HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatan ymmärrys ja virhekäsitykset

Maija Torttila

Pro gradu -tutkielma

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikan aineenopettajan opinnot
Joulukuu 2017
Ohjaaja: Mika Koskenoja

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Maija Torttila

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatan ymmärrys ja virhekäsitykset

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka, aineenopettaja

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Joulukuu 2017	53 + 3s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä tutkitaan aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatan ymmärrystä ja virhekäsityksiä. Aloittavilla matematiikan yliopisto-opiskelijoilla tarkoitetaan opiskelijoita, jotka ovat syksyllä 2017 aloittaneet opiskelun Helsingin yliopistossa matemaattisten tieteiden kandiohjelman opiskelijoina tai matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelman opiskelijoina.

Työssä esitetään derivaatan määritelmä ja siihen liittyviä muita määritelmiä ja lauseita. Työssä esitellään myös matemaattiseen tietoon ja ymmärrykseen liittyviä didaktisia käsitteitä kuten konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto, proseduuri, prosessi ja prosepti sekä representaatio. Lisäksi työssä perehdytään David Tallin (2004) matematiikan kolmeen maailmaan ja pohditaan sitä derivaatan näkökulmasta.

Derivaatan ymmärryksestä ja virhekäsityksistä aikaisemmin tehdyt tutkimukset ovat työn teoriapohja. Aikaisemmissa tutkimuksissa on havaittu, että derivaatta on opiskelijoille vaikea käsite, eikä sitä ymmärretä syvällisesti (Bezuidenhout, 1998). Opiskelijoilla on haasteita derivaatan graafisen representaation tulkinnassa ja sen ymmärtämisessä (Maharaj, 2013). Lisäksi lukiossa jäädään derivaatan ymmärryksessä proseptuaalis-symboliseen maailmaan, kun taas yliopistossa tavoitteena on päästä aksioomaattis-formaaliin maailmaan (Hähkiöniemi, 2006). Taustateoriana esitellään myös lukion ja yliopiston oppimistavoitteita derivaattaan liittyen sekä perehdytään kahteen lukion Derivaatta-kurssin oppikirjaan.

Tutkimuksen aineisto kerättiin kyselylomakkeen avulla syyskuussa 2017. Kyselylomakkeessa oli derivaattaan liittyviä tehtäviä, joissa testattiin opiskelijoiden derivaatan konseptuaalista ja proseduraalista tietoa sekä graafisen ja sanallisen representaation ymmärrystä. Kyselyyn vastasi 41 aloittavaa matematiikan yliopisto-opiskelijaa, joista suurin osa oli kirjoittanut ylioppilaaksi vuoden 2017 keväällä. Vastanneet opiskelijat eivät olleet suorittaneet yliopiston analyysin kursseja ennen kyselyyn vastaamista.

Tutkimuksessa päädytään seuraaviin tuloksiin. Derivaatta on vaikea käsite aloittaville matematiikan yliopisto-opiskelijoille. Konseptuaalisessa tiedossa on puutteita ja proseduraalista tietoa käytetään sitä enemmän. Derivaatan sanallinen ymmärrys on hyvää ja derivaatta hahmotetaan yleisimmin tangentin kulmakertoimena. Sen sijaan derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisen suhteen ymmärtäminen yksittäisillä opiskelijoilla on melko heikkoa. Opiskelijoiden yleisin virhekäsitys jatkuvuuteen liittyen on, että funktion jatkuvuus ei vaikuta funktion derivoituvuuteen. Myös derivaatan määritelmän ymmärtäminen on erittäin haastavaa opiskelijoille, eli heidän konseptuaalinen tietonsa derivaatasta on heikkoa. Lisäksi derivaatan graafisen representaation ymmärrys on melko heikkoa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Matematiikka, derivaatta, ymmärrys, virhekäsitys, aloittavat matematiikan yliopisto-opiskelijat

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Kiitokset

Erityiskiitos kuuluu ohjaajalleni Mika Koskenojalle, joka aina aiheen valinnasta viimeisiin korjauksiin asti ohjasi ja auttoi minua eteenpäin työssäni. Haluan myös kiittää professori Juha Oikkosta, joka vinkkasi minulle hyviä materiaaleja, joita voisin käyttää työssäni. Kiitos syksyllä 2017 aloittaneille matematiikan yliopisto-opiskelijoille, jotka vastasitte huolellisesti kyselylomakkeeseeni; olitte työni onnistumisen kannalta tärkeimmät henkilöt. Haluan kiittää Jania, äitiä ja isää, jotka tuitte ja kannustitte minua koko prosessin ajan. Kiitos myös Jennalle, joka antoi arvokkaita neuvoja työn rakenteeseen liittyen ja jaksoi aamuisin herätä yhteisiin gradupiireihin.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Derivaatta on yksi olennaisimmista lukio- ja yliopistomatematiikan analyysin käsitteistä. Se on matemaattinen apuväline, jonka avulla voidaan tutkia funktioiden kasvavuutta ja vähenevyyttä sekä määrittää funktion ääriarvoja tai ääriarvokohtia. Lisäksi itse funktiosta saa paljon selville pelkästään sen derivaattafunktion avulla. Derivaattaan liittyvät myös erittäin läheisesti analyysin tärkeät käsitteet raja-arvo ja jatkuvuus. Sillä on myös huomattava rooli erilaisissa sovelluksissa esimerkiksi fysiikassa. Koska derivaatta on niin tärkeä käsite, halusin tutkia, miten se on aloittavilla matematiikan yliopisto-opiskelijoilla hallussa.

Tässä tutkielmassa paneudutaan täten aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatan ymmärrykseen ja virhekäsityksiin. Tutkielmassa aloittavilla matematiikan yliopisto-opiskelijoilla tarkoitetaan opiskelijoita, jotka ovat syksyllä 2017 aloittaneet opiskelun Helsingin yliopistossa matemaattisten tieteiden kandiohjelman opiskelijoina tai matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelman opiskelijoina.

Tutkielman alussa esitellään aiheeseen liittyviä matemaattisia ja didaktisia käsitteitä, joihin kyselylomakkeen kysymykset perustuvat ja opiskelijoiden vastaukset liittyvät. Tarkastelussa ovat erityisesti konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto, representaatiot ja Tallin (2004) matematiikan kolme maailmaa. Työssä esitellään derivaatan oppimisesta ja ymmärryksestä aiemmin tehtyjä kansallisia ja kansainvälisiä tutkimuksia. Aiemmissa tutkimuksissa on havaittu, että derivaatta on opiskelijoille vaikea käsite, eikä sitä ymmärretä syvällisesti (Bezuidenhout, 1998).

Lisäksi opiskelijoilla on haasteita derivaatan graafisen representaation ymmärtämisessä (Maharaj, 2013). Hähkiöniemen (2006) mukaan lukiossa ei ymmärretä derivaattaa vielä määritelmän avulla, toisin kuin yliopistossa.

Tutkielmassa tehdään katsaus lukion opetussuunnitelmaan ja Helsingin yliopiston kurssin ”Differentiaalilaskenta” oppimistavoitteisiin. Näin pyritään selvittämään, mitä derivaatasta tulee osata eri koulutusasteilla. Yliopiston kurssilla laajennetaan derivaattaan liittyviä tietoja ja esitetään asioita formaalimmin ja eksaktimmin kuin lukiossa. Työssä tutustutaan myös kahteen lukion oppikirjaan ja esitellään, miten ja missä järjestyksessä derivaattaan liittyvät asiat on niissä käsitelty. Tutustumalla näihin materiaaleihin saadaan ennakkotietoa, mitä aloittavien matematiikan opiskelijoiden tulisi tietää derivaatasta. Näiden ennakkotietojen pohjalta laadittiin kyselylomake.

Tutkimus tehtiin siten, että tutkimukseen osallistuneet opiskelijat täyttivät kyselylomakkeen, jossa testattiin erilaisten tehtävien avulla heidän derivaatan ymmärrystä. Tarkastelussa olivat erityisesti opiskelijoiden konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto derivaatasta sekä eri representaatioiden käytön merkitys. Opiskelijoiden vastauksista muodostettiin johtopäätöksiä, joita verrataan aiemmin tehtyihin tutkimuksiin. Lisäksi pohditaan seikkoja, jotka saattavat selittää saadut tulokset. Työn lopussa pohditaan myös tämän tutkimuksen luotettavuutta ja mahdollisia jatkotutkimusaiheita.

Luku 2

Teoriaa ja käsitteitä

Tässä luvussa esitellään tutkimukseen oleellisesti liittyviä sekä matemaattisia että didaktisia käsitteitä. Käsitteiden määrittelyn tarkoituksena on parantaa tutkimuksen selvyyttä ja ymmärrettävyyttä.

2.1 Derivaatan määritelmä

Derivaatta on matemaattinen käsite, jonka rakennetta ja kontsruktioita aletaan muodostaa jo peruskoulun yläluokilla, mutta käsitteenä derivaatta opitaan vasta lukiossa. Ennen derivaatan käsitteen esille ottamista voidaan käsitellä esimerkiksi nopeutta, joka on derivaatan erikoistapaus. Objektin nopeus voidaan määrittää siten, kuinka suuri objektin siirtymän muutos on suhteessa aikaan. (Hähkiöniemi, 2006)

Harjulehto, Klén ja Koskenoja (2014) määrittelevät derivaatan seuraavasti.

Määritelmä 1. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $(x_0 - r, x_0 + r) \subset A$. Funktio f on derivoituva pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä x_0 ja merkitään $D_x f(x)$. Lauseketta, josta raja-arvo lasketaan, sanotaan erotusosamääräksi.

Tämän lisäksi derivoituvuusehto voidaan kirjoittaa yhden muuttujan funktion raja-arvona

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

(Harjulehto et al., 2014).

Funktion derivaatta tietyssä pisteessä tarkoittaa siis funktion nopeuden muutosta tässä pisteessä ja funktion kuvaajan jyrkkyyttä tässä pisteessä. Derivaatta voidaan tulkita myös geometrisesti funktion kuvaajalle tiettyyn pisteeseen $(x, f(x))$ piirrettynä tangentin kulmakertoimena. Jos derivaatta on positiivinen tietyssä pisteessä, niin funktio on tässä pisteessä kasvava. Vastaavasti derivaatan ollessa negatiivinen tietyssä pisteessä, on funktio tässä pisteessä vähenevä. Osamäärälauseketta $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kutsutaan erotusosamääräksi ja $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kutsutaan erotusosamäärän raja-arvoksi. (Hähkiöniemi, 2006)

Seuraavaksi esitellään Harjulehton et al. (2014) määritelmät sekä derivoituvasta funktiosta että toispuoleisen derivoituvuuden määrittämisestä toispuoleisten raja-arvojen avulla.

Määritelmä 2. Funktio $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ on derivoituva, jos funktio f on derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in (a, b)$.

Määritelmä 3. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $(x_0 - r, x_0] \subset A$. Funktio f on vasemmalta derivoituva pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f vasemmanpuoleiseksi derivaataksi pisteessä x_0 ja merkitään $D_x^- f(x_0)$.

Oletetaan, että on olemassa $r > 0$, jolle $[x_0, x_0 + r) \subset A$. Funktio f on oikealta derivoituva pisteessä x_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Raja-arvoa sanotaan funktion f oikeanpuoleiseksi derivaataksi pisteessä x_0 ja merkitään $D_x^+ f(x_0)$.

Raja-arvon lisäksi derivaattaan liittyy läheisesti myös jatkuvuuden käsite. Jos funktio on derivoituva pisteessä x_0, niin on se myös jatkuva kyseisessä pisteessä. Kuitenkaan funktion jatkuvuus ei ole riittävä ehto derivoituvuudelle. (Harjulehto et al., 2014)

Funktioiden lausekkeita voidaan derivoida erilaisilla kaavoilla. Käytettävä kaava riippuu siitä, millainen funktio on. Esimerkiksi yhdistetyn funktion derivoimiselle pätee seuraava lause, jota kutsutaan ketjusäännöksi. (Harjulehto et al., 2014)

Lause 1. (Ketjusääntö). *Olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to \mathbb{R}$. Jos funktio f on derivoituva pisteessä $x_0 \in A$ ja funktio g on derivoituva pisteessä $f(x_0) \in B$, niin funktio $f \circ g : A \to \mathbb{R}$ on derivoituva pisteessä x_0 ja*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Derivaatan avulla pystytään tutkimaan funktion kulkua ja määrittämään tämän mahdolliset ääriarvot ja ääriarvokohdat sekä suurimmat ja pienimmät arvot. Harjulehto et al. (2014) määrittelevät lokaalit ääriarvokohdat seuraavasti.

Määritelmä 4. Olkoon $f : A \to \mathbb{R}$. Funktiolla f on pisteessä $x_0 \in A$ lokaali maksimikohta (lokaali minimikohta), jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $f(x_0) \geqslant f(x)\,(f(x_0) \leqslant f(x))$ kaikilla $x \in A \cap (x_0 - r, x_0 + r)$. Lokaali maksimikohta (minimikohta) on oleellinen, jos yhtälö $f(x_0) = f(x)$ pätee joukossa $A \cap (x_0 - r, x_0 + r)$ vain pisteessä $x = x_0$. Funktiolla f on pisteessä x_0 (oleellinen) lokaali ääriarvokohta, jos sillä on pisteessä x_0 (oleellinen) lokaali maksimikohta tai (oleellinen) lokaali minikohta.

2.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Matemaattinen tieto tai ymmärrys voidaan jakaa tutkijoiden mukaan kahteen luokkaan: konseptuaaliseen ja proseduraaliseen (Sfard, 1991). Eri tutkijoiden määritelmät näistä kahdesta tiedosta eroavat jonkin verran (Haapasalo & Kadijevich, 2000), ja Haapasalon (2004) mukaan näitä käsitteitä ei ole helppo määritellä yksiselitteisesti ja tarkoituksenmukaisesti. Konseptuaaliseen eli käsitteelliseen tietoon liittyvät staattiset asiatiedot, kun taas proseduraaliseen tietoon yhdistetään dynaamisuus. Käsitteiden eroa voitaisiin selittää opiskelijoiden laskutoimitusten automatisoitumisilla ja käytettävien laskutoimitusten perusteluilla.

Konseptuaalinen tieto

Haapasalo ja Kadijevich (2000) määrittelevät konseptuaalisen tiedon seuraavasti: konseptuaalinen tieto on liikkumista eri käsitteiden, määritelmien, algoritmien, proseduurien ja ongelmien välillä eri representaatioita käyttäen. Haapasalo (2004) täsmentää, että konseptuaalinen tieto on yleisesti määritelty siten, että opiskelija ymmärtää matemaattiset käsitteet ja osaa vastata kysymykseen ”miksi”. Konseptuaalinen tieto on semanttinen tietoverkko, jota opiskelija rakentaa, jossa hän osaa liikkua ja jossa hän ymmärtää oman toimintansa. Sfardin (1991) mukaan konseptilla tarkoitetaan matemaattista tietoa, joka on esitetty formaalina ja eksatina käsitteenä.

Derivaatan käsitteen yhteydessä konseptuaalinen tieto voitaisiin määrittää esimerkiksi erotusosamäärän raja-arvon ymmärtämisenä ja tietämisenä. Opiskelija osaisi myös hahmottaa, miksi tämä termi on tärkeä matematiikassa. Lisäksi opiskelija osaisi yhdistää eri käsitteitä toisiinsa, minkä esimerkkinä voisi olla raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan välinen yhteys.

