HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Misa Jokisalo

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Kierto- ja peilauskuvaukset äärellisulotteisessa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Joulukuu 2017	39 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tämä tutkielma käsittelee kierto- ja peilauskuvausten matemaattista taustaa. Tavoitteena on antaa lukijalle perustavanlaatuinen ymmärrys näiden kuvausten ominaisuuksista, sekä työkalut laskea vektorien kiertoja ja peilauksia. Työssä rajoitutaan tutkimaan äärellisulotteisia euklidisia avaruuksia $\mathbb{R}^n$, eivätkä pohjatietovaatimukset täten ulotu lineaarialgebran perusteita pidemmälle.

Ensimmäinen luku esittelee työn tarkoituksen ja rakenteen. Samalla luodaan katsaus siihen vaikeuteen, jonka ihminen kohtaa siirtyessään kolmea ulottuvuutta korkeampiin avaruuksiin.

Toinen luku luo tutkielman perustan määrittelemällä vektoriavaruudet, niiden aliavaruudet ja kannat. Keskeiseksi käsitteeksi muodostuva projektiokuvaus määritellään aliavaruuksien suoran summan avulla. Lopuksi lasketaan esimerkki projektiokuvauksesta etsimällä annetulle $\mathbb{R}^2$:n aliavaruudelle kohtisuora komplementti.

Kolmannessa luvussa tarkastellaan vektorien välistä kulmaa, pituutta ja erityisesti isometrioita; etäisyydet säilyttäviä kuvauksia. Luvussa osoitetaan origon kiinnittävän isometrian säilyttävän pistetulon, jonka merkitys korostuu seuraavassa luvussa.

Työn neljäs luku syventyy lineaarikuvauksiin. Kahden esimerkin avulla nähdään, miten lineaarikuvauksen matriisi muodostuu lähtöavaruuden kantavektorien kuvista. Keskeiseksi käsitteeksi nouseva ortogonaalinen kuvaus määritellään lineaarikuvauksena, jonka kuvausmatriisin A transpoosi A^T on sen inverssi $A^T = A^{-1}$. Luvussa osoitetaan sekä ortogonaalisen kuvauksen olevan origon kiinnittävä isometria että origon kiinnittävän isometrian olevan ortogonaalinen kuvaus. Lopuksi johdetaan projektiokuvaukselle matriisiesitys, joka yksinkertaistaa projektioiden käytännön laskemista merkittävästi.

Viidennessä luvussa määritellään kierto- ja peilauskuvaukset avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Perusteellinen esimerkki kiertokuvauksesta $\mathbb{R}^4$:ssä yhdistää edellisten lukujen tuloksia. Työ huipentuu isometrian käsitteeseen perustuvaan yhtenevyyden määritelmään ja näyttöön siitä, että sekä kierto- että peilauskuvaukset säilyttävät yhtenevyyden.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Lineaarialgebra, isometria, ortogonaalisuus, projektio, yhtenevyys

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Kierto- ja peilauskuvaukset äärellisulotteisessa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Misa Jokisalo

21. marraskuuta 2017

Sisältö

1 Johdanto

1.1 Työn tarkoitus

Kiertäminen ja peilaaminen osataan hahmottaa intuitiivisella tasolla jo varhaisessa iässä. Jopa 4-5-vuotiailla lapsilla on kyky samaistaa kaksi yhdenmuotoista kappaletta, vaikka ne olisivat eri kulmassa tai toistensa peilikuvia. Kuitenkin vielä toisen vuosiluokan oppilaiden kohdalla on havaittu, ettei tällainen fyysisten kappaleiden kanssa opittu hahmotuskyky välttämättä takaa kykyä hahmottaa yhdenmuotoisuutta ajatuksen tasolla. Puisen palikan kääntäminen saattaa onnistua, mutta paperilla olevan kappaleen kääntäminen mielessä tuottaa vaikeuksia. [1]

Tarkastelen tässä työssä kierto- ja peilauskuvausten matemaattista taustaa ensisijaisesti äärellisulotteisessa euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Näiden kuvausten hahmottaminen on suhteellisen helppoa ja intuitiivista kaksi- ja kolmiulotteisissa avaruuksissa. Korkeampiin ulottuvuuksiin siirryttäessä konkretia kuitenkin katoaa; kiertoa $\mathbb{R}^4$:ssa ei voi piirtää paperille tai hahmotella puisen palikan kanssa. Toisen vuosiluokan oppilaiden tavoin kohtaamme hankaluuksia yhdenmuotoisuuden hahmottamisessa ajatuksen tasolla.

Kierto- ja peilauskuvausten perusta on syvällä lineaarialgebrassa. Käsittelen tässä työssä näiden kuvausten taustalla olevia matemaattisia prosesseja ja ominaisuuksia. Tavoitteenani on antaa lukijalle työkalut ymmärtää ja laskea kiertoja ja peilauksia äärellisulotteisissa euklidisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^n$. Osoitan lisäksi kierto- ja peilauskuvausten säilyttävän $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen yhtenevyyden.

1.2 Työn rakenne

Aloitan luvussa 2 kertaamalla työn kannalta oleellisia lineaarialgebran perusteita; vektoriavaruudet, aliavaruudet ja niiden kannat. Määrittelen aliavaruuksien suoran summan, jonka avulla saamme projektiokuvauksen määritelmän.

Luvussa 3 tarkastelen isometrioita, niiden lainalaisuuksia, sekä vektorien välistä kulmaa. Jatkan luvussa 4 määrittelemällä lineaarikuvaukset ja niiden matriisiesitykset. Määrittelen ortogonaaliset kuvaukset ja osoitan kiertokuvauksen tasolla olevan isometria.

Luvussa 5 määrittelen kierron ja peilauksen $\mathbb{R}^n$:ssä. Lasken käytännön esimerkin kierrosta tason ympäri avaruudessa $\mathbb{R}^4$ ja osoitan sekä kiertojen että peilausten säilyttävän yhtenevyyden.

2 Vektoriavaruudet

Tarkastelen tässä työssä pääosin äärellisulotteisia euklidisia avaruuksia $\mathbb{R}^n$, jotka ovat erikoistapauksia yleisemmistä vektoriavaruuksista. Suuri osa tuloksista pätee kuitenkin mielivaltaiselle vektoriavaruudelle, jota merkitsen yleisesti tässä työssä symbolilla V. Kaikki yleisen vektoriavaruuden V tulokset pätevät myös avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mutta kaikki $\mathbb{R}^n$:n tulokset eivät päde yleisessä vektoriavaruudessa V.

Luvussa 2.1 käyn läpi lineaarialgebran peruskäsitteitä, joihin lukeutuvat aliavaruudet ja niiden kannat. Luvussa 2.2 tarkastelen aliavaruuksien komplementteja suoran summan käsitteen avulla. Määrittelen projektion vektoriavaruudelta V sen aliavaruudelle $U \subset V$. Lopuksi sovellan luvun 2 sisältöä näyttämällä esimerkin projektiosta avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

2.1 Vektoriavaruudet ja niiden aliavaruudet

Määritelmä 2.1.1 (Vektoriavaruus)**.** *Olkoon V sellainen joukko, jossa on määritelty yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Jos seuraavat ehdot pätevät kaikilla $v, u, w \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$, on joukko V* ***vektoriavaruus*** *ja sen alkiot* ***vektoreita****.*

1. $v + w = w + v$ *kaikilla $v, w \in V$. (vaihdannaisuus)*
2. $(v + w) + u = v + (w + u)$ *kaikilla $v, w, u \in V$. (liitännäisyys)*
3. *On olemassa $0 \in V$, jolle pätee $v + 0 = v$ kaikilla $v \in V$. (nollavektori)*
4. *Jokaisella vektorilla $v \in V$ on olemassa vastavektori $-v \in V$, jolle $v + (-v) = 0$.*
5. $a(v + w) = av + aw$ *kaikilla $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$.*
6. $(a + b)v = av + bv$ *kaikilla $v \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.*
7. $(ab)v = a(bv)$ *kaikilla $v \in V$ ja $a, b \in \mathbb{R}$.*

8. $1v = v$ *kaikilla* $v \in V$.

Määritelmä 2.1.2 (Lineaarikombinaatio)**.** *Olkoon* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *vektoreita ja* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *skalaareita. Näiden vektoreiden lineaarikombinaatiot ovat muotoa*

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Määritelmä 2.1.3. *Vektorien* $v = (v_1, \ldots, v_n)$ *ja* $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ ***pistetulo*** *on reaaliluku*

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n \in \mathbb{R}.$$

Lause 2.1.4. $\mathbb{R}^n$*:n pistetulolla on seuraavat ominaisuudet:*

(i) $v \cdot v \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$ *ja* $v \cdot v = 0$ *vain kun* $v = 0$.

