesti lapsiin, joilla oli heikko lukemisen sujuvuus joko erillisenä tai yhdessä heikon laskemisen sujuvuuden kanssa, ja sama on todettu aiemmissakin tutkimuksissa (Cirino ym., 2015; Willburger ym., 2008).

Tutkimus vahvistaa aiempia tuloksia päällekkäisten laskemisen ja lukemisen vaikeuksien vaikutuksista (Cirino ym., 2015; Landerl ym., 2009; Vukovic & Siegel, 2010). Lasten oppimisen ja tuen tarpeen seurannassa pitäisi huomioida sekä laskemisen että lukemisen taidot, ja taitojen sujuvoitumista pitää seurata systemaattisesti myös alkuluokkien jälkeen. Tuen tarpeen arvion pitää suunnata tuki oikea-aikaisesti oikeille lapsille ja ohjata toteutettavan tuen sisältöä. Erityistä huomiota on kiinnitettävä lapsiin, joilla sujuvuuden pulmia on sekä laskemisessa että lukemisessa. Mahdollisesti heillä on taustalla yleisempiä kognitiivisten taitojen vaikeuksia, jotka vaikuttavat molempiin akateemisiin taitoihin ja vaativat erityisiä tukitoimia.

## 4 Johtopäätökset ja pohdinta

Tällä väitöskirjalla oli kaksi päätavoitetta. Ensimmäkin seurata laskemisen sujuvuuden kehitystä toiselta viidennelle luokalle ja tutkia sen yhteyttä aiemman laskemisen sujuvuuden, lukemisen sujuvuuden, nimeämisnopeuden, lapsen sukupuoli- ja vanhempien koulutuksen kanssa. Toisena päätavoitteena oli tarkastella kahden alakouluikäisille suunnatun harjoitusohjelman kykyä vaikuttaa lasten matemaattisiin taitoihin. Tutkimuksen kohderyhmänä olivat alakouluikäiset lapset (7–12-vuotiaat) ja päähuomio oli heikoissa osaajissa (heikoin 11–25 %). Sekä interventio- että seurantatutkimuksissa saattoi olla mukana matemaattisilta taidoiltaan heikoimpaan kymmenekseen kuuluvia lapsia, joiden vaikeuksien syvyyttä ei siihen mennessä ollut havaittu. Tutkimuksen päätulokset ja niiden merkityksen pohdinta esitetään tutkimuskysymysten mukaisessa järjestyksessä: ensin laskemisen sujuvuutta ja sen yhteyksiä käsittelevät tulokset, sitten harjoitusohjelmien vaikuttavuuden tulokset.

### 4.1 Päätulokset

Lasten laskemisen sujuvuus eri luokka-asteilla oli pääosin voimakkaasti yhteydessä ( $p < .01$ ) keskenään eli lasten laskemisen sujuvuus suhteessa muiden lasten laskemisen sujuvuuteen pysyi kohtalaisen muuttumattomana toiselta viidennelle luokalle. Vastaava tulos sujuvuuden erojen pysyvyydestä kouluikässä on saatu aiemminkin (Paukkeri ym., 2015). Laskemisen ja lukemisen sujuvuuden tuloksilla oli yhteyttä useimmilla mittauskerroilla ( $p < .01$  ja  $p < .05$ ). Ääneen lukemisen sujuvuus oli yhteydessä päässä laskettavien aritmetiikan tehtävien sujuvuuden kanssa, ääneton sanantunnistus sekä päässä että algoritmien avulla laskettavien tehtävien sujuvuuden kanssa. Sukupuolella oli yhteyttä laskemisen sujuvuuden kanssa toisen ja kolmannen luokan lopussa niin, että pojat olivat sujuvampia päässälaskijoita, sen jälkeen eroa sukupuolten välillä ei ollut (ks. myös Aunola ym., 2004; Jordan ym., 2002; Metsämuuronen, 2010; Paukkeri ym., 2015). Vanhempien koulutuksella ei ollut yhteyttä lasten laskemisen sujuvuuden kanssa, ei algoritmien avulla laskettaessa, toisin kuin aiemmin on havaittu (Koponen, Aunola ym., 2007). Myöskään nimeämisnopeudella ei havaittu yhteyttä koko lapsiryhmän tasolla laskemisen sujuvuuden kanssa. Yhteyttä kuitenkin ilmeni yksilötasolla ja eri sujuvuusryhmien tarkasteluissa, kuten aiemmissakin tutkimuksissa on todettu (Cirino ym., 2015; Heikkilä ym., 2009; Landerl ym., 2009; Willburger ym., 2008).

Alakoululaisten laskemisen sujuvuutta kyettiin parhaiten selittämään lapsen aiemmalla laskemisen sujuvuudella. Toisella luokalla arvioidulla laskemisen sujuvuudella kyettiin selittämään 66 prosenttia kolmannen luokan kevään las-



kusujuvuuden tuloksista ja vielä 20 prosenttia neljännen luokan keväänkin tuloksista. Aiemman laskemisen sujuvuuden kyky selittää myöhempää on yhtenevä muiden tutkimusten kanssa (Geary, 2004; Krajewski & Schneider, 2009; Landerl ym., 2009) ja selitysosuus on ollut niissä jopa suurempi (Krajewski & Schneider, 2009). Lukemisen sujuvuus, nimeämisnopeus, lapsen sukupuoli tai vanhempien koulutus eivät lisänneet merkittävästi selitysosuutta. Mahdollisesti nimeämisnopeuden selitysosuus olisi ollut merkittävämpi, jos se olisi arvioitu jo koulun alkuvaiheessa, koska aiemmissa tutkimuksissa alle kouluikäisenä tai koulun alkuvaiheessa arvioitu nimeämisnopeus on selittänyt myöhempää laskemisen sujuvuutta (Gersten ym., 2005; Hecht ym., 2001; Krajewski & Schneider, 2009). Tässä tutkimuksessa havaittiin pienten lukujen päässä laskujen hallinnan (toisella luokalla arvioitu laskusujuvuus) olevan erittäin tärkeää myöhemmälle, algoritmien avulla ratkaistavien laskujen sujuvuudelle (neljännellä luokalla arvioitu laskemisen sujuvuus), ja tulos on yhdenmukainen aiempien kanssa (esim. Fuchs ym., 2006; Gersten ym., 2005). Tämä korostaa myös varhaisen tuen merkitystä laskemisen sujuvuuden kehityksen tukemisessa. Vaikka lapset usein saavuttavat muita taidoissaan käyttäen mekaanisesti algoritmeja, laskemisen sujuvuuden heikkous on todettu pysyvämmäksi (Chong & Siegel, 2008).

Ryhmätarkastelussa lapset, jotka olivat sujuvuudeltaan heikkoja laskijoita toisella luokalla, olivat usein suhteellisen heikkoja myös lukemisen sujuvuudessa, sekä ääneen että äänettömästi luettaessa. Sen sijaan toisella luokalla lukemisessa ei-sujuvien ryhmässä ei välttämättä esiintynyt pulmia laskemisen sujuvuudessa. Lisäksi tämän ryhmän lukemisen sujuvuus parani sujuvien tasolle siirryttäessä äänettömään sanantunnistukseen. Mikäli lapsella oli sujuvuuden pulmia vain joko laskemisessa tai lukemisessa, hän saavutti laskemisen sujuvuudessa keskimääräisen tason viimeistään viidennellä luokalla (ks. myös Paukkeri ym., 2015). Ehkä alkujaan ei-sujuvat laskijat ovat saaneet tukea matemaattisiin taitoihinsa, ja tämä on auttanut heitä kuroma taitoeroa tai ehkä he ovat edistyneet erityisen hyvin matematiikan muilla osa-alueilla (ks. Dowker, 2015; Jordan ym., 2009). Tämä sujuvuuseron kaventuminen voi johtua myös siitä, että alkujaan laskemisen sujuvuudeltaan tavanomaisesti suoriutuneet eivät ole parantaneet tuloksiaan samassa määrin kuin alkujaan ei-sujuvat (ks. esim. Martin ym., 2012). Alkujaan ei-sujuvien laskijoiden lukemisen sujuvuudessa tapahtui heikentymistä muihin verrattuna erityisesti sanantunnistusvaiheessa neljännen luokan lopulla. Tämä näkyi sekä ryhmä- että yksilötarkastelussa. Lapset, joilla oli sujuvuuspulmia sekä laskemisessa että lukemisessa, eivät useinkaan saavuttaneet keskitasoa kummassakaan taidossa.

Nimeämisen hitaus, erityisesti kirjainten ja numeroiden osalla, oli tavallisempaa lukemisessa kuin laskemisessa ei-sujuvilla lapsilla. Nimeämisen hitauden liittyminen lähinnä lukemisen pulmiin on yhtenevä aiempien tutkimusten kanssa (Georgiou ym., 2013; Heikkilä ym., 2009). Yksilötarkastelussa lapsilla, joilla sujuvuus oli heikkoa sekä laskemisessa että lukemisessa, oli hitautta erityisesti

värien ja esineiden nimeämisessä. Koska aiemmissa laskemisen sujuvuuden ja niemämisnopeuden yhteyksien tutkimuksissa on käytetty nimeämisnopeuden arvioinnissa vain muutamaa osatestiä, on vertailu osatestien tulosten suhteen hankalaa. Värien nimeämisen hitauden yhteys laskemisen sujuvuuden kanssa on todettu aiemminkin (Mazzocco & Grimm, 2013), esineiden nimeämisen hitaus samoin, joskin yhdessä lukujonotaitojen kanssa (Koponen, Aunola ym., 2007; Koponen ym., 2016).

Tutkimuksessa käytetyillä harjoitusohjelmilla, erityisesti jälkimmäisellä, kyettiin vahvistamaan niihin osallistuneiden lasten matemaattisia taitoja. Lapset, jotka osallistuivat interventioihin ensimmäisellä ja toisella luokalla, kykenivät saavuttamaan oman luokka-asteensa matemaattisten taitojen tasoa. Erityisesti varhaisten matemaattisten taitojen (erityisesti lukujonotaidot) tukemisessa onnistuttiin hyvin. Mikäli interventioon osallistunut lapsi oli kolmannella tai neljännellä luokalla, harva heistä kykeni saavuttamaan oman luokka-asteensa keskimääräistä matemaattista taitotasoa, vaikka useimmat selvästi hyötyivät harjoitusjaksoista. On myös huomattava, että osalla niukasti hyötyneistä kolmas- ja neljäsluokkaisista lapsista ilmeni interventiotutkimuksen aikana muita merkittäviä oppimisvaikeuksia. Merkittävintä interventioista hyötyminen olikin lapsilla, joilla matemaattisiin vaikeuksiin ei liittynyt muuta merkittävää oppimisen pulmaa, esimerkiksi tarkkaavuuden tai kielen vaikeutta. Saadut tulokset interventioiden hyödyistä ovat yhteneviä aiempien kanssa sekä lasten edistymisen (Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca, Funk ym., 2008; Fuchs ym., 2007) että intervention toteutuksen luokka-asteen vaikutuksen suhteen (Kaufmann ym., 2003). Myös aiemmissa tutkimuksissa on todettu, että harjoitusohjelmista hyötyminen on nopeampaa lapsilla, joilla ei ole esimerkiksi merkittäviä kielellisiä oppimisvaikeuksia (Koponen, Aro ym., 2007; Mentula, 2004). Harjoitusjakson keston pidennys olisi mahdollisesti auttanut osaa niistä nuorimmista lapsista, joilla hyöty nyt oli niukempi (ks. esim. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Kantelinen, 2013). Saattoi myös olla, että osalla heistä oli muita, vielä tarkemmin tunnistamattomia erityisvaikeuksia esimerkiksi kielellisissä tai toiminnanohjauksen taidoissa.