Rittle-Johnsonin ja Schneiderin (2014) artikkelin mukaan konseptuaalista tietoa voidaan tarkimmin mitata määritelmien osaamisella ja niiden selittämisellä. Tämän lisäksi monivalintatehtävät sopivat hyvin konseptuaalisen tiedon selvittämiseen. Tehtävien on hyvä olla tutkittaville melko tuntemattomia, jolloin heidän tulee johtaa vastaus konseptuaalisesta tiedosta. Näin varmistutaan, että saadaan konseptuaalinen tietämys esille, koska tutkittavat eivät voi käyttää tuntemiaan proseduureja tehtävän ratkaisemiseen.

Proseduraalinen tieto

Proseduraalinen tieto määritellään dynaamisena ja onnistuneena sääntöjen, algoritmien tai proseduurien relevanteilla käytöllä ja esitysmuodoila. Tämä vaatii tietoa, miten sekä objekteja voidaan hyödyntää että mitä representaatioita käytetään. (Haapasalo & Kadijevich, 2000) Haapasalo (2004) lisää, että opiskelija ymmärtää, miten tehtäviä ratkaistaan. Lisäksi proseduraalisessa tiedossa opiskelijan tulee ymmärtää eri representaatioita, mutta jos suoritus on automatisoitunut, niin tämä ei vaadi opiskelijan tietoista ajattelemista.

Derivaatan näkökulmasta proseduraalinen tieto voisi kattaa sen, että opiskelija osaisi ratkaista funktion derivaatan tietyssä pisteessä kaavan avulla tai hän osaisi piirtää käyrän derivaattafunktion. Lisäksi opiskelija osaisi käyttää tehtävissä oikeita merkintätapoja ja esitysmuotoja.

Proseduraalisen tiedon tutkimiseen on Rittle-Johnsonin ja Schneiderin (2014) mukaan käytettävissä vähemmän tehtävätyyppejä kuin konseptuaalisen tiedon tutkimiseen. Lähes aina ratkaistaan jokin matemaattinen tehtävä, jossa arvioidaan vastauksen tai proseduurien täsmällisyyttä.

Kumpi on tärkeämpää?

Haapasalo (2004) pohtii artikkelissaan, pitäisikö matemaattisia aiheita käsitellä konseptuaalinen vai proseduraalinen tieto edellä. Hän toteaa, että mitään varsinaista yleistä järjestystä näiden tietotyyppien opettamisesta tai oppimisesta ei ole, vaan opetuksen suunnitteluun vaikuttavat myös pedagogiset muuttujat ja käsiteltävän asian luonne. Samaa pohtivat Rittle-Johnson ja Schneider (2014) artikkelissaan, jossa todetaan, että matemaattisen ajattelun kehittymisen kannalta on tärkeää kehittää sekä konseptuaalista että proseduraalista tietoa. Tätä voidaan ensinnäkin tukea siten, että esitellään opiskelijoille vaihtoehtoinen tapa, jolla lasku saadaan laskettua. Toiseksi matemaattisen ajattelun molempia tietotyyppejä voidaan kehittää siten, että kannustetaan opiskelijoita selittämään itselleen ratkaisun vaiheita. Kolmas tapa on Schwartzin, Chasen, Chinin ja Oppezzon (2011) tutkimuksen mukaan antaa opiskelijoiden ensin itse tutustua tehtävään ja ratkaista sitä. Vasta tämän jälkeen käydään läpi opettajan ohjeet ja malli tehtävään.

2.3 Proseduuri, prosessi ja prosepti

Proseduuri tarkoittaa vaihe vaiheelta tehtyä matemaattista algoritmia, jossa jokainen välivaihe on tehtävä ennen seuraavaa (Gray & Tall, 2001). Haapasalon (2004) mukaan proseduuriksi voidaan kutsua sitä, että opiskelija osaa ongelmanratkaisutehtävässä hyödyntää rakentamaansa konseptuaalisen tiedon verkkoa. Tällöin hän osaa vaihtaa ratkaisussa esitystavasta toiseen ilman tietoista ajattelua. Prosessissa sen sijaan ratkaisumalli nähdään yhtenä kokonaisuutena, johon sisältyy yksi tai useampi proseduuri (Gray & Tall, 2001; Haapasalo, 2004).

Prosepti on oppimisen näkökulmasta katsottuna matematiikan haastavin ominaisuus (Haapasalo, 2004). Prosepti tarkoittaa mielen matemaattista objektia, joka koostuu prosessista ja sen tuottamasta konseptista. Tämä objekti on muodostunut prosessin seurauksena ja sitä merkitään symbolilla, joka voidaan tulkita joko prosessiksi, konseptiksi tai molemmiksi. (Gray & Tall, 1993; Gray & Tall, 1991) Haapasalon (2004) mukaan prosepti "edustaa korkeimman tason abstraktiota, jossa tämä prosessi on kapseloitunut (encapsulated) symboliseksi esitystavaksi". Esimerkiksi luku on prosepti, jossa luvun arvo esittää prosessina laskua ja konseptina luvun arvo esittää prosessin tulosta. Esitystapojen monitulkinnaisuus on matemaattisen ajattelun perusta, minkä takia proseptin käsite on tärkeä. (Gray & Tall, 1991)

Grayn ja Tallin (1993) mukaan kaikki matemaattiset konseptit eivät ole prosesseja, mutta ne esiintyvät laajasti matematiikan osa-alueissa kuten analyysissä. Analyysin esimerkki abstraktista proseptista voisi olla käden liike, joka havainnollistaa funktioita tai funktion tangentin kulmakerrointa (Haapasalo, 2004). Gray ja Tall (2001) viittaavat artikkeliinsa (1994), jonka mukaan nämä kolme käsitettä, proseduuri-prosessi-prosepti eivät ole keskenään täysin erillisiä, vaan niiden rajat ovat häilyvät. Lisäksi käsitteiden symboliikka on monitulkinnaista.

2.4 Representaatio

Representaatio on monissa tutkimuksissa määritelty ajattelun apuvälineenä (Hähkiöniemi, 2006; McKendree, Small, Stenning & Conlon, 2002; Davis & Maher, 1997). Hähkiöniemi (2006) täsmentää väitöskirjassaan, että representaatio rakentuu sen käytön myötä. Lisäksi representaatio voidaan jakaa ulkoiseen ja sisäiseen representaatioon, joista ulkoinen on muiden ihmisten havaittavissa toisin kuin sisäinen. McKendree et al. (2002) mukaan representaatio tarkoittaa, että jokin matemaattinen rakenne esitellään eri esitysmuodossa kuin tavallisesti.

Konseptuaalisessa tiedossa muodostetaan yhteyksiä eri representaatioiden välille ja proseduraalisessa tiedossa käytetään jotakin yhtä representaatiota (Hähkiöniemi, 2006). Eri operaatioiden avulla saadaan representaatio muutettua toiseksi. Tässä täytyy olla tarkkana, koska hyvä representaatio ilmaisee vain ongelman tärkeät piirteet. Ihmisen tiedon muodostuksen ymmärtämisessä representaatioiden muuttaminen toisiksi ja niiden vaihtelu ovat keskiössä. (McKendree et al, 2002) Tämän lisäksi Goldin artikkelin (1998) mukaan useat eri tutkimukset ovat osoittaneet, että eri representaatiot ovat todella tärkeä osa matemaattisten konseptien ymmärryksen tutkimisessa. Lisäksi useiden representaatoiden käyttö edesauttaa konseptuaalisen tiedon kehittymistä (Panasuk, 2010).

2.5 Matematiikan kolme maailmaa

David Tall (2004) on kehittänyt mallin matematiikan kolmesta maailmasta, jonka avulla pystytään jäsentämään ja tarkastelemaan matemaattista ajattelua sekä sen kehittymistä. Maailmat ovat erillisiä, mutta ne ovat silti yhteydessä toisiinsa. Matematiikan kolmella maailmalla voidaan kuvata joko matemaattisen ymmärryksen kehittymisen koko matkaa aina geometriasta analyysiin tai sitten jonkin tietyn matemaattisen käsitteen rakentumista (Hähkiöniemi, 2006). Hannulan (2014) artikkelissa kolmen maailman nimet on suomennettu seuraavasti:

1. käsitteellis-ruumiillinen/ilmenevä maailma (*conceptual-embodied*),

2. proseptuaalis-symbolinen maailma (*proceptual-symbolic*) ja

3. aksioomaattis-formaali maailma (*axiomatic-formal*).

Ensimmäisessä eli käsitteellis-ruumiillisessa maailmassa matemaattinen tieto perustuu ihmisen omiin havaintoihin ja ajatuksiin. Maailma sisältää sekä mielen havaintoja oikean maailman objekteista että opiskelijan omia sisäisiä konsepteja, joihin kuuluu avaruudellinen hahmottaminen. Opiskelijoiden matemaattinen hahmottaminen kehittyy ensimmäisessä maailmassa reflektion ja sivistyneen kielen avulla. (Tall, 2004) Käsitteellis-ruumiillisessa maailmassa derivaattaa voitaisiin käsitellä graafisesti funktion tangentin kulmakertoimena.

Toinen maailma koostuu symboleista, joita käytetään matemaattisissa laskuissa. Proseptuaalis-symbolisessa maailmassa opiskelijat kykenevät yhdistämään proseptuaalista ja konseptuaalista tietoa toisiinsa sekä vaihtamaan tietotyypistä toiseen käyttäen tarkoituksenmukaisia symboleja. (Tall, 2004) Tallin toiseen maailmaan voisi kuulua esimerkiksi derivaatan laskukaavat ja niiden käytön osaaminen. Hähkiöniemen (2006) mukaan lukiossa jatkuvuus ja derivaatta määritellään raja-arvon avulla sekä suurin osa tehtävistä on derivaatan sovelluksia, esimerkiksi funktion tutkimista ja ääriarvojen etsimistä. Tällöin lukiossa matemaattisessa tiedossa jäädään yleensä proseptuaalis-symboliseen maailmaan.

Kolmannessa, eli aksioomaattis-formaalissa maailmassa matemaattinen ajattelu on kehittyneintä. Tässä maailmassa totta ovat vain aksioomat ja määritelmät sekä asiat, jotka voidaan formaalisti osoittaa todeksi. (Tall, 2004) Tähän maailmaan kuuluisi derivaatan eksakti määritelmä erotusosamäärän raja-arvona. Hähkiöniemen (2006) mukaan lukioissa ei ole yleensä käytetty raja-arvon virallista $\epsilon - \delta$ -määritelmää, mutta aloittavat matematiikan yliopisto-opiskelijat tutustuvat siihen analyysin kursseilla. Täten yliopistossa pyritään ottamaan myös aksioomaattis-formaali maailma käyttöön.

2.6 Todistaminen

Matemaattisen todistuksen tarkoituksena on vakuuttaa muut siitä, että matemaattinen väite on totta tai se on pätevä. Matemaattinen todistus on täsmällistä, perusteellista ja ajatonta, minkä takia se eroaa muiden tieteenalojen todistuksista. (Krantz, 2007)

Matemaattisissa todistuksissa on aina selkeä rutiini ja kaava, jolla todistukset tehdään; aluksi muodostetaan tutkittavasta asiasta oletuksia, jonka jälkeen käytetään matematiikan loogisia sääntöjä sekä operaatioita oletuksiin ja lopuksi päädytään johtopäätökseen. Todistuksen alkuun tulevat siis määritelmät ja aksioomat, jotka tiedetään etukäteen ja joita tarvitaan todistuksessa. Tämän jälkeen määritellään asiat, jotka pitävät paikkaansa todistettavassa väitteessä ja vasta sitten todistetaan haluttu väite. Jotain uutta saadaan myös todistettua, kun se liitetään jo aiemmin todistettuun väitteeseen. Tällöin saadaan uutta tietoa johdettua vanhan, jo todistetun tiedon ehdoilla. (Krantz, 2007)

Ongelmanratkaisutilanteita ja matemaattisia todistuksia on koulussa vähän, koska edellytykset didaktiseen ohjaukseen ovat heikot. Jos halutaan kehittää opiskelijoiden todistamisajattelua, tapahtuu se parhaiten soveltamalla konstruktivistista pedagogista näkemystä. Opettajan tulee tarjota opiskelijoille heidän mielenkiintoaan herättäviä tehtäviä ja ohjata heitä. (Malinen, 1998)

2.7 Aloittavien yliopisto-opiskelijoiden varmuus matematiikan osaamisesta

Linnanmäki (2004) määrittelee minäkäsityksen yksilön kokonaisvaltaisena käsityksenä itsestään ja siihen kuuluu myös yksilön ja ympäristön välinen vuorovaikutus. Matematiikkaan liittyvästä minäkäsityksestä voidaan puhua myös itseluottamuksena (Reyes, 1984). Matematiikassa menestymisellä ja itseluottamuksella on suuri yhteys. Kun opiskelijat kasvavat ja siirtyvät luokka-asteelta toiselle, heidän matemaattinen minäkuvansa heikkenee tai se tulee vastaamaan paremmin heidän todellista osaamistaan kuin aiemmin, koska kognitiivisen kehityksen myötä vanhemmat opiskelijat käsittävät jonkin kyvyn tai taidon pysyvänä ominaisuutena. (Linnanmäki, 2004)

Mehto (2013) tutki pro gradu-tutkielmassaan aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden varmuutta omasta osaamisestaan. Tehtävässä, jossa testattiin derivoimista, oikean vastauksen testiin osallistuneista sai 92,74 %. Tehtävä oli helppo derivoimistehtävä, jossa pärjäsi rutiininomaisella derivoinnilla ja peruslaskutaidoilla. Vastausvarmuuskin oli tässä melko tehtävässä korkea: miehistä noin 82 % ja naisista noin 76 % oli sitä mieltä, että tehtävä meni varmasti oikein. Toisaalta neljä opiskelijaa olivat mielestään vastanneet tehtävään varmasti oikein, mutta heidän vastauksensa oli väärä. Tutkimus osoittaa, että tehtävätyyppi vaikuttaa naisten ja miesten varmuuteen: miehet ovat varmempia oikeasta vastauksesta matemaattista ymmärrystä vaativissa tehtävissä, kun taas naiset ovat varmempia peruslaskutaitoa mittaavissa tehtävissä. Lisäksi aikaisempi menestyminen matemaattisissa tehtävissä, esimerkiksi ylioppilaskirjoituksen hyvä arvosana tuo itsevarmuutta opiskelijalle.

Luku 3

Aikaisempia tutkimuksia derivaatan ymmärtämisestä

Tässä luvussa esitellään derivaatan ymmärryksestä tehtyjä aiempia tutkimuksia. Tutkimuksia on tehty niin kansallisesti kuin kansainvälisesti ympäri maailmaa ja eri koulutusasteilla. Tässä esitellyissä tutkimuksissa on keskitytty laajasti eri osa-alueisiin, jotka liittyvät derivaatan opetukseen ja oppimiseen sekä eri representaatioiden käytön vaikutukseen.

