Funktion kulun tutkiminen

Jaakko Tyvijärvi

2017

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Jaakko Tyvijärvi

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Funktion kulun tutkiminen

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Joulukuu 2017	35 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä käsitellään neljää lukion pitkän matematiikan Derivaatta-kurssin oppikirjaa. Kirjoista kolme on suunnattu vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteiden tueksi ja yksi vuoden 2015 opetussuunnitelman tueksi. Oppikirjoista käydään läpi funktion kulkuun edellytettävä opintopolku keskittyen tarkemmin loppuosaan eli funktion kulun tutkimiseen liittyvät osiot. Työssä tuodaan esiin oppikirjojen eroavaisuudet ja yhtäläisyydet, mutta mahdollisiin sähköisiin lisämateriaaleihin ei oteta kantaa. Oppikirjojen rakenteet vastaavat todella paljon toisiaan. Joitakin tarkempia määritelmiä löytyy etenkin kirjasta Matematiikan Taito 7.

Työhön on koottu aiemmin saatua tutkimustietoa matematiikan oppimiseen liittyen, etenkin derivaatan ja funktion kulun ymmärtämiseen liiittyen. Erilaisten representaatioiden käyttöön ja niiden ymmärtämiseen pohjautuva oppiminen ja opetus on otettu huomioon työtä tehdessä. Erilaisten representaatioiden käyttö on havaittu auttavan opiskelijaa syventämään tietämystään, mutta toisaalta eri representaatioiden väliset yhteydet on vaikeampi oppia kuin yksittäiset representaatiot.

Työn loppuosaan on koottu vuosien 2009-2016 pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävistä funktion kulkuun liittyvien tehtävien määrä luokittain. Luokittelu on tehty muun muassa ääriarvojen tai funktion nollakohtien lukumäärää määrittämistä vaativiin tehtäviin. Tehtävien määrä on hiukan laskenut tuoreimmissa ylioppilaskokeissa, mutta samalla tehvävät ovat olleet soveltavampia kuin tutkitun välin alkuvaiheessa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Funktion kulun tutkiminen, oppikirja-analyysi, derivaatta

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Lukion opetussuunnitelman perusteet **5**
2.1 Oppimiskäsitys 5
2.2 Matematiikka 5
2.3 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003 6
2.4 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 6
2.5 Vertailua 7

3 Teoriaa **8**
3.1 Matemaattinen tieto ja taito 8
3.2 Matematiikan oppimisesta ja matemaattisesta ajattelusta 8
3.3 Representaatioista 9
3.4 APOS-teoria 10
3.4.1 APOS-teoria ja funktion kulun tutkiminen 11
3.5 Derivaatan ymmärtäminen 11

4 Oppikirjojen rakenne **13**
4.1 Johdattelu uuteen aiheeseen 13
4.2 Johdanto 14
4.3 Rationaalifunktio 14
4.4 Raja-arvo 15
4.5 Jatkuvuus 15
4.6 Derivaatta 15
4.7 Funktion kulun tutkiminen 17
4.8 Yhteenvetoa sisällöistä ja rakenteesta 18

5 Funktion kulku **20**
5.1 Rationaalifunktio 20

5.2 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus 20
5.3 Derivaatan määritelmä 22
5.4 Funktion kulku 22
5.4.1 Funktion monotonisuus 22
5.4.2 Funktion ääriarvot 23
5.4.3 Pienin ja suurin arvo suljetulla välillä 24
5.4.4 Funktion nollakohtien lukumäärän tutkiminen 24

6 Funktion kulun tutkiminen pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa 26
6.1 Tehtävien luokittelua 26
6.2 Esimerkkejä ylioppilastehtävistä 27
6.3 Koontia 32

7 Yhteenvetoa ja pohdintaa 34

Luku 1

Johdanto

Tutkielma käsittelee neljää lukion pitkän matematiikan oppikirjaa, joissa käsitellään funktion kulun tutkimista, sekä funktion kulun tutkimisen ja derivaatan opettamiseen ja oppimiseen liittyvää tutkimustietoa. Funktion kulun tutkiminen sisältyy 1.8.2016 voimaan tulleessa lukion opetussuunnitelmassa kurssiin MAA 6 Derivaatta (edellisessä opetussuunnitelmassa MAA 7 Derivaatta) [16], [17]. Tutkielma käsittelee yhtä lukion oppikirjaa, joka on suunnattu kurssille MAA 6 (Juuri 6) ja kolmea edellisen opetussuunnitelman pohjalta kirjattua oppikirjaa kurssille MAA 7 (Pitkä matematiikka 7, Pyramidi 7 ja Sigma 7). Tämän lisäksi tutkielmassa esitellään derivaattaan sekä funktion kulun tutkimiseen liittyvää tutkimustietoa, funktion kulun tutkimiseen liittyvä matemaattinen opintopolku ja luokitellaan ylioppilaskokeen pitkän matematiikan tehtäviä funktion kulun tutkimisen aihealueelta.

Tutkielman toinen luku sisältää tarkemmat kuvaukset lukion opetussuunnitelmista vuosilta 2003 ja 2015, joiden avulla selvitetään pitkän matematiikan Derivaatta-kurssin sisältöjä ja mahdollisia muutoksia. Lukioon tarkoitetut oppikirjat pyrkivät lähtökohtaisesti myös kattamaan kaikki opetussuunnitelman asettamat tavoitteet ja sisällöt ja tätä tutkitaan luvussa 4.

Kolmannen luvun kirjallisuuskatsauksen pyrkimyksenä on tutkia, millaisia ongelmia opiskelijoilla saattaa ilmetä derivaatan oppimisessa ja samalla tutkia kuinka hyvin lukion oppikirjat vastaavat ongelmiin. Derivaatan oppimiseen ja ymmärtämiseen liittyvät tiedot ovat funktion kulun opettamisen kannalta hyvin oleellisia, koska lukion oppikirjat hyödyntävät aiheessa vahvasti derivaattafunktiota. Lisäksi kolmanteen lukuun on koostettu yleisesti matematiikan oppimiseen ja ymmärtämiseen liittyvää tutkimustietoa.

Tutkielman lukuun 5 on muodostettu opintopolku, joka johdattaa funktion kulun tutkimiseen. Opintopolku on hieman syvällisempi kuin lukion oppikirjoissa, sillä osa tuloksista tai vähintäänkin niiden todistukset on sivuutettu lukion opetuksessa. Kuudenteen lukuun sisältyy lukion pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien analysointi ja luokittelu vuodesta 2009 vuoteen 2016. Tehtävät on luokiteltu kuuteen eri ryhmään koskien funktion kulun tutkimista.

Luku 2

Lukion opetussuunnitelman perusteet

Lukion opetussuunnitelman perusteet on opetushallituksen julkaisema dokumentti, jonka pohjalta lukiokoulutusta tarjoavat tahot laativat oman opetussuunnitelmansa. Viimeisin versio perusteista on julkaistu vuonna 2015 ja se on astunut voimaan 1.8.2016. Kyseinen dokumentti korvaa 1.8. 2005 voimaan tulleen version opetussuunnitelman perusteista.

2.1 Oppimiskäsitys

Opetussuunnitelman perusteet pohjautuvat oppimiskäsitykseen, jonka mukaan oppiminen on seurausta opiskelijan aktiivisesta, tavoitteellisesta ja itseohjautuvasta toiminnasta. Oppimisprosessin aikana opiskelija rakentaa uutta tietoa ja syventää osaamistaan aikaisempien tietojensa pohjalta tulkinnan, analysoinnin ja arvioinnin kautta. Oppiminen on monimuotoista ja tapahtuu vuorovaikutuksessa yhteisössä. Opiskelijoita tulisi ohjata havaitsemaan käsitteiden, tiedonalojen ja osaamisen välisiä yhteyksiä sekä soveltamaan aiemmin oppimaansa muuttuvissa tilanteissa [17].

2.2 Matematiikka

Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija muun muassa matemaattisen ajattelun malleihin ja matematiikan rakenteisiin. Erityisesti opiskelijaa tulisi ohjata huomioimaan matemaattisten käsitteiden yhteyksiä laajemmissa kokonaisuuksissa [17].

2.3 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003

Kurssin MAA 7 [16] tavoitteiksi on kirjattu, että oppilas osaa seuraavaa:
• osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaalie-päyhtälöitä
• omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta
• osaa määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat
• osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot
• osaa määrittää rationaalifunktion suurimman ja pienimmän arvon sovellusongelmien yhteydessä.