## 4.2 Tutkimuksen teoreettinen merkitys

Väitöskirjan kahdessa osatutkimuksessa seurattiin laskutaidon sujuvuuden muutosta kolmen kouluvuoden aikana. Seurannassa tuli selvästi esille se, että lasten väliset yksilölliset erot laskemisen sujuvuudessa pysyivät kohtalaisen muuttumattomina ajankohdasta toiseen. Lisäksi tuloksissa havaittiin päässä laskettavien laskujen sujuvuuden merkitys algoritmien avulla laskettavien tehtävien sujuvuudelle. Tämä korostaa aritmeettisten faktojen ja päässä laskustrategioiden hallinnan merkitystä myöhemmälle yleiselle matemaattiselle osaamiselle, esimerkiksi

juuri algoritmien avulla suoritettavien laskutoimitusten sujuvuudelle (ks. esim. Fuchs ym., 2006; Geary, 2011; Gersten ym., 2005) ja todennäköisesti myös sanallisten tehtävien ratkaisutaidolle ja ongelmanratkaisulle (Fuchs ym., 2006). Varhaiset matemaattiset taidot (mm. lukujonotaidot) ovat puolestaan merkittäviä ensimmäisen luokan matematiikan oppisisältöjen omaksumiselle, esimerkiksi yhteen- ja vähennyslaskujen sekä laskustrategioiden hallinnalle (mm. Locuniak & Jordan, 2008). Laskemisen sujuvuuden kehitystä voidaan vahvistaa päässä laskustrategioita harjoittamalla (ks. Gersten ym., 2005). Tutkimuksessa havaittu päässä laskemisen sujuvuuden merkitys algoritmien avulla suoritettujen laskujen sujuvuudelle on yhdenmukainen aiempien tutkimusten tulosten kanssa aritmetiikan taitojen kehityksestä (Dowker, 1998; Geary, 2011; Gersten ym., 2005) sekä sujuvuuden merkityksestä matemaattisten vaikeuksien ennakoinnissa (Geary, 2004; Hart ym., 2010; Mazzocco ym., 2008; Petrill ym., 2012; Vukovic & Siegel, 2010). Todennäköisesti, mikäli lapsen laskeminen sekä päässä että algoritmien avulla on kyllin sujuvaa, jää hänellä myös enemmän resursseja käytettäväksi tehtävän vaatimaan päättelyyn (esim. Carr & Alexeev, 2011; Fuchs ym., 2006; Locuniak & Jordan, 2008). Matemaattisten oppimisvaikeuksien ennakoinnin kannalta laskemisen sujuvuuden suhteellinen pysyvyys muihin nähden on merkittävä havainto. Oppimisvaikeuksien tunnistamiseksi, tuen suuntaamiseksi ja tuesta hyötymisen arvioimiseksi tarvittaisiin standardoituja laskemisen sujuvuuden mittareita myös toiselta luokalta eteenpäin. Tätä tukee myös pitkätaistutkimusten tuloksiin pohjaava havainto, että matemaattisen osaamistason eriytyminen tapahtuu jo varhaisina kouluvuosina (Aunola ym., 2004; Metsämurtonen & Tuohilampi, 2017). Toisaalta on huomattava, että joillakin lapsilla matemaattinen ajattelu voi olla melko vahvaa, vaikka itse laskusuoritus tapahtuisikin melko hitaasti (matemaattisten taitojen kehityksestä tarkemmin esim. Dowker, 1998).

Merkittävä teoreettinen havainto laskemisen sujuvuuden suhteellisen pysyvyyden lisäksi oli laskemisen ja lukemisen sujuvuuden yhteys. Päässä laskujen laskemisen sujuvuudella oli yhteyttä erityisesti ääneen lukemisen sujuvuuden kanssa, sanantunnistuksen sujuvuus oli yhteydessä sekä päässä laskujen että algoritmien avulla ratkaistavien tehtävien sujuvuuden kanssa. Sanantunnistuksen yhteys laskemisen sujuvuuden kanssa voisi liittyä sen vaatimaan ortografiseen prosessointiin, koska laskutehtäviin vastattiin kirjallisesti eikä suullisesti. Voi myös olla, että näissä tehtävissä tarkkaavuuden ja toiminnanohjauksen tai prosessointinopeuden merkitys korostui (esim. Fuchs ym., 2006; LeFevre ym., 2013). Joka tapauksessa on syytä seurata molempien taitojen (laskeminen ja lukeminen) sujuvuuden kehitystä, koska osa lapsista saattaa tarvita tukitoimia erityisesti siirryttäessä lukemisessa enenevästi sanantunnistukseen ja laskemisessa laskualgoritmien käyttöön. Kuitenkin, vaikka laskemisen ja lukemisen sujuvuudella oli yhteyttä, lukemisen sujuvuus ei ollut erityisen merkittävä tekijä selitettäessä myöhempää laskemisen sujuvuutta. Pääasiassa myöhempi laskemi-

sen sujuvuus oli selitettävissä aikaisemmalla laskemisen sujuvuudella. Tämä tulos tukee aiempien tutkimusten päätelmiä siitä, että matemaattiset ja lukemisen vaikeudet ovat erillisiä, mutta ne voivat esiintyä yhdessä esimerkiksi yhteisten tai keskenään korreloivien kognitiivisten taitojen heikkouksien (esimerkiksi nimeämistä vaikeus) vuoksi (Compton ym., 2015; Hannula, Lepola & Lehtinen, 2010; Koepke & Miller, 2013; Landerl ym., 2009). Tämän väitöskirjan tutkimuksissa nimeämisen hitaus liittyi erityisesti lukemisen hitauteen. Lapset, joilla oli hitautta laskemisen lisäksi lukemisen sujuvuudessa, olivat nimeämisenopeudeltaan pelkästään laskemisessa ei-sujuvia lapsia hitaampia, kuten aiemmissakin tutkimuksissa on havaittu (Cirino ym., 2015; Willburger ym., 2008).

Lisäksi tutkimus osoitti, että alakouluikäisten lasten matemaattisia taitoja voidaan usein tukea systemaattisesti etenevillä tutkimukseen perustuvilla harjoitusjaksoilla. Paras hyöty interventiolla saadaan, kun se toteutetaan mahdollisimman varhain, koulussa ensimmäisellä tai toisella luokalla (ks. myös Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Dyson ym., 2013). Interventioon osallistuneilla ylempiluokkalaisilla oli nytkin yksilötasolla hyötymistä, vaikka muiden ikätoverien osaamistasoa ei saavutettu. Tämä tulos on vastaava kuin aiemmissa tutkimuksissa (Burns ym., 2012; Kajamies ym., 2010; Kaufmann ym., 2003). Toistaiseksi Suomessa on vielä melko niukasti tutkimukseen perustuvia harjoitusmateriaaleja ja opetuksellisten interventioiden vaikuttavuustutkimuksia (Aro ym., 2015; Björn ym., 2015). Olisi tärkeää saada tutkimuksissa käytetyt ja hyväiksi osoittautuneet toimintatavat sekä toiminnan joustava muuttaminen oppimisen seurannan pohjalta osaksi opetuskäytänteitä (esim. Hakkarainen ym., 2014). Matemaattisissa taidoissa tukea tarvitsevan lapsen opetuksessa tulisi käyttää monipuolisia menetelmiä ja laadukkaan perusopetuksen ohessa ensisijaisia ovat tutkimusperustaiset tukimuodot (Aro, 2015; Cook, Tankersley, Cook & Landrum, 2008).

Vaikka tämän tutkimuksen tarkoituksena ei ollutkaan verrata lasten laskemisen sujuvuutta tällä hetkellä aiempina vuosikymmeninä mitattuun laskemisen sujuvuuteen, asia nousi esille käytettyjen mittarien (Lukila- ja Lukima-kokeet) takia. Laskemisen sujuvuuden tulokset erityisesti neljännellä luokalla jäivät tässä tutkimuksessa suhteellisen heikoiksi, kun niitä arvioitiin vanhoilla kansa- ja peruskoulun mekaanisten laskusuoritusten kokeilla. Tässä tutkimuksessa nämä mittarit oli valittu niin, että niitä käytettiin vuosiluokkaa ylempänä kuin alun perin oli tarkoitettu (eli esimerkiksi 4.luokalla käytetty koe Lukima IIIA oli tarkoitettu peruskoulun kolmannen luokan syyslukukaudelle, IIIB kevätlukukaudelle). Verrattaessa lasten laskemisen sujuvuutta yli neljänkymmenen vuoden takaisin, vuosiluokkaa alempien lasten normiarvoihin (skaala 4–10) tällä hetkellä toisella luokalla olevien lasten keskimääräiset tulokset sijoittuivat ensimmäisen luokan normiarvoon 9–10, kolmannella luokalla toisen luokan normiarvoon 8–9 ja neljännellä luokalla kolmannen luokan normiarvoon 7 (Tasola, 1967, 1970). Laskemisen sujuvuus ei näytä lisääntyvän nykyisin samalla tavoin kuin 1970-

luvulla. Suomalaisten neljäsluokkalaisten peruslaskutaitojen hallinnan heikentyminen on todettu myös TIMMS-tutkimuksessa (Vettenranta ym., 2016). Myös arvioinneissa peruskoulun kuudes- ja yhdeksäsluokkalaisten matematiikan taidoissa näkyy laskua 2000-luvulla (Hautamäki ym., 2013). Pitkittäisaineiston perusteella on tehty havainto, että matemaattisessa osaamistasossa eriytyminen tapahtuu jo varhain (Metsämuuronen, 2017). Lisäksi on kiinnitetty huomiota peruslaskutaidon hallintaan esimerkiksi peruskoulun päättövaiheessa (Julin & Rautopuro, 2016). Tämän väitöskirjatutkimuksen tulokset tukevat näitä havain-toja.

### 4.3 Ehdotuksia käytännön opetustyöhön

Peruskoulun opetussuunnitelmassa mainitaan matematiikan tavoitteissa, että oppilaan osaamista ja taitojen kehitystä seurataan säännöllisesti, oppimiselle varataan riittävästi aikaa ja taitojen omaksumista tuetaan systemaattisesti (Opetushallitus, 2014). Oppilailla on myös oltava mahdollisuus saada opetusta aiempien vuosiluokkien keskeisimmistä sisällöissä, mikäli se on hänelle tarpeen. Opetussuunnitelmassa mainitaan matematiikan oppisisällöissä myös ajattelun taidot. Koko opetusryhmän opetuksen tehostamisella on meta-analyysien mukaan todettu olevan suurin vaikutus matematiikan oppimisen tehostumiselle (Dennis ym., 2016), siksi tavanomaiseen oppituntiin valituilla sisällöillä ja opetuksen toteuttamistavalla on suuri merkitys.