(ii) $v \cdot w = w \cdot v \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $(v + x) \cdot w = v \cdot w + x \cdot w \quad \forall v, w, x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $(cv) \cdot w = c(v \cdot w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$.

Todistus: *(i)* $v = (v_1, \ldots, v_n), \quad v \cdot v = v_1^2 + \ldots + v_n^2.$

Koska $v_k^2 \geq 0$ kaikilla $k \in \{1, \ldots n\}$, niin $v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \geq 0$.
Selvästi $v \cdot v = 0$ jos ja vain jos $v_1, \ldots, v_n = 0$.

(ii-iv) Helppoja. □

Määritelmä 2.1.5 (Vektorien virittämä aliavaruus)**.** *Olkoon* $v_1, \ldots, v_n \in V$. *Näiden* ***vektorien virittämä aliavaruus*** $span(v_1, \ldots, v_n)$ *on kyseisten vektorien kaikkien lineaarikombinaatioiden joukko.*

$$span(v_1, \ldots, v_n) = \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

Määritelmä 2.1.6 (Lineaarinen riippumattomuus)**.** *Olkoon* $v_1, \ldots, v_n \in V$ *ja* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Vektorijono* $(v_1, \ldots, v_n)$ *on* ***lineaarisesti riippumaton,***

jos mitään vektoria v_i ei voida ilmaista muiden jonon vektorien lineaarikombinaationa. Toisin sanoen vektorijono on lineaarisesti riippumaton, jos

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

*Lineaarisesti riippumattomasta jonosta käytetään myös termiä **vapaa**.*

Määritelmä 2.1.7 (Kanta)**.** *Olkoot $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Vektorijono $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ on avaruuden V **kanta**, jos*

1. *Vektorijono $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ virittää avaruuden V.*
2. *Vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Lause 2.1.8. *Olkoon $s = (v_1, \ldots, v_n) \in V$ vektoriavaruuden V kanta ja $t = (w_1, \ldots, w_m) \in V$ jokin toinen jono.*

1. *Jos $m > n$, niin t on lineaarisesti riippuva.*
2. *Jos t on lineaarisesti riippumaton, niin $m \leq n$.*

Määritelmä 2.1.9 (Dimensio)**.** *Olkoon $(v_1, \ldots, v_n)$ vektoriavaruuden V kanta. Sanotaan, että vektoriavaruuden V **dimensio** tai ulottuvuus on n tai että V on n-dimensioinen tai n-ulotteinen. Merkitään*

$$dim(V) = n.$$

Jos $dim(V) = n$ ei päde millekään n, niin $dim(V) = \infty$. Vaikka osa tämän työn tuloksista koskee kaikkia vektoriavaruuksia, keskitymme jatkossa vain äärellisulotteisiin vektoriavaruuksiin V, $dim(V) < \infty$.

Lause 2.1.10. *Vektorijono $(v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n)$ on lineaarisesti riippuva, jos se sisältää nollavektorin.*

Todistus: Tehdään vastaväite: Vektorijono $(v_1, \dots, v_n)$ on vapaa, vaikka se sisältää nollavektorin $v_k = 0,\ k \in \{1, \dots, n\}$.

Vapaalle jonolle pätee

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{1}$$

Nyt jos $v_k = 0$, pätee $a_k v_k = 0$ millä tahansa $a_k \in \mathbb{R}$. Tämä on ristiriidassa kohdan *(1)* implikaation " $\Rightarrow$ " kanssa, joten nollavektorin sisältämä vektorijono ei ole vapaa. $\square$

Määritelmä 2.1.11 (Ortogonaalisuus)**.** *Olkoon V sisätuloavaruus. Kaksi vektoria $u, w \in V$ ovat **ortogonaalisia**, jos $u \cdot w = 0$.*

Lause 2.1.12. *Ortogonaalinen vektorijono $(v_1, \dots, v_n) \in V$, joka ei sisällä nollavektoreita, on lineaarisesti riippumaton.*

Todistus: Olkoon $a_1, \dots, a_n$ sellaisia vakioita, että

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0.$$

Kerrotaan molemmat yhtälön puolet vektorilla $v_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$.

$$a_1 v_1 \cdot v_i + \ldots + a_n v_n \cdot v_i = 0 \cdot v_i$$

Oletuksen mukaan vektorit ovat ortogonaalisia, joten $v_k \cdot v_i = 0$ kaikilla $k \neq i$. Yhtälö supistuu muotoon $a_i v_i \cdot v_i = 0$ ja koska oletuksen mukaan $v_i \neq 0$, on oltava $a_i = 0$. Tämä pätee mille tahansa $i \in \{1, \dots, n\}$, joten

$$a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

$\square$

Määritelmä 2.1.13 (Ortogonaalinen kanta)**.** *Olkoon V vektoriavaruus, jossa on määritelty sisätulo. Olkoon vektorijono $(v_1, \dots, v_n)$ eräs vektoriavaruuden V kanta. Jos jokaiselle kantavektoriparille $(v_i, v_j) \quad i \neq j$ pätee $v_i \cdot v_j = 0$, sanotaan vektorijonon $(v_1, \dots, v_n)$ olevan avaruuden $\mathbb{R}^n$ **ortogonaalinen kanta.***

Määritelmä 2.1.14 (Ortonormaali kanta)**.** *Olkoon V sisätulolla varustettu vektoriavaruus ja vektorijono $(v_1, \ldots, v_n)$ eräs sen ortogonaalinen kanta. Jos kaikille $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in 1, \ldots, n$ pätee $|v_i| = 1$, on vektorijono $(v_1, \ldots, v_n)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$* ***ortonormaali kanta.***

Määritelmä 2.1.15. *Kroneckerin delta δ_{ij} on kahden muuttujan funktio, jonka arvo saadaan lausekkeesta*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{ jos } i = j \\ 0, \textit{ jos } i \neq j \end{cases}$$

Määritelmä 2.1.16 (Standardikanta)**.** *Olkoon $E = (e_1, \ldots, e_n)$ eräs avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta ja $i, k \in \{1, \ldots, n\}$.*

Kanta E on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ***standardikanta****, jos jokaisella vektorin e_k komponentilla $a_i \in e_k$*

$$a_i = \delta_{ik}$$

Esimerkiksi vektorit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ ja $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ ovat standardikannan vektoreita.

Merkinnällä $(e_1, \ldots, e_n)$ viitataan jatkossa vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ standardikantaan ja merkinnällä e_k johonkin sen kantavektoreista.

2.2 Aliavaruuksien summat ja projektiot

Määritelmä 2.2.1 (Aliavaruus)**.** *Olkoon V vektoriavaruus. Sen osajoukko U on vektoriavaruuden V* ***aliavaruus****, jos seuraavat ehdot täyttyvät.*

(i) $u + w \in U,$ *kaikilla* $u, w \in U.$

(ii) $au \in U,$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}$ *ja* $u \in U.$

Joskus edelliset ehdot yhdistetään yhdeksi niiden kanssa yhtäpitäväksi aliavaruuskriteeriksi:

$$au + bw \in U \quad \textit{kaikilla } a, b \in \mathbb{R},\ u, w \in U.$$

Lause 2.2.2. *Olkoon $U, W \subset V$ aliavaruuksia. Joukko $U \cap W$ on U:n ja W:n aliavaruus.*

Todistus: Olkoon $a, b \in \mathbb{R}$ ja $u, v \in U \cap W$. Tällöin $au + bv \in U$ sekä $au + bv \in W$. Nyt $au + bv \in U \cap W$ joten $U \cap W$ on sekä U:n että W:n aliavaruus. $\square$

Määritelmä 2.2.3. *Olkoon V vektoriavaruus ja $U, W \subset V$ aliavaruuksia.*

Aliavaruuksien U ja W ***summa*** *on joukko*

$$U + W = \{\ u + \mathrm{w} \mid \ u \in U, \quad w \in W\ \} \subset V.$$

Lause 2.2.4. *Aliavaruuksien summa on aliavaruus.*

Todistus: Olkoon $U, W \subset V$ aliavaruuksia ja $x, y \in U + W$, $a \in \mathbb{R}$. Tällöin on olemassa $u, u' \in U$ ja $w, w' \in W$ siten, että

$$x = u + w \qquad ja \qquad y = u' + w'.$$

Tällöin

$$\begin{aligned} x + y = u + w + u' + w' = (u + u') + (w + w') \qquad &\in U + W \\ ax = a(u + w) = au + aw \qquad &\in U + W \end{aligned}$$

