HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Kalle Salminen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Gromov–Hausdorff -etäisyys

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Lokakuu 2017	33 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä työssä syvennyttään metristen avaruuksien erilaisuuden vertailuun määrittelemällä niin sanottu Gromov–Hausdorff -etäisyys, eli metristen avaruuksien välinen etäisyyskuvaus, jonka osoitetaan toteuttavan metriikan ehdot jokaisessa joukossa metristen avaruuksien ekvivalenssiluokkia. Työssä todistetaan, että metristen avaruuksien välinen Gromov–Hausdorff -etäisyys on nolla, jos ja vain jos avaruudet ovat isometrisia. Työn päätuloksena todistetaan, että jonolla tasaisesti kompakteja metrisiä avaruuksia on osajono, joka suppenee kompaktien metristen avaruksien kokoelmassa Gromov–Hausdorff -metriikalla.

Tutkielman edetessä todistetaan muita yleisiä, tutkielmassa hyödynnettäviä matemaattisia tuloksia. Näistä mainittakoon Heinen ja Borelin lause, jonka mukaan metrinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on täysin rajoittunut ja täydellinen. Todistus pohjautuu metrisiin avaruuksiin pätevään jonokompaktiuden määritelmään. Lisäksi todistetaan, että jos f on tasaisesti jatkuva kuvaus metrisen avaruuden (X, d_X) tiheältä osajoukolta A täydelliselle metriselle avaruudelle (Y, d_Y), niin on olemassa sellainen tasaisesti jatkuva kuvaus $g : \overline{A} \to Y$, että g on kuvauksen f laajennus. Työn kannalta yksi merkittävimmistä välituloksista koskee metrisen täydellistämistä, jonka mukaan jokaisella metrisellä avaruudella (X, d) on olemassa sellainen täydellinen metrinen avaruus (Y, d^*) ja sellainen isometrinen kuvaus $\varphi : X \to Y$, että $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Geometria, topologia, metrinen avaruus, kompaktius, Gromov–Hausdroff

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Gromov–Hausdorff -etäisyys

Kalle Salminen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Lokakuu 2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Useimmille etäisyys tarkoittaa sitä, kuinka moneksi mittayksiköksi – esimerkiksi metriksi – jokin määritettävä etäisyys jakautuu. Koulussa opetetaan, että tämä etäisyys voidaan myös laskea määritettävän välin päätepisteistä toisiinsa nähden kohtisuorassa olevien suorien avulla, kun tiedetään kuinka pitkä matka suorien leikkauspisteestä on määritettävänä olevan välin päätepisteisiin. Toisin sanoen koulussa opetetaan käyttämään Pythagoraan lausetta.

Matematiikkaan perehtyessään oppii tietämään, että etäisyys on sopimuksenvarainen asia ja että Euklidinen avaruus (esim. koordinaatisto) ja Euklidinen metriikka (eli Pythagoraan lause) ovat vain erikoistapauksia kaikkien metristen avaruuksien kokoelmassa. Avaruuksia ja tapoja määrittää avaruuden alkioiden välisiä etäisyyksiä on siis erilaisia.

Tämä tutkielma käsittelee sitä, kuinka erilaisia metriset avaruudet ovat. Tutkielma tarjoaa keinon kompaktien metristen avaruuksien erilaisuuden vertailemiseksi, mikä toteutetaan määrittelemällä kompaktien metristen avaruuksien välinen etäisyyskuvaus, joka toimii avaruuksien erilaisuuden mittana.

Tutkielman alussa, luvussa 2, esitellään aiheen kannalta oleellisten matemaattisten käsitteiden määritelmiä ja todistetaan joitakin myöhemmissä todistuksissa tarvittavia apulauseita. Kuitenkin tutkielman päätulokseen kytkeytyvä kompaktiuden määritelmä, määritelmä 3.1, on erotettu omaan lukuunsa, lukuun 3, jossa todistetaan myös niin sanottu Heinen ja Borelin lause.

Lause 3.5. *Metrinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on täysin rajoitettu ja täydellinen.*

Luvussa 4 lähestytään metristä avaruutta, jonka alkiot voivat olla pelkkää pistettä monimutkaisempia rakenteita. Tämä tehdään määrittelemällä niin sanottu Hausdorff-etäisyys, määritelmä 4.1, joka toteuttaa metriikan myös metrisen avaruuden pisteiden potenssijoukossa, lause 4.2.

Luku 5 on rakennettu hieman laajemman, tukielman viimeisessä luvussa apulauseena käytettävän, yleisen matemaattisen tuloksen ympärille.

Lause 5.7. *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä.*

Metrisen avaruuden (X, d) täydellistymällä, määritelmä 5.5, tarkoitetaan sellaista isometristä kuvausta φ ja sellaista täydellistä metristä avaruutta (Y, d^*), joille pätee, että kuvauksen $\varphi : X \to Y$ kuva on tiheä.

Tutkielman viimeisessä luvussa, luvussa 6, määritellään Gromov–Hausdorff -etäisyys, määritelmä 6.4, eli etäisyyskuvaus D_H, jonka alkioita ovat metriset avaruudet. Tämän seurauksena todistetaan, että näin määritelty etäisyyskuvaus antaa käsityksen siitä, kuinka samanlaisia metriset avaruudet ovat.

Lause 6.9. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) kompakteja metrisiä avaruuksia. Avaruudet X ja Y ovat isometrisia, jos ja vain jos $D_H(X, Y) = 0$.*

Viimeisenä todistettava tutkielman päätulos käsittelee raja-arvon olemassaoloa kompaktien metristen avaruuksien kokoelmassa.

Lause 6.11. *Jos jono metrisiä avaruuksia (C_n) on tasaisesti kompakti, tällöin sillä on olemassa osajono, joka suppenee Gromov–Hausdorff -metriikassa, eli on olemassa kompakti metrinen avaruus X ja osajono (C_{n_k}), että $D_H(C_{n_k}, X) \to 0$, kun $k \to \infty$.*

Tutkielma pohjautuu Martin Bridsonin ja André Haefligerin teoksen *Metric Spaces of Non-Positive Curvature* ensimmäisen osan viidenteen lukuun.

Luku 2

Perusteet

Tässä luvussa esitellään tutkielman aiheen kannalta keskeiset topologiset käsitteet sekä niihin liittyviä ominaisuuksia. Pyrkimyksenä on johdatella lukija luontevasti isometrian ja kompaktiuden määritelmiin. Osalle seuraavista määritelmistä on olemassa yleisempi, kaikkiin topologisiin avaruuksiin pätevä määritelmä, mutta tämän tutkielman kannalta on riittävää esittää niistä metrisiin avaruuksiin rajoittuvat vastineet.

Metrinen avaruus

Metriikka ja metrinen avaruus ovat tämän tutkielman kulmakiviä, sillä tutkielmassa käsiteltävät avaruudet ovat poikkeuksetta metrisiä. Metriikka määrittelee, kuinka kaukana jonkin joukon alkiot ovat toisistaan eli alkioiden välisen etäisyyden kyseisessä joukossa.

Määritelmä 2.1. Olkoon X joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on *metriikka*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, y) \geq 0$,
(M2) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ ja
(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Määritelmä 2.2. Olkoon X joukko, jossa on annettu jokin metriikka $d : X \times X \to \mathbb{R}$. Kutsumme paria (X, d) *metriseksi avaruudeksi.*

Vaikka metriikka määritellään joukon alkioille, sitä sovelletaan myös joukon osajoukkoihin seuraavasti. Olkoon A ja B metrisen avaruuden (X, d) osajoukkoja. Epätyhjien *joukkojen A ja B välinen etäisyys* on luku

$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Joukon A *läpimitta* eli halkaisija on

$$\operatorname{diam}(A) = \begin{cases} \sup\{d(x,y) \mid x \in A, y \in A\}, \text{ jos } A \neq \emptyset \\ 0, \text{ jos } A = \emptyset \end{cases}$$

Huomattakoon myös, että avaruuden (X, d) potenssijoukossa $\mathcal{P}(X)$ funktio dist : $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ ei yleisesti ole metriikka. Esimerkiksi avaruuden $(\mathbb{R}, d)$ osajoukoilla $A = [0,1], B = [1,2], C = [2,3]$ metriikan neljäs ehto (M4), ts. *kolmioepäyhtälö*, ei ole voimassa, sillä

$$\operatorname{dist}(A, C) = \operatorname{dist}([0,1],[2,3]) > 0,$$

mutta

$$\operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C) = \operatorname{dist}([0,1],[1,2]) + \operatorname{dist}([1,2],[2,3]) = 0 + 0,$$

jolloin

$$\operatorname{dist}(A, C) > \operatorname{dist}(A, B) + \operatorname{dist}(B, C).$$

Toisinaan käytetään etäisyysfunktioita, joilla metriikan toisen ehdon (M2) ekvivalenssi ei ole voimassa halutuissa joukoissa. Jos sallitaan, että joukon kahden eri alkion välinen etäisyys voi olla nolla luopumatta muista metriikan ehdoista, niin puhutaan pseudometriikasta (ks. määritelmä 5.2).

Avoimet ja suljetut joukot sekä ympäristöt

Avoimet ja suljetut joukot sekä pisteiden ja joukkojen ympäristöt ovat topologian peruskäsitteitä, joihin myös tässä tutkielmassa myöhemmin esiintyvät määritelmät ja todistukset nojaavat.

Joukon avoimuus voidaan määritellä yleisiin topologisiin avaruuksiin ilman metriikkaa kuten [V1, s.30]. Tässä tutkielmassa käsitellään kuitenkin poikkeuksetta metrisiä avaruuksia, joten avoimuuden yleinen topologinen määritelmä on turhan abstrakti ja siitä esitetään metrisissä avaruuksissa yhtäpitävä määritelmä. Avoimien joukkojen avulla määritellään suljetut joukot, joiden käsittely osoittautuu hyödylliseksi myöhemmin määriteltävän kompaktiuden kanssa.

Määritelmä 2.3. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Joukko $A \subseteq X$ on *avoin* avaruudessa X, jos kaikilla $x \in A$ on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että kaikkille $y \in X$, joille $d(x, y) < \varepsilon$, niin $y \in A$.

Määritelmä 2.4. Olkoon X metrinen avaruus. Joukon $B \subseteq X$ sanotaan olevan *suljettu* avaruudessa X, jos sen komplementti $\complement B = X \setminus B$ on avoin.

Mainittakoon, että joukon avoimuus tai se, että joukko on suljettu, eivät ole toisiaan poissulkevia käsitteitä. Joukko voi olla samanaikaisesti avoin ja suljettu. Voi myös olla, että joukko ei ole näistä kumpaakaan.

Pisteen tai joukon ympäristö kytkeytyy oleellisesti muun muassa jonojen ja kuvausten raja-arvojen tarkasteluun sekä joukkojen tiheyteen. Tämän tutkielman kannalta on selkeämpää käyttää seuraavaa, hieman pelkistettyä ympäristön määritelmää, vaikka ympäristölle on olemassa yleisempi määritelmä, jossa myös suljettu joukko sallitaan ympäristöksi tietyin ehdoin, kuten on esitelty esimerkiksi [V1, s.31].