3.1 Suomessa tehtyjä tutkimuksia

Lukiolaisten representaatiot derivaatasta

Markus Hähkiöniemen Jyväskylän yliopistolle tehdyssä väitöskirjassa (2006) tutkittiin, miten lukiolaiset hyödyntävät ongelmanratkaisussa erilaisia derivaatan representaatioita ja miten representaatiot tukevat heidän ajatteluaan. Tutkimuksessa tehtiin derivaatan käsitteeseen johdatteleva opetusosuus pitkän matematiikan nykyiselle Derivaatta-kurssille (sen aikainen Differentiaalilaskenta I-kurssi). Opiskelijoita johdateltiin derivaatan käsitteeseen erilaisten tehtävien avulla, eikä tuotu derivaattaa määritelmänä heti esille. Tehtävissä piti muun muassa tutkia eri funktioiden kuvaajia ja määrittää niiden suurimpia ja pienimpiä arvoja, nollakohtia, muutosnopeuksia sekä ovatko funktiot kasvavia vai väheneviä. Tämän jälkeen esiteltiin erotusosamäärän raja-arvo. Seuraavaksi opiskelijat hyödynsivät oppimaansa derivaatan määritelmää tehtävissä ja muutamaa opiskelijaa haastateltiin.

Tutkimus osoitti, että opiskelijat hahmottavat derivaatan objektina ja he pystyvät representaatioiden, kuten funktion kasvamisen, jyrkkyyden, vaakasuoruuden ja tangentin avulla käsittelemään derivaattaa kvalitatiivisesti. Derivaatan opetus on siis mahdollista aloittaa havaintomaailmasta, josta edetään symboliseen maailmaan esimerkiksi määrittämällä eri välien kasvunopuksia. Vasta lopuksi esitetään derivaatan määritelmä. (Hähkiöniemi, 2006)

Aineenopettajaopiskelijoiden informaali ja formaali derivaatan ymmärrys

Antti Viholainen tutki Jyväskylän yliopistolle tehdyssä väitöskirjassaan (2008), miten tulevilta matematiikan opettajilta luonnistuu informaali ja formaali päättely derivaatan ja derivoituvuuden yhteydessä. Tutkimus tehtiin matematiikan opiskelijoille, jotka olivat suorittaneet opinnoistaan jo suurimman osan. Tutkimuksessa haluttiin selvittää, kuinka informaalia ja formaalia esitysmuotoa käytetään ongelmanratkaisutilanteissa sekä kuinka representaatioiden välisiä yhteyksiä ymmärretään. Tutkimuksessa keskityttiin reaaliarvoisiin yhden muuttujan funktoihin. Näiden lisäksi käsiteltiin myös jatkuvuuden ja raja-arvon käsitteitä, koska nämä aiheet ovat tärkeitä sekä lukion että yliopiston kursseilla. Tutkimuksen kirjallisessa kokeessa tarvittavat määritelmät, kuten jatkuvuus, derivaatta ja derivoituvuus, olivat annettu, jotta pystyttiin selvittämään, miten opiskelijat osasivat käyttää formaaleja määritelmiä.

Tutkimuksessa havaittiin, että huono formaali ymmärrys ja perusteleminen johtavat myös huonoon informaaliin ymmärrykseen derivaatan ja derivoituvuuden käsitteiden yhteydessä. Toisaalta opiskelijalla voi olla hyvä formaali ymmärrys, vaikka informaaliset tehtävät onnistuivat heikosti. Formaali ja informaali ymmärrys ovat opiskelijoilla sitä paremmat, mitä enemmän he ovat yliopistossa matematiikkaa opiskelleet ja mitä paremmin he ovat kursseilla pärjänneet. Toisaalta tutkimuksessa havaittiin, että opintojen määrä tai niissä menestyminen ei välttämättä vaikuta informaalin ajattelun laatuun, vaan opiskelija voi hyvin pärjätä informaaleissa tehtävissä. Lisäksi formaalin ajattelun ja todistamisen taitojen oletetaan olevan riippuvaisia käytyjen opintojen määrästä, vaikka opintomenestys ei olisikaan ollut merkittävä. (Viholainen, 2008)

Ongelmanratkaisutilanteissa opiskelijoilla oli hankaluuksia yhdistää informaalia ja formaalia päättelyä ja he välttelivät derivaatan kohdalla määritelmän käyttöä. Määritelmien käyttämättä jättäminen vaikeutti tehtävien ratkaisua. Täten matematiikan opetuksessa tulisi käyttää informaaleja ja foraaleja representaatioita rinnakkain sekä kannustaa opiskelijoita ymmärtää näiden representaatioiden yhteyksiä. (Viholainen, 2008)

3.2 Kansainvälisiä tutkimuksia

Derivaatan ymmärryksen ja representaatioiden välinen yhteys

Alankomaissa tutkittiin lukioikäisten opiskelijoiden derivaatan ymmärryksen kehittymistä pitkittäistutkimuksen ja tapaustutkimuksen avulla. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää derivaattaan liittyvien eri matematiikan representaatioiden välisien yhteyksien ymmärrystä. Tutkittaviin representaatioihin kuului kaavoihin perustuva (engl. formulae), graafinen (engl. grafical) ja numeerinen (engl. numerical) esitystapa. Lisäksi tutkittiin representaatioiden ja sovellusten välisen ymmärryksen yhteyttä. Tutkimuksessa haastateltiin tasaisin väliajoin kahtatoista opiskelijaa, ja haastatteluissa ratkaistiin erilaisia tehtäviä. (Roorda, Vos & Goedhart, 2009)

Tutkimuksen tuloksissa raportoitiin yhden opiskelijan haastatteluiden tuloksia. Tulokseksi saatiin, että opiskelijoiden derivaattaan liittyvän ymmärryksen kasvu riippuu siitä, kuinka paljon eri representaatioita opetuksessa käytetään ja miten eri representaatioita käytetään rinnakkain. Sama havainto tehtiin soveltavien tehtävien ja matemaattisten representaatioiden välisestä yhtydestä. (Roorda et al., 2009)

Ketjusääntö

Universiti Teknologi Malaysian tutkimuksessa haluttiin määrittää, mitä haasteita ja virhekäsityksiä Anadolu Universityn matematiikan opiskelijat (Elementary Mathematics Education Program) kohtaavat ketjusäännön käytön kanssa. Tutkimukseen osallistui 27 opiskelijaa, jotka olivat suorittaneet kolme analyysin kurssia. Vastaajat täyttivät kyselylomakkeen, jossa heidän piti derivoida yhdistettyjä funktioita. Kyselyn lisäksi tutkimukseen osallistujia myös haastateltiin. (Uygur & Ozdas, 2005)

Tutkimuksessa havaittiin, että opiskelijat pystyvät määrittämään yhdistetyn funktion derivaatan ulkoamuistettujen sääntöjen ja kaavojen avulla. Kuitenkin suurin osa vastaajista määritti derivaatat ilman, että he olisivat tietoisesti käyttäneet ketjusääntöä. Opiskelijat osasivat yleisesti muodostaa ja kirjoittaa ketjusäännön kaavan, mutta harva osasi selittää kaavan ja ulkoaopeteltujen sääntöjen yhteyttä. Yhdistetyn funktion opetuksessa tulisi tutkijoiden mukaan kiinnittää huomiota merkintöjen oikeellisuuteen. Tällä on suuri merkitys virhekäsitysten minimoimisessa. Lisäksi opetuksessa tulisi käyttää erilaisia abstrakteja ongelmanratkaisutehtäviä, joihin sisällytetään ketjusäännön käyttöä. (Uygur & Ozdas, 2005)

Muutosnopeuden ymmärrys

Etelä-Afrikassa tutkittiin ensimmäisen vuoden yliopisto-opiskelijoiden ymmärrystä muutosnopeudesta. Tutkimus toteutettiin yliopisto-opintojen ensimmäisen kurssin, jolla muutosnopeutta oli käsitelty, jälkeen. Vastaajiin kuului opiskelijoita kolmesta Etelä-Afrikan yliopistosta, ja osallistujat olivat insinööriopiskelijoita, fysiikan opiskelijoita tai maanpuolustuksen opiskelijoita. Tutkimuksessa tehtiin ennakko- ja loppukoe sekä yksilöhaastatteluita. Tutkimuksessa selvitettiin, että vaikka muutosnopeus on yksi matematiikan tärkeimmistä aiheista, ensimmäisen vuoden opiskelijat eivät ymmärrä sitä hyvin. Erityisesti virheitä ilmeni käsitteiden yhteyksissä. Virhekäsitykset on kuitenkin hyvä tunnistaa, koska niiden tiedostaminen tarjoaa mahdollisuuksia oppimisen parantamiseen. (Bezuidenhout, 1998)

Differentiaalilaskennan ymmärrys ja virhekäsitykset

Tutkimuksessa haastateltiin neljän lukion yläluokan (engl. sixth forms) kuuttakymmentä opiskelijaa sekä kahden korkeakoulun (engl. college) viittäkymmentä matematiikan opettajaopiskelijaa. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää opiskelijoiden ymmärrystä ja virhekäsityksiä sekä differentiaalilaskennasta että muutosnopeudesta. Haastattelun kysymyksinä käytettiin matemaattisia laskuja, jotka testasivat niin konseptuaalista tietoa kuin laskutaitoja. (Orton, 1983)

Tutkimuksen mukaan on tiedettyä, että osalle opiskelijoista esitellään derivoituvuus sääntönä ja kaavana, jota tulee soveltaa. Kuitenkaan opiskelijoille ei kerrota ymmärrettävästi proseduureja kaavan takana. Tutkimuksen mukaan elektroniset apuvälineet ovat hyödyllisiä derivoituvuuden oppimisessa. Ymmärrykseen vaikuttavat ratkaisevasti opiskelijoiden ennakkotiedot muutosnopeudesta ja tangenteista. Opetukseen voi ottaa konkreettisia esimerkkejä ja keskusteluita opiskelijoiden kanssa. Näissä voi käsitellä kahden luvun suhdetta sekä tutustuttaa opiskelijoita muutosnopeuden käsitteeseen hiljalleen. Myös graafiset kuvaajat auttavat ymmärtämään muutosnopeutta. Derivaatan käsitettä algebrallisesti muodostettaessa on hyvä käyttää yhtä aikaa graafista representaatiota ja funktion tangentin arvoa tietyssä pisteessä. Myös derivaatan ja tangentin kulmakertoimen arvojen välistä suhdetta on hyvä tutkia. Lisäksi derivaatan algebrallinen määrittäminen on paljon merkityksellisempää, kun sitä on aiemmin käsitelty visuaalisesti ja graafisesti. (Orton, 1983)

Tutkimuksessa havaittiin, että korkeakouluopiskelijat eivät enää ajatelleet derivaattaa muutosnopeutena eivätkä käyttäneet derivaatan graafista tulkintaa laskuissaan. Kun derivaattaa käsitellään lukiossa ensimmäisiä kertoja, tulee opiskelijoiden itse muodostaa siitä kuva; ei vain anneta valmista kaavaa ulkoaopeteltavaksi. Sen sijaan matematiikkaa yliopistossa opiskelevat voivat tulkita käyttämiään kaavoja abstraktimmin. Opiskelijoiden ymmärrys derivaatan symboleja kohtaan ja lähestymistapa derivaattaan ovat tutkimuksen mukaan selkeästi heikkoja. Lisäksi tutkimuksessa todettiin, että algebran osuus soveltavan analyysin (engl. calculus) opinnoissa tulee pitää mahdollisimman vähäisenä, koska opiskelijan haasteet algebrassa vaikuttavat heikentävästi analyysin osaamiseen. Osalla opiskelijoista vaikutti olevan selkeä kuva, mitä he olivat tekemässä, mutta puutteellisten algebrallisten proseduurien takia he eivät onnistuneet tehtävässä virheittä. (Orton, 1983)

Representaation merkitys muutosnopeuden ymmärtämiseen

Lebanese American University (LAU) uudisti aloittavien yliopisto-opiskelijoiden ensimmäistä matematiikan kurssia siten, että asiat esitettiin useiden representaatioiden avulla käyttäen paljon graafisia ja visuaalisia välineitä. Opiskelijat, jotka pitivät opetustyylistä, ymmärsivät derivaatan muutosnopeutena lähes täydellisesti. Eri representaatioiden käytöllä on siis positiivisia vaikutuksia derivaatan ymmärrykseen. (Habre & Abboud, 2006)

Derivaatan symbolisen representaation ymmärrys

Etelä-Afrikkalaisessa tutkimuksessa haluttiin selvittää opiskelijoiden ymmärrystä funktioiden ja niiden derivaattojen symbolisesta representaatiosta sekä kuinka derivaattaa tulisi opetuksessa lähestyä. Tutkimukseen osallistui University of KwaZulu-Natal -yliopiston 857 luonnontieteiden (engl. science) opiskelijaa, joista suurin osa oli ensimmäisen vuoden opiskelijoita. (Maharaj, 2013)

Tutkimuksessa havaittiin, että opiskelijoilla oli vaikeuksia tulkita graafisesti esitettyä funktion derivaattaa. Täten derivaatan opetuksessa tulee kiinnittää huomiota sanallisten ja graafisten representaatioiden käyttöön erityisesti sovellustehtävissä. Sama tehtävä tulee esittää sekä sanallisessa että graafisessa muodossa. Tällöin visuaalinen esitystapa kehittää todennäköisesti ajattelumalleja prosessin ja objektin tasolla kun taas symboliset mallit tukevat objektin tulkintaa (engl. object conceptions). (Maharaj, 2013)

Graafisen esityksen tärkeys differentiaalilaskennan opetuksessa

Yhdysvaltalaisessa tapaustutkimuksessa tutkittiin, miten kuvien käyttö vaikuttaa derivaatan ymmärrykseen. Painopisteenä oli graafisesti määritellyn funktion ja sen derivaatan yhteyksien ymmärtäminen. Tutkimukseen osallistui yksi Northwest Floridan korkeakoulun (engl. college) insinööriopiskelija, joka oli aikaisemmin suorittanut kaksi kolmesta soveltavasta analyysin (engl. calculus) pakollisesta kurssista. Opiskelijaa haastateltiin ja haastatteluun kuului differentiaalilaskennan tehtävien ratkaisemista ja laskun päättelyketjun kertomista. (Aspinwall, Shaw & Presmeg, 1997)

Tutkimuksessa huomattiin, että matemaattisia tehtäviä ratkaistaessa hyödynnetään sekä sanallista ja loogista että visuaalista ja kuvallista ajattelua. Derivaatan hahmottamisessa funktion tangentin kulmakertoimena käytettiin algebrallisia ja graafisia representaatioita. Tutkimuksen tuloksissa painotetaan graafisen esityksen tärkeyttä differentiaalilaskennan opetuksessa. (Aspinwall et al., 1997)

Tulevien matematiikan opettajien derivaatan ymmärrys

Tutkimuksessa haluttiin selvittää tulevien matematiikan opettajien derivaatan didaktista ja matemaattista ymmärrystä. Tutkimukseen osallistui Meksikon Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) 53 matematiikan opettajaopiskelijaa. Osallistujat olivat opintojensa loppuvaiheessa, joten he olivat yliopistossa opiskelleet opettajakurssien lisäksi muun muassa differentiaali-, integraali- ja vektorilaskentaa sekä differentiaaliyhtälöitä. Tutkimuksessa tutkittiin opiskelijoiden sekä kvalitatiivista että kvantitatiivista derivaatan ymmärrystä. Analysoitava aineisto kerättiin kyselylomakkeen avulla. (Pino-Fan, Godino, Font & Castro, 2012)

Tutkimuksen mukaan matematiikan opettajaopiskelijat ymmärtävät hyvin derivaatan funktion tietyn pisteen tangentin kulmakertoimena. Kuitenkaan opiskelijoilla ei ole tarpeeksi tietoa derivaatasta. Lisäksi opiskelijoilla on haasteita derivaatan märitelmän kanssa, eikä heillä ole siitä riittävän laajaa tietoa. Opiskelijoiden täytyy käyttää erilaisia representaatioita, ratkaista tehtäviä useiden eri proseduurien avulla ja kiinnittää huomiota proseduurien täsmälliseen sekä monipuoliseen perusteluun. Tutkimuksessa todetaankin, että opettajat tarvitsevat syvällistä ja laajaa tietoa derivaatasta. Muuten opettajat saattavat tulevaisuudessa heikentää heidän opiskelijoidensa derivaatan ymmärrystä. (Pino-Fan et al., 2012)

Luku 4

Derivaatan oppimistavoitteet

Tässä luvussa esitellään, mitä oppimistavoitteita derivaatan käsitteeseen liittyy niin lukiossa kuin yliopistossa. Huomataan, että yliopistossa käytetään lukioon verrattuna enemmän derivaatan formaalia määritelmää. Lisäksi luvussa tutustutaan kahteen lukion oppikirjaan ja kerrotaan, miten derivaatta on esitelty niissä.