Osa lapsista tarvitsee voimallisempia tukitoimia matemaattisten taitojen omaksumisen tueksi. Näiden lapsien tunnistamiseksi kaikkien lasten oppimisen säännöllinen, systemaattinen seuranta on välttämätöntä. Seurannan tulisi alkaa jo varhaiskasvatuksessa, jotta matemaattiset valmiudet tulevat huomioiduksi samalla tavoin kuin kielelliset valmiudet. Myös tukitoimien vaikuttavuuden seurannan on oltava systemaattista (esim. RTI-malli, interventiovastemalli), jotta tukea tarvittaessa muokataan ja sen astetta muutetaan lapsen edistymisen mukaan (mm. Aro, 2015; Björn ym., 2015; Clarke ym., 2011; Fuchs ym., 2007). Tämän väitöskirjan tutkimuksissa korostui laskemisen sujuvuuden merkitys osana lapsen matemaattisia taitoja. Seurannassa on muistettava huomoida lapsen matemaattinen osaaminen myös laajempaan kokonaisuutena. Pelkkä sujuvuus ei takaa ajattelun kehitystä (ks. Kahneman, 2012: nopea ja hidaskäyttö), mutta ajattelun kehitys todennäköisesti helpottaa erilaisten ratkaisustrategioiden omaksumisen kautta laskusuorituksia ja ehkä myös sujuvuutta (ks. esim. Cowan, 2003; Geary, 1994; Throndsen, 2011; Tzohar-Rozen & Kramarski, 2014). Mikäli laskemisen sujuvuus on hidasta tukitoimien jälkeenkin vielä kolmannella tai neljännellä luokalla, kannattaa pohtia tukitoimien kohdentamista erityisesti tehtävien matemaattiseen ymmärtämiseen.

### 4.3.1 Oppimisen ja tuen tarpeen seuranta

Onnistunutta koulupolkua ajatellen heti ensimmäisen luokan alussa on hyvä arvioida koulutulokkaiden matemaattisia taitoja. Tällöin mahdollisiin tuen tarpeisiin päästään koulussa vastaamaan mahdollisimman varhain (mm. Fuchs ym., 2005; Kantelinen, 2013; Lusetti & Aunio, 2012). Matemaattisissa taidoissa on useita osa-alueita, joissa lapsilla voi olla tuen tarpeita. Niistä ainakin lasten matemaattisen osaamisen kannalta erityisen olennaisen taidon, laskemisen sujuvuuden, kehittymisen seurannan ja tuen tulisi olla systemaattista ensimmäiseltä luokalta alkaen (Fuchs ym., 2013). Sujuvuuden lisäämiseen kohdentuvan tuen tulee tarvittaessa jatkua alakoulun loppuun saakka (kuitenkin mieltien painotusta matemaattisen ajattelun ja sujuvuuden välillä). Sujuvuus, vaikka onkin vain yksi osa matemaattista osaamista, on tärkeä, koska sen puute usein ennakoii yleisempiä matemaattisia oppimisvaikeuksia (Geary, 2004; Hart ym., 2010; Mazzocco ym., 2008; Petrill ym., 2012; Vukovic & Siegel, 2010).

Kaikkien lasten laskemisen sujuvuuden seurannan merkitys korostuu siinä, että tässä tutkimuksessa havaittu alkujaan ei-sujuvien laskijoiden ryhmän sujuvuuden suhteellinen kasvu (saavuttivat keskitason) saattaa johtua keskitasoisten ryhmän sujuvuuden suhteellisesta heikkenemisestä (mm. Martin ym., 2012). Laskemisen sujuvuudessa tukea tarvitsevien lasten joukko ei välttämättä pysy samana vuodesta toiseen. Suomessa ei vielä ole kouluissa ollut systemaattista käytäntöä seurata annetusta tuesta hyötymistä (Aro, 2015; Björn ym., 2015). Tällä hetkellä etenkin laskemisen sujuvuuden seuraamiseen toiselta luokalta eteenpäin ei ole nykyhetken standardoitua mittaria. Tässä tutkimuksessa käytettiin 1970-luvun taitteessa kehitettyjä mekaanisen laskutaidon kokeita (Tasola, 1967, 1968, 1970), jotka huolimatta kehittämisvuodestaan sisältävät edelleen ajankohtaisia perustaitoja. Vastaava uusi mittaripatteri, jolla seuranta olisi mahdollista toteuttaa, olisi erittäin tarpeellinen. Mittaristossa olisi huomioitava sekä päässä laskettavien yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskujen sujuvuus että peruslaskutoimitusten riittävä sujuvuus myös algoritmeja käyttäen.

Laskemisen sujuvuuden rinnalla kannattaa seurata lukemisen sujuvuutta, samoin ensimmäiseltä luokalta alkaen. Ääneen lukemisen sujuvuus vaikutti tässä tutkimuksessa liittyvän päässä laskemisen sujuvuuteen, sanantunnistuksen sujuvuus liittyi tämän lisäksi myös algoritmien avulla suoritettavan laskemisen sujuvuuteen. Mahdollisesti tätä yhteyttä selitti tässä tutkimuksessa käytetty samankaltainen kynä+paperi -vastaustapa, mutta aiempaa vertailupohjaa ei ole. Saattaa olla, että lapsille, joilla on pulmia sekä laskemisen että lukemisen sujuvuudessa, olisi hyvä kohdentaa omanlaistaan tukea (kuitenkin Willburger ym., 2008). Heidän pulmansa sujuvuuden lisäämisessä voivat juontaa esimerkiksi nimeämisen tai prosessointinopeuden vaikeuksista (Chong & Siegel, 2008; Fuchs ym., 2005), joten pelkästään laskemiseen tai lukemiseen kohdentuva tuki ei välttämättä riitä. Näillä lapsilla nimeämisenopeuden arviointi olisi hyödyllistä liittää osaksi koulussa tehtävää oppimisen ja tuen tarpeen seurantaa. Nimeämis-

nopeuden arviointi olisi hyvä tehdä myös silloin, jos lapsella on selvää hitautta tai virhealttiutta lukemisessa tai laskemisessa vielä toisellakin luokalla tai hän ei vaikuta hyötyvän odotetusti tukitoimista.

Riippumatta siitä, millä luokka-asteella, oppisisällöillä tai intensiteetillä harjoitusjakso toteutetaan, on tärkeää seurata sen vaikutuksia (ks. myös Aro, 2015; Baker ym., 2002; Gersten, Chard ym., 2009). Intervention keston kannalta ensimmäisellä ja toisella luokalla voi olla järkevää toteuttaa se koko lukuvuoden kestäväna tukimuotona, joskin silloinkin siitä hyötymistä pitää säännöllisesti arvioida. Ylemmillä luokilla tuesta hyötymisen perusteella pitäisi pystyä tekemään jatkosuunnitelmia jo nopeammin, muutaman kuukauden kuluessa. Tällainen ns. interventioavastemalli (Björn ym., 2015) varmistaisi lapsen saaman tuen asteen (yleinen, tehostettu tai erityinen tuki) tarkoituksenmukaisuuden sekä antaisi systemaattisia perusteita sen muuttamiselle. Näin saataisiin tarvittavaa informaatiota pedagogisen arvion tai selvityksen teolle sekä mahdollisiin jatkotutkimuksiin ohjautumiselle. Mikäli tukea jatketaan samankaltaisena ennalta määrittämättömän ajan, ei se takaa lapselle oikeanlaista tukea ja toisaalta voi pitää tuen piirissä lapsia, jotka eivät sitä enää tarvitsisi. Systemaattinen seuranta voisi myös auttaa löytämään aiemmin ne lapset, jotka ovat matemaattisessa osaamisessaan jäämässä huolen alueelle (heikoimpaan neljännekseen ikäryhmässään). Seurannan tulosten perusteella lisätukea oppimiseensa saavat lapset voivat vaihtua, tukimuoto voi muuttua samoin kuin tuen toteutuksen intensiteetti. Todennäköisesti koulun alkuvaiheen jälkeen seuraava erityisen merkittävä vaihe tuen tarpeen arvioinnille on kolmannen luokan aikana. Tällöin sekä algoritmien avulla laskeminen että äänetön sanantunnistus alkavat korostua niin oppimisessa kuin sujuvuuden ja sen puutteen ilmenemisessä.

### 4.3.2 Hyvän harjoitusjakson ominaisuuksia

Vaikka luokkaopetus ja sen yhteydessä annettu tuki toteutettaisiin tehokkaasti ja suunnitelmallisesti, osa lapsista tarvitsee pienryhmässä tai jopa yksilöllisesti toteutettua interventiomuotoista tukea matemaattisten taitojen vahvistamiseksi ja matematiikan perusasioiden oppimiseksi. Tehostettua interventiotukea (ns. Tier 2 tason tukea) tarvitsee arviolta noin 15 prosenttia oppilaista (Fuchs & Fuchs, 2001). Matemaattisissa taidoissa tukea tarvitsevan lapsen interventiomuotoisessa opetuksessa ensisijaisia menetelmiä ovat tutkimusperustaiset tukimuodot (Cook ym., 2008).

Interventiossa käytettävää harjoitusjaksoa valittaessa lähtökohtana on pidettävä lapsen senhetkisiä taitoja ja niissä ilmeneviä heikkouksia. Riippumatta lapsen luokka-asteesta tuen tulee kohdentua niihin perustaitoihin, joissa lapsella on vaikeuksia. Sisällöiksi on valittava kaikkein olennaisimmat, jotka ovat tärkeitä muiden taitojen oppimiselle, ja varmistettava niiden omaksuminen, muuten pyssyvää edistymistä ei todennäköisesti tule tapahtumaan (esim. Powell ym., 2013).

Interventiossa käytettävä harjoitusohjelma voidaan valita valmiista tai systemaattisesti etenevän harjoitusjakson voi suunnitella itse (Cook ym., 2013). Käytetäänpä harjoitusjakson valinnassa kumpaa tapaa tahansa, on sen perustuttava johonkin teoriaan tai aiempaan tutkimukseen matemaattisten taitojen oppimisesta ja tukemisesta (Aro, 2015). Tässä väitöskirjassa kuvattu ensimmäinen harjoitusjakso oli väitöskirjan tekijän itsensä laatima, ja perustui aiempaan tutkimuskirjallisuuteen (mm. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Butterworth & Yeo, 2004; Fuchs ym., 2005; Kaufmann ym., 2003), toinen harjoitusohjelma oli muokattu Minäkin lasken! -harjoitusohjelmasta (Van Luit ym., 2010). Erityisen tärkeää intervention toteutuksessa on systemaattinen eteneminen ja lasten edistymisen säännöllinen seuranta harjoitusjaksoon valittujen sisältöjen hallinnassa. Mikäli intervention aikana siihen valitut sisällöt tuntuvat vaativan muokkausta, on niitä tehtäessä käytettävä tarkkaa harkintaa. Koska sisällöt on huolella ja perustellusti suunniteltu ja valittu, voi olla oppimisen kannalta perustellumpaa muokata harjoitteluun käytettävää aikaa kuin sisältöjä (ks. esim. Bryant, Bryant, Gersten, Scammacca & Chavez, 2008; Chodura ym., 2015; Hunt ym., 2016).