Määritelmä 2.5. Olkoon X metrinen avaruus ja $V \subset X$ avoin joukko. Sanotaan, että joukko V on *pisteen* $a \in X$ *ympäristö*, jos $a \in V$. Vastaavasti sanotaan, että V on *joukon* $A \subset X$ *ympäristö*, jos $A \subset V$.

Myöhemmin tutkielmassa käytetään termiä osajoukon $A \subset X$ ε-*ympäristö*, jolla tarkoitetaan joukkoa

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(A) &= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, a) < \varepsilon \text{ jollakin } a \in A\}. \end{aligned}$$

Seuraavaksi määriteltävät kuulat antavat yksinkertaisen ja usein riittävän tavan käsitellä pisteiden ympäristöjä metrisissä avaruuksissa.

Määritelmä 2.6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus sekä olkoot $a \in X$ ja $r > 0$. Otetaan käyttöön merkinnät

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

ja

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Sanotaan, että $B(a, r)$ on avaruuden X *avoin kuula*, jonka keskipiste on a ja säde r. Vastaavasti $\overline{B}(a, r)$ on avaruuden X *suljettu kuula*.

Avoin kuula $B(a, r)$ on siis avaruuden X osajoukko, joka sisältää kaikki avaruuden X pisteet, joiden etäisyys pisteestä a on vähemmän kuin r. Lisäksi $B(a, r)$ on pisteen a (sekä kaikkien pisteiden $x \in B(a, r)$) ympäristö. Vastaavasti suljettu kuula $\overline{B}(a, r)$ on avaruuden X osajoukko, joka sisältää kaikki avaruuden X pisteet, jotka ovat korkeintaan etäisyydellä r pisteestä a. Todettakoon vielä, että avoimet kuulat ovat avoimia joukkoja ja suljetut kuulat ovat suljettuja joukkoja, kuten on todistettu [V1, s.29, s.46].

Joukon sulkeuman määritelmä voidaan perustellusti esittää jatkona suljetuille joukoille ja ympäristölle, vaikka tutkielman kannalta sitä tarvitaan osana tämän luvun lopussa todistettavaa tasaisesti jatkuvan kuvauksen laajentamista koskevaa lausetta.

Määritelmä 2.7. Joukon $A \subset X$ *sulkeumalla* $\overline{A}$ tarkoitetaan kaikkien niiden pisteiden $x \in X$ joukkoa, joiden jokainen ympäristö kohtaa joukon A.

Sulkeuma on pienin suljettu joukko, joka sisältää annetun joukon [V1, s.48].

Raja-arvo ja täydellisyys

Suppenevat jonot, joihin raja-arvon käsite oleelliseti liittyy, ovat merkittävässä asemassa läpi tutkielman. Tutkielman edetessä saadaan huomata, että nämä käsitteet esiintyvät lähes kaikissa todistuksissa.

Määritelmä 2.8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja (x_n) jono avaruudessa X. Piste $x \in X$ on jonon (x_n) *raja-arvo*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$, kun $n \geq n_0$.

Jos avaruuden X jonolla (x_n) on raja-arvo $x \in X$, sanotaan, että jono *suppenee* kohti pistettä x. Lisäksi jos $A \subset X$ ja (x_n) on myös joukon A jono, mutta $x \notin A$, niin tällöin jono (x_n) suppenee joukossa X mutta ei joukossa A. Suppenevalle jonolle ja sen raja-arvolle käytetään merkintää $x_n \to x$, kun $n \to \infty$

Määritelmä 2.9. Metrisen avaruuden (X, d) jono (x_n) on *Cauchyn jono* (tai lyhyemmin *Cauchy*), jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_k) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$.

Cauchyn jonon jäsenet siis päätyvät mielivaltaisen lähelle toisiaan jonon edetessä, vaikka mistään raja-arvosta ei puhuta. Cauchyn jonolla on kuitenkin raja-arvo täydellisessä avaruudessa, jonka määritelmä esitetään seuraavaksi.

Määritelmä 2.10. Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa X.

Täydellisyys osoittautuu hyödylliseksi käsitteeksi tutkielman edetessä. Seuraavassa luvussa määritellään kompakti avaruus ja näytetään, että avaruuden täydellisyyttä voidaan hyödyntää todistettaessa avaruuden kompaktiutta.

Isometria ja tasainen jatkuvuus

Seuraavaksi määritellään sekä isometrinen että tasaisesti jatkuva kuvaus ja osoitetaan, kuinka Cauchyn jonot liittyvät näihin käsitteisiin.

Määritelmä 2.11. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *isometrinen kuvaus* tai lyhyemmin *isometria*, jos $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.

Lisäksi sanotaan, että avaruudet X ja Y ovat *isometrisia*, jos on olemassa bijektiivinen isometria $f : X \to Y$.

Isometrinen kuvaus siis säilyttää avaruuden pisteiden väliset etäisyydet. Isometria on yksi tämän tutkielman keskeisistä käsitteistä, sillä tutkielman varsinaisena aiheena oleva Gromov–Hausdorff -etäisyys on metristen avaruuksien joukkoon määriteltävä etäisyyskuvaus, jonka voidaan nähdä mittaavan sitä, kuinka kaukana bijektiot $f : X \to Y$ ovat isometrioista.

Tutkielman edetessä käytetään tietoa, että isometrinen kuvaus on aina tasaisesti jatkuva, joten määretellään tasainen jatkuvuus ja todistetaan sen olevan seurausta isometriasta.

Määritelmä 2.12. Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on *tasaisesti jatkuva*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $d_Y(f(x_1), f(x_2) < \varepsilon$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$, joilla $d_X(x_1, x_2) < \delta$.

Lause 2.13. *Olkoon (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja kuvaus $f : X \to Y$ isometria. Tällöin f on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x_1, x_2 \in X$. Valitsemme $\delta = \varepsilon$, jolloin

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon$$

aina, kun $d_X(x_1, x_2) < \delta$. □

Jatkon kannalta on myös hyödyllistä todistaa se, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa lähtöjoukon Cauchyn jonot maalijoukon Cauchyn jonoiksi.

Lause 2.14. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja kuvaus $f : X \to Y$ tasaisesti jatkuva. Tällöin f kuvaa avaruuden X jokaisen Cauchyn jonon avaruuden Y Cauchyn jonoksi.*

Todistus. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa X ja olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ kaikilla $x, x' \in X$, joilla $d_X(x, x') < \delta$. Koska (x_n) on Cauchy, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d_X(x_m, x_n) < \delta$ kaikilla $m > n_0$ ja $n > n_0$. Tästä seuraa, että $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ kaikilla $m > n_0$ ja $n > n_0$. Täten $(f(x_n))$ on Cauchyn jono avaruudessa Y. □

Tasaisesti jatkuvan kuvauksen laajentaminen

Lopuksi todistetaan luvussa 6 tarvittava yleinen matemaattinen tulos, jonka mukaan avaruuden tiheältä osajoukolta määritelty tasaisesti jatkuva kuvaus voidaan lajentaa tasaisesti jatkuvaksi kuvaukseksi lähtöjoukonsa sulkeumaan, jos kuvauksen maalijoukko on täydellinen [V1, s.94]. Määritellään kuitenkin ensin tiheä joukko.

Määritelmä 2.15. Joukko $A \subset X$ on *tiheä* avaruudessa X, jos kaikilla pisteillä $x \in X$ ja kaikilla pisteen x ympäristöillä V on olemassa sellainen piste $a \in A$, että $a \in V$.

Metrisissä avaruuksissa tiheys voidaan yhtäpitävästi määritellä pisteen $x \in X$ kuulaympäristöillä kaikkien ympäristöjen V sijaan. Muotoillaan tämä seuraavaksi lauseeksi.

Lause 2.16. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin joukko $A \subset X$ on tiheä avaruudessa X, jos kaikilla pisteillä $x \in X$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen piste $a \in A$, että $d(x, a) < \varepsilon$.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja joukko $A \subset X$. Todistetaan, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:

(1) kaikilla pisteillä $x \in X$ ja kaikilla pisteen x ympäristöillä V on olemassa sellainen piste $a \in A$, että $a \in V$.

(2) kaikilla pisteillä $x \in X$ ja kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen piste $a \in A$, että $d(x, a) < \varepsilon$

Osoitetaan, että ehdosta (1) seuraa ehto (2): Olkoon $x \in X$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin avoin kuula $B(x, \varepsilon)$ on pisteen x ympäristö, joten on olemassa sellainen $a \in A$, että $a \in B(x, \varepsilon)$. Täten $d(x, a) < \varepsilon$.

Osoitetaan, että ehdosta (2) seuraa ehto (1): Olkoon $x \in X$ ja joukko V pisteen x ympäristö. Koska V on avoin, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että $y \in V$ kaikilla $y \in X$, joilla $d(x, y) < \varepsilon$. Oletuksen nojalla on olemassa $a \in A$, jolla $d(x, a) < \varepsilon$ ja täten $a \in V$. □

Todistetaan vielä tiheyteen liittyvä lause, jonka avulla voidaan jatkossa todeta, että avaruuden tiheän osajoukon sulkeuma on avaruus itse.

Lause 2.17. *Jos joukko A on tiheä avaruudessa X, niin $\overline{A} = X$.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ tiheä avaruudessa X. Tällöin jokaisella pisteellä $x \in X$ ja kaikilla pisteen x ympäristöillä V on olemassa sellainen piste $a \in A$, että $a \in V$. Siis pisteen x jokaisessa ympäristössä on joukon A piste. Täten $x \in \overline{A}$ ja $X \subset \overline{A}$.

Jos puolestaan $x \in \overline{A}$, niin jokainen pisteen x jokainen ympäristö V sisältää joukon A pisteen. Tämä on yhtäpitävä tiheyden määritelmän 2.15 kanssa, joten $x \in X$ ja $\overline{A} \subset X$. Näin ollen $\overline{A} = X$. □

Huomattakoon vielä, että edelliseen lauseeseen sisältyy hieman yleisempi tieto siitä, että joukko on tiheä sulkeumassaan.

Joukon tiheydelle metrisessä avaruudessa on myös yhtäpitävä ehto, jonka mukaan jokainen $x \in X$ on jonkin A:n jonon raja-arvo. Tämä osoittautuu hyödylliseksi tutkielman myöhemmässä vaiheessa, joten todistetaan se seuraavaksi.

Lause 2.18. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Joukko $A \subset X$ on tiheä avaruudessa X, jos ja vain jos jokaisella $x \in X$ on olemassa sellainen joukon A jono (a_n), että $a_n \to x$, kun $n \to \infty$.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja oletetaan ensin, että joukko $A \subset X$ tiheä. Nyt on osoitettava, että kaikilla avaruuden X pisteillä on olemassa joukon A jono, joka suppenee avaruuden X pisteeseen. Olkoon $x \in X$ piste. Koska X on tiheä, niin lauseen 2.16 nojalla $B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja voidaan valita piste $a_n \in B(x, \frac{1}{2^n}) \cap A$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Näin saadaan muodostettua joukon A jono $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $2^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon}$. Tällöin

$$d(x, a_n) < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon,$$

kaikilla $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, mikä todistaa suppenevan jonon olemassaolon.