$U + W$ täyttää molemmat kohdan 2.2.1 kriteerit, joten se on aliavaruus. □

Määritelmä 2.2.5 (Suora summa)**.** *Olkoon E vektoriavaruus ja olkoot $E_1, \ldots, E_k$ aliavaruuksia E:ssä. Sanotaan, että E on aliavaruuksien E_i* ***suora summa****, jos jokainen $x \in E$ voidaan ilmaista yksikäsitteisesti muodossa*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad x_i \in E_i \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, k.$$

Tällöin merkitään

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i.$$

Esimerkki 2.2.6. Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ summa $span(e_1, e_2, 0) + span(0, e_2, e_3)$ ei ole suora, sillä esimerkiksi vektori $x = (1, 2, 3)$ voidaan ilmaista kahdella eri tavalla:

Olkoon $u, u' \in U = span(e_1, e_2, 0)$ ja $w, w' \in W = span(0, e_2, e_3)$ siten, että

$$\begin{aligned} u &= (1, 1, 0) \qquad & w &= (0, 1, 3) \\ u' &= (1, 0, 0) \qquad & w' &= (0, 2, 3) \end{aligned}$$

Tällöin $u + w = u' + w' = (1, 2, 3) = x$. Kuitenkaan $u \neq u'$ ja $w \neq w'$, eli vektorin x esitys ei ole yksikäsitteinen ja täten summa $span(e_1, e_2, 0) + span(0, e_2, e_3)$ ei ole suora.

Lause 2.2.7. *Olkoon U ja W vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä*

(i) *Summa $U + W$ on suora.*

(ii) $U \cap W = \{0\}$.

Todistus: *(i)* $\Rightarrow$*(ii)*

Jos $x \in U \cap W$, niin se voidaan esittää muodoissa

$$x = x + 0, \qquad x \in U, \quad 0 \in W$$

ja

$$x = 0 + x, \qquad 0 \in U, \quad x \in W.$$

Koska $x \in U \oplus W$, on sen esitys muodossa $x = u + w, \quad x \in U, \quad w \in W$ yksikäsitteinen. Siis $x = 0$ ja $U \cap W = \{0\}$.

(ii) $\Rightarrow$*(i)*

Olkoon $U \cap W = \{0\}$ ja vektori $x \in U + W$ on esitetty muodossa

$$x = u + w = u' + w', \qquad u, u' \in U, \quad w, w' \in W.$$

Tällöin $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$, siis $u - u' = w' - w = 0$. Edelleen $u = u'$ ja $w = w'$, joten esitys on yksikäsitteinen ja summa $U + W$ on suora.
$\square$

Lause 2.2.8 (Grassmannin dimensiokaava [2])**.** *Olkoon V vektoriavaruus ja $U, W \subset V$ sen aliavaruuksia. Tällöin*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W).$$

Erityisesti aliavaruuksien U ja W summan ollessa suora:

$$U + W = U \oplus W \quad \Leftrightarrow \quad dim(U + W) = dim(U) + dim(W).$$

Lause 2.2.9 (Komplementtiavaruus)**.** *Jos U on äärellisulotteinen vektoriavaruuden V aliavaruus, niin on olemassa sellainen aliavaruus $W \subset V$, että $V = U \oplus W$. Aliavaruutta W kutsutaan aliavaruuden U erääksi komplementiksi.*

Esimerkki 2.2.10. Olkoon $A, B \subset \mathbb{R}^3$ ja $A = span(e_1, e_2)$. Olkoon $B = span(e_3)$. Tällöin

$$\begin{aligned} A \oplus B &= span(e_1, e_2) \oplus span(e_3) \\ &= span(e_1, e_2, e_3) \\ &= \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Siis aliavaruus B on aliavaruuden A komplementti.

Määritelmä 2.2.11 (Kohtisuora komplementti)**.** *Olkoon U sisätuloavaruuden V aliavaruus. Aliavaruuden U* ***kohtisuora komplementti*** *W on se aliavaruus, jonka jokainen vektori on kohtisuorassa kaikkien aliavaruuden U vektoreiden kanssa:*

$$W = \{x \in V \mid x \cdot u = 0\} \quad kaikilla \quad u \in U.$$

Aliavaruuden U kohtisuorasta komplementista käytetään merkintää $U^{\perp}$.

Esimerkin 2.2.10 aliavaruudet A ja B eivät olleet vain toistensa komplementteja, vaan myös kohtisuoria sellaisia.

Myöhemmin työssä tulemme tarvitsemaan tapaa siirtää vektori $v \in V$ jollekin sen aliavaruudelle $U \subset V$. Tähän tarkoitukseen määrittelemme projektion.

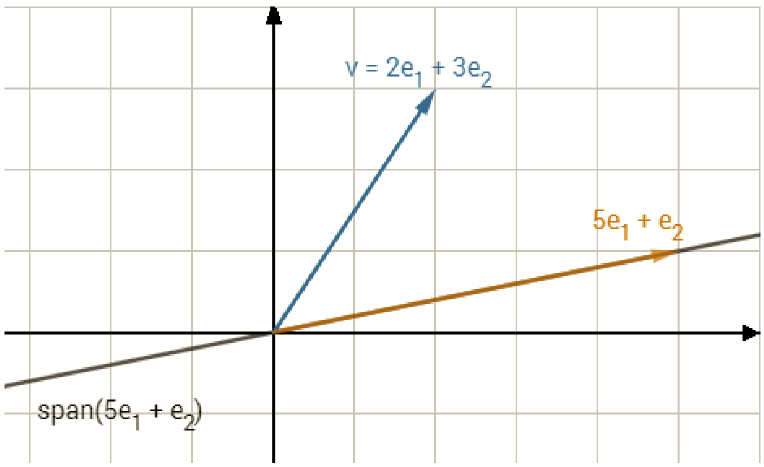
Määritelmä 2.2.12 (Projektio)**.** *Olkoon V vektoriavaruus, $U, W \subset V$ aliavaruuksia ja $V = U \oplus W$.*

Jos $x \in V$, niin $x = u + w$, missä $u \in U$ ja $w \in W$ ovat yksikäsitteisesti määrätyt. Merkitään $u = p(x)$. Tällöin kuvaus $p : V \to U$ on ***V:n projektio U:lle suuntaan W.***

Esimerkki 2.2.13. Projisoidaan avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektori $2e_1 + 3e_2$ kohtisuorasti vektorin $5e_1 + e_2$ virittämälle suoralle.

Olkoon $v = 2e_1 + 3e_2 \in \mathbb{R}^2$ ja $U = span(5e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$.

Vektorin v projisoimiseksi U:lle tulee löytää U: kohtisuora komplementti



Kuva 1: Vektori $v = 2e_1 + 3e_2$ ja vektorin $5e_1 + e_2$ virittämä aliavaruus U.

$W = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid u \cdot w = 0 \;\; \forall u \in U\}$. Etsitään jokin vektori $w = (w_1, w_2) = w_1e_1 + w_2e_2$, joka virittää aliavaruuden W.

$$\begin{aligned}
u \cdot w &= 0 \\
a(5e_1 + e_2) \cdot w &= 0 \\
5e_1 \cdot w + e_2 \cdot w &= 0 \\
5e_1 \cdot w &= -(e_2 \cdot w) \\
5 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 &= -(0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2) \\
5w_1 &= -w_2
\end{aligned}$$

Saamme yhtälöstä kertoimet $w_1 = -\frac{1}{5}w_2$ ja $w_2 = -5w_1$. Vektori w on tällöin

$$\begin{aligned}
w &= w_1e_1 + w_2e_2 \\
&= -\tfrac{1}{5}w_2e_1 + w_2e_2 \\
&= w_2(-\tfrac{1}{5}e_1 + e_2)
\end{aligned}$$

Reaalivakion w_2 arvo ei vaikuta siihen, virittääkö w aliavaruuden W. Valitaan yksinkertaisuuden vuoksi $w_2 = 5$. Saamme $w = -e_1 + 5e_2$ ja $W = span(-e_1 + 5e_2)$.