Lasten matemaattisia valmiuksia olisi hyvä seurata jo varhaiskasvatuksessa ja tarvittaessa vahvistaa niitä esimerkiksi Nallematikan (Mattinen, Räsänen & Lehtinen, 2010) avulla. Koulun alkuvaiheessa tai mahdollisesti jo esiopetuksessa harjoitusjakson sisältöinä voisi olla lukukäsitteen hallinnan (suhde- ja lukujonotaidot) tukeminen sekä myös yhteen- ja vähennyslaskun käsitteen vahvistaminen. Tähän soveltuvia harjoitusohjelmia ovat esimerkiksi Minäkin lasken! (Van Luit ym., 2010) ja ThinkMath-sivuston (saatavana verkossa osoitteesta <http://blogs.helsinki.fi/thinkmath/materiaalit/matematiikka/>) harjoituspaketit. Toisella luokalla päähuomio voi olla yhteen- ja vähennyslaskun hallinnan ja sujuvuuden tukemisessa sekä kymmenjärjestelmän rakenteen ymmärtämisessä, mutta lukualue kannattaa pitää vielä suhteellisen pienenä. On myös tärkeää opettaa lapselle erilaisia laskustrategioita ratkaista yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0–20, jotta niiden automatisoituminen helpottuu (ks. esim. Gaidoshik, 2012). Tähän soveltuvia harjoitusohjelmia ovat esimerkiksi SELKIS-harjoitusohjelmat (Koponen, Mononen, Kumpulainen & Puura, 2011; Koponen, Mononen & Latva, 2013) sekä jo mainitun ThinkMath-sivuston materiaalit.

Kertokäsitteen ymmärtämisen vahvistamiseksi tarkoitettu harjoitusjakso olisi tarpeen viimeistään kolmannella luokalla, samoin lukualueen laajentaminen nelinumeroisiin lukuihin, tuhansiin. Yhteen-, vähennys- ja kertolaskun sujuvuuden tukeminen on tärkeää ylempilläkin luokilla, jotta nämä taidot tukevat algoritmien käytön sujuvuutta (Geary, 2011; Gersten ym., 2005). Lasten tarpeiden mukaan, todennäköisesti viimeistään neljänneltä luokalta lähtien, olisi hyvä toteuttaa harjoitusjakso sanallisten tehtävien ratkaisutaidon tukemiseksi. Interventiossällöissä myös ongelmanratkaisutaidon opetus on todettu välttämättömäksi tukea tarvitsevien lasten ohjauksessa (Bottge ym., 2010), joskin pääpaino voi



edelleen olla perustaitojen vahvistamisessa (ks. esim. Chodura ym., 2015). Näitä perustaitoja on tarvittaessa tuettava yläluokillakin, vaikka niissä ei ehkä luokkatoverien tasoa saavutetakaan (Burns ym., 2012; Chodura ym., 2015; Kaufmann ym., 2003).

Havainnollistusvälineiden käytön on oltava suunnitelmallinen osa interventiota, ja niiden käyttö pitää myös opettaa lapsille. Opettajan tulee varmistaa, että havainnollistusvälineen ja matemaattisen käsitteen välinen yhteys on lapselle selvä. Tätä yhteyden korostusta tukevat myös aiemmat tutkimukset (Frye ym., 2013; Gersten, Chard ym., 2009). Hyvä havainnollistusväline on monikäyttöinen, ja sen avulla käsitteen matemaattinen sisältö tulee selvästi esille eikä jää esimerkiksi materiaalin liiallisen koristeellisuuden alle. Opetuksessa pelimäiset harjoitteet ovat usein lapsille mieluisia ja niiden avulla voidaan opetustuokioihin saada paljon tarpeellista toistoharjoitusta sekä matematiikan kielentämistä. Opettajan on kuitenkin mietittävä, mitä matemaattista taitoa peli harjoittaa ja käytettävä pelitilanteissa matemaattisia käsitteitä oikein, jotta lapsen käsitevarasto vahvistuu. Samalla myös lasta ohjataan aktiivisesti käyttämään matemaattisesti oikeita, tarkkoja käsitteitä. Intervention intensiteetti ja kesto riippuvat lapsista, käytettävistä resursseista sekä oppisisällöistä (mm. Chodura ym., 2015; Hunt ym., 2016). Aiemmat tulokset intensiteetin vaikutuksista saatuihin harjoitustuloksiin ovat osin ristiriitaisia (ks. esim. Chodura ym., 2015; Cook ym., 2013).

Suomessa on saatavilla alakoulukäisille lapsille muutamia valmiita tutkimusperustaisia harjoitusmateriaaleja. Lukukäsitteen harjoittamiseen on tarjolla tässäkin tutkimuksessa käytetty Minäkin lasken! -harjoitusohjelma (Van Luit ym., 2010), joka soveltaen käy myös ensimmäisellä luokalla oleville matemaattisilta valmiuksiltaan heikoille lapsille koulun alkuvaiheen tukimuodoksi. Sekä esiopetukseen että kouluun sopivia harjoitusjaksoja ja -materiaaleja on saatavilla myös jo mainitulta ThinkMath-sivustolta. Sekä esiopetukseen että koulun alkuvaiheeseen sopivia harjoitusmateriaaleja löytyy myös tietokonepohjaisissa Ekapeli-Matikka- ja Numerorata-tehtävissä (saatavilla verkossa sivulta <http://www.lukimat.fi/matematiikka/materiaalit/Tietokoneohjelmat>). Tietokonepohjaiset harjoitusmenetelmät voivat olla hyviä myös vaikea-asteisissa matemaattisissa oppimisvaikeuksissa, jolloin tarvitaan erityisen runsasta harjoittelua. Tietokoneen avulla voidaan hyvin tukea laskemisen sujuvuuden kehitystä (Chodura ym., 2015) ja harjoittaa myös sanallisten tehtävien ratkaisutaitoa (esim. Kajamies ym., 2010). Yhteen- ja vähennyslaskujen ratkaisustrategioiden harjoittamiseen voi käyttää jo aiemmin mainittuja ThinkMath-tehtäviä sekä SELKIS-harjoitusmateriaaleja (Koponen ym., 2011; Koponen ym., 2013). Näissä molemmissa on tehtäviä myös lukualueen laajentamisen tueksi, joten ne sopivat myös ylempiluokkalaisille yhteen- ja vähennyslaskutaidoissa tukea tarvitseville lapsille. Sanallisten tehtävien ratkaisutaitoa voidaan tukea peruskoulun 4.–6.-luokilla esimerkiksi tietokonepohjaisella HoPE-opetuspelillä (Vauras & Kinnunen, 2003).

#### 4.4 Tutkimuksen rajoitukset ja jatkotutkimusehdotuksia

Tämän tutkimuksen suurimpana rajoituksena on aineistojen pieni koko. Tutkimus toteutettiin yhden kunnan sisällä, pääasiassa yhdellä koululla. Sekä harjoitusohjelmien vaikuttavuuden että laskemisen sujuvuuden kehityksen osalta tutkimus olisi hyvä uusia suuremmalla lapsiryhmällä, mielellään useamman kunnan alueella. Nyt saadut tulokset antavat kuitenkin suuntaa jatkotutkimuksille ja ovat yhdenmukaisia aiempien tutkimusten tulosten kanssa.

Toisena tutkimuksen rajoituksena ovat käytetyt mittarit. Erityisesti laskemisen sujuvuudessa koko ikäryhmälle soveltuvia uusia standardoituja mittareita ei ollut tutkimusten tekoaikana käytettävissä. Tästä syystä päädyttiin joko väitöskirjan tekijän itse kokoamiin päässä-laskusarjoihin (osatutkimus I) tai käyttämään peruskouluun siirryttäessä kehitettyjä mittareita (osatutkimukset II, III, IV). Mittarien sisältö oli kuitenkin kaikissa tapauksissa perusteltu ja tutkimuksen tekijän itse laatimienkin reliabiliteetti osoittautui kyllin hyväksi. Nyt mittareista kuitenkin suureksi osaksi puuttuivat ns. ankkuritehtävät, jotka olisivat sitoneet ne toisiinsa ja tehneet seurannasta (tilastollisesti) pätevemmän. Vanhojen laskemisen sujuvuuden mittarien tulokset eivät olleet selvästi ristiriidassa standardoitujen laskutaidon mittarien (BANUCA, RMAT) tulosten kanssa, joten tuloksia voidaan pitää kyllin luotettavina. Myös lukemisen sujuvuuden mittarit vaihtuivat eri mittauskerroilla, mikä saattoi aiheuttaa vääristymää esimerkiksi laskemisen ja lukemisen sujuvuuden yhteyttä kuvaaviin tuloksiin. Esimerkiksi ääneen lukemisen ja sanantunnistuksen sujuvuuden erilainen yhteys laskemisen sujuvuuden kanssa saattoi olla sellainen. Tätä mahdollista erilaista yhteyttä kannattaisi jatkotutkimuksella koetella.

Tässä tutkimuksessa nimeämisnopeus arvioitiin vasta neljännellä luokalla. Mahdollisesti tästä syystä sen yhteydet olivat ennakoitua heikommat laskemisen sekä osin myös lukemisen sujuvuuden kanssa (nimeämisnopeuden yhteydestä tarkemmin esim. Heikkilä ym., 2015; Mazzocco & Grimm, 2013). Olisi hyvä tehdä jatkotutkimus, jossa nimeämisnopeus arvioitaisiin heti koulun alkuvaiheessa, ja laskemisen ja lukemisen sujuvuutta seurattaisiin systemaattisesti siitä eteenpäin koko alakouluajan. Tällaista seurantatutkimusta puoltaisi myös se, että alakouluikäiset kokonaisuutena (7–12-vuotiaat) ovat suhteellisen niukasti tutkitu ikäryhmä suomalaisessa matematiikan oppimisvaikeustutkimuksessa. Tutkimukset ovat toistaiseksi keskittyneet alle kouluikäisiin ja koulun alkuvuosiin. Tähän jatkotutkimukseen kannattaisi liittää mukaan myös lapsen vanhempien koulutustausta, koska sen merkityksen lapsen matemaattiselle osaamiselle on osoitettu viime aikoina vahvistuneen (Vettenranta, 2016; ks. myös Krajewski & Schneider, 2009).