Oletetaan käänteisesti, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on olemassa joukon A jono (a_n), joka suppenee kohti pistettä x. On osoitettava, että jokaisella $x \in X$ ja kaikilla pisteen x ympäristöillä V on olemassa sellainen $a \in A$, että $a \in V$. Olkoon $x \in X$ piste ja V pisteen x ympäristö. Koska V on avoin, niin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että kuula $B(x, \varepsilon) \subset V$. Olkoon (a_n) joukon A jono, joka suppenee pisteeseen x. Tällöin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $n > n_0$ pätee $d(x, a_n) < \varepsilon$ ja tällöin $a_n \in B(x, \varepsilon) \subset V$. □

Seuraavaksi todistetaan tämän osion varsinainen päätulos, jonka pohjustamiseksi tässä osiossa edeltäneet asiat on esitelty.

Lause 2.19. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) metrisiä avaruuksia ja olkoon Y täydellinen. Olkoon $A \subset X$ tiheä joukko ja $f : A \to Y$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa kuvauksen f yksikäsitteinen laajennus $g : \overline{A} \to Y$, joka on myös tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Määritellään $g : \overline{A} \to Y$, kaavalla $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, kun (x_n) on joukon A jono, jolle $x_n \to x$, kun $n \to \infty$.

Osoitetaan ensin raja-arvon $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ olemassaolo ja se, ettei raja-arvo riipu valitusta jonosta, toisin sanoen että kuvaus g on hyvin määritelty. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x \in \overline{A}$. Lauseesta 2.18 seuraa, että joukosta A voidaan valita Cauchyn jono (x_n), jolle $x_n \to x$. Lauseesta 2.14 puolestaan seuraa, että tasaisesti jatkuva kuvaus kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi, joten jono $(f(x_n))$ on Cauchy. Koska Y on täydellinen, niin sen Cauchyn jonoilla on raja-arvo avaruudessa Y. Toisin sanoen $f(x_n) \to \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \in Y$.

Olkoon vielä (y_n) toinen joukon A jono, jolle pätee $y_n \to x$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikilla $a \in A$ ja kaikilla $b \in A$, joille $d_X(a, b) < \delta$, niin $d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$. Jonojen (y_n) ja (x_n) suppenemisesta seuraa, että on olemassa sellaiset $n_x \in \mathbb{N}$ ja $n_y \in \mathbb{N}$, että $d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{2}$ kaikilla $n \geq n_x$ ja $d_X(y_n, x) < \frac{\delta}{2}$ kaikilla $n \geq n_y$. Valitaan $n_0 = \max(n_x, n_y)$, jolloin

$$d_X(x_n, y_n) \leq d_X(x_n, x) + d_X(x, y_n) < 2 \cdot \frac{\delta}{2} = \delta$$

ja

$$d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$. Tästä seuraa, että

$$d_Y(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = 0$$

ja täten

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n),$$

joten kuvaus $g : \overline{A} \to Y$ on hyvin määritelty.

Seuraavaksi osoitetaan, että kuvaus g on kuvauksen f laajennus ja tasaisesti jatkuva. Olkoon x jokin joukon A piste. Tällöin x on vakiojonon $(x_n) = (x, x, x \ldots)$ raja-arvo ja täten

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

mikä osoittaa kuvauksen g olevan kuvauksen f laajennus.

Osoitetaan nyt, että kuvaus g on tasaisesti jatkuva. Tätä varten on osoitettava, että minkä tahansa lähtöjoukon $\overline{A}$ alkioiden kuvat saadaan mielivaltaisen lähelle toisiaan maalijoukossa, kun lähtöjoukon alkiot valitaan riittävän läheltä toisiaan. Tätä varten olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, on olemassa sellainen $\delta > 0$, että $d_Y(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kaikilla $a, b \in A$, joilla $d_X(a, b) < \delta$. Olkoon $x, y \in \overline{A}$, joilla $d_X(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Jälleen on olemassa joukon A jonot (x_n) ja (y_n), joille $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Kuten edellä, suppeneville jonoille on olemassa sellainen $n_X \in \mathbb{N}$, että $d_X(x_n, x) < \frac{\delta}{3}$ ja $d_X(y_n, y) < \frac{\delta}{3}$, kun $n \geq n_X$. Tällöin

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) = 3 \cdot \frac{\delta}{3} = \delta$$

ja $d_Y(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Lisäksi, koska $f(x_n) \to g(x)$ ja $f(y_n) \to g(y)$, kun $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, niin on olemassa sellainen $n_Y \in \mathbb{N}$, että $d_Y(f(x_n), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ ja $d_Y(f(y_n), g(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$, kun $n \geq n_Y$. Valitaan $n_0 = \max(n_X, n_Y)$, jolloin

$$d_Y(g(x), g(y)) \leq d_Y(g(x), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), g(y)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$.

Viimeiseksi osoitetaan kuvauksen g yksikäsitteisyyden. Olkoon $h : \overline{A} \to Y$ tasaisesti jatkuva kuvaus, joka on kuvauksen f laajennus. Olkoot $x \in \overline{A}$ ja (x_n) joukon A jono, joka suppenee pisteeseen x. Koska h on kuvauksen f laajennus, niin $h(x_n) = f(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska h on jatkuva, niin $h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n)$. Tällöin

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g(x),$$

joten $h = g$. $\square$

Luku 3

Kompaktius sekä Heinen ja Borelin lause

Tässä luvussa määritellään *kompakti avaruus* ja todistetaan niin sanottu *Heinen ja Borelin lause*, jonka mukaan avaruuden kompaktius on yhtäpitävää avaruuden täydellisyyden ja täysin rajoittuneisuuden kanssa.

Kompaktius on isometrian lisäksi tämän tutkielman keskeisimpiä käsitteitä, sillä tutkielman päätulokset koskevat kompakteja avaruuksia. Kompaktius määritellään yleisissä topologisissa avaruuksissa avoimien peitteiden avulla, kuten on esitetty [V1, s.105]. Tässä tutkielmassa kompaktiudelle käytetään kuitenkin metrisissä avaruuksissa edellisen kanssa yhtäpitävää, niin sanottua jonokompaktiuden määritelmää.

Määritelmä 3.1. Metrinen avaruus (X, d) on *kompakti*, jos sen jokaisella jonolla on osajono, joka suppenee avaruudessa X. Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on *kompakti*, jos (A, d_A) on kompakti avaruus metriikan d indusoimalla metriikalla d_A.

Kompakti avaruus on aina rajoitettu [V1, s.99]. Joukko määritellään rajoitetuksi, kun joukon läpimitta ei ole ääretön. Toisin sanoen joukko $A \subseteq X$ on *rajoitettu*, jos $\operatorname{dim}(A) < \infty$. Rajoittuneisuudelle tarvitaan kuitenkin vahvempi ehto, sillä tavallinen rajoittuneisuus ei liity avaruuden kompaktiuteen kaikilla metriikoilla.

Määritelmä 3.2. Metrinen avaruus (X, d) on *täysin rajoitettu*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen äärellinen kokoelma ε-säteisiä avoimia kuulia $\mathcal{B} = \{B(x_i, \varepsilon) \mid x_i \in X \text{ kaikilla } i = 1, \dots, n\}$, että $X \subseteq \bigcup \mathcal{B}$.

Huomataan, että esimerkiksi kaikkien kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ varustettuna diskreetillä metriikalla $d_{\{0,1\}}$ on rajoitettu, mutta ei täysin rajoitettu, sillä

$$\operatorname{diam}(\mathbb{Z}) = \sup\{d_{\{0,1\}}(x, y) \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\} = 1 < \infty,$$

mutta jos valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$, niin ei ole olemassa sellaista äärellistä kokoelmaa $\mathcal{B}$, että $\mathbb{Z} \subset \bigcup \mathcal{B}$, joten $\mathbb{Z}$ ei ole täysin rajoitettu.

Seuraavaksi todistetaan, että kompaktius on yhtäpitävä täysin rajoittuneisuuden ja täydellisyyden kanssa kuitenkin niin, että täysin rajoittuneisuuden ja täydellisyden implikaatiot kompaktiudesta on muotoiltu apulauseiksi seurattavuuden helpottamiseksi. Tätä tulosta hyödynnetään tutkielman myöhemmässä osassa.

Lemma 3.3. *Kompakti metrinen avaruus on täysin rajoitettu*

Todistus. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus. Tehdään vastaoletus, että avaruus X ei ole täysin rajoitettu. Tällöin on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että kaikilla äärellisillä osajoukoilla $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset X$ pätee

$$X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(s_i, \varepsilon).$$

Valitaan sellainen $\varepsilon > 0$, että avaruus ei ole peitettävissä äärellisellä määrällä ε-säteisiä avoimia kuulia ja olkoon $x_1 \in X$ piste. Olkoon $x_2 \in X$ piste, joka ei sisälly kuulaan $B(x_1, \varepsilon)$. Jatketaan avaruuden X pisteiden valitsemista induktiivisesti. Valitaan sellainen piste $x_{k+1} \in X$, että x_{k+1} ei sisälly edellisten pisteiden ε-säteisiin kuulaympäristöihin $\cup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$. Koska avaruus X ei ole peitettävissä millään ε-säteisten kuulien äärellisellä kokoelmalla, niin näin valittavat pisteet $x_1, x_2, \dots$ muodostavat avaruuden X jonon (x_n), jonka jäsenten etäisyys toteuttaa ehdon $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ kaikilla $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Tästä seuraa, että jonolla (x_n) ei ole osajonoa, joka olisi Cauchy. Täten sillä ei ole suppenevaa osajonoa, eikä avaruus X siten ole kompakti, mikä on ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa. Avaruus (X, d) on siis täysin rajoitettu.

□

Lemma 3.4. *Kompakti metrinen avaruus on täydellinen*

Todistus. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa X. Kompaktiudesta seuraa, että jonolla (x_n) on osajono (x_{n_k}), joka suppenee kohti jotakin pistettä $x \in X$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska (x_n) on Cauchy, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$, kaikilla $i \geq n_0$ ja $j \geq n_0$. Koska $x_{n_k} \to x$, niin on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$, kun $k \geq k_0$. Olkoon $n \geq n_0$. Valitaan jokin $k \geq k_0$, jolla $n_k \geq n_0$. Tällöin

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Joten $x_n \to x$ ja X on täydellinen. □

Näiden valmistelujen jälkeen todistetaan tämän luvun päätulos.

Lause 3.5. (Heine-Borel) *Metrinen avaruus on kompakti, jos ja vain jos se on täysin rajoitettu ja täydellinen.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jos avaruus X on kompakti, niin se on täysin rajoitettu ja täydellinen lemmojen 3.3 ja 3.4 nojalla.

Käänteisesti oletamme, että metrinen avaruus X on täysin rajoitettu ja täydellinen, ja todistamme, että avaruuden kaikilla jonoilla on suppeneva osajono. Koska X on täysin rajoitettu, niin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa äärellinen kokoelma $\frac{1}{m}$-säteisiä kuulia $\mathcal{B}_{\frac{1}{m}}$, joiden yhdiste peittää avaruuden X.