Aliavaruudet U ja W ovat toistensa komplementteja, eli

$$\mathbb{R}^2 = U \oplus W = span(5e_1 + e_2) \oplus span(-e_1 + 5e_2)$$

Projisoitava vektori v voidaan nyt ilmaista muodossa $v = u' + w'$, jossa $u' \in U$ ja $w' \in W$. Etsitään sellaiset vakiot $a, b \in \mathbb{R}$, joilla $au = u'$ ja $bw = w'$.

$$\begin{aligned}
v &= u' + w' \\
v &= au + bw \\
2e_1 + 3e_2 &= a(5e_1 + e_2) + b(-e_1 + 5e_2) \\
2e_1 + 3e_2 &= 5ae_1 + ae_2 - be_1 + 5be_2 \\
0 &= 5ae_1 - be_1 - 2e_1 + ae_2 + 5be_2 - 3e_2 \\
0 &= e_1(5a - b - 2) + e_2(a + 5b - e)
\end{aligned}$$

Kertoimet a ja b saadaan yhtälöparista

$$\begin{cases} 5a - b - 2 = 0 \\ a + 5b - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
5a - b - 2 &= 0 \\
b &= 5a - 2
\end{aligned}$$

Sijoitetaan $b = 5a - 2$ alempaan yhtälöön

$$\begin{aligned}
a + 5(5a - 2) - 3 &= 0 \\
a + 25a - 10 - 3 &= 0 \\
26a - 13 &= 0 \\
a &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

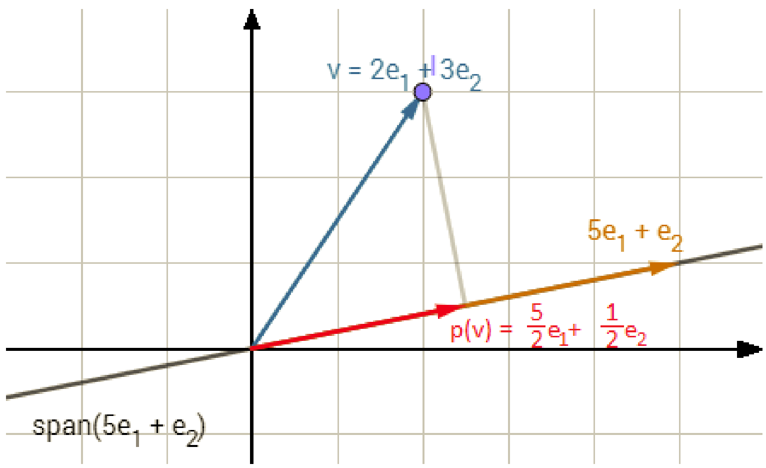
Sijoitetaan $a = \frac{1}{2}$ ylempään yhtälöön.

$$\begin{aligned}
5 \cdot \tfrac{1}{2} - b - 2 &= 0 \\
-b &= 2 - \tfrac{5}{2} \\
b &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Saamme vektorin v ilmaistuna U:n ja W:n virittäjävektorien summana $v = u' + w' = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w$. Vektorin v projektio U:lle on kuvaus $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} p(v) &= v - w' \\ p(v) &= 2e_1 + 3e_2 - \tfrac{1}{2}(-e_1 + 5e_2) \\ p(v) &= 2e_1 + \tfrac{1}{2}e_1 + 3e_2 - \tfrac{5}{2}e_2 \\ p(v) &= \tfrac{5}{2}e_1 + \tfrac{1}{2}e_2 \end{aligned}$$

Geometrisesti esitettynä projektiovektori $p(v)$ on ikään kuin vektorin v varjo suoralla U.



Kuva 2: Vektorin $v = 2e_1 + 3e_2$ projektio U:lle $p(v) = \frac{5}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2$.

3 Isometriat

Tässä luvussa tarkastelen vektorien välistä kulmaa ja pituutta. Esittelen isometrian – etäisyydet säilyttävän kuvauksen. Työn kannalta erityisen tärkeä lause 3.2.5 määrittelee isometrian yhteyden pistetuloon.

3.1 Metriikka

Määritelmä 3.1.1. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia metriikoilla d_X ja d_Y.*

Kuvaus $f : X \to Y$ on ***isometria****, jos kaikilla $a, b \in X$ pätee*

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$$

Lause 3.1.2. *Isometria on injektio.*

Todistus: Olkoon X ja Y metrisiä avaruuksia metriikoilla d_X ja d_Y. Olkoon $f : X \to Y$ isometria.

Vastaväite: Kuvaus $f : X \to Y$ ei ole injektio.

Jos f ei ole injektio, on olemassa jotkut $a, b \in X$, $a \neq b$, joille $f(a) = f(b)$. Kuvaus f on isometria, joten

$$\begin{aligned} d_X(a, b) &= d_Y(f(a), f(b)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Metriikan määritelmän mukaan $d_X(a, b) = 0$ jos ja vain jos $a = b$. Tässä tapauksessa $a \neq b$, joten kyseessä on ristiriita. f on siis injektio. $\square$

3.2 Isometriat euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Määritelmä 3.2.1. *Euklidisen avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *metriikka* d *määritellään kaavalla*

$$d(a,b) = |a-b| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + \ldots + (a_n-b_n)^2}$$

Määritelmä 3.2.2. n*-ulotteissessa avaruudessa voidaan puhua vektorien välisestä kulmasta, koska kaksi vektoria sijaitsevat aina tasolla. Määritellään kahden vektorin välinen kulma* α *Cauchy-Schwartzin epäyhtälön avulla:*

$$\begin{aligned} & |x \cdot y| \le |x||y| \qquad\qquad | \quad x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow \quad & -|x||y| \le x \cdot y \le |x||y| \\ \Leftrightarrow \quad & -1 \le \frac{x \cdot y}{|x||y|} \le 1 \end{aligned}$$

Arkuskosinifunktio kuvaa bijektiivisesti kaikki $x \in [-1,1]$ *kulmaksi* α,

$0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$. *Kahden vektorin* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *välinen kulma määritellään*

$$\alpha = \arccos \frac{x \cdot y}{|x||y|}$$

Lause 3.2.3. *Translaatio* $t_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *on isometria.*

Todistus: Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ ja $t_c(a) = a + c$.

$$\begin{aligned} |t_c(a) - t_c(b)| &= |a + c - (b + c)| \\ &= |a - b|. \end{aligned}$$

Näemme, että vektorit a ja b säilyttävät etäisyytensä kuvauksessa t_c, joten t_c on isometria. $\square$

Lause 3.2.4. *Kaikki $\mathbb{R}^n$:n isometriat voidaan ilmaista muodossa $t \circ f$, jossa t on translaatio ja f on origon kiinnittävä isometria.*

Todistus: Olkoon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria. Merkitään $f(v) = h(v) - h(0)$. Tällöin $f(0) = 0$ ja

$$\begin{aligned}
|f(v) - f(w)| &= |h(v) - h(0) - (h(w) - h(0))| \\
&= |h(v) - h(w)| && \mid \quad \text{h on isometria} \\
&= |v - w|
\end{aligned}$$

Siis $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on isometria, jolle $f(0) = 0$. Nyt $h(v) = f(v) + h(0)$, joten $h = t \circ f$, missä $t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on siirto $t(v) = v + h(0)$. $\square$

Myöhemmin selviää, että lauseen 3.2.4 f-kuvaukset, eli origon kiinnittävät isometriat, ovat muotoa $f(v) = Av$ jollekin $n \times n$ ortogonaaliselle matriisille A.