Lasten matemaattisten taitojen tukemiseksi toteutettujen interventioiden määrä ja niiden vaikuttavuustutkimus ovat vielä melko vähäisiä, erityisesti tavanomaisissa koulutilanteissa toteutettuina. Olisi tarpeen, että opettajat lähtisivät rohkeasti kokeilemaan tutkimuksiin perustuvia harjoitusohjelmia ja yhdessä

tutkijoiden kanssa tai itse kehittämään perustelluin tavoin suunniteltuja harjoitusjaksoja. Myös näiden toteutettujen harjoitusjaksojen systemaattinen arviointi olisi tärkeää. Vaikka kaikki harjoitusohjelmat eivät osoittautuisi kohteena oleville lapsille kyllin tehokkaiksi tai käytännössä toimiviksi, saadaan arvioinneilla tärkeää tietoa myöhemmälle kehittämistyölle. Tässäkin yhteistyö tutkijoiden ja opettajien välillä olisi olennaista. Tutkimuksissa olisi hyvä myös ottaa kohteeksi se, miten opettajat kokevat harjoitusohjelmien toimivuuden opettajan työn ja lasten oppimisen tukena.

Systemaattisen tuen tarpeen ja siitä hyötymisen arviointi on eräs jatkotutkimuksen kohde. Tähän soveltuvia koko alakouluajan kattavia arviointivälineitä ei vielä ole, joten jatkotutkimuksien avulla olisi hyvä kehittää niitä. Tuen tasojen ja muotojen kannalta olisi hyvä, että käytössä olisi jonkinlainen interventiovastemalli (Björn ym., 2015; vrt. RTI-malli), jotta lapsen koulussa tai kuntoutuksessa saamasta tuesta hyötymistä arvioitaisiin säännöllisesti. Näin varmistettaisiin lapsen saaman tuen oikea-aikaisuus ja myös oikeanlainen voimakkuus ja sisältö sekä mahdollinen jatkotutkimuksiin ohjautuminen riittävän varhain.



## Lähteet

- Ahonen, T., Tuovinen, S. & Leppäsaari, T. (2003). *Nopean sarjallisen nimeämisen testi (2. korjattu painos)*. Jyväskylä: Haukkarannan koulu ja Niilo Mäki Instituutti.
- Aro, M. (2015). Mistä konkreettinen sisältö tuen portaille? *NMI-Bulletin* 25(3), 64–67.
- Aunio, P., Hautamäki, J. & Van Luit, J. E. H. (2005). Mathematical thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. *European Journal of Special Needs Education* 20(2), 131–146.
- Aunio, P. & Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years – a working model for educators. *European Early Childhood Research Journal*. Luettu osoitteesta <http://dx.doi.org/10.1080.1350293X.2014.996424>.
- Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J.-E. (2004). Development dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology* 96(4), 699–713. DOI:10.1037/0022-0663.96.4.699.
- Baker, S., Gersten, R. & Lee, D.-S. (2002). A synthesis of empirical research on teaching mathematics to low-achieving students. *The Elementary School Journal* 103(1), 51–73. DOI: 10.1086/499715.
- Barnes, M. A., Raghubar, K. P., English, L., Williams, J. M., Taylor, H. & Landry, S. (2014). Longitudinal mediators of achievement in mathematics and reading in typical and atypical development. *Journal of Experimental Child Psychology* 119, 1–16.
- Baroody, A. (1999). Children's relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction* 17(2), 137–175.
- Björn, P., Aro, M. & Koponen, T. (2015). Interventiovastemallien tarjoamat mahdollisuudet kolmiportaisen tuen kehittämiseen: esimerkkinä matematiikan oppimisen tuki. *NMI-Bulletin* 25(3), 10–21.
- Bottge, B., Ruenda, E., Grant, T. S., Stephens, A. C. & Laroque, P. T. (2010). Anchoring problem-solving and computational instruction in cortex-rich learning environment. *Exceptional Children* 79(4), 417–437.
- Branum-Martin, L., Fletcher, J. M. & Stuebing, K. K. (2012). Classification and identification of reading and math disabilities: The special case of comorbidity. *Journal of Learning Disabilities* 46(6), 490–499. DOI: 10.1177/0022219412468767.
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N. & Chavez, M. M. (2008). Mathematical intervention for first- and second-grade students with

- mathematical difficulties. The effects of Tier 2 intervention delivered as booster lessons. *Remedial and Special Education* 29(1), 20–32.
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Gersten, R., Scammacca, N., Funk, C., Winter, A., Shih, M. & Pool, C. (2008). The effects of Tier 2 intervention on the mathematics performance of first-grade students who are at risk for mathematical difficulties. *Learning Disability Quarterly* 31(spring 2008), 47–63.
- Bryant, D., Bryant, B. R. & Hammill, D. D. (2000). Characteristics behaviors of students with LD who have teacher-identified math weaknesses. *Journal of Learning Disabilities* 33(2), 168–177, 199.
- Bryant, D. P., Bryant, B. R., Shin, M. & Pfannenstiel, K. H. (2014). Learning disabilities. Teoksessa S. Chinn (toim.) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. Luettu ositteesta <https://www.routledgehandbooks.com/DOI/10.4324/978131540713.ch.17>.
- Bryant, D. P., Roberts, G., Bryant, B. R., & DiAndreth-Elkins, L. (2011). Tier 2 early numeracy number sense interventions for kindergarten and first-grade students with mathematical difficulties. Teoksessa R. Gersten & R. Newman-Gonchar (toim.) *Understanding RTI in Mathematics. Proven Methods and Applications* (ss. 65–84). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Burns, M. K., Kanive, R. & DeGrande, M. (2012). Effects of a computer-delivered math fact intervention as a supplemental intervention for math in third and fourth grades. *Remedial and Special Education* 33(3), 184–191. DOI: 10.1177/0741932510381652.
- Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain*. Lontoo: McMillan Publishers Ltd.
- Butterworth, B. & Yeo, D. (2004). *Dyscalculia Quidance. Helping pupils with specific leaning difficulties in math*. Lontoo: nferNelson Publishing Company Ltd.
- Carr, M. & Alexeev, N. (2011). Fluency, accuracy, and gender predict developmental trajectories of arithmetic strategies. *Journal of Educational Psychology* 103(3), 617–631. DOI: 10.1037/a0023864.
- Chodura, S., Kuhn, J.-T. & Holling, H. (2015). Interventions for children with mathematical difficulties: A meta-analysis. *Zeitschrift für Psychologie* 223(2), 129–144. DOI: 10/1027/2151-2604/a000211.
- Chong, S. L. & Siegel, L. S. (2008). Stability of computational deficits in math learning disability from second through fifth grades. *Developmental Neuropsychology* 33(3), 300–317. DOI: 10.1080/8756540801982387.

- Chu, F. W., vanMarle, K. & Geary, D. C. (2013). Quantitative deficits of preschool children at risk for mathematical learning disability. *Frontiers in Psychology* 4(194). DOI: 10.3389/fpsy.2013.00195.
- Cirino, P. T., Fuchs, L. S., Elias, J. T., Powell, S. R. & Schumacher, R. F. (2015). Cognitive and mathematical profiles for different forms of learning difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 48(2), 156–175. DOI: 10.1177/0022219413494239.
- Clarke, B., Clarke, D. M. & Horne, M. (2006). A longitudinal study of children's mental computational strategies. Teoksessa J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (toim.) *Proceeding 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.2*, 329–336.
- Clarke, B., Lembke, E. S., Hampton, D. D. & Hendricker, E. (2011). Understanding the R in RTI. Teoksessa R. Gersten & R. Newman-Gonchar (toim.) *Understanding RTI in Mathematics. Proven Methods and Applications* (ss. 35–48). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math. The learning trajectory approach*. New York NY: Routledge.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood mathematics intervention. *Science* 333(6045), 968–970. DOI: 10.1126/science.1204537.
- Codding, R. S., Burns, M. K. & Lukito, G. (2011). Meta-analysis of mathematics basic-fact fluency interventions: A component analysis. *Learning Disabilities Research & Practice* 26(1), 36–47. DOI: 10.1111/j.1540-5826.2010.00323.x.
- Cohen Kadosh, R., Dowker, A., Heine, A., Kaufmann, L. & Kucian, K. (2013). Interventions for improving numerical abilities: Present and future. *Trends in Neuroscience and Education* 2(2013), 85–93. DOI: 10.1016/j.tine.2013.04.001.
- Compton, D. L., Fuchs, L. S., Fuchs, D., Lambert, W. & Hamlett, C. (2012) The cognitive and academic profiles of reading and mathematics learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 45(1), 79–95. DOI: 10.1177/0022219410393012.
- Cook, B. G. & Cook, S. C. (2011). Unraveling evidence-based practices in special education. *The Journal of Special Education* 47(2), 71–82. DOI: 10.1177/0022466911420877.
- Cook, B. G., Tankersley, M., Cook, L. & Landrum, T. J. (2008). Evidence-based practices in special education: Some practical considerations. *Intervention in School and Clinic* 44(2), 69–75.
- Cook, B. G., Tankersley, M. & Landrum, T. J. (2013). Evidence-based practices in learning and behavioral disabilities: The search for effective instruction. Teoksessa B. G. Cook, M. Tankersley & T. J. Landrum, T. J. (toim.) *Evi-*

- dence-based practices. Advances in learning and behavioral disabilities, vol. 26* (ss. 1–20). Bingley: Emerald Insight. E-kirja.
- Cowan, R. (2003). Does it all add up? Changes in children's knowledge of addition combinations, strategies, and principles. Teoksessa A. J. Baroody & A. Dowker (toim.) *The Development of Arithmetic Concepts and Skills: Constructing adaptive expertise* (ss. 35–74). Lontoo: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Cragg, L. & Gilmore, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in Neuroscience and Education* 3(2014), 63–68. DOI: 10.1016/j.tine.2013.12.001.
- DeCaro, M.-S. & Rittle-Johnson, B. (2012). Exploring mathematics problems prepares children to learn from mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology* 113(2012), 552–568. DOI: 10.1016/j.jecp.2012.06.009.
- DeSmedt, B. & Gilmore, C.K. (2011). Defective number module or impaired access? Numerical magnitude processing in first graders with mathematical difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology* 108(2011), 278–292. DOI: 10.1016/j.jecp.2010.09.003.
- Dennis, M.S., Sharp, E., Chovanes, J., Thomas, A., Burns, R.M., Custer, B. & Park, J. (2016). A meta-analysis of empirical research on teaching students with mathematics learning difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice* 31(3), 156–168. DOI: 10.1111/drp.12107.
- Desoete, A. (2015). Cognitive predictors of mathematical abilities and disabilities. Teoksessa R. C. Kadosh & A. Dowker (toim.) *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.033.
- Desoete, A., Ceulemans, A., DeWeerd, F. & Pieters, S. (2012). Can we predict mathematical learning disabilities from symbolic and non-symbolic comparison tasks in kindergarten? Findings from a longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology* 82, 64–81. DOI: 10.1348/2044-8279.002002.
- Donlan, C. (2014). Linguistic factors in the development of basic calculation. Teoksessa S. Chinn (toim.) *The Routledge International Handbook of Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. Luettu osoitteesta <https://www.routledgehandbooks.com/DOI/10.4324/978131540713.ch.17>.
- Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical development. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The Development of Mathematical Skill. Studies in developmental psychology* (ss. 272–302). East Sussex: Psychology Press Ltd.
- Dowker, A. (2015). Individual differences in arithmetical abilities: The componential nature of arithmetic. Teoksessa R. C. Kadosh & A. Dowker (toim.)