Olkoon $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ääretön jono avaruudessa X. Tällöin voidaan valita sellainen kuula $B(x_1, \frac{1}{2}) \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}}$, joka sisältää äärettömän monta jonon (y_n) jäsentä. Valitaan sellaiset jonon (y_n) osajono (y_{n_j}), että $y_{n_j} \in B(x_1, \frac{1}{2})$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$. Merkitään $(y_{n_j}) = (y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots) := (y_1^1, y_2^1, \ldots) = (y_n^1)$. Vastaavasti voidaan valita sellainen kuula $B(x_2, \frac{1}{4}) \in \mathcal{B}_{\frac{1}{4}}$, joka sisältää äärettömän monta jonon (y_n^1) jäsentä, ja voidaan valita jonon (y_n^1) jäsenet $(y_{n_j}^1) \in B(x_2, \frac{1}{4})$, joista konstruoidaan edellä olevalla tavalla uusi osajono (y_n^2)

Edellinen menettely voidaan toistaa induktiivisesti äärettömän monta kertaa. Jokaisella $k \in \mathbb{N}$ valitaan kuula $B(x_{k+1}, \frac{1}{2^{k+1}}) \in \mathcal{B}_{\frac{1}{k+1}}$, joka sisältää äärettömän monta jonon (y_n^k) jäsentä, joista konstruoidaan seuraava osajono (y_n^{k+1}). Tällä tavalla konstruoiduista osajononoista poimitaan niin kutsuttu *lävistäjä* valitsemalla jonon (y_n^1) ensimmäinen jäsen, jonon (y_n^2) toinen jäsen jne. Näin ollen saadaan uusi jono $(y'_n) = (y_1^1, y_2^2 \ldots)$, joka myös on jonon (y_n) osajono.

Olkoot $k \geq l > m$ kokonaislukuja ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $y_k^k, y_l^l \in B(x_{m+1}, \frac{1}{2^{m+1}})$ ja

$$d(y'_k, y'_l) = d(y_k^k, y_l^l) \leq d(y_k^k, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, y_l^l) \leq 2 \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon,$$

kun m valitaan niin isoksi, että $2^m > \frac{1}{\varepsilon}$. Näin ollen (y'_n) on Cauchy, jonka suppeneminen seuraa joukon täydellisyydestä. Avaruus (X, d) on siis kompakti.

$\square$

Luku 4

Hausdorff-etäisyys

Tässä luvussa konstruoidaan etäisyysfunktio ja todistetaan, että se määrittelee metriikan metrisen avaruuden suljettujen ja rajoitettujen osajoukkojen kokoelmassa. Lisäksi osoitetaan, että tällä tavoin muodostettu metrinen avaruus on kompakti, mikä toimii pohjustuksena tutkielman viimeiselle luvulle.

Kuten aiemmin todettiin, metrisen avaruuden (X, d) osajoukkojen kokoelma $\mathcal{P}(X)$ ei yleisesti ole metrinen avaruus metriikalla d. On kuitenkin mahdollista määritellä metrisen avaruuden osajoukoille etäisyysfunktio, joka toteuttaa metriikan ehdot potenssijoukon $\mathcal{P}(X)$ suljettujen ja rajoitettujen osajoukkojen kokoelmassa.

Määritelmä 4.1. Olkoot A ja B metrisen avaruuden (X, d) osajoukkoja. Joukkojen A ja B välinen *Hausdorff etäisyys* on

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subseteq V_\varepsilon(B) \text{ ja } B \subseteq V_\varepsilon(A)\}.$$

Etäisyysfunktio $d_H : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty[$ määrittelee *pseudometriikkan* (määritelmä 5.2) kaikkien avaruuden X osajoukkojen joukossa $\mathcal{P}(X)$, eli potenssijoukossa, jolloin kahden eri alkion välinen etäisyys voi olla 0, koska esimerkiksi

$$d_H(A, \overline{A}) = 0.$$

Rajoittumalla avaruuden X *suljettujen* ja *rajoitettujen* osajoukkojen joukkoon

$$C(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ on suljettu ja rajoitettu}\},$$

etäisyys d_H määrittelee metriikan $d_H : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to [0, \infty[$, mikä todistetaan seuraavaksi.

Lause 4.2. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin d_H määrittelee metriikan joukossa $\mathcal{C}(X)$.*

Todistus. Käydään läpi metriikan ehdot alkioille $A, B, C \in \mathcal{C}(X)$.

Koska selvästi $d_H(A, B) \geq 0$, niin d_H toteuttaa metriikan ehdon (M1).

Jos $A = B$, niin

$$d_H(A, B) = d_H(A, A) = \inf\{\varepsilon \mid A \subseteq V_\varepsilon(A)\}.$$

Koska $A \subseteq V_\varepsilon(A)$ kaikilla $\varepsilon > 0$, niin $d_H(A, B) = 0$.

Käänteisesti, jos $d_H(A, B) = 0$, niin $A \subseteq V_\varepsilon(B)$ ja $B \subseteq V_\varepsilon(A)$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$B \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(A) = \{x \mid \operatorname{dist}(x, A) = 0\} = \overline{A} \quad \text{ja}$$
$$A \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon(B) = \{x \mid \operatorname{dist}(x, B) = 0\} = \overline{B},$$

joten $A \subseteq \overline{B} = B$ ja $B \subseteq \overline{A} = A$. Täten $A = B$. Näin ollen d_H toteuttaa metriikan ehdon (M2).

Symmetria $d_H(A, B) = d_H(B, A)$ seuraa määritelmästä, eli metriikan ehto (M3) toteutuu.

Osoitetaan nyt ehto (M4) eli kolmioepäyhtälö. Oletetaan, että $d_H(A, B) = s$ ja että $d_H(B, C) = r$. Tällöin $C \subseteq V_{r+\delta}(B)$ ja $B \subseteq V_{s+\delta}(A)$ kaikilla $\delta > 0$. Tästä seuraa, että kaikilla $\delta > 0$ ja kaikilla $c \in C$, on olemassa sellainen $b \in B$, että $d(c, b) < r + \delta$ ja kaikilla $b \in B$ on olemassa sellainen $a \in A$, että $d(b, a) < s + \delta$. Täten kaikilla $c \in C$ voidaan valita sellaiset $b \in B$ ja $a \in A$, että

$$d(c, a) \leq d(c, b) + d(b, a) < r + s + 2\delta.$$

Tästä seuraa, että

$$C \subseteq V_{(r+s+2\delta)}(A).$$

Vastaavasti osoitetaan, että

$$A \subseteq V_{(r+s+2\delta)}(C).$$

Täten

$$d_H(A, C) = \inf\{\varepsilon \mid A \subseteq V_\varepsilon(C) \text{ ja } C \subseteq V_\varepsilon(A)\} \leq r + s + 2\delta$$

kaikilla $\delta > 0$, mistä seuraa, että

$$d_H(A, C) \leq r + s = d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Ehto (M4) on siis voimassa. $\square$

Lemma 4.3. *Olkoon (X,d) kompakti avaruus ja olkoon (A_n) Cauchyn jono avaruudessa $(\mathcal{C}(X),d_H)$. Tällöin joukko $A=\bigcap_{n\geq 0}\overline{\bigcup_{k\geq n}A_k}$ on jonon (A_n) raja-arvo avaruudessa $\mathcal{C}(X)$.*

Todistus. Olkoon (A_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{C}(X)$. Tällöin on osoitettava, että joukko A on avaruuden X suljettu ja rajoitettu osajoukko ja että $A_n\to A$.

Osoitetaan ensin, että A on suljettu ja rajoitettu. Koska ääretön leikkaus suljettuja joukkoja on suljettu, niin A on suljettu. Koska $A\subset X$, niin A on kompaktin avaruuden osajoukkona rajoitettu. Täten $A\in\mathcal{C}(X)$.

Osoitetaan vielä, että A on jonon (A_n) raja-arvo. Olkoon $\varepsilon>0$. Koska (A_n) Cauchyn jono, niin voidaan valita sellainen $n_0\in\mathbb{N}$, että $d_H(A_n,A_k)<\frac{\varepsilon}{8}$, kaikilla $n\geq n_0$ ja kaikilla $k\geq n_0$. Olkoon $n\geq n_0$. Tällöin $A_n\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{8}}(A_k)$ kaikilla $k\geq n_0$, joten

$$A_n\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{4}}(\bigcup_{k\geq n_0}A_k)\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{4}}(\overline{\bigcup_{k\geq n_0}(A_k)}).$$

Vastaavasti $A_k\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{8}}(A_n)$ kaikilla $k\geq n_0$, joten

$$\bigcup_{k\geq n_0}A_k\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{8}}(A_n).$$

Näin ollen

$$\overline{\bigcup_{k\geq n_0}A_k}\subseteq V_{\frac{\varepsilon}{4}}(A_n).$$

Täten $d_H(A_n,\overline{\bigcup_{k\geq n_0}A_k})<\frac{\varepsilon}{4}$, kun $n\geq n_0$.

Olkoon n_0 kuten edellä ja näytetään vielä, että $d_H(A,\overline{\bigcup_{k\geq n_0}A_k})<\frac{3\varepsilon}{4}$. Olkoon $y\in\overline{\bigcup_{k\geq n_0}A_k}$. Tällöin on olemassa joukon $\bigcup_{k\geq n_0}A_k$ jono (y_n), jolla $y_n\to y$, kun $n\to\infty$. Olkoon $n_0'\in\mathbb{N}$ sellainen, että $d(y,y_n)<\frac{\varepsilon}{4}$, kaikilla $n\geq n_0'$. Lisäksi kaikilla $n\geq n_0$ pätee, että $y_n\in A_k$ jollakin $k\geq n_0$. Koska kaikilla $k\geq n_0$ ja $n\geq n_0$, pätee $d_H(A_k,A_n)<\frac{\varepsilon}{4}$, niin jokaisella $n\geq n_0$ voidaan valita sellainen $x_n\in A_n$, että $d(x_n,y_n)<\frac{\varepsilon}{4}$. Tällöin (x_n) on myös avaruuden X jono, ja avaruuden X kompaktiudesta seuraa, että sillä on suppeneva osajono (x_{n_p}), jolla $x_{n_p}\to x$, kun $n_p\to\infty$. Tällöin on olemassa sellainen n_0'', että $d(x,x_{n_p})<\frac{\varepsilon}{4}$, kun $n_p\geq n_0''$. Lisäksi jonon (x_{n_p}) häntä kuuluu joukkoon $\bigcup_{k\geq n}A_k$ kaikilla $n\in\mathbb{N}$, joten sen raja-arvo $x\in\bigcap_{n\geq 0}\overline{\bigcup_{k\geq n}A_k}=A$. Olkoon $N_0=\max(n_0,n_0',n_0'')$, jolloin kaikilla $y\in\overline{\bigcup_{k\geq n_0}A_k}$ on olemassa sellainen $x\in A$, että

$$d(y,x)\leq d(y,y_n)+d(y_n,x_n)+d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4},$$

kun $n \geq N_0$. Täten $\overline{\bigcup_{k\geq n_0} A_k} \subset V_{\frac{3\varepsilon}{4}}(A)$. Koska $A = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$, niin $A \subset \overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Täten $A \subset V_{\frac{3\varepsilon}{4}}(\overline{\bigcup_{k\geq n_0} A_k})$, mistä seuraa, että $d_H(A, \overline{\bigcup_{k\geq n_0} A_k}) < \frac{3\varepsilon}{4}$. Siispä

$$d(A, A_n) \leq d_H(A, \overline{\cup_{k\geq n_0} A_k}) + d_H(\overline{\cup_{k\geq n_0} A_k}, A_n) < \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n_0$, mikä todistaa, että $A_n \to A$.