Lause 3.2.5. *Kuvaukselle $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

(i) *h on isometria ja $h(0) = 0$.*

(ii) *h säilyttää pistetulon: $h(v) \cdot h(w) = v \cdot w \qquad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.*

Todistus: Etäisyyden ja pistetulon välinen yhteys saadaan kaavasta

$$\begin{aligned}
|v|^2 &= \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}^{\,2} \\
&= v_1^2 + \ldots + v_n^2 \\
&= v \cdot v.
\end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* Olkoon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria ja $h(0) = 0$. Tällöin kaikilla

$v, w \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
|h(v) - h(w)| &= |v - w| && ()^2 \\
(h(v) - h(w)) \cdot (h(v) - h(w)) &= (v - w) \cdot (v - w) \\
h(v) \cdot h(v) - 2h(v) \cdot h(w) + h(w) \cdot h(w) &= v \cdot v - 2v \cdot w + w \cdot w && a \cdot a = |a|^2 \\
|h(v)|^2 - 2h(v) \cdot h(w) + |h(w)|^2 &= |v|^2 - 2v \cdot w + |w|^2.
\end{aligned}
$$

Koska $h(0) = 0$ ja h on isometria, $|h(v) - h(0)| = |h(v)| = |v|$. Edellisestä jatkaen saadaan nyt, että

$$
\begin{aligned}
\cancel{|v|^2} - 2h(v) \cdot h(w) + \cancel{|w|^2} &= \cancel{|v|^2} - 2v \cdot w + \cancel{|w|^2} \\
-2h(v) \cdot h(w) &= -2v \cdot w \\
h(v) \cdot h(w) &= v \cdot w.
\end{aligned}
$$

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* Olkoon $h(v) \cdot h(w) = v \cdot w$. Tällöin kaikilla $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
|h(v) - h(w)|^2 &= (h(v) - h(w)) \cdot (h(v) - h(w)) \\
&= h(v)^2 - 2h(v) \cdot h(w) + h(w)^2 \\
&= v \cdot v - 2v \cdot w + w \cdot w \\
&= (v - w) \cdot (v - w) \\
&= |v - w|^2.
\end{aligned}
$$

Siis $|h(v) - h(w)| = |v - w|$, eli h on isometria. Kun $v = w = 0$, $\quad |h(0)|^2 = h(0) \cdot h(0) = 0 \cdot 0 = 0$, siis h kiinnittää origon $\square$

Lause 3.2.6. *Ainoa $\mathbb{R}^n$:n isometria, joka kiinnittää sekä origon että standardikannan $e_1, \ldots, e_n$, on identiteetti.*

Todistus: Olkoon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, jolle $h(0) = 0$ ja $h(e_1) = e_1, \ldots, h(e_n) = e_n$.

Lauseen 3.2.5 nojalla $h(v) \cdot h(w) = v \cdot w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

Kiinnitetään $v \in \mathbb{R}^n$ ja annetaan w:lle arvot $e_1, e_2, \ldots, e_n$: kaikille i pätee, että

$$h(v) \cdot h(e_i) = v \cdot e_i$$

Oletuksen nojalla kaikilla i, $\quad h(e_i) = e_i$, joten

$$h(v) \cdot e_i = v \cdot e_i.$$

Merkitään $v = c_1e_1 + \ldots + c_ne_n$. Saamme jokaiselle $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\begin{aligned} h(v) \cdot e_i &= (c_1e_1 + \ldots + c_ne_n) \cdot e_i \\ &= c_i. \end{aligned}$$

Tämä siksi, koska $e_k \cdot e_i = \delta_{ki}$. Nyt kaikille $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} h(v) &= c_1e_1 + \ldots + c_ne_n \\ &= v. \end{aligned}$$

Siis h on identiteettikuvaus. $\square$

On olemassa isometrioita, jotka kiinnittävät standardikannan, mutta eivät origoa. $\mathbb{R}^2$:ssa ainoa esimerkki tällaisesta on xy-tason peilaus suoran $y = 1-x$ suhteen. Sama peilaus $\mathbb{R}^n$:ssä on peilaus hypertason $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ suhteen. Nämä eivät luonnollisesti ole identiteettikuvauksia.

4 Lineaarikuvaukset

Luvussa 4.1 määrittelen lineaarikuvauksen ja sen esittämisen matriisina. Havainnollistan esimerkkien avulla miten lineaarikuvauksen matriisi muodostuu lähtöavaruuden kantavektorien kuvista.

Jatkan luvussa 4.2 määrittelemällä ortogonaalisen lineaarikuvauksen ja osoitan kuvauksen ortogonaalisuuden olevan vahvasti yhteydessä sen isometrisyyteen. Johdan lopuksi matriisiesityksen projektiokuvaukselle, joka yksinkertaistaa projektioiden käytännön laskemista huomattavasti.

4.1 Lineaarikuvaus ja kuvausmatriisi

Määritelmä 4.1.1. *Kuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarinen, jos se toteuttaa ehdot*

(i) $L(a+b) = L(a) + L(b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^n$

(ii) $L(ca) = cL(a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}^n, \quad c \in \mathbb{R}$

Tällöin sanotaan, että L on ***lineaarikuvaus.***

Jokainen lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ määräytyy täysin kantavektoreiden $e_1, \dots, e_n$ kuvien $L(e_1), \dots, L(e_n)$ perusteella. Lineaarikuvauksen esittäminen matriisina ei ole vain mahdollista, vaan myös mielekästä.

Määritelmä 4.1.2 (Identtinen kuvaus)**.** *Kuvaus $h : V \to V$ on* ***identtinen kuvaus*** *jos kaikilla $u \in V$*

$$h(u) = u$$

Tällöin merkitään $h = id_V$ ja $h(u) = id_V(u)$.

Määritelmä 4.1.3. *Lineaarikuvauksen $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kuvausmatriisi $M(h)$ on $m \times n$ matriisi, jonka sarakkeet muodostuvat lähtöavaruuden $\mathbb{R}^n$ kantavektoreiden kuvista*

$$M(h) = \begin{bmatrix} h(e_1) & \cdots & h(e_n) \end{bmatrix}$$

Esimerkki 4.1.4. Kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ peilaa annetun vektorin $v \in \mathbb{R}^n$ y-akselin suhteen ja venyttää sen y-akselin suuntaisia komponentteja kaksinkertaisiksi.

Haluamme määrittää kuvauksen f kuvausmatriisin. Tiedämme, että kuvausmatriisi muodostuu kantavektoreiden kuvista, joten selvitämme vektoreiden e_1 ja e_2 kuvat.

$$f(e_1) = f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$f(e_2) = f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kuvauksen f kuvausmatriisi on siis $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Voimme tehdä nopean tarkistuksen tulokselle laskemalla vektorin $w = (1, 1)$ kuvan.

$$f(w) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kuvavektori $f(w)$ on peilattu y-akselin suhteen ja sen y-akselin suuntaisia komponentteja on venytetty kaksinkertaisiksi. Kaikki on kuten pitääkin.

Esimerkki 4.1.5. Lineaarikuvaus $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kuvaa vektorin $v \in \mathbb{R}^3$ seuraavasti:

$$h(v) = h((v_1, v_2, v_3)) = (-v_1, 2v_2, -v_3)$$

Näemme, että kuvaus h peilaa kantavektorien e_2 ja e_3 määrittämän tason suhteen ($-v_1$) sekä e_1:n ja e_2:n määrittämän tason suhteen ($-v_3$). Lisäksi h venyttää e_2:n suuntaisia vektorien komponentteja kaksinkertaisiksi ($2v_2$).

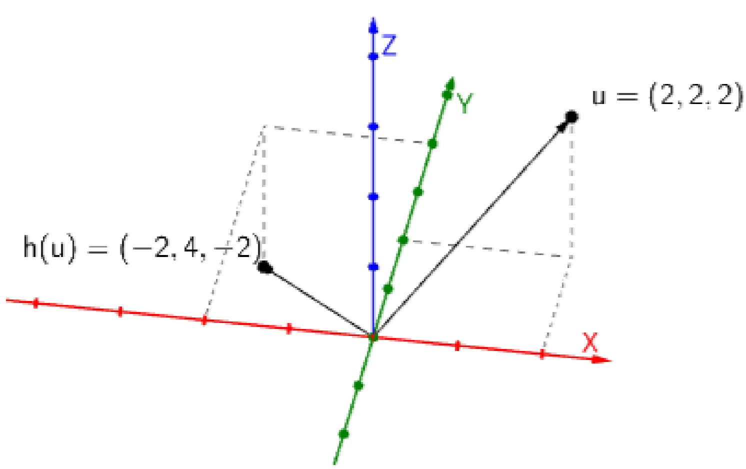
Muodostetaan kuvausta h vastaava kuvausmatriisi:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} h(e_1) & h(e_2) & h(e_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tässä v on mikä tahansa $\mathbb{R}^3$:n vektori. Kokeillaan kuvausta konkreettiselle vektorille $u = (2, 2, 2)$.

$$\begin{aligned} h(u) = Au &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Geometrisesti esitettynä on tapahtunut juuri mitä pitikin.



Kuva 3: Vektori u ja sen kuva h:ssa $h(u)$.

4.2 Ortogonaalinen lineaarikuvaus

Kiertokuvausten kannalta kiinnostavia kuvausmatriiseja ovat **ortogonaaliset** matriisit. Ne määräävät ortogonaalisia kuvauksia, jotka säilyttävät sekä vektorien väliset kulmat että etäisyydet. Määrittelemme seuraavaksi mitä ortogonaaliset matriisit ovat (lause 4.2.2) ja mikä yhteys isometrioilla on niihin.