4.1 Lukion opetussuunnitelma

On hyvä suunnata katse tulevaan, minkä vuoksi esitellään, mitä lukiossa tulee vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaan käsitellä derivaatasta. Kuitenkin tutkimukseen osallistuneet aloittavat matematiikan yliopisto-opiskelijat ovat suorittaneet lukion vuoden 2003 tai vanhemman opetussuunnitelman mukaan tai käyneet IB-linjan. Täten on myös hyvä käsitellä vuoden 2003 lukion opetussuunnitelmaa. Näiden tietojen perusteella päädytään vertailemaan kahden opetussuunnitelman sisältöä derivaatan osalta.

4.1.1 Vuoden 2015 opetussuunnitelma

Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelman perusteissa kerrotaan, kuinka matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää matemaattista ajattelua, laskemista, ilmiöiden mallintamista ja ongelmanratkaisua. Tavoitteena on ohjata opiskelijaa kehittämään luovia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin ja tekemään havaintojen perusteella kysymyksiä, oletuksia ja näiden pohjalta perusteltuja päätelmiä. Opiskelijaa tuetaan myös ymmärtämään, kuinka eri matemaattiset käsitteet liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin. Opetuksessa ja opiskelussa hyödynnetään eri tietokoneohjelmistoja, kuten dynaamisia matematiikan ohjelmistoja, symbolisen laskennan ohjelmistoja, tilasto-ohjelmistoja, taulukkolaskentaa, tekstinkäsittelyä ja mahdollisesti myös digitaalisia tiedonlähteitä. (Opetushallitus, 2015)

Pitkän matematiikan oppimäärässä pakollisilla kursseilla derivaattaa käsitellään ensimmäisen kerran kurssilla MAA6, jonka nimi on Derivaatta. Kurssin tavoitteena on ymmärtää funktion raja-arvon, jatkuvuuden ja derivaatan havainnollistukset. Lisäksi opiskelijan tulee osata määrittää yksinkertaisten funktioiden derivaatat ja ratkaista tehtäviä, joissa tutkitaan derivaatan avulla polynomifunktion kulkua sekä määrittää tämän ääriarvot. Tavoitteiden lisäksi kurssin keskeisiin sisältöihin kuuluvat polynomifunktioiden, funktioiden tulon ja osamäärän derivoiminen. (Opetushallitus, 2015)

Kahdella muulla pakollisella kurssilla keskitytään vain derivaatan laskutekniikkaan. Kurssilla Trigonometriset funktiot MAA7 tavoitteena derivaatan kannalta ovat, että opiskelija osaa sekä derivoida yhdistettyjä funktioita, että tutkia trigonometrisiä funktioita derivaatan avulla. Kurssilla Juuri- ja logaritmifunktiot MAA8 tavoitteena on, että opiskelija osaa tutkia juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita derivaatan avulla. (Opetushallitus, 2015)

Pitkän matematiikan valtakunnallisilla syventävillä kursseilla derivaattaa käsitellään ainoastaan Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssilla MAA13. Kurssilla on tavoitteena syventää differentiaalilaskennan teoreettista perustaa. Keskeisinä sisältöinä kurssilla tutkitaan funktion jatkuvuutta ja derivoituvuutta, sekä näiden yleisiä ominaisuuksia. Lisäksi kurssilla käsitellään kahden muuttujan funktioita ja osittaisderivaattaa. (Opetushallitus, 2015)

Lyhyen matematiikan oppimäärässä pakollisilla kursseilla derivaattaa ei käsitellä lainkaan. Valtakunnallisella syventävällä kurssilla Matemaattinen analyysi MAB7 derivaatta tulee ymmärtää muutosnopeutena. Lisäksi kurssin tavoitteena on osata tutkia polynomifunktion kulkua derivaatan avulla sekä määrittää tämän suurimman ja pienimmän arvon suljetulla välillä. (Opetushallitus, 2015)

4.1.2 Vuosien 2003 ja 2015 opetussuunnitelmien vertailua

Sekä vuoden 2003 että vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmissa pitkän matematiikan oppimäärässä pakollisilla kursseilla käsitellään samat asiat derivaatasta. Kurssit ovat kuitenkin eri järjestyksessä. Osa aiheista käsitellään vuoden 2015 opetussuunnitelmassa eri kurssilla, kuin millä vastaava asia käsiteltiin vuoden 2003 opetussuunnitelmassa. Esimerkiksi vuoden 2015 opetussuunnitelmassa yhdistetyn funktion derivaatta käsitellään kurssilla Trigonometriset funktiot, kun taas vuoden 2003 opetussuunnitelmassa se käsiteltiin kurssilla Juuri- ja logaritmifunktiot. Lisäksi vuoden 2003 opetussuunnitelmassa Juuri- ja logaritmifunktiot -kurssilla käsiteltävät käänteisfunktiot ja aidosti monotonisten käänteisfunktioiden tutkiminen ovat siirtyneet vuoden 2015 opetussuunnitelmassa syventävälle Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssille. Suurimpana erona on, että vuoden 2003 opetussuunnitelmaan ei kuulunut ollenkaan osittaisderivaatat ja teknisten apuvälineiden käyttö. (Opetushallitus, 2003; Opetushallitus, 2015)

Lyhyen matematiikan opetussuunnitelmassa vuonna 2003 ainoa pakollinen kurssi, jolla käsiteltiin derivaattaa, oli Matemaattinen analyysi. Vuoden 2015 opetussuunnitelmassa sen sijaan tämä sama kurssi on siirtynyt valtakunnalliseksi syventäväksi kurssiksi, eikä näin ollen pakollisilla kursseilla esiinny derivaattaa. Vuoden 2015 opetussuunnitelman Matemaattinen analyysi -kurssille on tullut lisäksi vuoden 2003 opetussuunnitelmaan teknisten apuvälineiden käyttö ja polynomifunktion suurimman ja pienimmän arvon määrittäminen suljetulla välillä. Vuoden 2003 opetussuunnitelmassa tuli osata määrittää polynomifunktion suurin ja pienin arvo. (Opetushallitus, 2003; Opetushallitus, 2015)

4.2 Derivaatan määrittely lukion oppikirjoissa

Tässä osassa esitellään kahden eri lukion pitkän matematiikan Derivaatta-kurssin oppikirjaa ja vertaillaan niiden derivaatan esitystapaa. Vertailussa keskitytään erityisesti esitysjärjestyksen esittelyyn. Juuri-kirjasarjan Derivaatta-kirja mukailee vuoden 2015 opetussuunnitelmaa ja Pyramidi-kirjasarjan Derivaatta-kurssin kirja vuoden 2003 opetussuunnitelmaa.

Kirjoissa käsitellään derivaatasta lähes samat asiat, mutta Juuri-kirjasarjassa keskitytään suuresti myös derivaatan graafiseen tulkintaan ja mukana on paljon havainnollistavia kuvia, mitkä jäävät Pyramidi-kirjasarjassa heikoiksi. Tämän lisäksi Juuri-kirjasarjassa on paljon johdantotehtäviä, joita oppilaat pääsevät itse pohtimaan ennen varsinaista teoriaosuutta; sen sijaan Pyramidi-kirjasarjassa esitellään ensiksi määritelmä, jonka jälkeen on esimerkkejä ja harjoitustehtäviä.

Juuri-oppikirja

Lukion vuoden 2015 opetussuunnitelman mukaisessa Otavan kustantamassa pitkän matematiikan Juuri-kirjasarjan MAA6 Derivaatta-kirjassa määritellään ennen derivaatan käsittelyä funktion raja-arvo, toispuoleiset raja-arvot ja funktion jatkuvuus. Tämän jälkeen siirrytään derivaattaan, joka esitellään ensin funktion muutosnopeutena. Muutosnopeus esitetään hyvin visuaalisesti käyttäen funktioiden graafisia kuvaajia. Luvussa esitelläänkin paljon erilaisten funktioiden kuvaajia ja tutkitaan, milloin muutosnopeus on positiivinen, negatiivinen tai nolla. Lisäksi lasketaan arkielämän tilanteisiin liittyviä keskimääräisiä muutosnopeuksia. Muutosnopeuden jälkeen siirrytään käsittelemään derivaatan määritelmää ja lasketaan funktioiden derivaattoja erotusosamäärän raja-arvon avulla. Samalla myös määritellään muutosnopeuden kertova funktiota sivuava suora tangentiksi, jonka kulmakerroin on derivaatta. Samassa kappaleessa on syventävä esimerkki paloittain määritellyn funktion derivoituvuuden selvittämisestä toispuoleisten raja-arvojen avulla. Esimerkin tarkoituksena on myös selventää jatkuvuuden ja derivoituvuuden välistä yhteyttä. Tämän jälkeen kirjassa määritellään derivaattafunktio. Kirjassa esitellään esimerkkien avulla, että derivaattafunktiot saadaan selville joko funktion kuvaajasta hahmottelemalla, derivaatan määritelmän avulla tai teknisiä apuvälineitä käyttämällä. Tämän jälkeen esitellään derivoimissäännöt. Derivaatan käsittelyyn on oppikirjan tuntisuunnitelmaehdotuksessa varattu neljä 75 minuutin pituista oppituntia, joista derivaattafunktion käsittelyyn on ajateltu kahta tuntia käytettäväksi. Derivaatan jälkeen siirrytään käsittelemään polynomifunktion kulkua derivaattafunktion avulla, tutkitaan polynomifunktion suurinta ja pienintä arvoa suljetulla välilä sekä etsitään paikallisia ääriarvoja. Käsittely tapahtuu määritelmien ja esimerkkien avulla. Lopuksi tutkitaan rationaalifunktion derivointia ja sen ääriarvoja. (Hähkiöniemi et al., 2015)

Pyramidi-oppikirja

Pyramidi-kirjasarjan Derivaatta-kurssin kirja on vuoden 2003 lukion opetussuunnitelman mukainen. Siinä määritellään Juuren tavoin raja-arvon ja jatkuvuuden käsitteet ennen derivaattaa. Derivaatan käsittely aloitetaan kuitenkin lyhyen johdannon jälkeen erotusosamäärän raja-arvosta. Derivaatan kerrotaan kuvaavan funktion hetkellistä kasvunopeutta ja että sen geometrinen tulkinta on funktion tangentin kulmakerroin. Esitystapa on hyvin sanallinen määritelmään pohjautuva, vaikka erotusosamäärän raja-arvo vasemmalta ja oikealta on esitetty graafisesti. Seuraavaksi kirjassa esitellään derivaattafunktio f' ja derivoimissäännöt, joista kolme todistetaan. Tässä kohtaa myös huomautetaan derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisestä yhteydestä. Seuraavassa luvussa esitellään esimerkkien avulla tangentin ja normaalin yhtälöä sekä käyrien välistä kulmaa, mitä Juuri-kirjassa ei ollut. Tämän jälkeen päästään derivoituvan funktion kasvavuuden ja vähenemisen tutkimiseen sekä kerrotaan, että tätä voidaan tutkia derivaatan avulla. Luvussa määritellään myös derivoituvan funktion monotonisuus ja esitetään useita esimerkkitehtäviä. Kirjan viimeisessä luvussa aiheena on funktion kulun tutkiminen: ensiksi esitellään funktion ääriarvot, jonka jälkeen on monta esimerkkiä, jotka auttavat harjoitustehtävien ratkaisuissa. (Kontkanen, Lehtonen, Liira, Luosto & Ronkainen, 2006)

4.3 Derivaatan osaamistavoitteet Helsingin yliopistossa

Matemaattisten tieteiden kandiohjelman sekä matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelman opinnoissa derivaattaa käsitellään ensimmäisen kerran kurssilla Differentiaalilaskenta. Opiskelijoiden on tarkoitus käydä kurssi ensimmäisenä opiskeluvuotenaan. Kurssille vaaditaan ennakkotietona Raja-arvot -kurssi. (Helsingin yliopisto, 2017)

Differentiaalilaskenta-kurssilla on seuraavat osaamistavoitteet:

- Opiskelija hallitsee funktion raja-arvon (ja sen muunnelmien) määritelmän soveltamisen konkreettisiin esimerkkitilanteisiin

- Opiskelija hallitsee funktion raja-arvon perusominaisuuksien soveltamisen
- Opiskelija hallitsee jatkuvien funktioitten perusominaisuuksien soveltamisen
- Opiskelija hallitsee derivoituvien funktioitten perusominaisuuksien soveltamisen
- Opiskelija hallitsee tärkeimpien alkeisfunktioitten perusominaisuudet
- Opiskelija osaa käsitellä funktion raja-arvoihin, jatkuviin funktioihin ja derivaattoihin liittyviä teoreettisia kysymyksiä (syvempi taso) (Helsingin yliopisto, 2017)

Differentiaalilaskenta-kurssin sisältö:
Opintojaksossa

- kerrataan funktion raja-arvon käsitettä ja tutkitaan kuinka raja-arvon määritelmä ja raja-arvojen perusominaisuudet tuottavat jatkuvien funktioiden ja derivaattojen ominaisuuksia.
- tutustutaan ”jatkuvien funktioiden teoriaan” kuten siihen, että jokaisella suljetulla välillä määritellyllä jatkuvalla funktioilla on suurin ja pienin arvo.
- tutustutaan differentiaalilaskennan perusasioihin. Tärkeimpiä asioita ovat differentioituvuuden eli ”lokaalin lineaarisuuden” käsite ja väliarvolause sovelluksineen
- opiskellaan alkeisfunktioiden perusominaisuuksia käyttämällä niitä kurssin muiden aiheiden havainnollistamisessa. (Helsingin yliopisto, 2017)

Luku 5

Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitetään tutkielman tutkimuskysymykset, joihin tutkimuksen avulla on saatu vastauksia. Tehty tutkimus on laadullinen. Lisäksi luvussa kerrotaan tutkimuksen etenemisestä, esitellään kyselylomaketta ja perustellaan lomakkeeseen valitut kysymykset tutkimuksien avulla. Näiden lisäksi kerrotaan, mitä kysymyksien avulla on haluttu tavoitella.