□

Lause 4.4. *Jos (X, d) on kompakti metrinen avaruus, niin tällöin myös $(\mathcal{C}(X), d_H)$ on kompakti metrinen avaruus.*

Todistus. Todistetaan avaruuden $(\mathcal{C}(X), d_H)$ kompaktius osoittamalla, että avaruus on täysin rajoitettu ja täydellinen. Täydellisyys puolestaan todistetaan osoittamalla, että avaruuden $\mathcal{C}(X)$ Cauchyn jonot suppenevat. Olkoon (A_n) Cauchyn jono avaruudessa $\mathcal{C}(X)$. Tällöin lemmasta 4.3 seuraa, että jonolla (A_n) on raja-arvo joukossa $\mathcal{C}(X)$.

Osoitetaan vielä, että avaruus $\mathcal{C}(X)$ on täysin rajoitettu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska X on kompakti avaruus, niin on olemassa sellainen äärellinen joukko $S \subset X$, että $X \subseteq \bigcup_{x\in S} B(x, \varepsilon)$. Olkoon $A \in \mathcal{C}(X)$. Valitaan joukon S osajoukko $S_A = \{x \in S \mid \operatorname{dist}(x, A) < \varepsilon\} \subset S$. Kaikilla $a \in A$, on olemassa sellainen $x \in S$, jolla $a \in B(x, \varepsilon)$. Täten $\operatorname{dist}(x, A) \leq d(x, a) < \varepsilon$, joten $x \in S_A$. Niinpä $A \subset V_\varepsilon(S_A)$. Joukon S_A määritelmästä seuraa, että kaikilla $x \in S_A$ on olemassa sellainen $a \in A$, että $d(a, x) < \varepsilon$, joten $S_A \subset V_\varepsilon(A)$. Tästä seuraa, että $d_H(A, S_A) < \varepsilon$.

Olkoon $\mathcal{P}(S)$ joukon S potenssijoukko. Huomattakoon, että joukon ε-ympäristö on myös joukon kuulaympäristö Hausdorff-metriikassa. Toisin sanoen $V_\varepsilon(S) = B_H(S, \varepsilon)$. Edellä osoitetusta seuraa, että jokaisella $A \in \mathcal{C}(X)$ on olemassa $P \in \mathcal{P}(S)$, jolla $A \subset B_H(P, \varepsilon)$. Täten $\mathcal{C}(X) \subseteq \bigcup_{P\in\mathcal{P}(S)} B_H(P, \varepsilon)$. Koska S on äärellinen, niin $\mathcal{P}(S)$ on äärellinen, mikä todistaa avaruuden $\mathcal{C}(X)$ olevan täysin rajoitettu. □

Luku 5

Metrisen avaruuden täydellistäminen

Tässä luvussa todistetaan, että jokaiselta metriseltä avaruudelta (X, d) on olemassa isometrinen kuvaus jollekin täydelliselle avaruudeelle (Y, d^*), niin että lähtöjoukon kuva on tiheä maalijoukossa. Tätä tietoa sovelletaan tutkielman päätuloksen todistuuksessa. Luku pohjautuu Bangokissa, Chulalongkornin yliopistolla pidetyn topologian kurssin luenotmuistiinpanoihin [W].

Ekvivalenssirelaatio ja pseudometrinen avaruus

Tämän luvun päätuloksessa maalijoukko Y konstruoidaan avaruuden X Cauchyn jonojen ekvivalenssiluokista. Välituloksena todistetaan myös, että pseudometriselle avaruudelle on olemassa ekvivalenssiluokkien muodostama tekijäavaruus, joka on metrinen avaruus, joten määritellään aluksi ekvivalenssirelaatio ja pseudometriikka.

Määritelmä 5.1. Olkoon A jokin joukko. Sanotaan, että relaatio $\sim \subset A \times A$ on *ekvivalenssirelaatio* joukossa A , jos kaikilla $a, b, c \in A$ pätee seuraavat ehdot:

(E1) $a \sim a$,

(E2) $a \sim b$, jos ja vain jos $b \sim a$,

(E3) jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$.

Lisäksi sanotaan, että joukon A alkiot, jotka ovat relaation $\sim$ suhteen ekvivalentit alkion $a \in A$ kanssa, muodostavat *ekvivalenssiluokan* $[a] = \{b \in A \mid a \sim b\}$.

Pseudometriikka on etäisyyskuvaus kuten metriikka sillä poikkeuksella, että pseudometrisessä kuvauksessa kahden eri alkion välinen etäisyys voi olla nolla. Pseudometriikka siis toteuttaa samat ehdot (M1), (M3) ja (M4) kuin metriikka sekä vastaavasti muodostaa *pseudometrisen avaruuden* jossain joukossa.

Määritelmä 5.2. Olkoon X joukko. Kuvaus $d' : X \times X \to \mathbb{R}$ on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $d'(x, y) \geq 0$,
(M2*) $d'(x, y) = 0$ jos $x = y$,
(M3) $d'(x, y) = d('y, x)$ ja
(M4) $d'(x, z) \leq d'(x, y) + d'(y, z)$.

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko, jossa on annettu jokin pseudometriikka d'. Kutsumme paria (X, d') *pseudometriseksi avaruudeksi.*

Tämän luvun viimeistä lausetta sekä koko tutkielman päätulosta varten osoitetaan, että jokaisella pseudometrisellä avaruudella (X, d') on olemassa metrinen tekijäavaruus $(X/_\sim, d^*)$, kun ekvivalenssirelaatio $\sim$ on määritelty kaavalla $x \sim y$, jos ja vain jos $d'(x, y) = 0$.

Lause 5.4. *Olkoon (X, d') pseudometrinen avaruus ja $d^* : X/_\sim \times X/_\sim \to [0, \infty[$ kuvaus $d^*([x], [y]) = d'(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(X/_\sim, d^*)$ on metrinen avaruus.*

Todistus. Käydään metriikan ehdot läpi kuvaukselle d^* joukossa $X/_\sim$. Olkoot $[x], [y], [x] \in X/_\sim$. Tällöin $d^*([x], [y]) = d'(x, y) \geq 0$, mikä toteuttaa metriikan ehdon (M1).

Lisäksi $d^*([x], [y]) = 0$, jos ja vain jos $d'(x, y) = 0$, mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että $x \sim y$ ja tällöin $[x] = [y]$, joten metriikan ehto (M2) toteutuu.

Koska $d^*([x], [y]) = d'(x, y) = d'(y, x) = d^*([y], [x])$, niin näin ollen metriikan ehto (M3) toteutuu.

Viimeisenä huomattakoon, että

$$\begin{aligned} d^*([x], [z]) &= d'(x, z) \\ &\leq d'(x, y) + d'(y, z) \\ &= d^*([x], [y]) + d^*([y], [z]), \end{aligned}$$

joten myös metriikan ehto (M4) on voimassa. Siispä $(X/_\sim, d^*)$ on metrinen avaruus. □

Täydellistäminen

Määritelmä 5.5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Jos on olemassa täydellinen metrinen avaruus (Y, d^*) ja sellainen isometrinen kuvaus $\varphi : X \to Y$, että $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y, niin sanotaan, että (Y, φ) on avaruuden X *täydellistymä.*

Seuraavaksi todistetaan, että jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä, mutta muotoillaan osa varsinaista todistusta kuitenkin lemmaksi.

Lemma 5.6. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja joukko $A \subseteq X$ tiheä avaruudessa X. Jos joukon A jokainen Cauchyn jono suppenee avaruudessa X, niin X on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (x_n) Cauchyn jono joukossa X ja olkoon $\varepsilon > 0$. Koska A on tiheä avaruudessa X, niin jokaisella $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita sellainen $y_n \in A$, että $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Tällöin (y_n) on joukon A jono. Lisäksi koska (x_n) on Cauchy, niin on olemassa sellainen $n_X \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$, kaikilla $n \geq n_X$ ja $m \geq n_X$. Olkoon $n_0 \geq \max(n_X, \frac{3}{\varepsilon})$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Tällöin jono (y_n) on Cauchy, sillä

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0$ ja $m \geq n_0$.

Koska (y_n) on joukon A Cauchyn jono, niin oletuksen nojalla on olemassa $y \in X$, jolla $y_n \to y$, kun $n \to \infty$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $n_Y \in \mathbb{N}$, että $d(y, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, kaikilla $n \geq n_Y$. Olkoon $n_0' \geq \max(n_Y, \frac{2}{\varepsilon})$. Tällöin

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, y) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun $n \geq n_0'$. Täten avaruuden X Cauchyn jonolla on raja-arvo avaruudessa X, joten X on täydellinen. □

Lause 5.7. *Jokaisella metrisellä avaruudella on täydellistymä.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $\mathcal{I}(X)$ avaruuden X kaikkien Cauchyn jonojen kokoelma. Määritellään joukkoon $\mathcal{I}(X)$ relaatio $\sim$ kaavalla

$$(x_n) \sim (y_n) \iff \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Osoitetaan, että kaikilla $(x_n) \in \mathcal{I}(X)$ ja $(y_n) \in \mathcal{I}(X)$ relaatio $\sim$ on joukon $\mathcal{I}(X)$ ekvivalenssirelaatio.

Koska $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x_n) = 0$, niin $(x_n) \sim (x_n)$, eli ekvivalenssirelaation ehto (E1) toteutuu.

Koska $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$, jos ja vain jos $\lim_{n \to \infty} d(y_n, x_n) = 0$, niin tällöin $a \sim b$, jos ja vain jos $b \sim a$ ja näin ollen ekvivalenssirelaation ehto (E2) toteutuu.

Jos $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$ ja $\lim_{n \to \infty} d(y_n, z_n) = 0$, niin tällöin

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n \to \infty} d(y_n, z_n) = 0 + 0,$$

joten jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$. Ekvivalenssirelaation ehto (E3) on siis voimassa.

Olkoon Y relaation $\sim$ ekvivalenssiluokkien joukko

$$Y = \{\ \big[(x_n)\big] \mid (x_n) \in \mathcal{I}(X)\}$$

ja määritellään kuvaus $d^* : Y \times Y \to [0, \infty)$ kaavalla

$$d^*(\big[(x_n)\big], \big[(y_n)\big]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

kaikilla $\big[(x_n)\big] \in Y$ ja $\big[(y_n)\big] \in Y$.