Määritelmä 4.2.1. *Matriisin* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ***transpoosi*** A^T

saadaan muuttamalla jokainen M:n rivi sarakkeeksi ja päinvastoin.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Määritelmä 4.2.2. *$n \times n$ matriisi A on **ortogonaalinen**, jos sen transpoosi on sen inverssi, eli*

$$AA^T = AA^{-1} = I_n$$

Lause 4.2.3. *Ortogonaalisen matriisin sarakkeet ovat keskenään kohtisuoria yksikkövektoreita.*

Määritelmä 4.2.4. *$n \times n$ matriisi A on kääntyvä, jos on olemassa $n \times n$ matriisi B, jolla*

$$AB = BA = I_n,$$

missä I_n on yksikkömatriisi $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij}$.

Matriisi B määrittää yksikäsitteisesti A:n ja sitä sanotaan A:n

käänteismatriisiksi *tai* ***inverssiksi***.

$$B = A^{-1}$$

Todistus: Olkoon $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\quad n \times n$ matriisi,

jolle $A^T A = I_n$.

Merkitään A:n sarakkeita pystyvektoreina $a_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$

$A^T A = I_n$, joten kaikille sarakkeille a_k ja a_j, $\quad a_k^T a_j = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, \text{ kun } j = k \\ 0, \text{ kun } j \neq k \end{cases}$

Näemme, että $|a_k^T|^2 = a_k^T \cdot a_k^T = 1$, eli kaikki sarakkeet ovat yksikkövektoreita.

Kaksi vektoria ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden välinen kulma on suora kulma. Olkoon $i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \neq j$. Määritelmän 3.2.2 mukaan

$$\begin{aligned} cos\alpha &= a_i \cdot a_j \\ cos\alpha &= a_{i_1} a_{j_1} + a_{i_2} a_{j_2} + \ldots + a_{i_n} a_{j_n} \\ cos\alpha &= 0 \\ \alpha &= 90^\circ \end{aligned}$$

Siis kaikille $i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \neq j$ pätee $a_i \cdot a_j = 0$ ja $|a_i| = |a_j| = 1$. $\square$

Lause 4.2.5. *Olkoon $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus, jonka kuvausmatriisi A on ortogonaalinen. Matriisin A sarakkeet $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ ovat eräs maaliavaruuden $\mathbb{R}^n$ ortonormaali kanta.*

Todistus: Mikä tahansa lähtöavaruuden vektori x voidaan ilmaista jonain sen kantavektorien lineaarikombinaationa

$$x = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n, \qquad \forall i \in \mathbb{R},\ a_i \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad v_i \in \mathbb{R}^n$$

Matriisin A sarakkeet saadaan lauseen 4.1.3 nojalla lähtöavaruuden kantavektoreiden kuvista L:ssä. Koska L on lineaarikuvaus, pätee tällöin

$$\begin{aligned} L(x) &= L(a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n) \\ &= a_1 L(v_1) + \ldots + a_n L(v_n) \end{aligned}$$

Näemme, että minkä tahansa maaliavaruuden vektorin $L(x)$ voi ilmaista matriisin A sarakevektorien lineaarikombinaationa, joten jono $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ virittää maaliavaruuden $\mathbb{R}^n$.

Ortogonaalisen matriisin A sarakkeiden muodostama jono $(L(v_1), \ldots, L(v_n))$ on lineaarisesti riippumaton, sillä vektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.

Koska vektorijono $(L(v_1), \ldots, L(v_n))$ on lineaarisesti riippumaton ja se virittää avaruuden $\mathbb{R}^n$, on se eräs avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanta (2.1.7). □

Lause 4.2.6. *Ortogonaalisen matriisin määrittelemä kuvaus on origon kiinnittävä isometria.*

Todistus: Olkoon $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonaalisen matriisin määrittelemä kuvaus. Tiedämme, että A säilyttää pistetulon kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^n$, sillä

$$\begin{aligned} Ax \cdot Ay &= (Ax)^T Ay \\ &= x^T A^T Ay \qquad \mid A \text{ on ortogonaalinen} \\ &= x^T I_n y \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

Lauseen 3.2.5 nojalla pistetulon säilyminen on yhdenpitävää sen kanssa, että kuvaus on isometria ja kiinnittää origon. Siispä ortogonaalinen matriisi A on origon kiinnittävä isometria. □

Lause 4.2.7. *Origon kiinnittävä isometria $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on kääntyvä lineaarikuvaus ja se voidaan ilmaista ortogonaalisena matriisina.*

Todistus: Olkoon $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometria, jolle $h(0) = 0$. Olkoon A se $n \times n$ matriisi, jonka sarakkeet ovat standardikantavektoreiden kuvia h:ssa.

$$A = \begin{bmatrix} h(e_1) & \dots & h(e_n) \end{bmatrix}$$

Lauseen 3.2.5 nojalla kaikille $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$h(v) \cdot h(w) = v \cdot w$$

Kantavektorieiden kuvista näemme, että koska

$$h(e_i) \cdot h(e_i) = e_i \cdot e_i$$

niin $|h(e_i)|^2 = 1$ eli $h(e_i)$ on yksikkövektori. Kun $i \neq j$ saamme

$$h(e_i) \cdot h(e_j) = e_i \cdot e_j = 0$$

eli kaikki kantavektoreiden kuvat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Isometria h kuvaa siis standardikannan joksikin $\mathbb{R}^n$:n ortonormaaliksi kannaksi. Tällöin $A^T A = I_n$, eli A on ortogonaalinen matriisi ja lauseen 4.2.6 mukaan $\mathbb{R}^n$:n isometria.

Koska A on kääntyvä ja oletuksen mukaan $A(e_i) = h(e_i)$, tiedämme, että $A^{-1} \circ h$ kiinnittää origon ja standardikannan. Lauseen 3.2.6 mukaan $A^{-1} \circ h$ on identiteetti, eli $h(v) = Av$ kaikille $v \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Lause 4.2.8. *Kiertokuvaus tasossa on isometria.*

Todistus: Olkoon $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kiertokuvaus tasolla kulman θ verran vastapäivään.

$$r(v) = \underbrace{\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} sin^2\theta \cdot cos^2\theta & sin(\theta - \theta) \\ sin(\theta - \theta) & sin^2\theta \cdot cos^2\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kiertokuvauksen matriisi A on ortogonaalinen, joten lauseen 4.2.6 nojalla kiertokuvaus on isometria. □

Määritelmä 4.2.9 (Sarakeavaruus)**.** *Olkoon A $m \times n$ matriisi. Matriisin A* ***sarakeavaruus*** *on sen sarakevektorien $a_1, \ldots, a_n$ virittämä aliavaruus.*

$$col(A) = span(a_1, \ldots, a_n)$$

Määritelmä 4.2.10 (Nolla-avaruus [4])**.** *Olkoon A $m \times n$ matriisi. Matriisin A* ***oikea nolla-avaruus*** *on niiden vektorien joukko, joiden kuva A:ssa on 0. Merkitään*

$$N(A) = \{v \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid Av = \mathbf{0}\}.$$

Olkoon $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Matriisin A ***vasen nolla-avaruus*** *on niiden vektorien joukko, joilla $A^T x = \mathbf{0}$ ja $x^T A = \mathbf{0}$. Merkitään*

$$N(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^{m\times 1} \mid x^T A = \mathbf{0}\}.$$

Tätä kutsutaan vasemmaksi nolla-avaruudeksi, sillä x^T on yhtälössä matriisin A vasemmalla puolella.

Nolla-avaruus muistuttaa hyvinkin paljon kuvauksen ydintä, eikä perusteitta. Matriisin nolla-avaruus onkin sitä vastaavan lineaarikuvauksen ydin.