Kurssin keskeisiksi sisällöiksi on listattu:
• rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
• funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
• polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
• polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

2.4 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015

Kurssin MAA 6 [17] tavoitteiksi on uusimmassa opetussuunnitelmassa kirjattu, että oppilas:
• osaa määrittää rationaalifunktion nollakohdat ja ratkaista yksinkertaisia rationaalie-päyhtälöitä
• omaksuu havainnollisen käsityksen funktion raja-arvosta, jatkuvuudesta ja derivaatasta
• osaa määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat
• osaa tutkia derivaatan avulla polynomifunktion kulkua ja määrittää sen ääriarvot
• tietää, kuinka rationaalifunktion suurin ja pienin arvo määritetään
• osaa käyttää teknisiä apuvälineitä raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan tutkimisessa ja rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemisessa sekä polynomi- ja rationaalifunktion derivaatan määrittämisessä sovellusongelmissa.

Tämän lisäksi opetussuunnitelman perusteet listaa kurssin keskeisiksi sisällöiksi seuraavaa:
• rationaaliyhtälö ja -epäyhtälö
• funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta
• polynomifunktion, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen
• polynomifunktion kulun tutkiminen ja ääriarvojen määrittäminen.

2.5 Vertailua

Yllä olevista listauksista nähdään, että sisällöllisesti kurssi ei ole muuttunut lainkaan kahden uusimman opetussuunnitelman välillä. Tavoitteisiin on uuden opetussuunnitelman myötä tullut teknisten apuvälineiden hyödyntäminen kaikkien muiden tavoitteiden tueksi. Teknisten apuvälineiden käyttö lienee sisällytetty opetussuunnitelmaan sähköistyvien ylioppilaskirjoitusten ja alati sähköistyvän muun maailman myötä. Samalla on muutettu hieman sanamuotoja viimeisessä tavoitteessa muodosta ”osaa määrittää” muotoon ”tietää, kuinka määritetään”. Laskimet sekä tietokoneet ovat kehittyneet huomattavasti opetussuunnitelmien välillä, joten on hyvin perusteltua, että tavoite siirretään vahvemmin ymmärtämisen suuntaan. Siihen miten tämä näkyy opetuksessa tai tuloksissa ei kuitenkaan tässä tutkielmassa voida ottaa kantaa, sillä mitään opetuksen seurantaa ei ole toteutettu.

Opetushallituksen luomat lukion opetussuunnitelmien perusteet toimivat siis pohjana, josta eri lukiot luovat oman opetussuunnitelmansa. Tästä johtuen on mahdollista, että eri tavoitteita ja osa-alueita painotetaan eri tavalla lukioissa, joten pelkkien oppikirjojen analyysin pohjalta ei voida tehdä yleistyksiä miten lukioissa opetetaan.

Luku 3

Teoriaa

3.1 Matemaattinen tieto ja taito

Matemaattinen tieto ja osaaminen luokitellaan hyvin erilaisin tavoin kirjallisuudessa [5]. Karkeasti muotoiltuna jako ja tulkinta konseptuaalisesta ja proseduraalisesta tiedosta on tehty ymmärtämisen ja tekemisen välille. Tutkielmassa käytettävä viitekehys konseptuaalisesta ja proseduraalisesta tiedosta pohjautuu Haapasalon [5] määritelmiin.

> ”Konseptuaalinen tieto on semanttinen verkko, jonka tulkitsemiseen ja tuottamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet ja logiikan.”
>
> ”Proseduraalinen tieto on dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien ja algoritmien suorittamista tiettyjä esitystapoja hyväksikäyttäen.”

Lisäksi konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon välisestä yhteydestä ei ole olemassa yhtäläistä mielipidettä. Yhtälailla niiden on nähty olevan täysin riippumattomia toisistaan sekä riippuvaisia toisistaan eri tavoin [5]. Proseduraalinen tieto voidaan esimerkiksi nähdä välttämättömänä, mutta ei riittävänä ehtona konseptuaalisen tiedon rakentumiselle.

3.2 Matematiikan oppimisesta ja matemaattisesta ajattelusta

Piaget'n (1964) näkemyksen mukaan yksilö ei opi matemaattisia käsitteita suoraan. Yksilö pyrkii soveltamaan jo omaksuttuja ja sopivia mentaalisia rakenteita ja malleja ymmärtääkseen uusia matemaattisia käsitteitä. Mikäli yksilöllä ei ole sopivia tietoja ja rakenteita, niin uuden käsitteen oppimisesta tulee lähes mahdotonta. Tämän lisäksi yksilö yrittää useimmiten luoda yhteyden matemaattisen ongelman ja itselle tutun reaalimaailman, esimerkiksi konkreettisten objektien, välille.

Toisen matematiikan käsitteiden kehitykseen tai ylipäätään matemaattiseen ajatteluun liittyvän teorian on kehittänyt Tall (2004). Matemaattinen ajattelu voidaan jakaa Tallin mukaan kolmeen eri matematiikan maailmaan. Ensimmäisenä maailmana on konseptuaalinen (conseptual-embodied world) maailma, jossa yksilö käsittelee reaalimaailmasta tuttuja nähtäviä tai aistittavia objekteja. Oppija näkee totuuden tai oikean vastauksen, esimerkiksi yhteenlasku $1+2=2+1$. Yksinkertaisena esimerkkinä yhtälön paikkansapitävyys on nähtävissä, koska saadaan yhtä suuri määrä palikoita riippumatta siitä lisätäänkö kaksi palikkaa yhteen vai yksi kahteen. Toisessa maailmassa (proceptual-symbolic world) yksilö voi ajatella yhtäältä yhteenlaskua prosessina tai toisaalta käsitettä yhteenlaskusta eli summaa. Nyt voidaan ajatella edellä mainitun esimerkin $1 + 2 = 2 + 1$ pätevän, koska yhtälön molemmilta puolilta tulee laskettaessa sama summa. Kolmas maailma on formaali (formal-axiomatic world) matematiikan maailma, jossa ajattelu pohjautuu aksioomille ja formaaliin matematiikan kieleen. Nyt yhtälön $1+2=2+1$ totuus pohjautuu yhteenlaskun vaihdannaisuuteen.

3.3 Representaatioista

Matemaattiset representaatiot on mahdollista jaotella monin eri tavoin. Goldin (1998) jaottelee ongelmanratkaisuun liittyvät representaatiot viiteen eri kategoriaan seuraavasti. (1) verbal/syntactic systems (sanallinen), (2) imagistic systems (visuaalinen/kuvallinen), (3) formal notational systems (formaali), (4) system of planning, monitoring and executive control (heuristinen) ja (5) system of affective representation (tunteisiin perustuva). Suhteessa matematiikan kolmeen maailmaan konseptuaalinen maailma koostuu enimmäkseen kategorian (2) representaatioista ja formaali maailma kategorian (3) representaatioista.

Hähkiöniemen (2006) mukaan oppilaat käyttävät erilaisia representaatioita funktion kulun tutkimiseen ja derivaattaan liittyen ja osaavat käyttää erilaisia esimerkiksi funktion jyrkkyyteen liittyviä esityksiä, mutta eivät välttämättä osaa selittää miksi esitysten välinen yhteys on olemassa. Herbert (2008) toteaa, että kaavioiden, kuvaajien ja lauseiden kohdalla on tärkeää ymmärtää yhdessä ja erikseen eri representaatioita, jotta liikkuminen niiden välillä onnistuu ja ymmärrys syvenee. Muutoksen huomaaminen ja tulkitseminen funktion symbolisesta muodosta koettiin vaikeammaksi kuin numeerisen muodon (esim. taulukko) tulkinta [7].

3.4 APOS-teoria

Apos-teoria on vuonna 1997 luotu teoria (Asiala & al.), jonka mukaan matemaattinen osaaminen rakentuu neljässä eri tasossa toistensa pohjalta yksilön reflektoidessa osaamistaan ja tekemistään. Opiskeltavan aiheen osaaminen kasvaa siirryttäessä eteenpäin eri tasolle. Seuraavassa esitellään paremmin mistä apos-teoria muodostuu sekä yleisesti että tutkielman aiheen kannalta. Nimitys tulee sanoista Action, Process, Object ja Schema.

Action. Action-tasolla yksilö tulkitsee objekteihin kohdistuvan muutoksen vähintäänkin jonkin verran ulkoisena. Tällä tasolla yksilö kykenee tekemään muutoksia tarkkojen ohjeiden perusteella vaiheittain. Lisäksi esimerkiksi tällä tasolla yksilö kykenee määrittelemään funktion arvoja vain tietyissä pisteissä tai suorittamaan muutoksia funktioon mikäli funktio on yksikäsitteisesti määritelty. Voidaan myös sanoa, että esimerkiksi paloittain määritellyn funktion tulkinta on vaikeata tällä tasolla olevalle.

Ensimmäisen vaiheen eli toiminnan toistuessa usein ja reflektoiden yksilön taito- ja tietotaso siirtyvät seuraavaan vaiheeseen.