Osoitetaan, että d^* on hyvin määritelty. Olkoot (x'_n) ja (y'_n) avaruuden X Cauchyn jonoja, joilla pätee $(x_n) \sim (x'_n)$ ja $(y_n) \sim (y'_n)$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0.$$

Nyt metriikan ehdosta (M4) seuraa, että

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) &\le d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n) \quad \text{ja} \\ d(x'_n, y'_n) &\le d(x'_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y'_n), \end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\begin{aligned} d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n) &\le d(x_n, x'_n) + d(y'_n, y_n) \quad \text{ja} \\ d(x'_n, y'_n) - d(x_n, y_n) &\le d(x'_n, x_n) + d(y_n, y'_n). \end{aligned}$$

Täten

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \longrightarrow 0,$$

kun $n \to \infty$. Näin ollen $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$, mikä todistaa kuvauksen d^* olevan hyvin määritelty.

Merkitään $d' := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ ja todistetaan, että $(\mathcal{I}(X), d')$ on pseudometrinen avaruus, jolloin lauseesta 5.4 seuraa, että (Y, d^*) on metrinen avaruus. Käydään pseudometriikan ehdot läpi kuvaukselle d' joukossa $\mathcal{I}(X)$. Olkoot $(x_n), (y_n), (z_n) \in \mathcal{I}(X)$. Tällöin $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \ge 0$, mikä toteuttaa pseudometriikan ehdon (M1).

Lisäksi $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, kun $(x_n) = (y_n)$, joten pseudometriikan ehto (M2*) toteutuu.

Koska $d'((x_n), (y_n)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = d'((y_n), (x_n))$, niin näin ollen pseudometriikan ehto (M3) toteutuu.

Viimeisenä huomattakoon, että

$$\begin{aligned} d'((x_n), (z_n)) &= \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \\ &\le \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \\ &= d'((x_n), (y_n)) + d'((y_n), (y_z)), \end{aligned}$$

joten myös pseudometriikan ehto (M4) on voimassa. Siispä $(\mathcal{I}(X), d')$ on pseudometrinen avaruus ja näin ollen (Y, d^*) on metrinen avaruus.

Seuraavaksi osoitetaan, että on olemassa isometrinen kuvaus $\varphi : X \to Y$, jolla avaruuden X ekvivalenssiluokkien kuva $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y. Merkitään vakiojonon $(x, x, \ldots)$ ekvivalenssiluokkaa $\hat{x} = \big[(x, x, \ldots)\big] \in Y$ kaikilla $x \in X$. Olkoon $\varphi : X \to Y$, kuvaus $\varphi(x) = \hat{x}$ kaikilla $x \in X$. Tällöin

$$d^*(\varphi(x), \varphi(y)) = d^*(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

kaikilla $x \in X$ ja $y \in X$, joten kuvaus φ on isometria.

Osoitetaan vielä, että $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $\big[(x_n)\big] \in Y$. Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että kaikilla $m \geq n_0$ ja $n \geq n_0$, $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Olkoon $z = x_{n_0}$ ja vakiojonon $(x_{n_0}, x_{n_0}, \ldots)$ ekvivalenssiluokka $\hat{z} \in \varphi(X)$. Tällöin jonon (x_n) ekvivalenssiluokille $\big[(x_n)\big]$ pätee, että

$$d^*(\big[(x_n)\big], \hat{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

joten $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y.

Osoitetaan lopuksi, että avaruus (Y, d^*) on täydellinen. Koska $\varphi(X)$ on tiheä avaruudessa Y, lemmasta 5.6 seuraa, että Y on täydellinen, jos jokaisella joukon $\varphi(X)$ Cauchyn jonolla on raja-arvo joukossa Y. Olkoon $(\hat{z}_n)$ Cauchyn jono joukossa $\varphi(X)$ ja olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin voidaan valita sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$d^*(\hat{z}_k, \hat{z}_l) < \frac{\varepsilon}{2}$$

kaikilla $k \geq n_0$ ja $l \geq n_0$. Valitaan $k \geq n_0$ ja $l \geq n_0$. Koska kaikilla jonon $(\hat{z}_n)$ jäsenillä $\hat{z}_n \in \varphi(X)$ on olemassa $z_n \in X$, jolle $\varphi(z_n) = \hat{z}_n$ ja koska φ on isometria, niin

$$d(z_k, z_l) = d^*(\hat{z}_k, \hat{z}_l)$$

kaikilla $k, l \in \mathbb{N}$. Täten (z_n) on Cauchyn jono avaruudessa X. Tällöin jonon (z_n) ekvivalenssiluokalle $\big[(z_n)\big] \in Y$ pätee, että

$$d^*(\hat{z}_k, \big[(z_n)\big]) = \lim_{n\to\infty} d(z_k, z_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

kaikilla $k \geq n_0$. Näin ollen Cauchyn jono $(\hat{z}_n)$ suppenee kohti pistettä $\big[(z_n)\big] \in Y$. $\square$

Luku 6

Gromov–Hausdorff -etäisyys

Tutkielman viimeinen luku käsittelee metristen avaruuksien välisiä etäisyyksiä. Jotta avaruuksien välisistä etäisyyksistä voidaan puhua, tarvitaan tietysti etäisyyskuvaus. Tässä luvussa konstruoidaan *Gromov–Hausdorff -etäisyys*, joka antaa metriikan jokaiseen kompaktien metristen avaruuksien hyvin määriteltyyn kokoelmaan. Luvun lopussa esitetään, kuinka Gromov–Hausdorff -etäisyys liittyy isometriaan ja miltä näyttää suppeneminen kompaktien metristen avaruuksien kokoelmassa.

Metristen avaruuksien kokoelmasta pseudometriseksi avaruudeksi

Seuraavaksi konstruoidaan kahden metrisen tai pseudometrisen avaruuden välinen etäisyyskuvaus, joka määrittelee pseudometriikan metristen avaruuksien kokoelmassa.

Aloitetaan määrittelemällä ensin projektio ja ε-tiheys. Tässä tutkielmassa tarvitaan projektioita kuitenkin vain sellaisissa avaruuksissa, jotka ovat kahden avaruuden karteesisia tuloja, joten käytetään seuraavaa määritelmää.

Määritelmä 6.1. Olkoon avaruus $W = X \times Y$ ja $w = (x, y) \in W$. Avaruuden W *projektio* avaruudelle X on kuvaus $\mathrm{pr}_X : W \to X$, joka on määritelty kaavalla $(x, y) \mapsto x$. Vastaavasti avaruuden W *projektio* avaruudelle Y on kuvaus $\mathrm{pr}_Y : W \to Y$, joka on määritelty kaavalla $(x, y) \mapsto y$.

Määritelmä 6.2. Olkoon $\varepsilon > 0$. Metrisen avaruuden X osajoukon S sanotaan olevan *ε-tiheä*, jos $X \subseteq V_\varepsilon(S)$.

Toisin sanoen joukko $S \subset X$ on ε-tiheä, jos jokainen avaruuden X piste on jonkin joukon S pisteen ε-ympäristössä.

Seuraavaksi määritellään relaatio, joka liittää kahden pseudometrisen avaruuden pisteet toisiinsa. Nämä relaatiot nimetään sen mukaan, kuinka paljon relaatiossa olevien pisteiden etäisyydet poikkeavat toisista keskenään relaatiossa olevista pisteistä lähtöavaruuksisissaan.

Määritelmä 6.3. Kahden (pseudo)metrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) välinen *ε-relaatio* on sellainen joukko $R \subseteq X \times Y$, että

(1) joukon R projektiot $\mathrm{pr}_X(R)$ ja $\mathrm{pr}_Y(R)$ avaruuksille X ja Y ovat ε-tiheät, ja

(2) jos (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R$, niin $|d_X(x_1, x_2) - d_Y(y_1, y_2)| < \varepsilon$.

Relaatio $R \subseteq X \times Y$ on *surjektiivinen*, jos sen projektiot avaruuksille X ja Y ovat surjektiiviset. Jos on olemassa joukkojen X ja Y välinen ε-relaatio, niin merkitään $X \sim_\varepsilon Y$. Jos joukkojen välinen ε-relaatio on lisäksi surjektiivinen, niin merkitään $X \simeq_\varepsilon Y$.

Kahden pseudometrisen avaruuden X ja Y välinen etäisyys määritellään kaikkien ε-relaatioiden joukon

$$\mathcal{R}(X, Y) = \{R \subseteq X \times Y \mid R \text{ on } \varepsilon\text{-relaatio jollakin } \varepsilon > 0\}$$

avulla seuraavasti.

Määritelmä 6.4. Kahden pseudometrisen avaruuden (X, d_X) ja (Y, d_Y) välinen *Gromov–Hausdorff -etäisyys* on

$$D_H(X, Y) := \inf\{\varepsilon \mid X \simeq_\varepsilon Y\}.$$

Jos ei ole olemassa sellaista ε, että $X \simeq_\varepsilon Y$, niin sanotaan, että $D_H(X, Y)$ on ääretön.

Seuraavaksi todistetaan, että jos kahden avaruuden välillä on olemassa ei-surjektiivinen ε-relaatio, niin tällöin on olemassa näiden avaruuksien välinen surjektiivinen 3ε-relaatio. Toisin sanoen jokainen ei-surjektiivinen relaatio voidaan laajentaa surjektiiviseksi relaatioksi.

Lemma 6.5. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) pseudometrisiä avaruuksia ja $\varepsilon > 0$. Jos $X \sim_\varepsilon Y$, niin $X \simeq_{3\varepsilon} Y$.*

Todistus. Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) pseudometrisiä avaruuksia ja olkoon $R \subseteq X \times Y$ ε-relaatio. Olkoon $x \in X$ ja $y \in Y$. Koska relaatio R on ε-tiheä, niin kaikilla x ja y voidaan valita sellaiset $(x', y') \in R$ ja $(x'', y'') \in R$, että $d_X(x, x') < \varepsilon$ ja $d_Y(y, y'') < \varepsilon$. Määritellään sellainen relaatio R', että kaikilla $x \in X$ ja kaikilla $y \in Y$

$$\begin{aligned} R' = &\{(x, y') \mid \text{jollakin } (x', y') \in R, d_X(x, x') < \varepsilon\} \\ &\cup \{(x'', y) \mid \text{jollakin } (x'', y'') \in R, d_Y(y, y'') < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Tällöin relaatio R' on surjektiivinen. Olkoon $(x, y') \in R'$ ja $(x'', y) \in R'$ sellaiset, että

$$d_X(x,x'') - d_Y(y',y) \geq 0$$

Kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$d_Y(y',y'') \leq d_Y(y',y) + d_Y(y,y''),$$

jos ja vain jos

$$-d_Y(y',y) \leq -d_Y(y',y'') + d_Y(y,y'').$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
|d_X(x,x'') - d_Y(y',y)| &= d_X(x,x'') - d_Y(y',y) \\
&\leq d_X(x,x') + d_X(x',x'') - d_Y(y',y'') + d_Y(y,y'') \\
&\leq d_X(x,x') + |d_X(x',x'') - d_Y(y',y'')| + d_Y(y,y'') \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vastaavasti osoitetaan, että jos

$$d_X(x,x'') - d_Y(y',y) < 0,$$

niin tällöin $|d_X(x,x'') - d_Y(y',y)| < 3\varepsilon$. Näin ollen

$$|d_X(x,x'') - d_Y(y',y)| < 3\varepsilon$$

kaikilla $(x,y') \in R'$ ja $(x'',y) \in R'$. □

Osoitetaan, että näin määritelty etäisyyskuvaus D_H muodostaa pseudometrisen avaruuden metristen avaruuksien kokoelmassa

Lause 6.6. *Olkoon $\mathcal{X}$ kokoelma metrisiä avaruuksia. Tällöin $D_H : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0,\infty]$ on pseudometriikka, joka voi saada arvon ∞.*

Todistus. Käydään läpi pseudometriikan ehdot metrisille avaruuksille (X,d_X), (Y,d_Y), (Z,d_Z).