Lause 4.2.11. *Matriisin A vasen nolla-avaruus $N(A^T)$ on sen sarakeavaruuden $col(A)$ kohtisuora komplementti.*

$$col(A)^{\perp} = N(A^T).$$

Todistus: Olkoon $u \in N(A^T)$, $w \in col(A)$ ja $A = [a_1, \cdots, a_n]$. Aliavaruuksien kohtisuoruuden osoittamiseksi tulee näyttää, että $u \cdot w = 0$.

$$\begin{aligned}
u \cdot w &= u^T(c_1a_1 + \ldots + c_na_n) \qquad && | \ c \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \\
&= u^T(c_1Ae_1 + \ldots + c_nAe_n) \\
&= u^T(Ac_1e_1 + \ldots + Ac_ne_n) \\
&= u^T(Ac) \\
&= (u^TA)c && | \ u \in N(A^T) \\
&= \mathbf{0} \cdot c^T \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Näytimme, että millä tahansa $u \in N(A^T)$ ja $w \in col(A)$ pistetulo $u \cdot w = 0$, joten $N(A^T) = col(A)^{\perp}$. □

Lause 4.2.12 (Projektiokuvauksen matriisi)**.** *Olkoon $(u_1, \ldots, u_k)$ aliavaruuden $U \subset \mathbb{R}^n$ kanta ja $x \in \mathbb{R}^n$. Jos A on se matriisi, jonka sarakkeet ovat $u_1, \ldots, u_k$, niin vektorin x projektio U:lle saadaan lausekkeesta*

$$p(x) = A(A^TA)^{-1}A^Tx$$

Todistus: Olkoon W aliavaruuden U kohtisuora komplementti $W = U^{\perp}$. Olkoon $u \in U$ ja $w \in W$.

Vektorin x projektio U:lle on jokin U:n kantavektorien lineaarikombinaatio $p(x) = u_1y_1 + \ldots + u_ky_k = Ay$ jollain $y \in \mathbb{R}^n$. Projektion määritelmästä seuraa

$$\begin{aligned}
x &= u + w \\
x &= p(x) + w \\
x - p(x) &= w
\end{aligned}$$

Vektori $w = x - p(x)$ on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden U kantavektoreita vastaan. Matriisin A sarakeavaruus koostuu U:n kantavektoreista, joten lauseen 4.2.11 nojalla vektori $x - p(x)$ kuuluu A:n vasempaan nolla-avaruuteen $x - p(x) \in N(A^T)$. Tästä seuraa:

$$\begin{aligned} A^T(x - p(x)) &= 0 \\ A^T x - A^T A y &= 0 \\ A^T x &= A^T A y \end{aligned}$$

Matriisin A sarakevektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, joten $A^T A$ on kääntyvä matriisi [5].

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} A^T x &= (A^T A)^{-1} A^T A y \\ y &= (A^T A)^{-1} A^T x \end{aligned}$$

Ratkaisu x:n suhteen saadaan sijoittamalla:

$$\begin{aligned} p(x) &= Ay \\ &= A(A^T A)^{-1} A^T x \end{aligned}$$

$\square$

Lause 4.2.12 helpottaa merkittävästi projektioiden laskemista käytännössä. Esimerkkissä 2.2.13 etsittiin ensin aliavaruuden U kohtisuoran komplementin $U^\perp$ kanta ja laskettiin sen avulla projektiovektori $p(x)$. Hyödyntämällä lausetta 4.2.12 komplementtiavaruudesta $U^\perp$ ei tarvitse tietää juuri mitään.

5 Kierrot ja peilaukset $\mathbb{R}^n$:ssä

Luvussa 5.1 määrittelen kierto- ja peilauskuvaukset avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja lasken esimerkin kierrosta $\mathbb{R}^4$:ssa. Luvussa 5.2 annan yhtenevyydelle määritelmän ja totean kierto- ja peilauskuvausten säilyttävän yhtenevyyden.

5.1 Kierto- ja peilauskuvaus avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Olkoon seuraavissa määritelmissä U ja W avaruuden $\mathbb{R}^n$ kohtisuorat komplementaariset aliavaruudet eli $\mathbb{R}^n = U \oplus W$ ja $u \cdot w = 0$ kaikilla $u \in U$ ja $w \in W$.

Määritelmä 5.1.1 (Peilaus)**.** *Vektorin $x = u + w \in \mathbb{R}^n$* ***peilaus*** *$W$:ssä on lineaarikuvaus $u + w \mapsto -u + w$. Olkoon tämä peilaus $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ja*

$$r(x) = r(u + w) = -u + w$$

Kierrettäessä $\mathbb{R}^2$:ssa on tapana sanoa kierron tapahtuvan jonkin pisteen ympäri ja $\mathbb{R}^3$:ssa puhutaan kierroista suoran ympäri. Korkeammissa ulottuvuuksissa kiertoa on vaikeampi hahmottaa konkreettisesti, mutta aivan kuin $\mathbb{R}^2$:ssa ja $\mathbb{R}^3$:ssa se tapahtuu $dim(\mathbb{R}^{n-2})$ ulotteisen aliavaruuden ympäri.

Määritelmä 5.1.2 (Kierto)**.** *Vektorin $x \in \mathbb{R}^n$* ***kierto*** *W:n ympäri saadaan, jos $dim(W) = n - 2$. Tällöin lauseen 2.2.8 nojalla $dim(U) = 2$ ja tasossa U voidaan tehdä kierto kulman θ verran vastapäivään tavalliseen tapaan. Olkoon tämä kierto $h : U \to U$ ja*

$$h(u) + w = f(x)$$

Toisin sanoen f on kuvausten h ja id_W suora summakuvaus $f = h \oplus id_W$.

Kierrot ja peilaukset muissa kuin origon kautta kulkevissa aliavaruuksissa saadaan valitsemalla $\mathbb{R}^n$:lle uusi koordinaatisto, jossa origo on siirretty asianomaiseen aliavaruuteen. Koordinaatiston vaihto sisältää siirtojen ja ortogonaalisten kuvausten käyttöä. Ortogonaalinen kuvaus saadaan kun valitaan uusi ortonormaali kanta $(v_1, \ldots, v_n)$. Standardikannan $(e_1, \ldots, e_n)$ vektorit kuvataan uuden ortonormaalin kannan vektoreiksi $e_i \mapsto v_i \quad i \in \{1, \ldots, n\}$. Tämä määrää yksikäsitteisesti sen ortonormaalin kuvauksen, jonka matriisin sarakkeet ovat uuden kannan vektorit v_i.

Esimerkki 5.1.3. Lasketaan vektorin $x = (17, 37, 21, -31) \in \mathbb{R}^4$ kierto kulman $\theta = 90°$ verran vastapäivään erään $\mathbb{R}^4$:n aliavaruuden V ympäri.

Olkoon $a, b \in \mathbb{R}^4$, $a = (1, 2, 3, 4)$ ja $b = (4, -3, 2, -1)$. Olkoon $V \subset \mathbb{R}^4$ vektorien a ja b virittämä aliavaruus $V = span(a, b)$. Vektorijono (a, b) muodostaa lauseen 2.1.12 nojalla aliavaruuden V kannan, sillä $a \cdot b = 0$.

Olkoon $U \subset \mathbb{R}^4$ eräs aliavaruuden V kohtisuora komplementti. Aliavaruuden V kannassa on kaksi vektoria, joten dimension määritelmän nojalla $dim(V) = 2$. Edelleen, lauseen 2.2.8 nojalla, aliavaruuden U dimensio on

$$dim(\mathbb{R}^4) - dim(U) = 2.$$

Kierto V:n ympäri tehdään sen komplementtiavaruudessa U. Jotta voisimme suorittaa halutun kierron, tulee ensin selvittää x:n projektio tasolle U. Saamme projektiokuvauksen vaivatta lauseesta 4.2.12, mutta sitä ennen on selvitettävä aliavaruuden U kanta.

Olkoon $c, d \in \mathbb{R}^4$. Jotta vektorit c ja d olisivat muodostaisivt U:n ortogonaalisen kannan, tulee niiden olla kohtisuorassa toistensa, sekä vektorien a ja b kanssa:

$$c \cdot d = c \cdot a = c \cdot b = d \cdot a = d \cdot b = 0$$

Edellisestä kohtisuoruusehdosta saamme vektorille $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ yhtälöryhmän

$$\begin{cases} c \cdot a &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 + 4c_4 &= 0 \\ c \cdot b &= 4c_1 - 3c_2 + 2c_3 - c_4 &= 0 \end{cases}$$

Redusoidaan yhtälöryhmää Gaussin eliminaatiomenetelmällä:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rceil^{-4} \\ \hookleftarrow_{+} \end{matrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -11 & -10 & -17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot \frac{-1}{11} \end{matrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \end{pmatrix} \begin{matrix} \hookleftarrow^{+} \\ \rfloor_{-2} \end{matrix} \\
\Rightarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Redusoitu yhtälöryhmä on muotoa