- The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.034.
- Dyson, N. I., Jordan, N. C. & Glutting, J. (2011). A number sense intervention for low-income kindergarteners at risk for mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 46(2), 166–181. DOI: 10.1177/0022219411410233.
- Field, A. (2009). *Discovering Statistics using SPSS. 3<sup>rd</sup> edition*. Lontoo: SAGE Publications.
- Frye, D., Baroody, A. J., Burchinal, M., Carver, S. M., Jordan, N. C. & McDowell, J. (2013). *Teaching math to young children*. (NCEE2014-4005) Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Educational Sciences, U.S. Department of Education. Luettu osoitteesta <http://whatworks.ed.gov>.
- Fuchs, L. S., Compton, D. L., Fuchs, D., Paulsen, K., Bryant, J. D. & Hamlett, C. L. (2005). The prevention, identification, and cognitive determinants of math difficulty. *Journal of Educational Psychology* 97(3), 493–513. DOI: 10.1037/0022-0663.97.3.493.
- Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2001). Principles for the prevention and interventions of mathematics difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice* 18(2), 85–95.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Capizzi, A. M., . . . Fletcher, J. M. (2006). The cognitive correlates of third-grade skill in arithmetic, algorithmic computation, and arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology* 98(1), 29–43. DOI: 10.1037/0022-0663.98.1.29.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Hamlett, C. L. & Appleton, A. C. (2002). Explicit teaching for transfer: Effects on the mathematical problem-solving performance of students with mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice* 16(2), 80–106.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D. & Hollenbeck, K. N. (2007). Extending responsiveness to intervention to mathematics at first and third grade. *Learning Disabilities Research & Practice* 22(1), 13–24.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Powell, S. R., Seethaler, P. M., Cirino, P. T. & Fletcher, J. M. (2008). Intensive intervention for students with mathematics disabilities: seven principles of effective practice. *Learning Disability Quarterly* 31(spring), 79–92.
- Fuchs, L. S., Geary, D. C., Compton, D. L., Fuchs, D., Schatschneider, C., . . . Changas, P. (2013). Effects on first-grade number knowledge tutoring with contrasting form of practice. *Journal of Educational Psychology* 105(1), 58–77. DOI: 10.1037/a0030127.
- Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) *Handbook of research on mathematics*

- teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (ss. 243–275). New York: Macmillan.
- Gaidoshik, M. (2012). First-graders' development of calculation strategies: How deriving facts help automatize facts. *Journal für Mathematik-Didaktik* 33(2), 287–315. DOI: 10.1007/s13138-012-0038-6.
- Geary, D. C. (1994). *Children's mathematical development. Research and practical applications*. Washington, DC: American Psychology Association
- Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 37(1), 4–15.
- Geary, D. C. (2011). Cognitive predictors of achievement growth in mathematics. A 5-year longitudinal study. *Developmental Psychology* 47(6), 1539–1552. DOI: 10.1037/a0025510.
- Geary, D. C. (2013). Early foundations for mathematics learning and their relations to learning disabilities. *Current Directions in Psychological Science* 22(1), 23–27. DOI: 10.1177/0963721412469398.
- Geary, D. C., Hoard, M. K., Nugent, L. & Bailey, D. H. (2012). Mathematical cognition deficits in children with learning disabilities and persistent low achievement: A five-year prospective study. *Journal of Educational Psychology* 104(1), 206–223. DOI: 10.1037/a0025398
- Georgiou, G. K. & Parrila, R. (2013). Rapid automatized naming and reading. Teoksessa H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (toim.) *Handbook of Learning Disabilities 2<sup>nd</sup> edition* (ss. 169–185). New York: The Guilford Press.
- Georgiou, G. K., Tziraki, N., Manolitis, G. & Fella, A. (2013) Is rapid automatized naming related to reading and mathematics for the same reason(s)? A follow-up study from kindergarten to grade 1. *Journal of Experimental Child Psychology* 115, 489–496. DOI: 10.1016/j.jecp.2013.01.004.
- Gersten, R., Beckman, S., Clarke, B., Foegen, A., Marsh, L., Star, J. R. & Witzel, B. (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to intervention (RtI) for elementary and middle schools*. (NCEE 2009-4060) Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Educational Sciences, U.S. Department of Education. Luettu osoitteesta <http://ies.ed.gov/ncee/publications/practiceguides/>.
- Gersten, R., Chard, D. J., Jayanthi, M., Baker, S. K., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities. A meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research* 3(79), 1202–1242. DOI: 10.3102/00346554309334431.
- Gersten, R., Dimino, J. A. & Haymond, K. (2011). Universal screening for students in mathematics for the primary grades: The emerging research base. Teoksessa R. Gersten & R. Newman-Gonchar (toim.) *Understand-*

- ing RTI in Mathematics. Proven Methods and Applications* (ss. 17–34). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Gersten, R., Jordan, N. C. & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities* 38(4), 293–304.
- Göbel, S. M., Watson, S. E., Lervåg, A. & Hulme, C. (2014). Children's arithmetical development: It is number knowledge, not the approximate number sense, that counts. *Psychological Science* 25(3), 789–798. DOI: 10.1177/0956797613516471.
- Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 50–83). Jyväskylä: Kirjapaino-Oma.
- Hakkarainen, A. (2016). *Matematiikan ja lukemisen vaikeuksien yhteys toisen asteen koulutuspolkuun ja jatko-opintoihin tai työelämään sijoittumiseen*. Itä-Suomen yliopisto, Dissertations in Education, Humanities, and theology, 82.
- Hakkarainen, A., Haring, M., Holopainen, L., Lappalainen, K. & Mäkihonko, M. (2014). Matemaattisen ajattelun mallintaminen ja laskustrategioiden opettaminen: yleisen tuen interventio ensimmäisen luokan oppilaille. *NMI-Bulletin* 24(1), 9–24.
- Hannula, M. M., Lepola, J. & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-specific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology* 107(2010), 394–406. DOI: 10.1016/j.jecp.2010.06.004.
- Hart, S. A., Petrill, S. A. & Thompson, L. A. (2010) A factorial analysis of timed and untimed measures of mathematics and reading abilities in school aged twins. *Learning and Individual Differences* 20, 63–69. DOI: 10.1016/j.lindif.2009.10.004.
- Hattie, J. (2012) *Visible learning for teachers. Maximizing impact on learning*. Thousand Oaks: Routledge.
- Hautamäki, A., Hautamäki, J. & Kupiainen, S. (2010). Assessment in schools. Learning to learn. *International Encyclopedia of Education* (3), 268–272.
- Hautamäki, J., Kupiainen, S., Marjanen, J., Vainikainen, M.-P. & Hotulainen, R. (2013). *Oppimaan oppiminen peruskoulun päättövaiheessa. Tilanne vuonna 2012 ja muutos vuodesta 2001*. Helsingin yliopisto, Käyttäytymistieteellinen tiedekunta, Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia No 347.
- Hech, S. A., Torgesen, J. K., Wagner, R. K. & Rashotte, C. A. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical computational skills: A longitudinal study

- from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology* 79, 192–227. DOI: 10.1006/jecp.2000.2586.
- Heikkilä, R., Närhi, V., Aro, M. & Ahonen, T. (2009). Rapid automatized naming and learning disabilities: Does RAN have a specific connection to reading or not? *Child Neuropsychology* 15, 343–358. DOI: 10.1080/09297040802537653.
- Heikkilä, R., Torppa, M., Aro, M., Närhi, V. & Ahonen, T. (2015). The double-deficit hypothesis in a clinical sample: Extension beyond reading. *Journal of Learning Disabilities* 25, 1–15. DOI: 10.1177/0022219415572895.
- Hirvonen, K. (2012). *Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*. Koulutuksen seurantaraportit 2012: 4. Tampere: Juvenes Print – Tampereen Yliopistopaino Oy.
- Hunt, J. H., Valentine, C., Bryant, D. P., Pfannenstiel, K. H. & Bryant, B. R. (2016). Supplemental mathematics intervention. How and why special educators intensify intervention for students with learning disabilities. *Remedial and Special Education* 37(2), 78–88. DOI: 10.1177/0741932515597293.
- Ikäheimo, H., Putkonen, H. & Voutilainen, E. (2002). *MAKEKO–matematiikan keskeisen oppiaineksen koe luokille 1–9*. Helsinki: Opperi.
- Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Deatline-Buchman, A. & Sczesniak, E. (2007). Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research* 100(5), 282–302.
- Jordan, J.-A., Mulhern, G. & Wylie, J. (2009). Individual differences in trajectories of arithmetical development in typically achieving 5- to 7-years-old. *Journal of Experimental Child Psychology* 103, 455–468. DOI: 10.1016/j.jecp.2009.01.011.
- Jordan, J.-A., Wylie, J. & Mulhern, G. (2015). Individual differences in children's paths to arithmetical development. Teoksessa R.C. Kadosh & A. Dowker (toim.). *The Oxford Handbook of Numerical Cognition*. DOI: 10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.015.
- Jordan, N. C., Hanich, L. B. & Kaplan, D. (2003). A longitudinal study of mathematical competencies in children with specific mathematics difficulties versus children with comorbid mathematics and reading difficulties. *Child Development* 74(3), 834–850. DOI: 10.1111/1467-8624.00571.
- Jordan, N. C., Kaplan, D. & Hanich, L. B. (2002). Achievement growth in children with learning difficulties in mathematics: Findings of a two-year longitudinal study. *Journal of Educational Psychology* 94(3), 586–597. DOI: 10.1037/0022-0663.94.3.586.
- Julin, S. & Rautopuro, J. (2016). *Läksyt tekijäänsä neuvovat. Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9.luokalla 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 20:2016. Tampere: Juvenes Print.
- Kahneman, D. (2012). *Ajattelu, nopeasti ja hitaasti*. Helsinki: Terra Cognita Oy.