Koska $D_H(X,Y) \geq 0$ seuraa suoraan määritelmästä, niin D_H toteuttaa pseudometriikan ehdon (M1).

Jos $X = Y$, niin $D_H(X,Y) = D_H(X,X) = 0$, kun valitaan relaatio $R = \{(x,x) \mid x \in X\}$. Täten pseudometriikan ehto (M2*) toteutuu.

Olkoon $D_H(X,Y) = a \in [0,\infty[$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen relaatio $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, että $|d_X(x_1,x_2) - d_Y(y_1,y_2)| < a + \varepsilon$ kaikilla (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in R$. Koska $|d_X(x_1,x_2) - d_Y(y_1,y_2)| = |d_Y(y_1,y_2) - d_X(x_1,x_2)|$, niin $D_H(Y,X) \leq a$. Lisäksi ei ole mahdollista, että $D_H(Y,X) = b < a$, sillä tästä seuraisi vastaavasti, että $D_H(X,Y) \leq b < a$, mikä olisi ristiriidassa alkuperäisen oletuksen kanssa, joten $D_H(Y,X) = a$.

Lisäksi jos $D_H(X,Y) = \infty$, niin tällöin kaikilla $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ ja kaikilla $M \in \mathbb{R}$ pätee, että on olemassa parit $(x_1,y_1) \in R$ ja $(x_2,y_2) \in R$, joille pätee $|d_X(x_1,x_2) - d_Y(y_1,y_2)| = |d_Y(y_1,y_2) - d_X(x_1,x_2)| > M$, joten $D_H(Y,X) = \infty$. Näin ollen D_H toteuttaa pseudometriikan ehdon (M3).

Olkoot $D_H(X,Y) = a$ ja $D_H(Y,Z) = b$ sekä olkoot $x_1 \in X$ ja $x_2 \in X$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ voidaan valita sellaiset surjektiiviset relaatiot $R_{XY} \in \mathcal{R}(X,Y)$ ja $R_{YZ} \in \mathcal{R}(Y,Z)$, että kaikilla $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in R_{XY}$ pätee, että

$$|d_X(x_1,x_2) - d_Y(y_1,y_2)| < a + \varepsilon$$

ja kaikilla $y_1 \in Y$ ja $y_2 \in Y$ on olemassa $(y_1,z_1),(y_2,z_2) \in R_{YZ}$, joille pätee

$$|d_Y(y_1,y_2) - d_Z(z_1,z_2)| < b + \varepsilon.$$

Olkoon nyt $R_{XZ} \in \mathcal{R}(X,Z)$ sellainen relaatio, että

$$R_{XZ} = \{(x,z) \mid (x,y) \in R_{XY}, (y,z) \in R_{YZ}, \text{ kaikilla } x \in X \text{ ja joillakin } y \in Y \text{ ja } z \in Z\}.$$

Tällöin relaation R_{XZ} projektio avaruudelle X on surjektiivinen. Vastaavasti voidaan valita relaatio $R'_{XZ} \in \mathcal{R}(X,Z)$, että

$$R'_{XZ} = \{(x',z') \mid (y',z') \in R_{YZ}, (x',y') \in R_{XY}, \text{ kaikilla } z' \in Z \text{ ja joillakin } y' \in Y \text{ ja } x' \in X\},$$

jolloin relaation R'_{XZ} projektio avaruudelle Z on surjektiivinen.

Olkoon $R = R_{XZ} \cup R'_{XZ}$, jolloin R on surjektiivinen ja kaikilla $(x,z),(x',z') \in R$ pätee, että

$$\begin{aligned} b + c + 2\varepsilon &> |d_X(x,x') - d_Y(y,y')| + |d_Y(y,y') - d_Z(z,z')| \\ &\geq |d_X(x,x') - d_Y(y,y') + d_Y(y,y') - d_Z(z,z')| \\ &= |d_X(x,x') - d_Z(z,z')| \end{aligned}$$

Näin ollen R on $(b+c+2\varepsilon)$-relaatio. Koska $R \in \mathcal{R}(X,Z)$, niin

$$D_H(X,Y) + D_H(Y,Z) + 2\varepsilon \geq D_H(X,Z).$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin

$$D_H(X,Z) \leq D_H(X,Y) + D_H(Y,Z),$$

mikä toteuttaa pseudometriikan ehdon (M4).

$\square$

Isometria ja suppeneminen Gromov–Hausdorff -metriikassa

Tässä osiossa todistetaan, että keskenään isometristen avaruuksien välinen Gromov–Hausdorff -etäisyys on nolla. Lisäksi osoitetaan, että jos (C_n) on jono tasaisesti kompakteja metrisiä avaruuksia, niin on olemassa sellainen kompakti metrinen avaruus X, että $C_n \to X$ Gromov–Hausdorff -etäisyyden mielessä.

Ensimmäisen lauseen todistuksessa valitaan jonolle osajono ja taas tälle osajonolle osajono ja niin edelleen. Jotta todistuksessa ei hukuttaisi osajonojen osajonojen alaindekseihin, niin otetaan käyttöön seuraava tapa käsitellä osajonojen indeksointia.

Määritelmä 6.7. Olkoon (x_n) jono ja olkoon (x_{n_k}) jonon (x_n) osajono. Tällöin osajonon (x_{n_k}) indeksit (n_k) muodostavat joukon $\mathbb{N}$ osajoukko $N_1 = \{n_1, n_2 \dots\}$. Sanotaan, että joukko $N_1 \subset \mathbb{N}$ on osajonoa (x_{n_k}) vastaava *indeksijoukko*, jolla $(x_n)_{n \in N_1} = (x_{n_k})$.

Ennen varsinaisen Gromov–Hausdorff -metriikan ja isometrian yhteyttä koskevan lauseen todistamista osoitetaan, että kompaktilla metrisellä avaruudella on aina tiheä ja numeroituva osajoukko.

Lemma 6.8. *Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus. Tällöin on olemassa avaruuden X numeroituva ja tiheä osajoukko $A \subset X$.*

Todistus. Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus. Koska X on kompaktiuden nojalla täysin rajoitettu, niin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa äärellinen kokoelma $\frac{1}{m}$-säteisiä kuulia $\mathcal{B}_{\frac{1}{m}} = \{B(x_1, \frac{1}{m}), B(x_2, \frac{1}{m}), \dots, B(x_{k_m}, \frac{1}{m})\}$, joiden yhdiste peittää avaruuden X. Tällöin

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\frac{1}{m}}$$

on äärellisten kokoelmien numeroituvana yhdisteenä numeroituva. Vastaavasti $\frac{1}{m}$-säteisien kuulien keskipisteiden joukko

$$A_m = \{x_j \mid j = 1, 2, \dots, k_m\}$$

on äärellinen ja niiden yhdiste

$$A := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

on numeroituva.

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoon $y \in X$. Valitaan sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Tällöin $y \in B(x, \frac{1}{m})$, jollakin $x \in A_m$ ja näin ollen $d(y, x) < \varepsilon$, joten A on tiheä avaruudessa X. □

Lause 6.9. *Olkoot (X, d_X) ja (Y, d_Y) kompakteja metrisiä avaruuksia. Avaruudet X ja Y ovat isometrisia, jos ja vain jos $D_H(X, Y) = 0$.*

Todistus. Olkoon $f : X \to Y$ isometrinen bijektio. Valitaan relaatio

$$R = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

Tällöin $\mathrm{pr}_X(R) = X$ ja koska f on bijektio, niin $\mathrm{pr}_Y(R) = \{f(x) \mid x \in X\} = Y$, joten relaation R projektiot ovat surjektiivisia. Olkoot (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R$. Koska f on isometria, niin kaikilla $a, b \in X$ pätee, että $d_X(a, b) = d_Y(f(a), f(b))$. Tällöin

$$|d_X(x_1, x_2) - d_Y(y_1, y_2)| = |d_X(x_1, x_2) - d_Y(f(x_1), f(x_2))| = 0,$$

joten $D_H(X, Y) = 0$.

Oletetaan käänteisesti, että $D_H(X, Y) = 0$. Tällöin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa surjektiivinen $(1/m)$-relaatio $R_m \subset X \times Y$. Lemman 6.8 nojalla voidaan valita avaruuden X numeroituva ja tiheä osajoukko $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tällöin jokaisella $x_n \in X$ voidaan valita sellainen $y_{m,n} \in Y$, että $(x_n, y_{m,n}) \in R_m$. Näin ollen pisteet $y_{m,n}$ muodostavat avaruuden Y jonon $(y_{m,n})_{m \in \mathbb{N}}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Koska Y on kompakti, niin voidaan valita sellainen jonon $(y_{m,1})_{m \in \mathbb{N}}$ indeksikokoelma $M_1 \subset \mathbb{N}$, että osajono $(y_{m,1})_{m \in M_1}$ suppenee. Siispä on olemassa raja-arvo $y_{m,1} \to y_1 \in Y$, kun $m \in M_1$. Vastaavasti voidaan valita jonon $(y_{m,1})_{m \in M_1}$ indeksijoukon $M_2 \subset M_1 \subset \mathbb{N}$, jolla $y_{m,2} \to y_2$ ja $y_{m,1} \to y_1$, kun $m \in M_2$ ja niin edelleen. Koska $|d_X(x_n, x_{n'}) - d_Y(y_{m,n}, y_{m,n'})| < \frac{1}{m}$ kaikilla $n, n' \in \mathbb{N}$, niin

$$d_X(x_n, x_{n'}) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ m \in M_{\max\{n,n'\}}}} d_Y(y_{m,n}, y_{m,n'}) = d_Y(y_n, y_{n'}).$$

Näin voidaan määritellä isometrinen kuvaus $f' : A \to Y$ kaavalla $x_n \mapsto y_n$. Koska A on tiheä avaruudessa X, niin $X = \overline{A}$. Tällöin lemmasta 2.19 seuraa, että haluttu isometrinen kuvaus on kuvauksen f' yksikäsitteinen laajennus $f : X \to Y$.