Process. Toistuvan ja reflektoivan toiminnan seurauksena toiminta ymmärretään prosessina. Process-vaiheessa toiminta on yksilön sisäistä toimintaa eikä ulkoisia ohjeita tarvita kuten action-vaiheessa. Myös muunnosten selittäminen tai suorittaminen käänteisessä järjestyksessä onnistuu yksilöltä tällä tasolla. Yksilö ymmärtää esimerkiksi joukkoihin ja osajoukkoihin liittyviä muutoksia.

Object. Yksilön reflektoidessa tiettyyn prosessiin liittyviä operaatioita kokonaisuutena, ymmärtäessä useampien muutosten toimivan eri prosesseissa ja kyetessä konstruoimaan kyseisiä muutoksia, niin tällöin prosessista on kehittynyt objekti (object). Objektiin voidaan soveltaa aiempien tasojen käytäntöjä, mutta tällöin on usein hyödyllistä purkaa objekti prosesseiksi, joista se on muodostettu. Esimerkkinä voidaan ajatella funktion manipulointia lisäämällä tai kertomalla.

Schema. Viimeisenä tasona teoriassa on Schema. Muodostetut objektit ja prosessit voivat liittyä toisiinsa monin eri tavoin ja samalla ne voidaan järjestää niin, että ne muodostavat kokonaisuuden (schema). Aiempien tasojen tapaan on mahdollista, että useampi kokonaisuus nivoutuu yhteen ylemmän tason kokonaisuudeksi.

3.4.1 APOS-teoria ja funktion kulun tutkiminen

Alla on esimerkki kuinka APOS-teoria voidaan tulkita. Muun muassa Maharaj (2013) on käyttänyt vastaavaa luokittelua tutkiessaan derivaatan ymmärtämistä lukioikäisten joukossa.

Action-tasolla yksilö kykenee määrittämään melko yksinkertaisen funktion $f(x) = 3x^3$ derivaattafunktion $f'(x) = 9x^2$ derivointisäännön avulla.

Process-tasolla yksilö kykenee määrittämään jo hiukan hankalemman funktion derivaatan, esimerkiksi $g(x) = (x^2 + 2)^2$. Määrittääkseen kyseisin funktion derivaattafunktion täytyy yksilön osata edellä tarvitun derivointisäännön lisäksi muuttaa yhtälö muotoon $g(x) = x^4 + 4x^2 + 4$, jolloin voidaan soveltaa samaa derivointisääntöä.

Object-tasolla yksilö kykenee tulkitsemaan edellä mainitun funktion g yhdistettynä funktiona $g(x) = u(s(x))$, jossa $u(x) = x^2$ ja $s(x) = x^2 + 2$. Tällöin derivoinnin ketjusääntöä voidaan hyödyntää.

Funktion ääriarvokohtien ja-arvojen määrittäminen voidaan tulkita *schema*-tasolle. Edellä mainitut keinot derivaattafunktion määrittämiseen ei riitä, vaan lisäksi yksilö tarvitsee tiedon siitä, että funktion ääriarvo sijaitsee derivaattafunktion nollakohdassa. Tämän lisäksi yksilön tulee osata muodostaa kulkukaavio derivaattafunktion merkin avulla, jotta on mahdollista päätellä ääriarvon laatu.

Maharaj (2013) kokee, että opetuksen tulisi tukea ja keskittyä etenkin process, object ja schema -tasoille. Tämän tavoitteen saavuttamiseen auttaisi muun muassa keskittyä mekaanisen derivoinnin sijaan tulkitsemaan graafisia esityksiä sekä sanallisten tehtävien tulkitseminen, jolloin vaaditaan laajempaa ja syvällisempää ajattelua.

3.5 Derivaatan ymmärtäminen

Maharaj'n (2013) huomioiden perusteella opiskelijat kykenevät usein derivoimaan funktion mekaanisesti luoden derivaattafunktion. Kuitenkin tutkiessaan luonnontieteiden opiskelijoiden syvempää ymmärrystä derivaatasta hän tuo esiin tuloksen, jonka perusteella alle neljännes opiskelijoista kykeni derivaattafunktion f' kuvaajan nähdessään luomaan yhteyden funktion f ääriarvokohtiin. Tosin lähes puolet samaan tutkimukseen osallistuneista osasi määrittää funktion maksimikohdan ja -arvon, kun derivaattafunktio oli annettu. Delos Santos ja Thomas (2003) toteavat lisäksi prosesseihin orientoituneen oppimisen unohtuvan nopeammin. Syvempää konsepteihin tai schemoihin perustuva oppiminen helpottaa myös eri representaatioiden välillä liikkumista.

Hähkiöniemen (2006) tutkimuksen mukaan derivaatan opiskelu ja ymmärtäminen pohjautuu alkuun vahvasti Tallin kolmen maailman kehyksessä ensimmäiseen eli konseptuaaliseen maailmaan. Tätä voidaan perustella sillä, että derivaatan merkkiä kuvailtiin ja perusteltiin funktion kuvaajan tai esimerkiksi kynän avulla. Samaan aikaan mahdollistuu käsitteiden välinen yhteys derivaatan merkin ja suunnan sekä funktion kulun välille. Tämän lisäksi Hähkiöniemi huomasi, että tämä konseptuaalinen eli ilmenevä maailman vahvisti ja monipuolisti ajattelun malleja ja toi ajatteluun laajuutta. Konseptuaaliseen maailmaan liittyvät representaatiot funktion jyrkkyydestä tai tangentista auttoivat oppilaita myös huomaamaan mahdollisia virheitä proseduraalisen derivointiprosessin aikana. Mahdolliset virheet havaittiin ristiriitoina luotujen yhteyksien ja representaatioiden välillä. Hähkiöniemi tukee tuloksissaan, jo Tall'n esiin nostamaa, konseptuaalisen maailman tärkeyttä oppimisessa sekä opetuksessa.

Luku 4

Oppikirjojen rakenne

Tässä luvussa esitellään valittujen kirjojen rakennetta ja kuvataan niiden sisältöä pääsääntöisesti vain sanallisesti. Seuraava luku pyrkii esittämään aiheen matemaattisesti, painottaen funktion kulun tutkimiseen liittyvää osiota tarkemmin.

Suomessa lähtökohtaisesti lukion oppikirjat ovat hyvin samankaltaisia, koska ne pyrkivät kattamaan opetussuunnitelman perusteiden asettamat tavoitteet ja sisällöt. Eroja on enemmän tehtävätyyppien ja -määrien välillä. Erot näkyvät selkeämmin tehtävätyypeissä vertailtaessa lukion ja yliopiston oppimateriaaleja, etenkin todistustehtävien määrissä [19]. On hyvä kuitenkin muistuttaa, että Suomessa opettajilla on mahdollisuus opettaa hyväksi katsomallaan tavalla, eikä mitään oppikirjaa ole pakko käyttää. Valtakunnallisen opetussuunnitelmankin nojalla opetusmenetelmien tulisi olla monipuolisia ja vaihtelevia, joissa opiskelijat työskentelevät sekä yksin että yhdessä.

Kirja Juuri 6 [10] on julkaistu vuoden 2015 opetussuunnitelman ollessa voimassa, Pyramidi 7 [12], Matematiikan taito 7 [6] ja Sigma 7 [1] on julkaistu vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteiden ollessa voimassa. Tässä luvussa tummennetut väliotsikot ovat tutkituissa kirjoissa esiintyvien kappaleiden otsikoita kaikissa tai vähintäänkin useimmissa kirjoissa.

4.1 Johdattelu uuteen aiheeseen

Tähän lukuun on koottu kirjojen tavat johdatella uuteen aiheeseen tai osioon. Kirjan Sigma 7 jokaisen luvun alkuun on koottu vähintään yksi pohdintatehtävä, jonka avulla opiskelija saa kosketuksen tulevaan aiheeseen. Pohdintatehtävät on rakennettu niin, että tuleva aihe käsitellään lähinnä numeerisesti perustelematta mitään.

Matematiikan taito 7 -kirjan lukujen alkuun on lisätty niin sanottu alkupala, jolla johdatellaan aiheeseen. Alkupalana toimii esimerkiksi kuvaajan tulkinta tai suoran yhtälön määrittäminen.

Kirja Juuri 6 sisältää jokaisen luvun kohdalla johdantotehtävän ratkaisuineen. Tämän lisäksi kirjan lukuihin on suunniteltu digijohdantoja, jotka ovat Geogebra-sovelluksia. Sovelluksissa oppilas pääsee itse muokkaamaan tilannetta ja hyödyntämään tätä opiskelussaan.

Kirja Pyramidi 7 poikkeaa tässä muista kirjoista, sillä siinä ei ole lainkaan johdatteluesimerkkejä.