- Kajamies, A., Poskiparta, E., Annevirta, T., Dufva, M. & Vauras, M. (2003). *YT-TE-luetun ja kuullun ymmärtämisen ja lukemisen sujuvuuden arviointi*. Turun yliopisto: Oppimistutkimuksen keskus.
- Kajamies, A., Vauras, M. & Kinnunen, R. (2010). Instructing low-achievers in mathematical word problem solving. *Scandinavian Journal of Educational Research* 54(4), 335–355. DOI: 10.1080/00313831.2010.493341.
- Kantelinen, S. (2013). Kokemuksia kuntoutuksesta: hyötyvätkö lapset, joilla on viiveinen lukukäsitteen kehitys, säännöllisestä lukukäsitteen kuntoutuksesta? *NMI-Bulletin* 23(2), 60–72.
- Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, article 57. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00057.
- Kaufmann, L., Handl, P. & Thöny, B. (2003). Evaluation of a numeracy intervention program focusing on basic numerical knowledge and conceptual knowledge: A pilot study. *Journal of Learning Disabilities* 36(5), 564–573.
- Koepke, K. M. & Miller, B. (2013). At the intersection of math and reading disabilities: Introduction to the special issue. *Journal of Learning Disabilities* 46(6), 483–489. DOI: 10.1177/0022219413498200.
- Koponen, T. (2008). *Calculation and language. Diagnostic and intervention studies*. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 340.
- Koponen, T., Aro, T. & Ahonen, T. (2009). Conceptual knowledge-based strategy training in single-digit calculation: A single case intervention study in a child with special language impairment. *European Journal of Special Needs Education* 24(3), 259–275.
- Koponen, T., Aro, T., Räsänen, P. & Ahonen, T. (2008). Language-based retrieval difficulties in arithmetics: A single case intervention study comparing two children with SLI. *Educational and Child Psychology* 24(2), 98–107.
- Koponen, T., Aunola, K., Ahonen, T. & Nurmi, J.-E. (2007). Cognitive predictors of single-digit and procedural calculation skills and their covariation with reading skill. *Journal of Experimental Child Psychology* 97, 220–241.
- Koponen, T., Mononen, R., Kumpulainen, T. & Puura, P. (2011). *SELKIS-yhteenlaskua ymmärtämään*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Koponen, T., Mononen, R. & Latva, T. (2013). *SELKIS-vähennyslaskua ymmärtämään*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Koponen, T., Salmi, P., Eklund, K. & Aro, T. (2012). Counting and RAN: Predictors of arithmetic calculation and reading fluency. *Journal of Educational Psychology*. 2012, July 30. Advance online publication. DOI: 10.1037/a0029285.

- Koponen, T., Salmi, P., Torppa, M., Eklund, K., Aro, T., Aro, M., . . . Nurmi, J.-E. (2016). Counting and rapid naming predict the fluency of arithmetic and reading skills. *Contemporary Educational Psychology* 44–45(2016), 83–94. DOI: 10.1016/j.cedpsych.2016.02.004.
- Koponen, T., Salminen, J., Aunio, P. & Polet, J. (2011). *LukiMat-oppimisen arviointi. Käyttäjän opas*. Haettu osoitteesta <http://www.lukimat.fi/lukimat-oppimisen-arviointi/materiaalit/tuen-tarpeen-tunnistaminen/2lk/matematiikka>.
- Korhonen, J. (2016). *Learning difficulties, academics well-being and educational pathways among adolescent students*. Åbo Akademi University, Vaasa: Faculty of Education and Welfare Studies.
- Koulutuksen arviointikeskus (2010). *Ensiasteleht – Oppimaan oppiminen*.
- Kovas, Y., Haworth, C. M. A., Harlaar, N., Petrill, S. A., Dale, P. S. & Plomin, R. (2007). Overlap and specificity of genetic and environmental influences on mathematics and reading disability in 10-year-old-twins. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 48(9), 914–922. DOI: 10.1111/j.1469-7610.2007.01748x.
- Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction* 19, 513–526. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2008.10.002.
- Kroesbergen, E. H. & Van Luit, J. E. H. (2003). Mathematics interventions for children with special educational needs. A meta-analysis. *Remedial and Special Education* 24(2), 97–114.
- Kucian, K. & von Aster, M. (2015). Developmental dyscalculia. *European Journal of Pediatrics* 174, 1–13. DOI: 10.1007/s00431-014-2455-7.
- Kunsch, C. A., Jitendra, A. K. & Sood, S. (2007). The effects of peer-mediated instruction in mathematics for students with learning problems: A research synthesis. *Learning Disabilities Research & Practice* 22(1), 1–12.
- Kupari, P. & Välijärvi, J. (2005). *Osaaminen kestäväällä pohjalla. PISA 2003 Suomessa*. Jyväskylä: Gummerus.
- Kyttälä, M. (2008). Visuaalis-spatiaalinen työmuisti – rajallisen kapasiteetin työtila matematiikan oppimisen ja matematiikassa suoriutumisen tukena. *Psykologia* 43(5), 342–350.
- Laine, A. & Huhtala, S. (2003). Jakolaskun ymmärtäminen osana oppilaan matematiikkakuvaa. *NMI-Bulletin* 13(4), 9–17.
- Laine, A., Näveri, L., Ahtee, M. & Pehkonen, E. (2016). Opettajan toiminnan yhteys kolmasluokkalaisten onnistumiseen ongelmatehtävän ratkaisemisessa. *NMI-Bulletin* 26(2), 43–55.
- Landerl, K. (2014). How specific is the specific disorder of arithmetic skills? Teoksessa S. Chinn (toim.) *The Routledge International Handbook of*

- Dyscalculia and Mathematical Learning Difficulties*. Luettu osoitteesta <https://www.routledgehandbooks.com/DOI/10.4324/978131540713.ch.17>.
- Landerl, K., Fussenegger, B., Moll, K. & Willburger, E. (2009). Dyslexia and dyscalculia: Two learning disorders with different cognitive profiles. *Journal of Experimental Child Psychology* 103, 309–324. DOI:10.1016/j.jecp.2009.03.006.
- Landerl, K. & Kölle, C. (2009). Typical and atypical development of basic numerical skills in elementary school. *Journal of Experimental Child Psychology* 103(2009), 546–565. DOI: 10.1016/j.jecp.2008.12.006.
- LeFevre, J.-A., Berrigan, L., Vendetti, C., Kamawar, D., Bisanz, J., Skwarchuk, S.-L. & Smith-Chant, B. L. (2013). The role of executive attention in the acquisition of mathematical skills for children in Grades 2 through 4. *Journal of Experimental Child Psychology* 114(2013), 243–261. DOI: 10.1016/j.jecp.2012.10.005.
- Leppäaho, H. (2007). *Matemaattisen ongelmanratkaisun opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi*. Jyväskylän yliopisto. Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 298.
- Li, Y. & Geary, D. C. (2013). Developmental gains in visuospatial memory predict gains in mathematics achievement. *PLoS ONE* 8(7), article number e70160. DOI: 10.1371/journal.pone.0070160.
- Lindeman, J. (1998). *ALLU–Ala-asteen lukutesti*. Turun yliopisto: Oppimistutkimuksen keskus.
- Locuniak, M. N. & Jordan, N. C. (2008). Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities* 4(5), 451–459. DOI: 10.1177/0022219408321126.
- Lusetti, E. & Aunio, P. (2012). Esikoululaisten matemaattisten taitojen kehittymisen tukeminen Minäkin lasken!–harjoitusohjelman avulla. *NMI-Bulletin* 22(3), 14–27.
- Martin, R. B., Cirino, P. T., Barnes, M. A., Ewing-Cobbs, L., Fuchs, L. S., Stuebing, K. K. & Fletcher, J. M. (2012). Prediction and stability of mathematics skill and difficulty. *Journal of Learning Disabilities* 46(5), 428–443. DOI: 10.1177/0022219411436214.
- Mattinen, A., Räsänen, P., Hannula, M. & Lehtinen, E. (2010). *Nallematikka–Varhaisten matemaattisten oppimisvalmiuksien kehittämisohjelma*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Mazzocco, M. M. M. (2005). Challenges in identifying target skills for math disability screening and intervention. *Journal of Learning Disabilities* 38(4), 318–323.
- Mazzocco, M. M. M., Devlin, K. T. & McKenney, S. J. (2008). Is it a fact? Timed arithmetic performance of children with mathematical learning disabili-

- ties (MLD) varies as a function how MLD is defined. *Developmental Neuropsychology* 33(3), 318–344. DOI: 10.1080/8756540801982403.
- Mazzocco, M. M. M. & Grimm, K. J. (2013). Growth in rapid automatized naming from grades K to 8 in children with math or reading disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 46(6), 517–533. DOI: 10.1177/0022219413477475.
- Mazzocco, M. M. M. & Räsänen, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education* 2, 65–73. DOI: 10.1016/j.tine.2013.05.001.
- Mazzocco, M. M. M. & Thompson, R. E. (2005). Kindergarten predictors of math learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice* 20(3), 142–155.
- Mentula, T. (2004). Diagnostinen kuntoutustutkimus kehityksellisessä dyskalkuliassa: tapaustutkimus. *NMI-Bulletin* 14(2), 19–30.
- Metsämuuronen, J. (2010). Osaamisen ja asenteiden muutos peruskoulun 3.–5. luokilla. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (ss. 93–136). Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy.
- Metsämuuronen, J. & Tuohilampi, L. (2017). *Matemaattisen osaamisen piirteitä lukiokoulutuksen lopussa 2015*. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 3:2017. Tampere: Juvenes Print.
- Mononen, R., Aunio, P. & Koponen, T. (2014). Investigation of RightStart mathematics kindergarten instruction in Finland. *JECER* 3(1), 2–26. Luettu osoitteesta <http://jecer.org/epcontent/uploads/2014/04/Mononen-Aunio-Koponen-issue3-1.pdf>.
- Montis, K. K. (2000). Language development and concept flexibility in dyscalculia: A case study. *Journal of Research in Mathematics Education* 31(5), 541–556.
- Morgan, P. L., Farkas, G. & Wu, Q. (2009). Five-year growth trajectories of kindergarten children with learning difficulties in mathematics. *Journal of Learning Disabilities* 42(4), 306–321. DOI: 10.1177/0022219408331037.
- Murata, A. (2004). Paths to learning ten-structured understanding of teen sums: addition solution methods of Japanese grade 1 students. *Cognition and Instruction* 22(2), 185–218.
- Nevala, J. & Lyytinen, H. (2000). *Sanaketjutesti*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti ja Jyväskylän yliopiston lapsitutkimuskeskus.
- Opetushallitus (2014). *Peruskoulun opetussuunnitelma 2014*. Määräykset ja ohjeet 2014:96. Tampere: Juvenes Print.