Todistetaan vielä, että kuvaus f on surjektio ja täten myös bijektio. Tätä varten konstruoidaan jonon $(y_{m,n})$ indeksijoukko, jota voidaan käyttää kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Valitaan jälleen lävistäjä joukoista $\{M_1, M_2, \ldots\}$ siten, että jokaisella $i \in \mathbb{N}$ valitaan joukon M_i alkio m_i, joka on joukon M_i alkoista i:nneksi pienin ja merkitään tätä joukkoa

$$M_\infty = \{m_i \in M_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin $y_{m,n} \to y_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $m \in M_\infty$. Tällä tavoin muodostettavalla jonon $(y_{m,n})_{m \in \mathbb{N}}$ osajonolla $(y_{m,n})_{m \in M_\infty}$ on sama raja-arvo kuin edellä konstruoidulla osajonolla $(y_{m,n})_{m \in M_n}$. Olkoon $y \in Y$ piste. Tällöin jokaisella $m \in M_\infty$ voidaan valita sellainen $y_{m,n} \in Y$, että $d_Y(y, y_{m,n}) < \frac{1}{m}$ ja $(x_n, y_{m,n}) \in R_m$. Näin valituista relaation R_m pisteistä $(x_n, y_{m,n})$ muodostetaan avaruuden X jono

$$(x_n)_{m \in M_\infty} = (pr_X((x_n, y_{m,n})_{m \in M_\infty})).$$

Koska X on kompakti, niin on olemassa sellainen indeksijoukko $M'_\infty \subset M_\infty$, että jonon $(x_n)_{m \in M_\infty}$ osajono $(x_n)_{m \in M'_\infty}$ suppenee ja tällöin $x_n \to x \in X$. Lisäksi huomataan, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$, $|y_{m,n} - y_n| \to 0$, kun $m \to \infty$ joukossa M'_∞. Täten $\lim\limits_{m\to\infty} y_n = \lim\limits_{m\to\infty} y_{m,n} = y$, kun $m \in M'_\infty$. Koska $f(x_n) = y_n$ kaikilla $x_n \in \mathrm{pr}_X(R_m)$, niin tästä ja funktion f jatkuvuudesta seuraa, että kun $m \in M'_\infty$, niin

$$f(x) = y.$$

Tämä päättää todistuksen $\square$

Määritelmä 6.10. Metristen avaruuksien joukon $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ sanotaan olevan *tasaisesti kompakti*, jos

(1) on olemassa sellainen luku $D_0 > 0$, että $\mathrm{diam}(C_\lambda) \leq D_0$ kaikilla $\lambda \in \Lambda$.

(2) kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa sellainen $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$C_\lambda \subseteq \bigcup_{n \in N_\varepsilon} B(x_n, \varepsilon)$$

kaikilla $\lambda \in \Lambda$.

Lause 6.11. (Gromov) *Jos jono metrisiä avaruuksia (C_n) on tasaisesti kompakti, tällöin sillä on olemassa osajono, joka suppenee Gromov–Hausdorff -metriikassa, eli on olemassa kompakti metrinen avaruus X ja osajono (C_{n_k}), että $D_H(C_{n_k}, X) \to 0$, kun $k \to \infty$.*

Todistus. Olkoon (C_n) jono tasaisesti kompakteja metrisiä avaruuksia (C_n, d_n). Valitaan jonolle (C_n) osajono seuraavasti. Koska jono (C_n) on tasaisesti kompakti, niin kaikilla $m \in \mathbb{N}$ on olemassa sellainen kokonaisluku N_m, että jokaisella C_n voidaan valita sellainen joukko $S_{n,m} = \{x_{n,m,1}, x_{n,m,2}, \ldots, x_{n,m,N_m}\} \subset C_n$, että

$$C_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_m} B(x_{n,m,i}, \frac{1}{m}).$$

Merkitään kaikkien $\frac{1}{m}$-säteisten kuulaympäristöjen keskipisteiden $S_{n,m}$ yhdistettä

$$S_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S_{n,m} \subseteq C_n.$$

Jatkon kannalta on hyvä määritellä joukon S_n jäsenille sellainen uusi indeksointi

$$S_n := \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots\},$$

että on olemassa indeksi N'_m, joka toteuttaa ehdot $x_{n,N'_m} = x_{n,m,N_m}$ ja $S_{n,m} \subset \{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots x_{n,N'_m}\}$. Olkoon N'_m se indeksi, jolle pätee $x_{n,N'_m} = x_{n,m,N_m}$. Tällöin osajoukon $\{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,N'_m}\} \subset S_n$ $\frac{1}{m}$-säteiset kuulaympäristöt muodostavat avaruuden C_n peitteen jokaisella $m \in \mathbb{N}$.

Jonolle $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ voidaan valita sellainen indeksikokoelma $\mathsf{N}_1 \subset \mathbb{N}$, että osajonolla $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_1}$ joukon S_n pisteiden $x_{n,1}$ ja $x_{n,2}$ välinen etäisyys $d_n(x_{n,1}, x_{n,2})$ suppenee kohti jotain raja-arvoa, kun $n \to \infty$. Merkitään tätä raja-arvoa $\lim_{n\to\infty} d_n(x_{n,1}, x_{n,2}) = \delta(1,2)$. Vastaavasti voidaan valita sellainen indeksikokoelma $\mathsf{N}_2 \subset \mathsf{N}_1 \subset \mathbb{N}$, että jonon $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_1}$ osajonolla $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_2}$ joukon S_n pisteille $x_{n,2}$ ja $x_{n,3}$ pätee, että $\lim_{n\to\infty} d_n(x_{n,2}, x_{n,3}) = \delta(2,3)$. Näin jatkamalla muodostetaan jonon (C_n) osajonojen jono $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_1}, (C_n)_{n\in\mathsf{N}_2}, \dots, (C_n)_{n\in\mathsf{N}_k}, \dots$. Tällöin kaikilla $k \in \mathbb{N}$ osajonolla $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_k}$ pätee, että $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathsf{N}_k}} d_n(x_{n,j}, x_{n,j'}) = \delta(j,j')$, jokaisella $1 \le j < j' \le k$.

Vastaavasti kuten aiemmmassa todistuksessa valitaan lävistäjä indeksijoukoista $\{\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \dots\}$ siten, että jokaisella $i \in \mathbb{N}$ valitaan joukon N_i alkio n_i, joka on joukon N_i alkoista i:nneksi pienin ja merkitään tätä joukkoa

$$\mathsf{N}_\infty = \{n_i \in \mathsf{N}_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Näin saadaan muodostettua alkuperäisen jonon $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ osajono

$$(C_n)_{n\in\mathsf{N}_\infty} := (C_{n_1}, C_{n_2}, \dots),$$

jossa C_{n_i} on osajonon $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_i}$ i:s jäsen $(i = 1, 2, \dots)$. Tällöin jonolla $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_\infty}$ pätee, että $\lim_{n\to\infty} d_n(x_{n,j}, x_{n,j'}) = \delta(j,j')$ kaikilla $1 \le j < j'$.

Konstruoidaan seuraavaksi jonon $(C_n)_{n\in\mathsf{N}_\infty}$ raja-arvo. Olkoon joukko

$$\hat{C}_\infty = \{x_i := (x_{n,i})_{n\in\mathsf{N}_\infty} \mid i \in \mathbb{N}\},$$

jolle määritellään etäisyyskuvaus $d_\infty : \hat{C}_\infty \times \hat{C}_\infty \to \mathbb{R}$ kaavalla

$$d_\infty(x_j, x_k) = \delta(j,k).$$

Tällöin, vastaavasti kuten lauseessa 5.7, $(\hat{C}_\infty, d_\infty)$ on pseudometrinen avaruus. Olkoon $\sim$ joukon $\hat{C}_\infty$ ekvivalenssirelaatio, jolla $x_j \sim x_{j'}$, jos ja vain jos $d_\infty(x_j, x_{j'}) = 0$. Näin ollen muodostetaan joukon $\hat{C}_\infty$ tekijäavaruus

$$\hat{C}_\infty/_\sim = \{[x_j], [x_k], \dots\},$$

joka on lauseen 5.4 nojalla metrinen avaruus. Lauseesta 5.7 seuraa, että on olemassa avaruuden $\hat{C}_\infty/_\sim$ täydellistymä C_∞ ja isometrinen kuvaus $\varphi : \hat{C}_\infty/_\sim \to C_\infty$.

Todistetaan vielä, että $(C_n, d_n) \to (C_\infty, d_\infty)$, kun $n \in \mathsf{N}_\infty$ ja $n \to \infty$. Olkoon $m' \in \mathbb{N}$. Tällöin voidaan valita joukon S_n äärellinen osajoukko

$$S'_n = \bigcup_{m=1}^{m'} S_{n,m} = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots x_{N'_{m'}}\},$$

jolloin S'_n on $\frac{1}{m'}$-tiheä avaruudessa C_n kaikilla n. Näin ollen kaikilla pisteillä $x \in S_n \setminus S'_n$ on olemassa sellainen piste $x' \in S'_n$, että $d_n(x, x') < \frac{1}{m'}$. Olkoon $x_p \in S_n \setminus S'_n$ kaikilla n. Tällöin on olemassa sellainen $x_j \in S'_n$, että äärettömän monella $n \in \mathsf{N}_\infty$ pätee $d_n(x_{n,j}, x_{n,p}) < \frac{1}{m'}$. Täten $d_\infty(x_j, x_p) = \delta(j, p) \leq \frac{1}{m'}$ ja näin ollen avaruuden $\hat{C}_\infty$ osajoukko

$$S'_\infty := \{x_1, x_2, \dots, x_{N'_{m'}}\}$$

on $\frac{1}{m'}$-tiheä avaruudessa $\hat{C}_\infty$. Koska $\hat{C}_\infty$ on tiheä avaruudessa C_∞, niin tällöin S'_∞ on $\frac{1}{m'}$-tiheä myös avaruudessa C_∞.

Olkoon relaatio $R'_n \subset C_n \times C_\infty$ sellainen, että $R'_n = S'_n \times S'_\infty$ kaikilla n. Tällöin R'_n on $\frac{1}{m'}$-relaatio kaikilla n ja lemmasta 6.5 seuraa, että on olemassa relaation R'_n laajennus $R_n \subset C_n \times C_\infty$, joka on surjektiivinen $\frac{3}{m'}$-relaatio. Koska m' voidaan valita mielivaltaisesti ja koska $d_n(x_{n,j}, x_{n,k}) \to d_\infty(x_j, x_k)$, kun $n \in \mathsf{N}_\infty$ ja $n \to \infty$, niin $D_H(C_n, C_\infty) \to 0$, kun $n \in \mathsf{N}_\infty$, mikä todistaa halutun suppenemisen.

Lopuksi todistetaan, että C_∞ on kompakti. Koska osajoukko $S'_\infty \subset C_\infty$ on $\frac{1}{m'}$-tiheä avaruudessa C_∞, niin tällöin joukon S'_∞ pisteiden $\frac{1}{m'}$-säteiset kuulaympäristöt muodostavat avaruuden C_∞ peitteen. Koska $m' \in \mathbb{N}$ voitiin valita mielivaltaisesti, niin tästä seuraa, että C_∞ on täysin rajoitettu. Lisäksi C_∞ on konstruktion puolesta täydellinen, joten C_∞ on lauseen 3.5 nojalla kompakti. Näin ollen jonolla $(C_n)_{n \in \mathsf{N}_\infty}$ on raja-arvo C_∞ kompaktien metristen avaruuksien joukossa.

□

Kirjallisuutta

[BH] Martin R. Bridson & André Haefliger *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999

[V1] Jussi Väisälä *Topologia I*, Limes, Helsinki, 2004

[V2] Jussi Väisälä *Topologia II*, Limes, Helsinki, 2015

[W] Lewkeeratiyutkul Wicharn *Topologian luentomuistiinpanot*, Chulalongkorn University, Bangkok [http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~lwicharn/2301631/Complete.pdf] Viitattu 9.9.2017