4.2 Johdanto

Oppikirjoista vain Pyramidi 7 ja Juuri 6 johdattelevat differentiaalilaskentaan. Pyramidi 7 johdattelee aiheeseen historian kautta ja Juuri 6 kuvaa derivaatan hyödyntämistä muun muassa optimoinnissa. Molemmat kirjat pyrkivät jo johdannossaan luomaan kuvan tulevan kurssin hyödyllisyydestä. Pyramidi 7 sisältää muista kirjoista poiketen luvun funktion ominaisuuksista. Aihe on aiemmilta kursseilta tuttu ja siksi luku toimii kertaavana ja johdatteluna.

4.3 Rationaalifunktio

Kaikki kirjat lähtevät liikkeelle rationaalilausekkeen ja -funktion määrittelyllä kahden polynomin osamääränä huomioiden myös määrittelyehdon:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

jossa $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja ja $Q(x) \neq 0$.

Tämän jälkeen kaikki kirjat kokoavat yhteen rationaalilausekkeen sieventämiseen liittyviä laskusääntöjä, joiden todetaan olevan samoja kuin säännöt, joita murtoluvuille sovelletaan. Laskusääntöjä ja merkkikaaviota sovelletaan tämän jälkeen kaikissa kirjoissa rationaaliyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisemiseen.

4.4 Raja-arvo

Matematiikan taito 7 on kirjoista ainoa, joka esittelee aluksi matemaattiset käsitteet poikkeama ja ympäristö. Samalla se on myös kirjoista ainoa, joka esittelee lisätietona myös täsmällisemmän määritelmän raja-arvolle jossain ympäristössä. Kirjassa Matematiikan taito toispuoleiset raja-arvot määritellään vasta yleisen raja-arvon määritelmän ja laskuteknisten esitysten jälkeen.

Sigma 7 ja Pyramidi 7 taas lähtevät liikkeelle toispuoleisten raja-arvojen määritelmistä ja näiden avulla määrittelee yleisen raja-arvon seuraavasti

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0 -} = a = \lim_{x \to x_0 +} .$$

Seuraavaksi kirjoissa keskitytään raja-arvon numeeriseen laskemiseen.

Kirja Juuri 6 aloittaa raja-arvon opiskelun laskennallisesta raja-arvon määrittämisestä. Tämän jälkeen kirja määrittelee toispuoleiset raja-arvot, joiden avulla myös Juuri 6 muotoilee ylläolevan määritelmän, mutta lauseena.

4.5 Jatkuvuus

Jatkuvuus käsitellään kaikissa kirjoissa hyvin samaan tapaan. Ensin tarkastellaan jatkuvuutta annetussa pisteessä, jonka jälkeen jatkuvuutta tarkastellaan jollain välillä. Funktion jatkuvuuteen pohjautuva Bolzanon lause käsitellään myös kaikissa kirjoissa, tosin kirjassa Matematiikan taito lause käsitellään vasta funktion kulun tutkimiseen liittyvässä osiossa. Matematiikan taito 7 käsittelee jatkuvuuden kohdalla muista poiketen vielä raja-arvon ääretön ja raja-arvon äärettömyydessä. Kyseisessä luvussa käsitellään lisäksi rationaalifunktion asymptootit.

4.6 Derivaatta

Derivaatan opiskelu aloitetaan kaikissa neljässä kirjassa funktion keskimääräisen muutosnopeuden eli erotusosamäärän tarkastelulla. Derivaatta määritellään erotusosamäärän raja-arvona

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Raja-arvon ollessa olemassa funktio on derivoituva kohdassa x_0. Derivaatta on tangentin kulmakerroin. Kaikissa kirjoissa myös sekantin lähestyminen kohti tangenttia tuodaan esiin hyvin visuaalisesti.

Pyramidi 7, Matematiikan taito 7 sekä Sigma 7 esittelevät erotusosamäärän myös muodossa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tätä muotoa ei esitetä kirjassa Juuri 6. Vielä ennen siirtymistä derivointisääntöihin kirjoissa mainitaan derivoituvan funktion olevan aina jatkuva, mutta jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituva.

Seuraavat derivointisäännöt esitellään kaikissa kirjoissa. Juuri 6 käsittelee ensimmäiset kuusi sääntöä polynomifunktion kulun tutkimista varten ja viimeiset kaksi vasta rationaalifunktion kulkua tutkittaessa.

Oletetaan, että funktiot f ja g ovat derivoituvia ja c on vakio.

1. $Dc = 0$
2. $Dx = 1$
3. $Dx^n = nx^{n-1}, n \in \mathbb{Z}$
4. $D(cf) = c(Df)$
5. $D(f+g) = Df + Dg$
6. $D(f-g) = Df - Dg$
7. $D(f \cdot g) = (Df) \cdot g + (Dg) \cdot f$
8. $D(\frac{f}{g}) = \frac{(Df) \cdot g - (Dg) \cdot f}{g^2}$

Sääntöjen todistukset löytyvät kaikista kirjoista vähintäänkin osittain. Osa on myös harjoitustehtävinä tai verkkomateriaalina julkaistuna.

Ennen siirtymistä funktion kulun tutkimiseen kaikki kirjat käyvät läpi tangentin yhtälön muodostamisen. Matematiikan taito 7, Pyramidi 7 sekä Sigma 7 käyvät läpi myös normaalin yhtälön ja Pyramidi ja Sigma vielä suorien välisen kulman tarkastelun. Matematiikan taito 7 käsittelee derivaatta-osionsa aikana ylimääräisiksi aiheiksi merkityt induktiotodistuksen sekä nopeuden ja kiihtyvyyden välisen yhteyden.

4.7 Funktion kulun tutkiminen

Pyramidi 7 aloittaa funktion kulun tutkimisen derivoituvan funktion monotonisuudesta matemaattisen lauseen avulla. Muutkin kirjat käyvät kyseisen lauseen läpi, mutta muissa kirjoissa ensin määritellään funktion monotonisuus. (Määritelmä ja lause löytyvät tutkielman seuraavasta luvusta.) Funktion monotonisuus on osa aiempaa matematiikan kurssia, joka käsittelee funktiota ja kirjassa Pyramidi 7 funktion monotonisuus on kerrattu jo ensimmäisessä luvussa eli kertausosiossa. Kirjassa Juuri 6 on kuitenkin jätetty aito monotonisuus pois. Eli kirjassa Juuri 6 määritellään monotonisuus seuraavasti:

Funktio f on kasvava jollakin välillä, jos muuttujan kasvaessa myös funktion arvo kasvaa eli jos kyseisellä välillä ehdosta $x_1 < x_2$ seuraa aina $f(x_1) < f(x_2)$.

Funktio f on vähenevä jollakin välillä, jos muuttujan kasvaessa myös funktion arvo kasvaa eli jos kyseisellä välillä ehdosta $x_1 < x_2$ seuraa aina $f(x_1) > f(x_2)$.

Tämän jälkeen kirjassa Juuri 6 on huomautus, jossa sanotaan, että monissa teksteissä termien eteen lisätään sana "aidosti" korostamaan sitä että funktio ei saa samaa arvoa kahdesti. Tässä kirjassa "aidosti" on jätetty yksinkertaisuuden vuoksi pois.

Muissa kirjoissa tämä määritelmä koskee siis aidosti kasvavaa/vähenevää funktiota ja kasvavan/vähenevän funktion määritelmässä on mukana yhtäläisyys funktion arvoissa.

Funktion ääriarvoja tutkitaan kirjoissa merkki- ja kulkukaavioiden avulla. Ääriarvoihin liittyen esitellään termit minimikohta, minimi, maksimikohta, maksimi sekä suurin ja pienin arvo. Kirjoissa käsitellään siis funktion lokaaleja ja globaaleja ääriarvoja ja ääriarvokohtia. Kaikissa neljässä kirjassa tutkitaan ensin lokaaleja ääriarvoja. Juuri 6 on kirjoista ainoa, jossa esimerkit aloitetaan suljetun välin sisältävillä tehtävillä. Muissa kirjoissa tutustutaan ensin koko määrittelyjoukon lokaaleihin ääriarvoihin. Suljetun välin ääriarvojen etsimisen avuksi esitellään lause. (Kirjoissa Sigma ja Pyramidi lause tunnetaan nimellä Fermat'n lause.)

Lause
Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva ja avoimella välillä $]a, b[$ derivoituva funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko
- välin päätepisteessä tai
- välillä $]a, b[$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Vain kirjassa Matematiikan taito lausetta on laajennettu koskemaan myös tilannetta, jossa funktio on jatkuva, mutta ei derivoituva jossain avoimen välin pisteessä eli ns kärkikohdassa. Matematiikan taito on myös ainoa kirja, jossa hyödynnetään funktion asymptootteja rationaalifunktion kulun tutkimisessa. Lisäksi todettakoon, että samassa kirjassa jatkuvan funktion nollakohtien määrää koskeva Bolzanon lause on sijoitettu funktion kulun tutkimisen yhteyteen, kun muissa kirjoissa lause on sijoitettu jatkuvuutta koskevaan osioon.