Tutkimuskysymykset

- Millainen on aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatan ymmärrys?
  - Miten opiskelijat osaavat kuvailla derivaattaa omin sanoin?
  - Miten opiskelijat ymmärtävät derivaatan ja jatkuvuuden välisen yhteyden?
  - Millainen käsitys opiskelijoilla on erotusosamäärän raja-arvosta?
  - Miten opiskelijat osaavat tulkita derivaattafunktiota graafisen esityksen avulla?
- Millaisia virhekäsityksiä aloittavilla matematiikan yliopisto-opiskelijoilla on derivaatasta?

5.1 Tutkimuksen kulku

Aloittaville matemaattisten tieteiden kandiohjelman ja matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelman opiskelijoille laadittiin kysely, jonka tarkoituksena oli selvittää opiskelijoiden ymmärrystä ja virhekäsityksiä derivaatasta. Kysely järjestettiin syyskuussa 2017, jolloin uudet matematiikan opiskelijat olivat olleet noin kuukauden yliopistossa. Opiskelijat tekivät kyselyn lukiotiedoilla tai muilla aikaisempien opintojen tiedoilla, koska analyysin kurssit alkoivat kyselyn teettämisen jälkeen: Raja-arvot -kurssi alkoi lokakuun lopulla ja Differentiaalilaskennan kurssi alkaa tammikuussa 2018.

Kysely toteutettiin Johdatus yliopistomatematiikkaan -kurssin luennon lopuksi luentosalissa. Opiskelijoille jaettiin kysely paperisena ja he saivat käyttää kynää sekä pyyhekumia täyttäessään kyselyä. Aikaa vastaamiseen oli kaksikymmentä minuuttia, mikä kerrottiin opiskelijoille ennen aloittamista. Suurimmalla osalla aikaa kului kyselyyn vastaamiseen noin viisitoista minuuttia, mutta muutamalla opiskelijalla aika loppui hieman kesken.

Kun opiskelijat olivat vastanneet kyselyyn, heidän vastauksiaan alettiin analysoida laadullisesti. Vastaukset koottiin yhteen taulukkoon, josta nähtiin helposti eri opiskelijoiden vastaukset samaan tehtävään. Tämän jälkeen jokaisesta kyselyn tehtävästä klusteroitiin opiskelijoiden yhtenevät vastaukset, jotta saatiin kuva saman vastauksen ilmaantuvuudesta opiskelijoiden keskuudessa. Tulosten perusteella muodostettiin lopuksi tutkimuksen johtopäätökset.

5.2 Kyselylomake

Kyselylomakkeen (Liite 1) tehtävät testasivat erityisesti opiskelijoiden konseptuaalista, mutta myös proseduraalista tietoa derivaatasta. Kyselyn avulla haluttiin selvittää opiskelijoiden tietämystä derivaatasta mahdollisimman laajalta alueelta ja eri representaatioita käyttäen, koska Panasukin (2010) mukaan useiden representaatioiden käytöllä on positiivia vaikutuksia opiskelijoiden matematiikan konseptuaalisen ymmärryksen kehittymiseen. Toisaalta täten myös hyvä eri representaatioiden käyttö kertoo hyvästä konseptuaalisesta ymmärryksestä. Tämän vuoksi takia kyselyssä oli keskenään erilaisia tehtäviä.

Kysymyksessä 1 haluttiin selvittää, miten opiskelijat osaavat omin sanoin kuvailla derivaattaa, koska Sarikan (2014) mukaan matemaattisten käsitteiden ja laskujen selittäminen luonnollisella kielellä on hyvä tapa selvittää opiskelijoiden todellista ymmärrystä aiheesta. Kysymyksissä 2, 3 ja 4 pohdittiin derivaatan ja jatkuvuuden välistä yhteyttä monivalintatehtävien avulla. Näissä tehtävissä tutkittiin Rittle-Johnsonin ja Schneiderin (2014) mukaan opiskelijoiden konseptuaalista tietoa. Kysymyksessä 5 selvitettiin konseptuaalisen tiedon lisäksi myös proseduraalista tietoa (Rittle-Johnson & Schneider, 2014), koska siinä testattiin erotusosamäärän raja-arvoa ja laskutaitoa. Tehtävässä 6 derivaattaa käsiteltiin Tallin (2004) ensimmäisessä matematiikan maailmassa. Tehtävässä testattiin derivaatan graafisen representaation ymmärrystä: mitä opiskelija osaa päätellä funktion $f(x)$ kuvaajasta, kun tehtävässä on annettu kyseisen derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja. Tehtävässä selvitettiin Panasukin (2010) mukaan opiskelijoiden konseptuaalista tietoa.

Lomakkeen lopussa vastaajien piti arvioida, kuinka varmoja he ovat, että saivat tehtäviin oikean vastauksen. Tämän kysymyksen tarkoituksena oli selvittää opiskelijoiden vastausvarmuutta ja kuinka totuudenmukaisesti he vastasivat kyselyyn. Vastausvarmuuden avulla pystyttiin myös pohtimaan tutkimuksen luotettavuutta.

Luku 6

Tulokset ja analyysi

Tässä luvussa esitellään kyselyn tuloksia. Kyselylomakkeen jokainen tehtävä on analysoitu erikseen ja vastaukset on taulukoitu. Taulukoissa vaakariveinä on vastauksissa esiintyneet teemat, joiden jälkeen sarakkeissa kerrotaan teeman vastausten lukumäärä ja prosenttiosuus. Ainoa poikkeus on taulukko 3, jossa vaakariveinä on kyselylomakkeen tehtävän numero ja sarakkeina oikeiden vastausten kokonaismäärä sekä niiden prosenttiosuudet kaikista vastaajista.

Tulosten analysoinnissa haluttiin säilyttää vastaajien anonymiteetit. Täten vastanneille opiskelijoille annettiin tunnisteluvut, joiden perusteella kyselyn vastauksia analysoitiin. Tunnisteluvut annettiin opiskelijoille analyysissä esiintymisjärjestyksen mukaan. Opiskelijoiden tunnisteluvuilla ei ole yhteyttä heidän opiskelijanumeroihinsa tai vastauksiinsa. Lisäksi opiskelijoiden vastaukset kirjoitettiin lainauksina koneella puhtaaksi, jottei ketään vastaajaa voi tunnistaa käsialan perusteella.

6.1 Kyselyn vastaajat

Kyselyyn tuli hyväksyttyjä vastauksia 41 kappaletta. Vastanneita opiskelijoita oli jonkin verran enemmän, mutta osan vastaukset täytyi hylätä. Hylkäyksen syynä oli joko opiskelijan väärä kandiohjelma tai se, että opiskelija suorittaa opintoja aiempien tutkintovaatimusten mukaan. Lisäksi hylättiin vastauslomakkeet, joista puuttui opiskelijanumero tai joissa ei oltu annettu lupaa tietojenluovutukselle. Vastanneista suurin osa, eli noin 65,9 %, oli kirjoittanut ylioppilaaksi vuoden

2017 keväällä ja loput olivat kirjoittaneet ylioppilaaksi vuonna 2016 tai aiemmin (Taulukko 1).

Opiskelijoiden ylioppilaaksi kirjoittamisvuosi	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
2017	27	65,9
2011-2016	9	22,0
2001-2010	4	9,8
2000 tai aiemmin	1	2,4

Taulukko 1: *Kyselyyn vastanneiden opiskelijoiden ylioppilaaksi kirjoittamisvuosi.*

Kaikki vastanneet olivat ylioppilaskirjoituksissa kirjoittaneet pitkän matematiikan: 34,1 % sai arvosanan L, 41,5 % sai arvosanan E ja 22,0 % sai arvosanan M. Lisäksi 2,4 % vastanneista oli suorittanut matematiikan IB-linjan Higher Level tasolla saaden arvosanan 5. Matemaattisten tieteiden kandiohjelmaan kuuluu vastanneista suurin osa, noin 75,6 % ja loput vastanneista suorittavat Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelmaa.

6.2 Derivaatan kuvailu

Ensimmäisessä tehtävässä vastaajien piti kuvailla omin sanoin, mitä derivaatta tarkoittaa. Tehtävä 1 oli seuraava:

Kuvaile omin sanoin, mitä derivaatta tarkoittaa.

Vastaajista 29 opiskelijaa osasi kuvailla riittävän tarkasti derivaattaa. Lopuista 12 vastaajasta kahdeksan kuvaili derivaattaa epätarkasti ja neljä ei muistanut, mitä kyseinen käsite tarkoittaa tai ei vastannut tehtävään. Taulukossa 2 on klusteroitu tehtävän vastaukset opiskelijoiden samaa teemaa mukailevien vastausten mukaan. Derivaattaa kuvailtiin 49 kertaa. Jos opiskelija vastasi tehtävään usealla tavalla, on se otettu huomioon teeman määrissä. Prosenttiosuudet on kuitenkin laskettu vastaajien lukumäärän perusteella, koska tällöin saatiin osuus, kuinka moni vastaajista kuvaili derivaattaa saman teeman mukaan.

Derivaatan kuvailu	Määrä ($n = 49$)	Määrä (%)
Tangentin kulmakerroin	18	43,9
Muutosnopeus ja kasvunopeus	12	29,3
Derivaatan määritelmä	4	14,6
Derivaattafunktio	2	4,9
Epätarkka vastaus	8	19,5
Ei muista tai ei vastattu	4	9,8

Taulukko 2: *Opiskelijoiden derivaatan kuvailut tehtävässä 1.*

Tangentin kulmakerroin

Suurin osa kyselyyn vastanneista, eli 18 matematiikan aloittavista yliopisto-opiskelijoista kuvaili derivaattaa funktion tangentin kulmakertoimena. Opiskelija (OP1) kuvaili derivaattaa seuraavasti: *Derivaatta kuvaa käyrän tietyn pisteen tangentin kulmakerrointa.*

Muutosnopeus ja kasvunopeus

Vastaajista 12 kuvaili derivaatan muutosnopeutena tai kasvunopeutena. Opiskelija (OP2) kuvaili derivaattaa seuraavasti: *Derivaatta tarkoittaa funktion muutosnopeutta siitä riippumattoman muuttujan suhteen.*

Derivaatan määritelmä

Neljä vastaajaa käytti lukiossa opittuja määritelmiä kuvaillessaan derivaattaa. Vastauksissa kuvailtiin derivaattaa yhden muuttujan erotusosamäärän raja-arvona $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (OP3), tai kahden muuttujan erotusosamäärän raja-arvona (OP4): *Funktion $f(x)$ derivaatta pisteessä x_0 on erotusosamäärän raja-arvo* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Derivaattaa kuvailtiin myös toispuoleisten raja-arvojen avulla (OP5):

> *Derivaatta on jonkin määritellyn funktion käyrän tangentti, jonka molemmat toispuoleiset raja-arvot ovat yhtä suuret. Eli* $\lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a_-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, *jossa a on jokin funktion $f(x)$ piste.*

Derivaattafunktio

Kaksi opiskelijaa kuvaili derivaattaa funktiona. Opiskelija (OP6) kuvaili derivaattaa seuraavasti:

> *Derivaatta on funktio, joka kuvaa derivoitavan funktion jokaiselle pisteelle (x-arvoa vastaava arvo) sovitettavan tangenttisuoran kulmakertoimen, ts. kuinka jyrkästi funktio kasvaa tai pienenee sen kussakin kohdassa.*

Epätarkka vastaus

Opiskelijoista kahdeksan vastasi tehtävään epätarkasti. Opiskelijat olivat todennäköisesti oikeilla jäljillä, mutta derivaatan kuvailu ei ollut tarpeeksi tarkkaa. Tämän vuoksi vastaus luokiteltiin epätarkaksi. Esimerkiksi opiskelija (OP7) vastasi tehtävään seuraavasti: *Derivaatta on integraalin vastakohta. Funktion kulmakerroin tietyssä kohdassa.* Osa opiskelijoista tiesi proseduurin, jolla derivaatan saa laskettua. Esimerkiksi opiskelija (OP8) vastasi tehtävään seuraavasti: *Derivaatta yksinkertaistaa lauseen yhdellä potenssilla.* Opiskelija (OP9) vastasi kysymykseen, mitä hyötyä derivaatasta on: *Derivaatta on matemaattinen funktio, jonka avulla voidaan saada selville esim. funktion ääriarvokohdat.* Lisäksi opiskelija (OP10) kertoi derivaatan olevan *funktion hetkellinen kulma* ja opiskelijan (OP11) mukaan derivaatta *kuvaa jotakin hetkellistä arvoa.*

Useita kuvailuja

Osa vastaajista kuvaili derivaattaa usealla eri tavalla ja se on otettu huomioon. Esimerkiksi opiskelija (OP12) kuvaili derivaattaa seuraavasti: *Erotusosamäärän raja-arvo, hetkellinen muutosnopeus ja tangentin kulmakerroin.*

6.3 Derivoituvuus ja jatkuvuus

Tehtävissä 2, 3 ja 4 testattiin vastaajien ymmärrystä jatkuvuuden ja derivoituvuuden suhteesta. Tehtävät 2, 3 ja 4 olivat järjestyksessään seuraavat:

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \textit{kun } x < 0 \\ x+1, & \textit{kun } x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

- *Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 0.*
- *Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 0.*
- *Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 0.*

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \textit{kun } x < 0 \\ x+1, & \textit{kun } x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

- *Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 1.*
- *Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 1.*
- *Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 1.*

Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} x, & \textit{kun } x < 0 \\ x+1, & \textit{kun } x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

- *Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 0.*
- *Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 0.*
- *Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 0.*

Taulukossa 3 esitellään oikeiden vastausten lukumäärä tehtävittäin. Prosenttiosuus kertoo oikein vastanneiden osuuden kaikista vastaajista. Lähes kaikki vastaajat osasivat tehtävän 3. Sen sijaan tehtävät 2 ja 4 sujuivat heikommin, vaikka yli puolet vastaajista osasi tehtävät.

Tehtävä	Oikeiden vastausten määrä	Oikeiden vastausten määrä (%)
Tehtävä 2	27	65,9
Tehtävä 3	40	97,6
Tehtävä 4	25	61,0

Taulukko 3: *Oikeiden vastausten lukumäärä tehtävissä 2, 3 ja 4.*

Yksittäisen opiskelijan ymmärrys jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta

Taulukkoon 4 on koottu opiskelijoiden vastaukset tehtäviin 2, 3 ja 4. Taulukon vaakarivit kuvaavat yksittäisen opiskelijan vastauksia tehtäviin.

Vastaukset	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
Tehtävät 2, 3 ja 4 oikein	18	43,9
Tehtävät 3 ja 4 oikein, tehtävässä 2 vastattu a	5	12,2
Tehtävät 3 ja 4 oikein, tehtävässä 2 vastattu c	2	4,9
Tehtävät 2 ja 3 oikein, tehtävässä 4 vastattu a	5	12,2
Tehtävät 2 ja 3 oikein, tehtävässä 4 vastattu b	3	7,3
Tehtävä 3 oikein, tehtävissä 2 ja 4 vastattu a	7	17,1
Tehtävä 2 oikein, tehtävässä 3 vastattu c ja tehtävässä 4 vastattu a	1	2,4

Taulukko 4: *Yksittäisten opiskelijoiden vastaukset tehtäviin 2, 3 ja 4.*

6.4 Erotusosamäärän raja-arvon määrittäminen

Taulukossa 5 esitellään opiskelijoiden vastaukset tehtävään 5, jossa testattiin heidän erotusosamäärän raja-arvon ymmärrystä. Tehtävän 5 tehtävänanto oli seuraava:

> *Määritä funktion* $f(x) = \frac{1}{x+2}$ *derivaatta erotusosamäärän raja-arvon avulla kohdassa* $x = -1$.