- Paukkeri, V., Pakarinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Poikkeus, A.-M. (2015). Alaryhmätarkastelu matemaattisten taitojen kehityksestä esiopetuksesta neljännelle luokalle. *Psykologia* 50(4), 277–291.
- Petrill, S., Logan, J., Hart, S., Vincent, P., Thompson, L., Kovas, Y. & Plomin, R. (2012). Math fluency is ethiologically distinct from untimed math performance, decoding fluency, and untimed reading performance: evidence from a twin study. *Journal of Learning Disabilities* 45(4), 371–381. DOI: 10.1177/0022219411407926.
- Powell, S. R., Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (2013). Reaching the mountaintop: Addressing the Common Core Standards in mathematics for students with mathematical difficulties. *Learning Disabilities Research & Practice* 28(1), 36–48.
- Price, G. R. & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, causes, and treatments. *Numeracy* 6(1), Article 2. DOI: 10.5038/1936-4660.6.1.2 .
- Puolakanaho, A., Heinola, K., Eklund, K., Hintikka, S. & Hämäläinen, J. (2011). *LukiMat-oppimisen arviointi. Käyttäjän opas*. Haettu osoitteesta <http://www.lukimat.fi/lukimat-oppimisen-arviointi/materiaalit/tuen-tarpeen-tunnistaminen/2lk/lukeminen>.
- Ramos-Christian, V., Schleser, R. & Varn, M. E. (2008). Math fluency: Accuracy versus speed in preoperational and concrete operational first and second grade children. *Early Childhood Education Journal* 35(2008), 543–549. DOI: 10.1007/s10643-008-0234-7.
- Rittle-Johnson, B. & Siegler, R. S. (1998). The relationship between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. Teoksessa C. Donlan (toim.) *The Development of Mathematical Skill. Studies in developmental psychology* (ss. 75–110). East Sussex: Psychology Press Ltd.
- Robinson, C. S., Menchetti, B. M. & Torgesen, J. K. (2002). Toward a two-factor theory of one type of mathematics disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice* 17(2), 81–89.
- Rusanen, E. & Räsänen, P. (2012). Matematiikassa heikosti suoriutuvien lasten laskustrategioiden kehitys. *NMI-Bulletin* 22(3), 28–41.
- Räsänen, P. (2004). *RMAT. Laskutaidon testi 9–12-vuotiaille*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Räsänen, P. (2005). *BANUCA. Lukukäsitteen ja laskutaidon hallinnan testi*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Räsänen, P. & Närhi, V. (2014). Heikkojen oppijoiden koulupolku. Teoksessa J. Metsämuuronen (toim.) *Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkäjäsenarviointi vuosina 2005–2012* (ss. 173–230). Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Helsinki: Opetushallitus.
- Räsänen, P., Närhi, V. & Aunio, P. (2010). Matematiikassa heikosti suoriutuvat oppilaat perusopetuksen 6.luokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J.

- Metsämuuronen (toim.) *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008*. (s. 211). Koulutuksen seurantaraportit 2010:2. Helsinki: Edita Prima Oy.
- Sarama, J. & Clements, D. H. (2009). Teaching math in the primary grades. The learning trajectories approach. *YC Young Children* 64(2), 63–65.
- Sherin, B. & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for Research in Mathematics Education* 36(4), 347–395.
- Shin, M. & Bryant, D. P. (2015). A synthesis of mathematical and cognitive performances of students with mathematical learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 48(1), 96–112. DOI: 10.1177/0022219413508324.
- Skarr, A., Zielinski, K., Ruwe, K., Sharp, H., Williams, R. L. & McLaughlin, T. F. (2014). The effects of direct instruction flashcards and math racetrack procedures on mastery of basic multiplication facts by three elementary school students. *Education and Treatments of Children* 37(1), 77–93.
- Slavin, R. E. & Lake, C. (2008). Effective programs in elementary mathematics: A best-evidence synthesis. *Review of Educational Research* 78(3), 427–515.
- Stock, P., Desoete, A. & Royers, H. (2010). Detecting children with arithmetic disabilities from kindergarten: Evidence from a 3-year longitudinal study on the role of preparatory arithmetic abilities. *Journal of Learning Disabilities* 43(3), 250–268. DOI: 10.1177/0022219409345011.
- Tasola, O. (1967). *Koesarja LUKILA I-II ja LUKILA II-III. Lukemisen, kirjoituksen ja laskennon koulukokeita kansakoulun ala-asteelle. Opettajan ohjekirja*. Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 30A.
- Tasola, O. (1968). *Koesarja LUKILA I-II ja LUKILA II-III. Lukemisen, kirjoituksen ja laskennon koulukokeita kansakoulun ala-asteelle. Ohjeita kokeiden käytöstä. Opettajan ohjekirjan liite 1*. Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 30B.
- Tasola, O. (1970). *Koesarja Lukima III ja Lukima IV. Lukemisen, kirjoituksen ja matematiikan koulukokeita peruskoulun III ja IV luokalle. Opettajan ohjekirja*. Jyväskylän yliopisto, Kasvatustieteiden tutkimuslaitoksen julkaisuja 53.
- Terveyden- ja hyvinvoinnin laitos (2011). *Tautiluokitus ICD-10. Suomalainen 3. uudistettu painos Maailman terveysjärjestön (WHO) luokituksesta ICD-10*. Mikkeli: StMichel Print.
- Thronsdon, I. (2011). Self-regulated learning of basic arithmetic skills: A longitudinal study. *British Journal of Education Psychology* 81(4), 558–578. DOI: 10.1348/2044-8279.002008.

- Torbeyns, J., Verschaffel, L. & Ghesqui re, P. (2004). Strategy development in children with mathematical disabilities: Insights from the choice/no-choice methods and the chronological-age ability-level-match design. *Journal of Learning Disabilities* 37(2), 119–131.
- Tournaki, N. (2003). The differential effects of teaching addition through strategy instruction versus drill and practice to students with and without learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* 36(5), 449–458.
- Tzohar-Rozen, M. & Kramarski, B. (2014). Metacognition, motivation and emotions: contribution of self-regulated learning to solving mathematical problems. *Global Education Review* 1(4), 76–95. Luettu osoitteesta <http://ger.mercy.edu/index.php/ger/article/view/63/74>.
- Van Luit, J., Aunio, P. & Räsänen, P. (2010). *Minäkin lasken! –Lasten lukukäsitteen harjoitusohjelma*. Jyväskylä: Niilo M ki Instituutti.
- Van Luit, J. E. H. & Schopman, E. A. M. (2000). Improving early numeracy of young children with special educational needs. *Remedial and Special Education* 21(1), 27–40.
- Van Luit, J., van de Rijt, B. A. M. & Aunio, P. (2006). *Lukukäsitetesti*. Helsinki: Psykologien kustannus.
- Vauras, M. & Kinnunen, R. (2003). *HOPE. Hopeisen p ll n etsint  Salaisten lukujen valtakunnasta. Matematiikan opetusplei*. Turun yliopisto: Opetusministeriön tutkimuskeskus.
- Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. Teoksessa F. K. Jr Lester (toim.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (ss. 557–628). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.
- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E. & Rautopuro, J. (2016). *Lapsuudesta ev  t oppimiseen. Neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen. Kansainv linen TIMMS-tutkimus Suomessa*. Luettu osoitteesta <http://ktl.jyu.fi/pirls-timms/timms>.
- Vukovic, R. K. & Siegel, L. S. (2010). Academic and cognitive characteristics of persistent mathematics difficulty from first through fourth grade. *Learning Disabilities Research & Practice* 25(1), 25–38.
- Willburger, E., Fussenegger, B., Moll, K., Wood, G. & Landerl, K. (2008). Naming speed in dyslexia and dyscalculia. *Learning and Individual Differences* 18, 224–236. DOI: 10.1016/j.lindif.2008.01.003.
- Witzel, B. S., Mink, D. V. & Riccomini, P. J. (2011). Using visual representations to instruct and intervene with secondary mathematics. Teoksessa R. Gersten & R. Newman-Gonchar (toim.) *Understanding RTI in Mathematics. Proven Methods and Applications* (ss. 151–168). Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

Woodward, J. (2006). Developing automaticity in multiplication facts: Integrating strategy instruction with timed practice to drills. *Journal of the Council for Learning Disabilities* 29(4), 269–288.

Wright, R. J., Martland, J. & Stafford, A. K. (2006). *Early Numeracy. Assessment for teaching & intervention*. 2<sup>nd</sup> edition. Lontoo: SAGE Publications Inc.





## Liitteet

Liite A. Kaikkien tutkimuksissa käytettyjen mittarien tiedot

	mittarin				osatutkimus							
	maksimi	ka.	% oikein	kh.	mediaani	min	max	reliabiliteetti	I	II	III	IV
<u>Matemaattinen osaaminen / Laskemisen sujuvuus</u>												
päässälaskusarjat	20/100%	86,5–92,4%	86,5–92,4	11,3–17,7%	18,80 %	100 %	.87a	+				
Makeko 2, 3, 4	50–70/100%	85,1–88,5%	85,1–88,5	10,1–13%	40 %	100 %		+				
Banua-osa	20	14,7	73,5	3,7	15	20		+				
Lukukäsitetesti	40	25,7–35,7	64,3–89,3	1,6–4,6	25–36	38	.70a; .90b		+			
Banua	79	47,7–57,1	60,4–72,3	6,1–9,9	48–58,5	68	.63a; .83b	+	+			
TTT <sub>1</sub>	40	16,8	42	6	16	32	.88 – .90b			+		+
Lukila I–II	44	26,1	59,3	6,84	24	43	.86a			+		+
Lukila II–III	45	21,5	47,8	6,42	21	35	.90a			+		+
Lukila II–III	45	25,1	55,8	5,59	26	39	.88a			+		+
Lukima IIIA	30	14,7	49	5,01	15	29	.84a			+		+
Lukima IIIB	30	14,2	47,3	6,17	14	30	.91a					+

RMAT	56	34,7	62	5,6	35	22	51	.86b	+	+
<u>Lukemisen sujuvuus</u>										
TTT <sub>2</sub> , epäsanat	90	45,1	50,1	8,6	45	27	61	c	+	+
TTT <sub>3</sub> , teksti	262	104,6	39,9	26,7	107,5	43	167	c	+	+
YTTE	116	66,4	57,2	17,1	65	31	107	c	+	+
ALLU TL 5B	214	109,1	51	27,7	111	58	159	.97b	+	+
ALLU TL 5A	214	110,1	51,4	25,5	108	69	171	.97b	+	+
SK erota sanat	40	14,6	36,5	5,6	15	3	28	.78b	+	+
SK hölynpölyt	25	12,3	49,2	3,1	13	5	18	.72b	+	+
SK korjaa	26	10,6	40,8	3,5	10	5	21	.80b	+	+
SK tavuta	55	31	56,4	8,3	30	15	51	.90b	+	+
SK tekninen*	9	4,7	52,2	1,2	5	1,3	7,6		+	+
<u>Nimeämisnopeus</u>										
NSN värit	aika	43,3		6,5	42	32,3	59,2		+	+
NSN kirjaimet	aika	27,8		5,6	27,1	17,3	41,1		+	+
NSN numerot	aika	29,7		7,1	28,3	17,8	47,3		+	+
NSN esineet	aika	50,6		7,6	48	40,1	75,1		+	+



Muut

Ensiaskeleet**	3-180	1,3-69,4	22,5-90,4	1-70	0-41	3-121	.22-.72b	+
visuaalinen hahmotus	5	3	60	1,8	3	0	-	+

HUOM. \*Sanakejutestin kolmesta ensimmäisestä osiosta testikäsikirjan mukaan laskettu teknisen lukutaidon kokonaistulos

\*\*Ensiaskeleet-tehtäväsarjan osatehtävät ja niiden maksimipistemäärät: aarre (4), talo (3), kuviopari (8), pullo (8), sääntö (180), montako kuulet (24), omakuva (3), katso ja muista (8)

a= reliabiliteetti(Cronbachin alfa) tässä tutkimuksessa

b= reliabiliteetti testikäsikirjan mukaan

c= ääneen lukemisen mittausten keskinäiset korrelaatiot: TTT<sub>2</sub>-TTT<sub>3</sub> .78; TTT<sub>3</sub>-YTTE .80; YTTE-TTT<sub>2</sub> .78)

SK= Sanakejutesti

NSN= Nopean sarjallisen nimeämisen testi