Viimeisenä aiheena kirjoissa ovat geometriset sovellukset funktion kulkuun liittyen. Esimerkiksi tehtävätyyppi, jossa optimoidaan pinta-alaa, on hyvin yleinen. Kirjassa Juuri 6 kyseiset tehtävät on sijoitettu varsinaisen luvun tehtävien ja esimerkkien joukkoon, kun taas muissa kirjoissa sovelluksille on koottu erillinen osio.

4.8 Yhteenvetoa sisällöistä ja rakenteesta

Pyramidi 7 [12], Sigma 7 [1] ja Matematiikan taito 7 [6] on julkaistu aikana, jolloin on ollut voimassa vain vuoden 2003 opetussuunnitelman perusteet. Vain Juuri 6 [10] on kohdistettu toteuttamaan vuoden 2015 opetussuunnitelman perusteita. Tutkielma on toteutettu opetussuunnitelman perusteiden siirtymävaiheen aikana, jolloin uusimman version tueksi ei ole julkaistu muita oppikirjoja.

Sisältöjä analysoidessa voidaan huomata, että lukion opetussuunnitelman perusteiden asettamat standardit lukion derivaatan kurssin tavoitteille ja sisällöille täyttyvät oletusten mukaisesti kaikissa tutkituissa oppikirjoissa. Esitystavat vaihtelevat hiukan toisistaan. Pyramidi ja Juuri alkavat kahdesta muusta kirjasta poiketen kuvailemalla differentiaalilaskennan historiaa sekä derivaatan hyödyntämistä reaalimaailman sovelluksissa. Pyramidi ja Juuri sisältävät myös lyhyet kertaukset aiemmin opituista asioista, joita tarvitaan Derivaatta-kurssin opiskelussa. Rationaalilausekkeiden ja -funktioiden käsittely on lähes identtistä kaikissa tutkituissa kirjoissa.

Raja-arvo käsitellään Pyramidissa, Juuressa sekä Sigmassa yhtälaisesti. Matemaatiikan taito eroaa muista siinä, että siinä käsitellään rajaton läheneminen tarkemmin ympäristön ja poikkeaman avulla. Ajattelu on sen myötä lähempänä täsmällisempää määritelmää. Jatkuvuuden käsittelyssä Pyramidi ja Matematiikan taito poikkeavat siinä, että niissä tuodaan esiin jatkuvuuden säilyminen laskutoimituksissa. Juuri 6 on tutkituista kirjoista ainoa, jossa derivaatan käsittelyyn ei johdatella sekantin ja tangentin kautta. Muutoin funktion keskimääräistä ja hetkellistä muutosnopeutta käsitellään kirjoissa samaan tapaan.

Funktion kulkua tutkittaessa kirjat poikkeavat jonkin verran jälleen toisistaan. Juuri 6 ja Matematiikan taito 7 selkeästi erottelevat polynomi- ja rationaalifunktion kulun tutkimisen käsittelyn toisistaan, kun taas muissa selkeää erottelua ei esiinny. Käsittelyksi on vain huomautukset siitä, että kohdat, joissa rationaalifunktio ei ole määritelty, täytyy huomioida kulkukaaviossa esimerkein. Juuri 6 eroaa muista kirjoista siten, että funktion monotonisuuden määritelmässä aito monotonisuus on sivuutettu. Tämä on matemaattisesti todella epämääräinen ratkaisu, koska kirjan Juuri 6 määritelmän perusteella vakiofunktio ei olisi monotoninen. Määriteltäessä funktion monotonisuus väärin johtanee ongelmiin myös ylioppilaskirjoituksissa. Muista kirjoista poiketen taas Matematiikan taito 7 hyödyntää asymptootteja rationaalifunktion kulun tutkimisessa. Kaikissa tutkituissa oppikirjoissa on selkeästi tavoitteena soveltaa ääriarvotehtäviä ja näin ollen tuoda esiin matematiikan hyödyllisyyttä.

Kirjojen sisältö on siis hyvin konstruktiivinen. Kaikkien kirjojen rakenne pohjautuu lähes alusta loppuun jo opitun asian laajentamiseen. Kirjan alkuosa on vahvasti konseptuaaliseen tietoon rakentuva määritelmineen ja lauseineen. Loppuosa derivointisääntöineen sekä funktion kulun tutkimisen osalta on huomattavasti proseduraalisempaa tietoa ja taitoa vaativaa. Tämän lisäksi voidaan todeta kirjojen tukevan APOS-teorian osuudessa esiin tuotua oppimisen rakennetta. Oppikirjoissa käsitellään funktion kulun tutkiseen tarvittavat tiedot lähtien liikkeelle liikkeelle derivaatasta ja prosessinomaisesta derivoinnista. Derivaattafunktion yhteys funktion kulkuun auttaa luomaan kulkukaavion ja lisäksi perustellaan funktion kulun kannalta merkittävien pisteiden sijaitsevan derivaattafunktion nollakohdissa.

Luku 5

Funktion kulku

Tässä tutkielman luvussa käsitellään edellä esitetyt kirjojen aiheet matemaattisemmin ja osa esitetyistä lauseista todistuksineen.

5.1 Rationaalifunktio

Kahden polynomin $p(x)$ ja $q(x)$ osamäärä $\frac{p(x)}{q(x)}$, missä $q(x) \neq 0$, on rationaalilauseke. Rationaalilausekkeen määräämää funktiota $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ kutsutaan rationaalifunktioksi.

Rationaalifunktion sieventämiseen pätevät samat laskusäännöt kuin murtolukuihin.

5.2 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Määritelmä 5.1 (raja-arvo)
Oletetaan, että $r > 0$. Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä $(x_0 - r, x_0 + r)$. Funktiolla f on pisteessä x_0 raja-arvo $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\epsilon \in \mathbb{R}$ vastaa sellainen luku $\delta \in \mathbb{R}$, että

$$|f(x) - a| < \epsilon, \text{ kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Määritellään vielä toispuoleiset raja-arvot.

Määritelmä 5.2 (toispuoleiset raja-arvot)
Olkoon $\eta > 0$. Olkoon f välillä $(x_0 - \eta, x_0)$ määritelty funktio. Luku a on funktion *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, ja tällöin merkitsemme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon, \text{ kun } x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

Täysin vastaavasti määrittelemme oikeanpuoleisen raja-arvon.

Olkoon $\eta > 0$. Olkoon f välillä $(x_0, x_0 + \eta)$ määritelty funktio. Luku a on funktion *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, ja tällöin merkitsemme

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \epsilon, \text{ kun } x \in (x_0, x_0 + \delta).$$

Lause 5.3
Funktiolle f on voimassa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Oppikirjojen analyysin perusteella edellä esitetty lause toimii lukion opetuksessa raja-arvon määritelmänä.

Määritelmä 5.4 (jatkuvuus)
Oletetaan, että $r > 0$. Olkoon funktio f määritelty avoimella välillä $(x_0 - r, x_0 + r)$, missä $x_0 \in \mathbb{R}$. Nyt funktio f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo pisteessä x_0, eli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

5.3 Derivaatan määritelmä

Määritelmä 5.5
Olkoon funktio f määritelty pisteen x_0 jossain ympäristössä. Jos erotusosamäärällä

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

on olemassa äärellinen raja-arvo, niin funktio f on derivoituva pisteessä x_0. Tätä raja-arvoa sanotaan derivaataksi ja sitä merkitään $f'(x_0)$. Derivaatta voidaan yhtäpitävästi määritellä raja-arvona

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

5.4 Funktion kulku

Geometrisesti derivaatta voidaan tulkita funktion pisteeseen piirretyn tangentin kulmakertoimena, joten on luontevaa tutkia funktion kulkua derivaatan merkin avulla.

5.4.1 Funktion monotonisuus

Määritelmä 5.6 Funktion monotonisuus
Olkoon funktio f määritelty jollakin välillä. Jos välin jokaisessa pisteessä pätee ehto

- $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$, niin funktio f on aidosti kasvava.
- $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$, niin funktio f on kasvava.
- $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$, niin funktio f on aidosti vähenevä.
- $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$, niin funktio f on vähenevä.

Mikäli funktio f on koko välillä joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä, niin se on (aidosti) monotoninen.

Lause 5.7
Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$. Tällöin:

1. Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin funktio f on kasvava välillä $[a, b]$.
2. Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä välin pisteissä, niin funktio f on aidosti kasvava välillä $[a, b]$.

3. Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, niin funktio f on vähenevä välillä $[a, b]$.

4. Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja $f'(x) = 0$ korkeintaan yksittäisissä välin pisteissä, niin funktio f on aidosti vähenevä välillä $[a, b]$.