Donaldson (1963) luokittelee opiskelijoiden virheet seuraavasti: rakenteellinen, satunnainen ja kriittinen. Tässä tehtävässä tehtiin eniten kriittisiä viheitä.

Vastaus	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
Tehtävä täysin oikein.	4	9,8
Tehtävä osittain oikein.	7	17,1
Tehtävä väärin. Derivoitiin funktio.	5	12,2
Tehtävä väärin. Sijoitettiin arvo suoraan funktion lausekkeeseen.	4	9,8
Ei muistettu erotusosamäärän raja-arvoa tai vastaus oli arvailua.	10	24,4
Ei vastattu tehtävään.	11	26,8

Taulukko 5: *Opiskelijoiden vastaukset tehtävään 5.*

Tehtävä täysin oikein

Vastaajista neljä opiskelijaa osasi ratkaista tehtävän täysin oikein käyttäen erotusosamäärän raja-arvoa laskuissaan. Opiskelijan (OP4) vastaus tehtävään oli seuraava:

$$f'(-1) = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{-1+2}}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1-x-2}{x+2}}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \left(-\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \to -1} -\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{-1+2} = -1$$

Tehtävä osittain oikein

Vastanneista opiskelijoista seitsemän teki tehtävän osittain oikein. Heistä monet muistivat erotusosamäärän raja-arvon kaavan ja aloittivat hieman laskua, mutta aika loppui kesken. Tästä esimerkkinä opiskelija (OP13):

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{-1+2}}{x+1} \ldots \textit{ei aikaa laskea loppuun}$$

Tehtävä väärin: Derivoitiin funktio

Viisi opiskelijaa teki tehtävän väärin, koska he käyttivät tehtävän ratkaisuun jotain muuta menetelmää kuin erotusosamäärän raja-arvoa. Opiskelija (OP14) määritti funktion derivaatan arvon kohdassa $x = 1$ käyttämällä yhdistetyn funktion derivoimiskaavaa eli ketjusääntöä.

$$f(x) = (x+2)^{-1}$$

$$f'(x) = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

$$f'(-1) = -1$$

Osa opiskelijoista laski tehtävän käyttäen osamäärän derivoimiskaavaa. Tästä esimerkkinä opiskelija (OP8), joka merkitsi funktion $f(x)$ osoittajaa $g = 1$ ja nimittäjää $h = x+2$. Opiskelija (OP8) kirjoitti osamäärän derivoimiskaavan väärin, teki derivointivirheen, mutta päätyi oikeaan vastaukseen:

$$\lim_{x \to -1} f' = \frac{g' \cdot h + g \cdot h'}{h^2} = \lim_{x \to -1} \frac{1 \cdot x}{(x+2)^2} = \lim_{x \to -1} \frac{x}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(-1+2)^2} = \frac{-1}{1} = -1$$

Tehtävä väärin: Sijoitettiin arvo suoraan funktion lausekkeeseen

Neljä opiskelijaa sijoitti arvon $x = -1$ suoraan funktion $f(x)$ lausekkeeseen. Seuraava esimerkki on opiskelijan (OP1) ratkaisu tehtävään.

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-1+2} = 1$$

Ei muistettu erotusosamäärän raja-arvoa tai vastaus oli arvailua

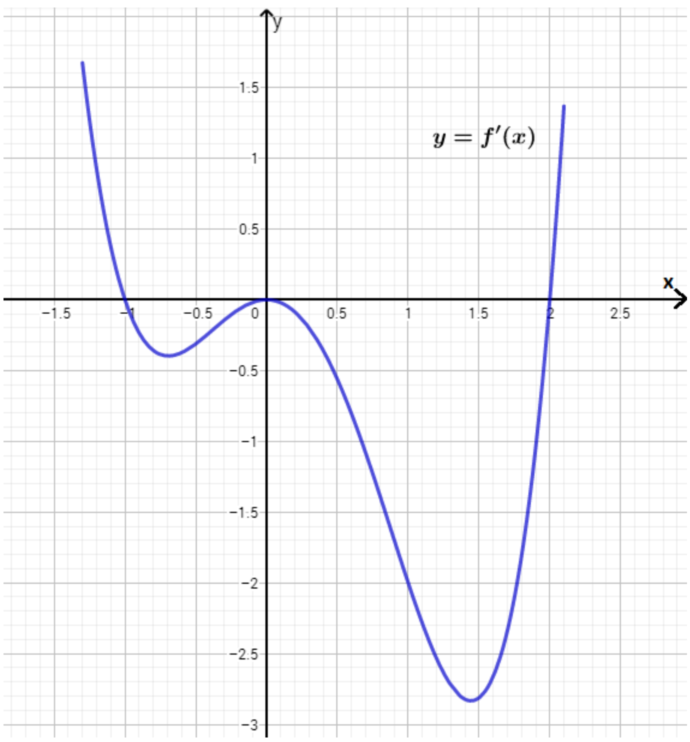
Kymmenen opiskelijaa kirjoitti tehtävään vastaukseksi, että ei muista erotusosamäärän raja-arvon kaavaa. Esimerkiksi opiskelija (OP15) vastasi tehtävään seuraavasti: *En muista tarvittavaa kaavaa, mutta tehtävä olisi helppoa lukio matematiikkaa.* Lisäksi muutama vastaaja kaipasi MAOLin taulukkokirjaa avukseen, kuten opiskelija

(OP16): *Erotusosamäärä vaatisi MAOL:n tai pikaisen kertauksen.*

6.5 Derivaattafunktion kuvaajan tulkinta

Tehtävässä 6 annettiin derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja. Tämän kuvaajan avulla opiskelijoiden piti määrittää sen nollakohdat, funktion $f(x)$:n vähenevät välit ja tämän paikalliset ääriarvokodat sekä niiden tyypit. Tehtävän 6 tehtävänanto oli seuraava:

> *Alla olevassa kuviossa on erään funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja välillä $-1,3 < x < 2,1$.*



6.5.1 Derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohtien määrittäminen

Taulukossa 6 esitellään opiskelijoiden yleisimpiä vastauksia kyselylomakkeen tehtävään 6a, jossa heidän piti määrittää derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat. Tehtävän

6a tehtävänanto oli seuraava:

Määritä kuvaajan perusteella derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.

Vastaus	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
Nollakohdat määritettiin oikein.	33	80,5
Tehtävä väärin. Nollakohdissa oli puutteita.	6	14,6
Tehtävä väärin. Määritettiin $f'(x)$:n ääriarvokohdat.	2	4,9

Taulukko 6: *Opiskelijoiden vastaukset tehtävään 6a.*

Nollakohdat määritettiin oikein

Opiskelijoista suurin osa eli 33 vastaajaa osasi määrittää derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat oikein. Tässä on opiskelijan (OP2) vastaus: *nollakohdat:* $x = -1$, $x = 0$ *ja* $x = 2$. Kaikki vastaajat eivät olleet tarkkoja merkintöjen suhteen, vaan vastasivat tehtävään vain luvuilla, kuten opiskelija (OP12). Merkintöjen oikeellisuus ei tässä tehtävässä ollut relevanttia, joten se jätettiin huomioimatta.

Tehtävä väärin: Nollakohdissa oli puutteita

Kuudella opiskelijoista oli puutteita nollakohtien määrittämisessä. Heiltä puuttui nollakohta $x = 0$. Esimerkkinä tästä opiskelija (OP15), jonka vastaus tehtävään oli: $x = -1$ *ja* $x = 2$. Kaksi opiskelijaa esitti nollakohdat pisteinä, mistä esimerkkinä opiskelijan (OP8) vastaus nollakohdiksi: $(-1, 0)$ *ja* $(2, 0)$.

Tehtävä väärin: Määritettiin $f'(x)$:n ääriarvokohdat

Kaksi vastaajaa selvitti tehtävässä derivaattafunktion $f'(x)$ ääriarvokohdat. Esimerkiksi opiskelija (OP17) vastasi tehtävään seuraavasti: *Nollakohdat* $x = -0,7$, $x = 0$ *ja* $x = 1,4$.

6.5.2 Funktion $f(x)$ vähenevyyden selvittäminen

Taulukossa 7 kuvataan opiskelijoiden vastauksia kyselylomakkeen tehtävään 6b, jossa heidän piti annetun derivaattafunktion kuvaajan perusteella määrittää välit, joilla funktio on vähenevä. Tehtävä 6b oli seuraava:

Määritä kuvaajan perusteella ne välit, joilla funktio $f(x)$ on vähenevä.

Vastaus	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
Vähenevät välit määritettiin oikein.	21	51,2
Tehtävä väärin. Määritettiin $f'(x)$:n vähenevät välit.	15	36,6
Tehtävä väärin muiden virheiden takia.	3	7,3
Ei vastattu tehtävään.	2	4,9

Taulukko 7: *Opiskelijoiden vastaukset tehtävään 6b.*

Vähenevät välit määritettiin oikein

Vastaajista 21 opiskelijaa selvitti funktion vähenevät välit oikein. Opiskelijan (OP4) ratkaisu tehtävään oli seuraava: $f(x)$ *on vähenevä, kun* $-1 \leq x \leq 2$, *sillä tällöin* $f'(x) \leq 0$. Tähän joukkoon kuuluvat myös opiskelijat, jotka vastasivat, että funktio $f(x)$ on vähenevä välillä $-1 < x < 2$, mutta joka ei ole vähenevä kohdassa $x = 0$. Näin vastasi esimerkiksi opiskelija (OP5). Tämä on periaatteessa väärin, mutta tutkimuksen kannalta se ei ole relevanttia.

Tehtävä väärin: Määritettiin $f'(x)$:n vähenevät välit

Yleisin virhe tehtävässä oli, että vastaaja määritti funktion $f(x)$ vähenevien välien sijaan sen derivaattafunktion $f'(x)$ vähenevät välit. Näin tehtävän ratkaisseita opiskelijoita oli yhteensä 15 kappaletta. Tästä esimerkkinä opiskelija (OP3), joka vastasi tehtävään, että funktio on vähenevä väleillä $x < -0,75$ *ja* $0 < x < 1,4$.

Tehtävä väärin muiden virheiden takia

Muita virheitä tehtävässä teki kolme opiskelijaa. Opiskelija (OP18) määritti tehtävässä derivaattafunktion $f'(x)$ arvot, joilla $f'(x)$ on vähenevä: $f(x)$ *on vähenevä* *välillä* $0 > x > -2,7$. Kaksi muuta opiskelijaa vastasi väheneväksi väliksi jonkin derivaattafunktion $f'(x)$ välin, jolla se on ainakin joissain kohdissa vähenevä. Esimerkiksi opiskelija (OP15) vastasi välin $x < 1,4$ olevan vähenevä.

6.5.3 Funktion $f(x)$ ääriarvokohtien tutkiminen

Taulukossa 8 esitetään tehtävän 6c vastausten jakautuminen. Tehtävässä opiskelijoiden piti määrittää funktion $f(x)$ ääriarvot ja niiden tyypit derivaattafunktion $f'(x)$:n kuvaajan avulla. Tehtävän 6c tehtävänanto oli seuraava:

> *Määritä kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit.*

Vastaus	Määrä ($n = 41$)	Määrä (%)
Ääriarvokohdat määritettiin oikein.	14	34,1
Tehtävä väärin. Määritettiin $f'(x)$:n ääriarvokohdat.	11	26,8
Tehtävä väärin. Määritettiin kohdat, joissa on $f'(x)$:n suurin ja pienin arvo.	4	9,8
Tehtävä väärin. Merkittiin minimikohdaksi 0.	2	4,9
Tehtävä väärin muiden virheiden takia.	8	19,5
Ei vastattu tehtävään.	2	4,9

Taulukko 8: *Opiskelijoiden vastaukset tehtävään 6c.*

Ääriarvokohdat määritettiin oikein

Vastaajista 14 opiskelijaa ratkaisi tehtävään oikein. Esimerkiksi opiskelija (OP4) vastasi tehtävään seuraavasti: *Funktiolla on paikallinen maksimikohta* $x = -1$ *ja paikallinen minimikohta* $x = 2$. Opsikelija (OP4) myös perusteli vastauksensa kulkukaaviolla.

Tehtävä väärin: Määritettiin $f'(x)$:n ääriarvokohdat

Vastaajien yleisin virhe tehtävässä oli, että he määrittivät derivaattafunktion $f'(x)$ ääriarvokohdat. Näin teki 11 opiskeilijaa. Opiskelija (OP5) vastasi tehtävään seuraavasti: $x = -0,7$ *on paikallinen minimi,* $x = 0$ *on paikallinen maksimi ja* $x = 1,4$ *on paikallinen minimi.*

Tehtävä väärin: Määritettiin kohdat, joissa on $f'(x)$:n suurin ja pienin arvo

Neljä vastaajaa selvitti derivaattafunktion $f'(x)$ kohdat, joissa se saa välillä $-1,3 < x < 2,1$ suurimman ja pienimmän arvonsa. Näin teki esimerkiksi opiskelija (OP7): *Minimiarvo:* $1,4$ *ja maksimiarvo:* $-1,3$.

Tehtävä väärin: Merkittiin minimikohdaksi 0

Kaksi opiskelijaa määritti paikallisen maksimikohdan $x = -1$ ja minimikohdan $x = 2$ oikein, mutta he merkitsivät myös kohdan $x = 0$ minimikohdaksi. Näin teki esimerkiksi opiskelija (OP14).

Tehtävä väärin muiden virheiden takia

Kahdeksan opiskelijaa teki tehtävän väärin muiden virheiden takia. Virheisiin kuului muun muassa kriittisiä merkintävirheitä. Esimerkiksi opiskelija (OP18) sekoitti arvot ja kohdat keskenään. Mukaillen häntä, opiskelija (OP18) vastasi tehtävään seuraavasti: *Ääriarvot ovat kohdissa* $-2,7$ *, joka on pienin arvo,* 0*, joka on suurin arvo ja* $-0,4$. Opiskelija (OP3) vastasi tehtävään seuraavasti: *Ääriarvokohdat ovat* $f(-1)$*,* $f(0)$ *ja* $f(2)$*.* $f(-1)$ *on maksimiarvo, mutta* $f(2)$ *on minimiarvo.* Opiskelija (OP2) sen sijaan vastasi tehtävän ratkaisuksi *globaali maksimikohta:* $x = 1,4$.

Luku 7

Pohdinta

Tässä luvussa pohditaan tutkimuksen tuloksia ja mahdollisia johtopäätöksiä. Pohdinnat on jaoteltu tutkimuskysymysten mukaan. Lisäksi tämän tutkimuksen tuloksia verrataan aiemmin tehtyjen tutkimusten tuloksiin. Luvussa pohditaan myös tutkimuksen luotettavuutta ja jatkotutkimusehdotuksia.

7.1 Derivaatan kuvailu

Derivaattaa kuvailtiin vastauksissa usella eri tavalla. Opiskelijoista 29 kuvaili derivaattaa hyvin ja riittävän tarkasti. Koska tämä on 70,7 % koko otannasta, derivaatan sanallinen ymmärrys on hyvää aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden keskuudessa.