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} c_1 + \frac{13}{11}c_3 + \frac{10}{11}c_4 = \ 0 \\ c_2 + \frac{10}{11}c_3 + \frac{17}{11}c_4 = \ 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow &\begin{cases} c_1 = \frac{-13}{11}c_3 + \frac{-10}{11}c_4 \\ c_2 = \frac{-10}{11}c_3 + \frac{-17}{11}c_4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Huomaamme, että c_3 ja c_4 ovat vapaita muuttujia. Valitaan $c_3 = c_4 = -11$, jolloin $c_1 = 13 + 10 = 23$ ja $c_2 = 10 + 17 = 27$. Aliavaruuden U ensimmäinen kantavektori on siis

$$c = (23, 27, -11, -11).$$

Lasketaan vastaavalla tavalla vektori $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$. Kohtisuoruusehdosta saamme edellä laskettuun redusoituun matriisiin yhden lisärivin. Sovellamme taas Gaussin eliminaatiomenetelmää:

$$
\begin{array}{cl}
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ 23 & 27 & -11 & -11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -23 \\ \\ + \end{array} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 27 & \frac{-420}{11} & \frac{-351}{11} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -27 \\ + \end{array} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & \frac{-690}{11} & \frac{-810}{11} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{-11}{690} \end{array} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{13}{11} & \frac{10}{11} \\ 0 & 1 & \frac{10}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{23} \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ + \\ -\frac{10}{11} \quad -\frac{13}{11} \end{array} \\
\Rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{23} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{23} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{27}{23} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Redusoidusta matriisita näemme, että d_4 on vapaa muuttuja ja

$$d_1 = \tfrac{11}{23} d_4 \quad , \quad d_2 = \tfrac{-11}{23} d_4 \quad , \quad d_3 = \tfrac{-27}{23} d_4.$$

Valitaan $d_4 = -23$, jolloin $d_1 = -11$, $d_2 = 11$ ja $d_3 = 27$. Olemme nyt löytäneet aliavaruudelle erään ortogonaalisen kannan, jonka muodostavat vektorit

$$c = (23, 27, -11, -11) \quad ja \quad d = (-11, 11, 27, -23).$$

Lauseesta 4.2.12 saamme vektorin x projektion aliavaruudelle U. Olkoon A se matriisi, jonka sarakkeet ovat vektorit c ja d.

$$
\begin{aligned}
p(x) &= A(A^T A)^{-1} A^T x \\
&= (12, 38, 16, -34)
\end{aligned}
$$

Nyt $p(x) \in U$ eli $p(x)$ on jokin vektorien c ja d lineaarikombinaatio. Voidaksemme kiertää vektoria $p(x)$ tasossa $\mathbb{R}^2$, tulee löytää sellainen kuvaus L, jolla aliavaruuden kantavektorit kuvautuvat standardikannan vektoreiksi $L : U \to \mathbb{R}^2, \quad c \mapsto e_1, d \mapsto e_2$. Olkoon $L = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ sellainen 2×4 matriisi, jolla

$$\begin{cases} L(23, 27, -11, -11) = (1, 0) \\ L(-11, 11, 27, -23) = (0, 1) \end{cases}$$

Soveltamalla Gaussin eliminaatiomenetelmää edelliseen yhtälöryhmään selviää, että matriisin L alkiot n_3, n_4, m_3 ja m_4 ovat vapaita muuttujia. Valitsemalla niiden arvoksi $n_3 = n_4 = m_3 = m_4 = 11$, saamme matriisin

$$L = \begin{bmatrix} \frac{351}{50} & \frac{151}{50} & 11 & 11 \\ \frac{3823}{550} & \frac{1673}{550} & 11 & 11 \end{bmatrix}.$$

Olemme nyt löytäneet kuvauksen L, jolla aliavaruuden U kanta vaihdetaan standardikannaksi. Vektorin $p(x)$ kuva tässä kannassa on

$$L(p(x)) = \begin{bmatrix} \frac{351}{50} & \frac{151}{50} & 11 & 11 \\ \frac{3823}{550} & \frac{1673}{550} & 11 & 11 \end{bmatrix} (12, 38, 16, -34) = (1, 1).$$

Voimme vihdoin suorittaa kulman $\theta = 90°$ suuruisen kierron vastapäivään. Olkoon $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kiertokuvaus.

$$\begin{aligned} r(L(p(x))) &= \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} cos90° & -sin90° \\ sin90° & cos90° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kierron loppuun saattamiseksi tulee enää palauttaa kierretty vektori takaisin U:n kantaan ja suorittaa käänteinen projektio. Kannanvaihtomatriisin sarakkeet ovat U:n kantavektorit ja kierretty vektori

U:n kannassa on

$$\begin{bmatrix} 23 & -11 \\ 27 & 11 \\ -11 & 27 \\ -11 & -23 \end{bmatrix} (-1, 1) = (-34, -16, 38, -12).$$

Laskimme aiemmin vektorin x projektion U:lle $p(x)$. Lisäämme nyt projektiovektorin $x - p(x)$ edellä saamaamme kierrettyyn vektoriin:

$$\begin{aligned} x - p(x) + (-34, -16, 38, -12) =& (17, 37, 21, -31) - (12, 38, 16, -34) \\ &+ (-34, -16, 38, -12) \\ =& (-29, -17, 43, -9) \end{aligned}$$

Olemme vihdoin saaneet selville, että $(\mathbf{-29}, \mathbf{-17}, \mathbf{43}, \mathbf{-9})$ on $90°$ vastapäivään aliavaruuden V ympäri kierretty vektori x.

Aloitimme etsimällä V:n komplementtiavaruuden U ja sen kannan. Projisoimme vektorin x aliavaruudelle U ja vaihdoimme U:n kannan $\mathbb{R}^2$:n standardikannaksi. Suoritimme kierron $\mathbb{R}^2$:n tavalliseen tapaan, jonka jälkeen palautimme U:n kannan. Lopuksi siirsimme x:n kuvaa alkuperäisen projektiovektorin verran pois tasolta U.

5.2 Yhtenevyys

Kahden kuvion, kappaleen tai osajoukon **yhtenevyys** mielletään usein siten, että kappaleet voidaan asettaa toistensa päälle ja ne vastaavat toisiaan täydellisesti. Kalle Väisälä määrittelee kahden kuvion olevan yhteneviä, jos niiden vastinjanat, -kaaret ja -kulmat ovat yhtäsuuret [6].

Ortogonaalinen kuvaus on isometria (4.2.6), joka puolestaan säilyttää pistetulon (3.2.5). Näin ollen sekä ortogonaaliset kuvaukset että origon kiinnittävät isometriat säilyttävät vektorien pituudet ja niiden väliset kulmat. Voimme määritellä yhtenevyyden seuraavasti.

Määritelmä 5.2.1 (Yhtenevyys)**.** *Kaksi* $\mathbb{R}^n$*:n osajoukkoa* A *ja* B *ovat* ***yhtenevät****, jos jollain ortogonaalisella kuvauksella* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ja vektorilla* $w \in \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$h(A) + w = B.$$

Peilaus $\mathbb{R}^n$:ssä on selvästi isometria, sillä vektorin pituus ei muutu sen suunnan vaihtuessa päinvastaiseksi. Yhtä lailla vektorin kulma säilyy ennallaan tällaisessa suunnanvaihdoksessa. **Peilaus $\mathbb{R}^n$:ssä säilyttää siis yhtenevyyden.** Samaan johtopäätökseen päästään myös toteamalla peilauskuvauksen matriisin olevan ortogonaalinen.

Kiertokuvaus on määritelmänsä mukaan tasossa tapahtuvan kierron ja identtisen kuvauksen yhdistetty kuvaus. Molemmat ovat origon kiinnittäviä isometrioita (4.2.8), kuten on niiden yhdistekin (3.2.4). Näin ollen **kiertokuvaus $\mathbb{R}^n$:ssä säilyttää yhtenevyyden.**

6 Lähteet ja viitteet

[1] Clements, Douglas H. et al. *Engaging Young Children in Mathematics: Standards for Early Childhood Mathematics Education*, s.273-276. Taylor & Francis, 2003.

[2] Laitinen, Erkki. *Lineaarialgebra 1, luentomoniste.*

[3] Condrad, Keith. *Isometries of R^n.* http://www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/grouptheory/isometryRn.pdf

[4] Strang, Gilbert. *The four fundamental subspaces*, 18.06SC Linear Algebra. Fall 2011. Lecture 10. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare. https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/ax-b-and-the-four-subspaces/the-four-fundamental-subspaces

[5] Mushtak, Noble. *Why is $A^T A$ invertible if A has independent columns?*, Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/q/1840807

[6] Väisälä, Kalle. *Geometria*, s.29. WSOY, 1959.