Todistus. Todistuksessa hyödynnetään differentiaalilaskennan väliarvolausetta.
Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituvia avoimella välillä (a, b). Tällöin on olemassa $\xi \in (a, b)$ siten, että

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

1. Olkoon $x, y \in]a, b[$ ja $x < y$. Väliarvolauseen nojalla on $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$, missä $x < \xi < y$. Nyt koska $f'(\xi) \geq 0$ ja $y - x > 0$, niin $f(x) \geq f(y)$ eli f on kasvava.

2. Kohdan 1. nojalla f on kasvava välillä $[a, b]$. Oletetaan $f(x) = f(y)$ joillekin x ja y, $x < y$. Koska f on kasvava, niin tällöin funktiolla f olisi vakioarvo välillä $[x, y]$. Tämän seurauksena $f'(x) = 0$ välillä $[x, y]$ vastoin oletusta. Ristiriidan seurauksena siis $f(x) < f(y)$, kun $x < y$ eli f on aidosti kasvava.

3. Olkoon $x, y \in]a, b[$ ja $x < y$. Väliarvolauseen nojalla on $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$, missä $x < \xi < y$. Nyt koska $f'(\xi) \leq 0$ ja $y - x < 0$, niin $f(x) \leq f(y)$ eli f on vähenevä.

4. Tämä voidaan perustella samoin kuin kohta 2.

$\square$

5.4.2 Funktion ääriarvot

Funktiolla f on **paikallinen minimiarvo** eli lokaali minimi kohdassa x_0, kun $f(x_0)$ on funktion f pienin arvo jossakin kohdan x_0 ympäristössä. Tällöin kohta x_0 on funktion minimikohta. Funktion f pienin arvo eli globaali minimi on funktion absoluuttinen minimiarvo.

Funktiolla f on **paikallinen maksimiarvo** eli lokaali maksimi kohdassa x_0, kun $f(x_0)$ on funktion f suurin arvo jossakin kohdan x_0 ympäristössä. Tällöin kohta x_0 on funktion maksimikohta. Funktion f suurin arvo eli globaali maksimi on funktion absoluuttinen maksimiarvo.

Funktion minimi- ja maksimiarvoja kutsutaan funktion *ääriarvoiksi* ja kohtaa, jossa funktiolla on ääriarvo, kutsutaan **ääriarvokohdaksi**.

5.4.3 Pienin ja suurin arvo suljetulla välillä

Tutkituissa oppikirjoissa seuraava lause esiintyy Fermat'n lauseena.

Lause 5.8
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

Tällöin funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa joko
• välin päätepisteissä tai
• välillä $]a, b[$ olevassa derivaatan nollakohdassa.

Todistus. Olkoon $x_0 \in [a, b]$ kohta, jossa funktio f saa suurimman arvonsa. Kohta on siis joko välin päätepiste tai sisäpiste.

1. x_0 on välin päätepiste:
väite seuraa suoraan.

2. x_0 on välin sisäpiste:

Kaikilla x, joille $x_0 < x \leq b$ pätee, että $f(x) \leq f(x_0)$. Nyt siis
(1) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$, koska $f(x) - f(x_0) \leq 0$ ja $x - x_0 > 0$.

Kaikilla x, joilla $a \leq x < x_0$ pätee, että $f(x) \leq f(x_0)$. Nyt siis
(2) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, koska $f(x) - f(x_0) \leq 0$ ja $x - x_0 < 0$.

Koska funktio f on derivoituva avoimella välillä $]a, b[$, niin epäyhtälön (1) perusteella

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

ja epäyhtälön (2) perusteella

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

Siis $f'(x) = 0$ eli funktio f saavuttaa suurimman arvonsa derivaatan nollakohdassa. Pienin arvo voidaan osoittaa samoin. □

5.4.4 Funktion nollakohtien lukumäärän tutkiminen

Bolzanon lause 5.9
Jos välillä $[a, b]$ jatkuvalla funktiolla f on välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin on

olemassa ainakin yksi piste $c \in]a, b[$ siten, että $f(c) = 0$.

Todistus. [9]

Seuraus Edellisen lauseen seurauksena voidaan todeta, että jos funktio f on lisäksi aidosti monotoninen, niin nollakohtia on täsmälleen yksi.

Todistus. Bolzanon lauseen mukaan nollakohtia on siis ainakin yksi. Vastaoletuksen avulla voidaan osoittaa, ettei nollakohtia ole enempää kuin yksi.
Vastaoletus: Olkoon funktiolla f nollakohdat x_1 ja x_2. Nyt $f(x_1) = 0$ ja $f(x_2) = 0$, joten $f(x_1) = f(x_2)$. Tämä aiheuttaa kuitenkin ristiriidan, sillä aidosti monotoninen funktio ei saa samaa arvoa kahdessa eri kohdassa. Siispä nollakohtia on täsmälleen yksi. $\square$

Luku 6

Funktion kulun tutkiminen pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa

6.1 Tehtävien luokittelua

Tutkielmaa varten on käyty läpi pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden tehtäviä vuodesta 2009 lähtien vuoteen 2016 asti [14]. Kokeiden tehtäviä on analysoitu keskittyen funktion kulkuun liittyviin tehtäviin. Analysoinnissa on käytetty seuraavaa luokittelua:

1. Funktion ääriarvojen määrittäminen suljetulla välillä.
2. Funktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen.
3. Funktion saaman arvon vertailu kahdella eri muuttujan arvolla. Siis esimerkiksi vertailu $f(2)$ ja $f(2,000001)$ välillä.
4. Funktion nollakohtien/juurien lukumäärän määrittely.
5. Funktion monotonisuuden tutkiminen.
6. Funktion ääriarvojen hyödyntäminen geometrisen sovelluksen hyödyntämisessä.

Huom. Osa tehtävistä voitaisiin luokitella useampaankin ryhmään, jolloin tehtävä on luokiteltu sitä eniten kuvaavaan ryhmään.

Taulukossa 1 on eriteltynä tehtävät eri ryhmiin vuosittain. Merkinnät k ja s viittaavat ylioppilaskokeen kevään ja syksyn versioon. Merkinnän perässä oleva numero on tehtävänumero.

	suljettu väli	avoin väli	vertailu	nolla-kohtien lkm	monoto-nisuus	sovellus	yht
2009				k15c, k12	k5b	k7, s9	5 kpl
2010		s7		k9		k7, s10	4 kpl
2011	k5, k14c	s10	k14a				4 kpl
2012	s5	k5		s10	k8b		4 kpl
2013	s9	k5				k12c	3 kpl
2014	k11c, s6			k4, s13a	s11a, c		5 kpl
2015				12a		k9, s7	3 kpl
2016						k11, s4	2 kpl
yht	6 kpl	4 kpl	1 kpl	7 kpl	3 kpl	9 kpl	

Taulukko 1

Ylläolevan taulukon perusteella pitkän matematiikan ylioppilaskoe on sisältänyt vuosina 2009-2016 vähintään kaksi tehtävää funktion kulkuun liittyen. Vuonna 2014 tehtäviä on ollut jopa kuusi kappaletta, tosin osassa kyseisen vuoden tehtäviä funktion kulun tutkiminen on ollut vain osa tehtävää.

6.2 Esimerkkejä ylioppilastehtävistä

Esimerkki 1 Tehtävä on vuoden 2011 kevään pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä numero 5 [14]. Tehtävä on luokiteltu aiemmin ensimmäiseen ryhmään.

Määritä polynomin $x(x+3)(5-x)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 5]$.

Merkitään tehtävän polynomi funktiona $f(x) = x(x+3)(5-x) = -x^3 + 2x^2 + 15x$. Derivoituvana ja jatkuvana funktiona $f(x)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa tutkitun välin päätepisteissä tai välillä olevassa derivaatan nollakohdassa. Määritetään ensin derivaatan nollakohdat.

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 15 = 0$, kun
$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+12\cdot 15}}{-6} = \frac{-4\pm 14}{-6}$ eli
$x = -\frac{5}{3}$ tai $x = 3$.

Nollakohdista vain $x = 3$ sisältyy kysytylle välille, joten suurin ja pienin arvo selviää vertailemalla funktion arvoja välin päätepisteissä sekä kohdassa $x = 3$.

Nyt siis $f(-1) = -12$, $f(3) = 36$ ja $f(5) = 0$, joten funktion f ja kysytyn polynomin suurin arvo on 36 ja pienin arvo on -12.

Esimerkki 2 Tehtävä on vuoden 2013 kevään pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 5 [14]. Tehtävä käsittelee ääriarvojen määrittämistä puoliavoimella välillä, joten se on sijoitettu luokittelussa toiseen ryhmään.

Määritä funktion $(x^2 - x - 5)e^{-x}$ suurin ja pienin arvo, kun $x \geq 0$.