Suurin osa vastaajista eli 43,9 % kuvaili derivaattaa funktion tangentin kulmakertoimena tietyssä pisteessä. Tämän perusteella voidaan todeta, että derivaatan hahmottaminen tangentin kulmakertoimena on yleisintä. Samaan tulokseen päätyi myös Pino-Fan et al. (2012). Derivaattaa kuvaili 29,3 % vastaajista muutosnopeutena tai kasvunopetena. Tämä oli toiseksi yleisin tulos. Eri representaatioiden, erityisesti graafisten esitysten, käytöllä ja kokeellisuudella on yhteyttä derivaatan syvään ymmärrykseen muutosnopetena (Habre & Abboud, 2006). Tähän perustuen voidaan todeta, että derivaattaa muutosnopeutena kuvailleet vastaajat ovat mahdollisesti lukiossa tai muissa aiemmissa opinnoissa käsitelleet derivaattaa visuaalisesti ja kokeellisesti.

Sen sijaan vain 14,6 % kuvaili derivaattaa määritelmän avulla. Tämä kertoo siitä, että aloittavat matematiikan opiskelijat eivät ole tottuneet käyttämään määritelmiä. Toisaalta opiskelijat, jotka kuvailivat derivaattaa erotusosamäärän raja-arvona, saattavat muistaa vain kaavan, mutta eivät todellisuudessa ymmärrä, mitä kaava tarkoittaa tai he eivät osaa yhdistää sitä havaintomaailmaan. Lisäksi opiskelijoille on selkeämpää kuvata derivaattaa Tallin (2004) käsitteellis-ruumiillisessa kuin aksioomaattis-formaalissa maailmassa, mitä tukee myös Hähkiöniemen (2006) väitöskirja.

Kahdeksan vastaajaa kuvaili derivaattaa epätarkasti. Lisäksi neljä opiskelijaa ei muistanut, mitä derivaatta tarkoittaa tai ei vastannut kysymykseen. Näiden vastaajien osuus on 29,3 % koko otannasta. Tästä voidaan päätellä, että derivaatan kuvailu luonnollisella kielellä on osalle opiskelijoista haastavaa, eivätkä nämä opiskelijat täysin ymmärrä derivaatan käsitettä. Samoihin tuloksiin päätyi myös Bezuidenhout (1998) tutkimuksessaan. Osa opiskelijoista kuvaili derivaatan proseduureja tai kertoi derivaatan käyttötarkoituksista. Tämän perusteella voidaan päätellä, että näillä opiskelijoilla on vain proseduraalista tietoa derivaatasta.

Derivaatan hyvä sanallinen ymmärrys oli tutkimuksen odotettu tulos, koska lukion opetussuunnitelman mukaan tavoitteena on, että opiskelijalle muodostuu ”havainnollinen käsitys” derivaatasta.

7.2 Derivoituvuuden ja jatkuvuuden yhteys

Oikeiden vastausten osuus tehtävässä 2 oli 65,9 %, tehtävässä 3 osuus oli 97,6 % ja tehtävässä 4 osuus oli 61,0 %. Näiden perusteella aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden konseptuaalinen tieto derivaatan ja jatkuvuuden suhteesta on melko hyvää, koska oikein vastanneiden osuus on yli puolet otannasta. Kuitenkin jos tarkastellaan yksittäisen opiskelijan vastauksia, on tulos toinen. Opiskelijoista 43,9 % osasi tehdä kaikki jatkuvuuteen liittyvät tehtävät. Koska tämä on alle puolet otannasta, derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisen suhteen ymmärrys on melko heikkoa yksittäisillä opiskelijoilla.

Suurin joukko yksittäisistä opiskelijoista, eli 17,1 % vastanneista teki tehtävissä virheen, jossa he merkitsivät tehtävien 2, 3 ja 4 funktiot derivoituviksi ja jatkuviksi. Tämä kertoo siitä, että opiskelijat eivät ymmärrä, mitä jatkuvuus ja derivoituvuus tai niiden välinen suhde tarkoittavat. Opiskelijoilla saattaa olla myös virhekäsitys, että funktion jatkuvuus ei vaikuta sen derivoituvuuteen. Opiskelijoista 12,2 % teki tehtävät 3 ja 4 oikein, mutta he vastasivat tehtävään 2, että funktio on derivoituva ja jatkuva. Tästä voidaan päätellä, että osalla opiskelijoista on virhekäsitys, että funktion jatkuvuus on riittävä ehto derivoituvuudelle. Tehtävässä saatettiin myös tehdä huolimattomuusvirheitä tai sitten opiskelijat eivät ymmärrä funktion jatkuvuuden käsitettä. Tätä todentaa se, että vastaajista 19,5 % teki tehtävät 2 ja 3 oikein, mutta he vastasivat tehtävään 4, että funktio on derivoituva ja jatkuva tai että funktio ei ole derivoituva, mutta se on jatkuva.

Derivoituvuuden ja jatkuvuuden välisen yhteyden melko heikko osaaminen ei ollut tutkimuksen odotettu tulos: lukion opetussuunnitelman perusteissa kuitenkin painotetaan raja-arvon, jatkuvuuden ja derivoituvuuden muodostaman kokonaisuuden ymmärtämistä. Heikko osaaminen saattaa johtua siitä, että nämä kolme käsitettä ovat jääneet irrallisiksi toisistaan, eikä opiskelijoille ole selvinnyt käsitteiden välinen yhteys. Voi myös olla, että opiskelijat eivät ole täysin ymmärtäneet käsitteitä.

7.3 Erotusosamäärän raja-arvon ymmärrys

Derivaatan määritelmän ymmärtäminen on aloittaville matematiikan yliopisto-opiskelijoille haastavaa. Tämän kertoo se, ettei 26,8 % opiskelijoista vastannut tehtävään 5 ollenkaan ja vain 9,8 % laski tehtävän oikealla menetelmällä ja sai oikean vastauksen. Tehtävän ratkaisuista huomasi, että osa opiskelijoista halusi yrittää ratkaista tehtävää. Kuitenkin joko tiedon- tai ajanpuutteen takia tehtävä oltiin jätetty kesken tai tehtävästä oltiin saatu väärä ratkaisu.

Vastauspapereissa luki, että opiskelija ei muistanut erotusosamäärän raja-arvon kaavaa ja olisi kaivannut taulukkokirjan tehtävästä selviämiseen. Lisäksi joidenkin opiskelijoiden vastaukset vaikuttivat arvailuilta. Näihin joukkoihin kuului yhteensä 24,4 % vastaajista. Tämä kuvastaa sitä, että opiskelijoiden konseptuaalinen tietämys erotusosamäärän raja-arvosta on heikkoa: opiskelijat eivät ole sisäistäneet määritelmää, vaan he tarvitsevat kaavan, jonka avulla he voivat laskea. Opiskelijoilla on siis haasteita derivaatan määritelmän ymmärryksessä eikä heillä ole riittävää tietoa siitä. Samaan tulokseen päätyi myös Pino-Fan et al. (2012) tutkimuksessaan. Tätä tulosta tukee myös Hähkiöniemen (2006) väitöskirja, jossa todetaan, että lukiossa derivaatan opetuksessa jäädään Tallin (2004) toiseen eli proseptuaalis-symboliseen maailmaan.

Opiskelijoista 12,2 % käytti tehtävää ratkaistessaan joko ketjusääntöä tai osamäärän derivoimiskaavaa. Tämän perusteella opiskelijoiden proseduraalinen tietämys derivaatasta on parempaa kuin heidän konseptuaalinen tietonsa. Lisäksi 9,8 % sijoitti x:n arvon suoraan funktion lausekkeeseen. Opiskelijat eivät siis muista tai tiedä, mitä erotusosamärän raja-arvo tarkoittaa. Kyse voi olla puhtaista virhekäsityksistä tai määritelmän käytön välttelystä. Viholainen (2008) päätyi väitöskirjassaan tulokseen, että opiskelijat välttelevät laskuissaan derivaatan määritelmän käyttöä. Tämän lisäksi opiskelijat saattoivat käyttää ulkoaopettelemaansa kaavaa, jota he eivät oikeasti ymmärrä. Tätä samaa teemaa tukee Uygur ja Ozdasin (2005) tutkimus.

Derivaatan määritelmän heikko osaaminen oli tutkimuksen odotettu tulos. Erotusosamäärän raja-arvon erittäin heikko ymmärrys saattaa johtua siitä, ettei sitä mainita erikseen lukion opetussuunnitelman perusteissa. Näin on mahdollista, ettei sitä ole käsitelty riittävän syvällisesti lukiossa. Kuitenkin Juuri- ja Pyramidi-oppikirjoissa määritellään derivaatta erotusosamäärän raja-arvona. Sen sijaan yhdistettyjen funktioiden derivointi ja osamäärän derivointi kuuluvat opetussuunnitelmaan. Tämä saattaa selittää, miksi kyselylomakkeen tehtävässä 5 käytettiin ketjusääntöä tai osamäärän derivoimiskaavaa erotusosamäärän raja-arvon sijaan derivaatan ratkaisemiseksi.

7.4 Derivaattafunktion ja sen funktion kuvailu

Opiskelijoista 80,5 % osasi määrittää derivaattafunktion nollakohdat. Tästä voidaan päätellä, että nollakohtien määrittämisproseduuri on hyvä aloittavilla matematiikan yliopisto-opiskelijoilla. Kuitenkin opiskelijoista 4,9 %:lla on virhekäsitys, että funktion ääriarvokohdat tarkoittavat nollakohtia.

Opiskelijoista 51,2 % osasi määrittää funktion vähenevät välit oikein. Tämä kertoo, että opiskelijat osaavat tulkita jonkin verran derivaattafunktion kuvaajaa. Kriittisin virhekäsitys on 36,6 %:lla opiskelijoista. Heidän mukaan funktion $f(x)$ vähenevät välit olivat derivaattafunktion $f'(x)$ vähenevät välit. Nämä opiskelijat eivät ymmärrä, mitä derivaattafunktion kuvaaja kertoo.

Opiskelijoista 34,1 % osasi määrittää funktion $f(x)$ ääriarvokohdat oikein. Loput opiskelijat eivät osanneet ratkaista tehtävää. Tämän perusteella voidaan todeta, että opiskelijat osaavat heikosti määrittää funktion ääriarvokohtia sen derivaattafunktion kuvaajan perusteella. Kuten tehtävässä 6b, niin myös tehtävässä 6c kriittisen virheen teki 26,8 % opiskelijoista, jotka määrittivät derivaattafunktion $f'(x)$ ääriarvokohdat. Opiskelijoista 9,8 %:lla on virhekäsitys, että funktion $f(x)$ ääriarvokohdilla tarkoitetaan kohtia, joissa derivaattafunktio $f'(x)$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Lisäksi opiskelijoista 4,9 %:lla on virhekäsitys, että jos derivaattafunktion kuvaaja käy arvossa 0, niin siinä on funktion minimikohta.

Koska suuri osa opiskelijoista ei osannut tulkita derivaattafunktion kuvaajaa oikein, voidaan todeta, että derivaatan graafisen representaation tulkinnassa ja ymmärryksessä on puutteita. Tätä väitettä tukee Maharajan (2013) tutkimus. Lisäksi muissa tutkimuksissa (kuten Habre ja Abboud (2006), Orton (1983) ja Aspinwall et al. (1997)) painotetaan graafisen esityksen tärkeyttä differentiaalilaskennan opetuksessa ja että eri representaatoiden käytöllä on yhteyksiä opiskelijoiden derivaatan ymmärrykseen. On siis mahdollista, että lukiossa tai muissa aiemmissa opinnoissa ei ole käsitelty tarpeeksi derivaatan graafista esitystä ja sen yhteyttä algebralliseen laskentaan.

Derivaattafunktion kuvaajan tulkinnan melko heikko ymmärrys saattaa johtua siitä, että lukion opetussuunnitelmassa ei suoraan mainita derivaattafunktioiden kuvaajien tulkinnan osaamista. Voi olla, että lukiossa on keskitytty rutiininomaisiin laskutehtäviin, eikä ole otettu huomioon graafista esitystapaa. Lisäksi lukion oppikirjoissa ei välttämättä ole kiinnitetty huomiota derivaatan graafiseen tulkintaan. Tästä esimerkkina Pyramidi-kirjasarja. Ylioppilastutkinnon sähköistymisen myötä on enemmän teknisiä apuvälineitä käytössä kuvaajien piirtämisiin ja muiden graafisten esitysten muodostamiseen kuin aiemmin.

7.5 Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimusjärjestelyt olivat melko luotettavia. Kysely toteutettiin valvotussa tilassa luentosalissa. Kaikki opiskelijat näyttivät keskittyneiltä, eivätkä jutelleet keskenään tai pyytäneet toisilta apua ratkaisuihin. Kyselyn aikana tarkkailtiin, että vastaajat eivät käyttäneet puhelimia tai taulukkokirjoja vastatessaan kysymyksiin. Ennen vastausten analysointia tarkistettiin kaikkien vastanneiden kandiohjelmat, jotta he olivat tutkimuksen oikeaa kohderyhmää. Luotettavuutta kasvattaa myös se, että kyselyssä opiskelijoita pyydettiin kertomaan, kuinka varmoja he olivat vastauksiensa oikeellisuudesta. Yhtenä vaihtoehtona oli, että opiskelija arvasi vastauksensa. Arvattuja vastauksia ei ollut kuin satunnaisesti yksittäisissä tehtävissä. Tästä seuraa, että lähes kaikki opiskelijat vastasivat tehtäviin oikeilla taidoillaan ja ottivat kyselyyn vastaamisen tosissaan.

Syksyllä 2017 aloitti 156 opiskelijaa matemaattisten tieteiden kandiohjelmassa ja 28 opiskelijaa matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelmassa. Tutkimuksen kyselyyn vastasi 41 opiskelijaa, mikä on 22,3 % molempien kandiohjelmien opiskelijoista. Tämän vuoksi kyselyn perusteella ei saa täysin luotettavaa kuvaa opiskelijoiden derivaatan ymmärryksestä, koska otanta on pieni. Kysely toteutettiin luennolla, jolla ei ole läsnäolopakkoa, joten suurin osa opiskelijoista ei osallistu luennoille. Lisäksi ennen kyselyn alkua painotettiin opiskelijoille, että vastaaminen on täysin vapaaehtoista mutta toivottavaa. Tämä saattoi myös karsia vastaajia, koska kysely järjestettiin luennon päätteeksi. Kyselyn vastaamisaika rajoitettiin kahteenkymmeneen minuuttiin, koska sen todettiin riittävän. Lähes kaikille vastaajille aika oli sopiva, mutta noin viisi opiskelijaa teki kyselyä aivan viime minuuteille saakka ja heidän työskentelynsä jouduttiin keskeyttämään. Tämä saattaa vääristää tuloksia, koska opiskelijoilla oli kiire saada vastattua kysymyksiin ja he saattoivat tehdä hätiköityjä ratkaisuja.