Merkitään $(x^2 - x - 5)e^{-x} = f(x)$.
Nyt

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)e^{-x} + (x^2 - x - 5)e^{-x}(-1) \\ &= e^{-x}(2x - 1 - x^2 + x + 5) \\ &= e^{-x}(-x^2 + 3x + 4). \end{aligned}$$

Nyt koska $e^{-x} > 0$, niin $f'(x) = 0$, kun

$$\begin{aligned} & -x^2 + 3x + 4 = 0 \\ \iff & \; x = 4 \text{ tai } x = -1. \end{aligned}$$

Juuri $x = -1$ ei käy, koska ehtona on $x \geq 0$. Tutkitaan kulkukaavion avulla ääriarvokohdan $x = 4$ laatu.

	0	4
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

Kulkukaavion perusteella funktio saa suurimman arvonsa kohdassa $x = 4$ eli suurin arvo on
$f(4) = (4^2 - 4 - 5)e^{-4} = \frac{7}{e^x}$.

Selvitettävänä on vielä mahdollinen pienin arvo.
$f(0) = -5 \cdot e^0 = -5$ ja
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{5}{e^x}) = 0$.

Siispä funktion f pienin arvo on -5.

Esimerkki 3 Tehtävä on vuoden 2010 kevään pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 9 [14]. Ylläolevaan luokitteluun se on sijoitettu nollakohtien lukumäärän määrittelyä vaativaan luokkaan.

Tutki, kuinka monta juurta yhtälöllä

$$3\tan x - 1 = 4x$$

on välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Merkitään $f(x) = 3\tan x - 4x - 1$. Funktio f on jatkuva ja derivoituva.
$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 4 = 0$, kun $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{4}{3}$, $(\cos^2 x \neq 0)$
$\cos^2 x = \frac{3}{4}$
$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, (välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\cos x$ on positiivinen),
siis $x = \pm\frac{\pi}{6} + n2\pi$
Nollakohdista vain $-\frac{\pi}{6}$ ja $\frac{\pi}{6}$ kuuluvat välille $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

	$-\frac{\pi}{2}$ … $-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ … $\frac{\pi}{2}$
f'(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

Nyt koska f on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ ja $f(-\frac{\pi}{6}) \approx -0,64$, niin funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa välillä $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$.

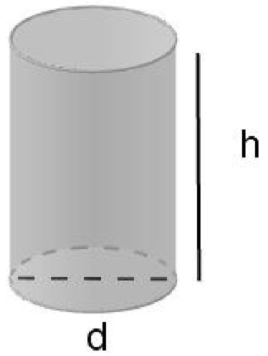
Yhtäältä funktio f on aidosti vähenevä välillä $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ ja $f(\frac{\pi}{6}) \approx -1.36$, joten funktiolla f ei ole yhtään nollakohtaa myöskään välillä $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$.

Tutkittavana on vielä väli $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$. Funktio f on aidosti kasvava välillä $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$ ja $f(\frac{\pi}{3}) \approx 0,007$ ja näin ollen funktiolla f on yksi nollakohta kyseisellä välillä. Edellä olevien tulosten nojalla funktiolla f on siis tasan 1 nollakohta välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Esimerkki 4 Seuraava esimerkki on kevään 2016 pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä 11 [14]. Tehtävä on kokeen B-osiosta, jolloin laskimen käyttö on sallittua ja tehtävä on yllä lajiteltu osioon soveltavat tehtävät.

Tehtaassa valmistetaan tölkitettyjä säilykehedelmiä. Päärynänpuolikkaita pakataan suoran ympyrälieriön muotoiseen peltitölkkiin. Tölkin pohja- ja kansilevyjen materiaalin hinta on 2,00 €$/m^2$ ja vaipan materiaanlin hinta 1,00 €$/m^2$. Suunnittele materiaalikustannuksiltaan mahdollisimman halpa peltitölkki, jonka tilavuus on 1000 cm^3. Anna vastauksena tölkin korkeuden ja pohjan halkaisijan suhteen tarkka arvo.

Olkoon halutun tölkin halkaisija $d = 2r$ ja korkeus h.



Tällöin tölkin tilavuudelle asetettu vaatimus antaa ehdon

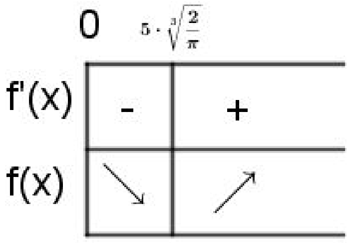
$$\pi r^2 h = 1000$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Lisäksi tiedetään, että lieriön vaipan pinta-ala on $2\pi rh$ ja hinta 1€$/m^2$ ja kansi- ja pohjalevyjen pinta-ala yhteensä $2\pi r^2$ ja hinta 2€$/m^2$.
Muodostetaan nyt pellin kokonaishinnasta funktio $f(r)$

$$f(r) = 2\pi r^2 \cdot 2 + 2\pi rh \cdot 1 = 4\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} = 4\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0.$$

Määritetään derivaattafunktio f' ja tutkitaan sen merkin avulla alkuperäisen funktion kulkua

$$f'(r) = 8\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$
$$f'(r) = 8\pi r^3 - 2000 = 0, \text{ kun}$$
$$8\pi r^3 = 2000 \iff r^3 = \frac{250}{\pi} \iff r = 5 \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}.$$

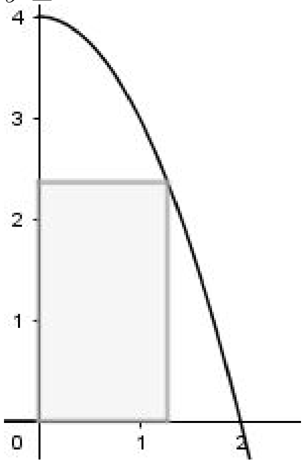


Kulkukaavion perusteella saatu r on minimikohta ja täten myös halvimman tölkin kannen säde. Kysytty korkeuden ja pohjan halkaisijan suhde on siis

$$\frac{h}{2r} = \frac{1000}{\pi r^2 \cdot 2r} = \frac{500}{\pi r^3} = \frac{500}{\pi \frac{250}{\pi}} = 2.$$

Esimerkki 5 Seuraava tehtävä on vuoden 2016 syksyn pitkän matematiikan ylioppilaskokeen tehtävä numero 4. Tehtävä on osiosta A eli sen ratkaisu tulee suorittaa ilman laskinta.

Suorakulmion yksi kärki on origossa, ja siitä lähtevät kaksi sivua sijaitsevat positiivisilla koordinaattiakseleilla. Neljäs kärki sijaitsee paraabelilla $y = 4 - x^2$ alueessa $x \geq 0$, $y \geq 0$. Määritä suorakulmion suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka arvo.



Funktio $f(x) = 4 - x^2$ rajoittaa suorakulmion kantaa ja korkeutta x- ja y -akselien sekä funktion leikkauspisteissä.

Kun $y = 0$, niin $x = \pm 2$ (negatiivinen ratkaisu ei käy) eli $0 \leq x < 2$.
Kun $x = 0$, niin $y = 4$ eli $0 \leq y < 4$.

Suorakulmion pinta-alan muodostaa funktio $A(x) = x \cdot (4 - x^2) = 4x - x^3$. Nyt voidaan tutkia funktion suurinta arvoa derivaattafunktion nollakohdista tai välin $[0, 2]$ päätepisteistä aiemmin todistetun lauseen 5.8 perusteella.

$$\begin{aligned} A'(x) = 4 - 3x^2 = 0,\ \text{kun} \\ x^2 = \frac{4}{3} \\ x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

Siis
$A(0) = 0$, $A(2) = 0$ ja

$$\begin{aligned} A(\frac{4}{3}) &= 4 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^3 \\ &= 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2^3}{\sqrt{3}^3} \\ &= \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{24}{3\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{16}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tämä on siis suorakulmion suurimman mahdollisen pinta-alan tarkka arvo.

6.3 Koontia

Funktion kulun tutkimiseen keskittyviä tehtäviä esiintyy pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa vuosittain. Vuodesta 2009 lähtien jokaisessa ylioppilaskokeessa on ollut vähintään yksi ääriarvotehtävä tai jokin muu funktion kulun tutkimiseen liittyvä tehtävä. Määrä on hieman vaihdellut vuosien saatossa, mutta funktion kulku on selkeästi pysynyt osana pitkän matematiikan ylioppilaskoetta. Kuten luokittelusta huomataan, niin funktion kulkua tutkitaan hyvin erilaisissa tehtävissä. Huomionarvoista on myös se, että ääriarvojen määrittämiseen liittyvät tehtävät ovat siirtyneet enemmän soveltavaan suuntaan.

Vuoden 2016 syksyn pitkän matematiikan ylioppilaskoe oli ensimmäinen, joka oli jaettu kahteen osaan A ja B. Osio A täytyi suorittaa ilman laskinta, mutta taulukkokirjaa sai käyttää. Syksyn 2016 koe oli samalla ensimmäinen koe, jossa kokelaat joutuivat määrittämään funktion suurimman arvon ilman laskinta. Tehtävä on ratkaistu yllä esimerkissä 5. Ylioppilaskokeiden tehtävät ovat monipuolista osaamista vaativia ja samalla sisältävät lukion opetussuunnitelman perusteiden osoittamia tavoitteita ja sisältöjä kuten kuuluukin.

Luku 7

Yhteenvetoa ja pohdintaa

Oppijan pyrkimys luoda yhteyksiä matematiikan ja reaalimaailman välillä on hyvin vahvasti läsnä. Yhteyden luominen helpottaa oppimista, joten on hyödyllistä pyrkiä tuomaan yhteyksiä esiin opetuksessa. Erilaiset representaatiot ovat hyvä keino tuoda esiin reaalimaailman esimerkkejä funktion kulun tutkimiseen. Laskettelurinteen tai vuoristoradan muotoa ja jyrkkyyttä voidaan tutkia visuaalisesti kuvasta pohtimalla tangentin arvoa ja luomalla yhteys rinteen jyrkkyyteen, toki käänteisenä ilmiönä. Samalla luontevasti voidaan miettiä esimerkiksi laskettelijan nopeutta ja etenkin nopeudenmuutosta rinteen eri vaiheilla. Parhaassa tapauksessa rinteen muoto muuttaa muotoaan funktion muotoon ja tulkinta nopeudesta ja kiihtyvyydestä saadaan kytkettyä yhteen. Funktion kulku on vähemmän tutkittu matematiikan osa-alue kuin derivaatta, mutta derivaatta koetaan usein vaikeaksi käsitteeksi, joten se aiheuttanee vaikeuksia jossain määrin myös funktion kulun tutkimiseen. Kuitenkin Sirviön (2012) pro gradu -tutkielman perusteella funktion kulun tutkiminen todettiin myös yhdeksi helpoimmista osa-alueista lukion Derivaatta-kurssilla pienellä otannalla. Tosin Sirviökin epäili haastattelutuloksien johtuvan osittain siitä, että funktion kulun tutkiminen sijoittuu kurssin loppupäähän ja on paremmin oppilaiden muistissa, sekä siksi, että osalla saattaa olla muodostunut ratkaisukeino kyseisen tehtävän ratkaisemiseksi. Hyvin todennäköisesti ratkaisukeinon vaiheita eivät kuitenkaan kaikki pystyisi perustelemaan eli eri representaatioiden välillä liikkuminen ei onnistu täydellisesti. Lisäksi monipuolisempi representaatioiden omaksuminen ohjaa prosessiorientoituneen ymmärryksen konseptiorientoituneempaan suuntaan [3]. On myös havaittu, että opettajilla on paljon laajempi osaaminen derivaatan käsitteestä verrattuna siihen, miten se näkyy heidän tehtävänannoissaan [15]. Opettajan on siis hyvä huomioida ja käyttää useampia representaatioita opetuksessaan ja linkittää ne huolella toisiinsa.

Käsitellyt matematiikan oppikirjat ovat pääpiirteittäin hyvin samankaltaisia. Lukion opetussuunnitelman perusteiden asettamat tavoitteet ja sisällöt on kaikissa tutkituissa kirjoissa esitetty. Lisäksi oppikirjan rooli suomalaisessa opetuksessa on lähinnä toimia opetuksen tukena ja näin ollen opettaja pystynee poimimaan kurssin tueksi oppikirjan huoletta. Suurimpana huomiona voidaan nostaa esiin kirjan Juuri 6 vajavainen määritelmä funktion monotonisuudelle. Funktion monotonisuuden tutkiminen ei ollut luvun 5 luokittelun perusteella yleisimpiä funktion kulun tutkimiseen liittyviä tehtäviä, mutta niiden ratkaisemiseksi määritelmää tulisi käyttää kuitenkin oikein. Sähköisen lisämateriaalin määrä on kuitenkin kasvanut uudempien painoksien tueksi. Tämän tutkielman puitteissa ei voida kuitenkaan ottaa kantaa siihen, kuinka paljon lisämateriaalia käytetään opetuksessa tai kuinka paljon oppilas hyödyntää lisämateriaalia itsenäisessä opiskelussa ja kuinka se vaikuttaa. Oppikirjoissa on käytössä paljon erilaisia esitysmuotoja funktion kulun tutkimiseen. Kulkua voidaan kuvata esimerkiksi numeerisesti taulukoina, havainnollisesti tangentin avulla tai symbolisesti. Näiden reprentaatioiden yhdistämisessä opettajan rooli korostuu, jotta esitystavat eivät jäisi irrallisiksi. Oppikirjojen rakenne sopii myös hyvin APOS-teorian viitekehykseen. Funktion kulun tutkiminen on ajateltavissa schema-tasolle aiemmin luvussa 3 esitettyyn tapaan.

Tulevaisuudessa matematiikan opetuksen sähköistäminen tuo uusia tutkimuksen aiheita. Esimerkiksi onko sähköisen kokeen tuloksilla eroa aiempaan soveltavien funktion kulkua tutkivien tehtävien kohdalla? Pitkän matematiikan ylioppilaskokeissa olevien funktion kulkua tarkastelevien tehtävien määrä on hiukan laskenut viimeisinä vuosina. Etenkin pääpaino näyttää siirtyneen soveltavampiin tehtäviin, joissa oppilaan on itse muodostettava funktio, jonka ääriarvoja on tarkoitus tutkia sekä usein tutkittu väli tulee päätellä tehtävän tietojen perusteella. Tämä lienee seurausta laskinten ynnä muiden sähköisten apuvälineiden ominaisuuksien parantumisesta. Esimerkiksi ääriarvot moni uudempi laskin kykenee ilmoittamaan, jolloin oppilaan tehtäväksi jää vain laskimen tuloksen kopioiminen. Laskimeton osuus ja tuleva sähköinen ylioppilaskoe ovat vielä murrosvaiheessa, joten on vaikeata arvioida, miten ne tulevat kehittymään ja näyttämään tutkielman aiheen osalta tulevaisuudessa. Ainakaan aiheesta ei ole luovuttu heti, sillä ensimmäinen laskimeton osuus sisälsi ääriarvotehtävän.

Kirjallisuutta

[1] Alatupa, S., Hassinen, S., Hemmo, K., Leikas, M., Pitkä Sigma 7, Derivaatta. Tammi, Helsinki, 2011.

[2] Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K., A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. 1997.

[3] Delos Santos, A., G., Thomas, M., O., J., Representational ability and understanding of derivative. Teoksessa Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. University of Hawaii. 2003 Vol 2 325-340.

[4] Goldin, G., Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17(2), 137-165. 1998.

[5] Haapasalo, L., Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää. Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P. (toim.), Matematiikka - näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä, 2004 50-83.

[6] Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinolli, T., Sankilampi, T., Matematiikan taito 7, Derivaatta. WSOY, Helsinki, 2007.

[7] Herbert, S., What is rate? Does context or representation matter?. Mathematics education research journal, vol. 23, no. 4, 455-477. 2011.

[8] Herbert, S., Where is the rate in the rule?. Australian Senior Mathematics Journal, vol. 22, no. 2, 28-36. 2008.

[9] Hurri-Syrjänen, R., Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1 syksy 1999 luennot.

[10] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luoma-aho, E., Raittila, T., Tikka, T., Juuri 6, Derivaatta. Otava, Keuruu, 2016.

[11] Hähkiöniemi, M., The role of representations in learning the derivative. Jyväskylä. 2006.

[12] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Liira, R., Luosto, K., Ronkainen, A., Pyramidi 7 Lukion pitkä matematiikka, Derivaatta. Tammi, Helsinki, 2009.

[13] Maharaj, A., An APOS analysis of natural science students' understanding of derivatives. South African Journal of Education, 2013, 33(1).

[14] Matikkamatskut(verkkosivu), www.matikkamatskut.com/yo-kokeita-ratkaisuineen.html. Luettu 29.9.2017.

[15] Nagle, C., Moore-Russo, D., The concept of slope: Comparing teachers' concept images and instructional content. Investigations in Mathematics Learning, 6(2), 1-18. 2013.

[16] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.

[17] Opetushallitus, Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.

[18] Piaget, J., Development and learning. Reprinted in Readings on the development in children. W.H. Freeman and company. 1997.

[19] Pohjola, L., Lukion pitkän matematiikan Derivaatta-kurssin tehtävien ja matemaattisten esitysten tarkastelua. Pro Gradu, Tampere, 2011.

[20] Sirviö, M., Lukiolaisten kokemuksia Derivaatta-kurssin vaikeudesta : opetuksen kehittäminen lukion pitkän matematiikan Derivaatta-kurssille. Helsinki. 2012.