Tehtävän 5 perusteella ei voi muodostaa täysin luotettavaa kuvaa opiskelijoiden erotusosamäärän raja-arvon ymmärryksestä, koska moni opiskelija jätti vastaamatta tehtävään. Toisaalta moni vastaaja ei tullut lukemaan yliopistoon matematiikkaa heti lukion jälkeen, vaan ylioppilaaksi kirjoittamisesta oli kulunut aikaa. Tällöin derivaattaan liittyvät käsitteet ja määritelmät olivat saattaneet unohtua, vaikka ymmärrys olisikin hyvä. Tehtävässä 6 moni vastaaja tutki derivaattafunktion kuvaajaa ja määritti sen perusteella vastaukset tehtäviin. Tässä tapauksessa kyse voi olla opiskelijoiden todellisesta ymmärryksestä, mutta toisaalta opiskelijat ovat voineet tehdä myös huolimattomuusvirheitä: he eivät mahdollisesti lukeneet tehtävänantoa huolellisesti ja ovat tarkoituksella tulkinneet tehtävässä derivaattafunktion kuvaajaa. Nämä asiat vähentävät tutkimuksen luotettavuutta.

7.6 Jatkotutkimusaiheita

Tätä tutkimusta voisi jatkaa seuraamalla, miten tähän tutkimukseen vastanneiden opiskelijoiden derivaatan käsitys kehittyy yliopisto-opintojen aikana. Yliopistossa tavoitellaan asioiden formaalia ymmärrystä. Tämän takia olisi mielenkiintoista selvittää, miten opiskelijoiden konseptuaalinen tieto derivaatasta kehittyy. Lisäksi kiinnostavaa olisi tutkia, pääsevätkö yliopisto-opiskelijat Tallin (2004) aksioomaattisformaaliin maailmaan derivaatan ymmärryksessä.

Yliopistomatematiikassa perehdytään analyysiin syvällisesti, joten olisi mielenkiintoista tutkia, miten vastaajilla kehittyy opintojen aikana yhteydet eri derivaattaan liittyvien käsitteiden, kuten jatkuvuuden ja raja-arvon välille. Olisi kiinnostavaa selvittää, miten opiskelijoiden ajatukset kehittyvät formaalien määritelmien käytön avulla. Kun formaalia esitystä tuodaan yliopistossa esille, voisi myös tutkia, miten vastanneiden opiskelijoiden visuaalinen hahmottaminen derivaatasta kehittyy; jääkö se kokonaan pois, vai ratkotaanko tehtäviä ensin hahmottelemalla tapauksista kuvia, minkä jälkeen käytetään eksakteja määritelmiä.

Tämän saman kyselyn voisi myös tehdä muutaman vuoden kuluttua aloittaville matematiikan opiskelijoille, jotka ovat suorittaneet lukion vuoden 2015 opintosuunnitelman mukaan. Tällöin voisi verrata, onko ylioppilaskirjoitusten sähköistyminen vaikuttanut derivaatan ymmärrykseen. Tietokoneohjelmistot tuovat opetukseen paljon visuaalisia mahdollisuuksia ja oppitunneilla pitäisi voida keskittyä syvälliseen ymmärrykseen rutiinilaskutehtävien sijaan. Toisaalta voisi olla myös kiinnostavaa tutkia, onko tietokoneohjelmistojen käytöllä haittavaikutuksia derivaatan ymmärrykseen.

Luku 8

Johtopäätökset

Tämän tutkimuksen perusteella voidaan todeta, että derivaatta on vaikea käsite aloittaville matematiikan yliopisto-opiskelijoille. Konseptuaalisessa tiedossa on puutteita ja proseduraalista tietoa käytetään sitä enemmän. Derivaatta ymmärretään parhaiten konkreettisesti. Sen sijaan määritelmien käyttö tuottaa paljon haasteita opiskelijoille.

Sanallisesti derivaatta käsitetään parhaiten funktion tangentin kulmakertoimena tietyssä pisteessä. Myös derivaatan ymmärtäminen muutosnopeutena on yleistä. Jatkuvuuden ja derivoituvuuden välisen yhteyden ymmärtäminen on yksittäisillä opiskelijoilla melko heikkoa. Yleisimmät virhekäsitykset ovat, että ensinnäkin funktion jatkuvuus ei vaikuta sen derivoituvuuten. Toisena virhekäsityksenä on, että funktion jatkuvuus on riittävä ehto sen derivoituvuudelle.

Opiskelijoiden erotusosamäärän raja-arvon ymmärtäminen on erittäin heikkoa. Koska derivaatan määritelmää ei osata käyttää eikä sitä ymmärretä, ei opiskelijoilla ole riittävää konseptuaalista tietoa derivaatasta, eivätkä he ole derivaatan ymmärryksessä päässeet Tallin (2004) aksioomaattis-formaaliin maailmaan. Derivaatan määritelmän ymmärtämättömyyttä puoltaa se, että osa opiskelijoista olisi tarvinnut erotusosamäärän raja-arvon kaavan tehtävästä 5 selviämiseen: kaava on aikaisemmin opeteltu ulkoa, eikä sitä täysin ymmärretä. Opiskelijoilla on selkeä virhekäsitys, että derivaatan arvon saa sijoittamalla annetun x:n arvon funktion lausekkeeseen. Lisäksi on mahdollista, että opiskelijoilla on virhekäsitys, jossa ketjusääntö tai osamäärän derivointikaava tarkoittavat erotusosamäärän raja-arvoa.

Derivaattafunktion graafisen esityksen tulkinta on haastavaa opiskelijoille. Tästä voidaan päätellä, että derivaatan graafisen representaation ymmärrys on melko heikkoa ja konseptuaalisessa tiedossa on puutteita. Opiskelijat osaavat tulkita derivaattafunktiota melko hyvin funktion vähenevyyden selvittämisessä, mutta derivaattafunktion kuvaajan avulla funktion ääriarvokohtien määrittäminen on heikkoa. Yleisin virhekäsitys on, että derivaattafunktiolla on samat vähenevät välit ja ääriarvokohdat kuin sen funktiolla. Lisäksi merkittävänä virhekäsityksenä on, että funktion ääriarvokohdilla tarkoitetaan kohtia, joissa derivaattafunktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa.

Viitteet

Aspinwall, L., Shaw, K. L., & Presmeg, N. C. (1997). Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 301–317.

Bezuidenhout, J. (1998). First-year university students' understanding of rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *29*(3), 389–399.

Davis, R. B., & Maher, C. A. (1997). How students think: The role of representations. *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*, 93–115.

Donaldson, M. (1963). *A study of children's thinking.* Routledge.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 137–165.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. Teoksessa *Pme conference* (osa 2, s. 72–79).

Gray, E., & Tall, D. (1993). Success and failure in mathematics: the flexible meaning of symbols as process and concept. *Mathematics teaching*, *14*, 6–10.

Gray, E., & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: An explanatory theory of success and failure in mathematics. Teoksessa *Pme conference* (osa 3, s. 3–65).

Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää. *Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen T. & P.*

Malinen (toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen, *2*, 50–83.

Haapasalo, L., & Kadijevich, D. (2000). Two types of mathematical knowledge and their relation. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *21*(2), 139–157.

Habre, S., & Abboud, M. (2006). Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(1), 57–72.

Hähkiöniemi, M. (2006). *The role of representations in learning the derivative.* University of Jyväskylä.

Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luoma-aho, E., Raittila, T., & Tikka, T. (2015). *Juuri 6, derivaatta.* Kustannusosakeyhtiö Otava.

Hannula, J. (2014). Matematiikan kuusi osaa: David tallin matematiikan kolmen maailman viitekehyksen laajentaminen juha oikkosen matematiikan kaksilla kasvoilla. *LUMAT (2013-2015 Issues)*, *2*(1), 59–68.

Harjulehto, P., Klén, R., & Koskenoja, M. (2014). Analyysiä reaaliluvuilla. *Unigrafia Oy.*

Helsingin yliopisto. (2017). *Differentiaalilaskenta-kurssin kurssisivu, matemaattisten tieteiden kandiohjelma.* Lainattu 2017-08-08, saatavilla `https://courses.helsinki.fi/fi/MAT11004/120017422.`

Kontkanen, P., Lehtonen, J., Liira, R., Luosto, K., & Ronkainen, A. (2006). *Pyramidi 7, lukion pitkä matematiikka, derivaatta.* Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Krantz, S. G. (2007). *The history and concept of mathematical proof* (osa 5). February.

Linnanmäki, K. (2004). Minäkäsitys ja matematiikan oppiminen. *Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) Matematiikka-*

näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma, 241–254.

Maharaj, A. (2013). An apos analysis of natural science students' understanding of derivatives. *South African Journal of Education*, *33*(1), 1–19.

Malinen, P. (1998). Oppilaiden kehittyminen todistamisajatteluun. *Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen, P.(toim.) Matematiikka–näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Jyväskylä: Niilo Mäki instituutti & Koulutuksen tutkimuslaitos*, 99–110.

McKendree, J., Small, C., Stenning, K., & Conlon, T. (2002). The role of representation in teaching and learning critical thinking. *Educational Review*, *54*(1), 57–67.

Mehto, A. (2013). Aloittavien matematiikan opiskelijoiden varmuus omasta osaamisestaan ja sen vaikutus tehtävien ratkaisuun sekä tyypillisimmät virheet.

Opetushallitus. (2003). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.*

Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015.*

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 235–250.

Panasuk, R. M. (2010). Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations. *Education*, *131*(2).

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative. Teoksessa *Proceedings of the 36th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (osa 3, s. 297–304).

Reyes, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal*, *84*(5), 558–581.

Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. *Oxford handbook of numerical cognition*, 1102–

1118.

Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M. (2009). Derivatives and applications; development of one student's understanding. Teoksessa *Proceedings of cerme* (osa 6).

Sarikka, H. (2014). Kielentäminen matematiikan opetuksen ja oppimisen tukena.

Schwartz, D. L., Chase, C. C., Oppezzo, M. A., & Chin, D. B. (2011). Practicing versus inventing with contrasting cases: The effects of telling first on learning and transfer. *Journal of Educational Psychology*, *103*(4), 759.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Uygur, T., & Ozdas, A. (2005). Misconceptions and difficulties with the chain rule. *The Mathematics Education into the 21st century Project*.

Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teachers' informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*. University of Jyväskylä.

Liite 1: Kyselylomake aloittaville matematiikan yliopisto-opiskelijoille

Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää aloittavien matematiikan yliopisto-opiskelijoiden derivaatta-käsitteen ymmärrystä ja laskuvarmuutta näissä tehtävissä. Kyselyssä saa käyttää ainoastaan kynää ja pyyhekumia.

Suostumus tietojen luovutukseen tutkimuskäyttöön

Olen saanut riittävästi tietoa tutkimuksen kulusta ja minulle on tiedotettu, että saan halutessani nimetyltä tutkijalta lisätietoja. Olen ymmärtänyt, että osallistumiseni tutkimukseen on vapaaehtoista ja että voin keskeyttää tutkimuksen missä vaiheessa tahansa ilman seuraamuksia.

Minulle on selvitetty, että minua koskeva tutkimusaineisto on vain nimetyn tutkijan käytössä. Olen ymmärtänyt, että henkilötietojani kysytään, koska niitä tarvitaan, jos nimetty tutkija haluaa lisätietoja vastauksistani. Muuten vastauksia ei yhdistetä erikseen kehenkään. Olen ymmärtänyt, että tutkimus ei vaikuta opintomenestykseni arviointiin.

Olen ymmärtänyt, että tutkimuksessa kerättävä tieto on tarkoitettu vain tieteelliseen käyttöön. Tutkimuksen kaupallinen hyödyntäminen on kielletty.

- ☐ Suostun luovuttamaan tietojani tutkimuskäyttöön.
- ☐ Kieltäydyn luovuttamasta tietojani tutkimuskäyttöön.

Perustiedot

Opiskelijanumero: ______________________________________

Ylioppilaaksi kirjoittamisvuosi: _____________________________

- ☐ En ole kirjoittanut ylioppilaaksi

Ylioppilaskirjoituksissa kirjoitin

- ☐ pitkän matematiikan arvosanalla ___________________
- ☐ lyhyen matematiikan arvosanalla ___________________
- ☐ en kirjoittanut matematiikkaa

- ☐ Olen matemaattisten tieteiden kandiohjelman opiskelija
- ☐ Olen matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan kandiohjelman opiskelija

1) Kuvaile omin sanoin, mitä derivaatta tarkoittaa.

2) Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} -x+1, & kun\ x < 0 \\ x+1, & kun\ x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

a) Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 0.
b) Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 0.
c) Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 0.

3) Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} -x+1, & kun\ x < 0 \\ x+1, & kun\ x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

a) Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 1.
b) Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 1.
c) Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 1.

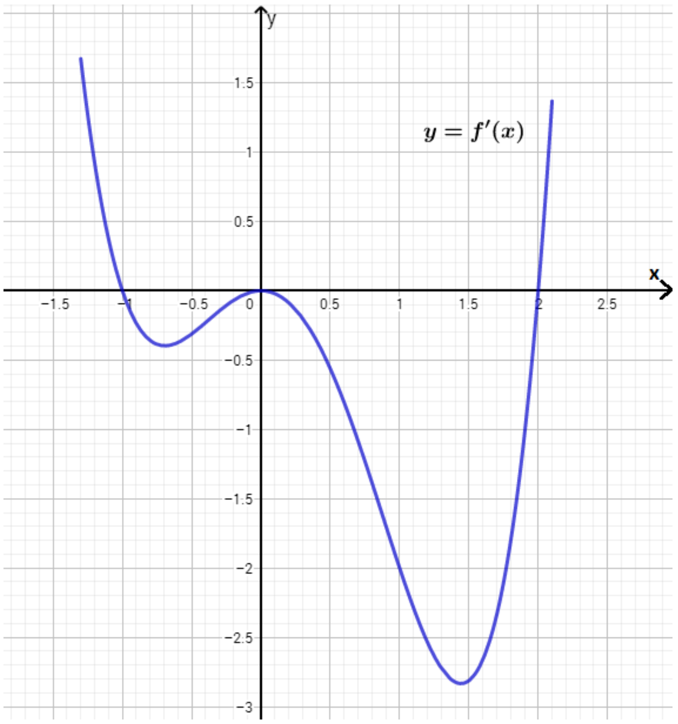
4) Tarkastellaan funktiota $f(x) = \begin{cases} x, & kun\ x < 0 \\ x+1, & kun\ x \geq 0 \end{cases}$

Valitse yksi oikea vaihtoehto.

a) Funktio on derivoituva ja jatkuva kohdassa 0.
b) Funktio ei ole derivoituva mutta on jatkuva kohdassa 0.
c) Funktio ei ole jatkuva eikä derivoituva kohdassa 0.

5) Määritä funktion $f(x) = \frac{1}{x+2}$ derivaatta erotusosamäärän raja-arvon avulla kohdassa $x = -1$.

6) Alla olevassa kuviossa on erään funktion $f(x)$ derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja välillä $-1{,}3 < x < 2{,}1$.



a) Määritä kuvaajan perusteella derivaattafunktion $f'(x)$ nollakohdat.

b) Määritä kuvaajan perusteella ne välit, joilla funktio $f(x)$ on vähenevä.

c) Määritä kuvaajan perusteella funktion $f(x)$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden tyypit.

7) Kuinka varma olet, että vastasit tehtävään oikein? Merkitse tehtävänumeron kohdalle numero, joka kertoo vastausvarmuudestasi.

0 = arvasin vastauksen　　1 = täysin epävarma
2 = jonkin verran epävarma　　3 = melko varma　　4 = täysin varma

Tehtävänumero 1) __________　　Tehtävänumero 5) __________

Tehtävänumero 2) __________　　Tehtävänumero 6a) __________

Tehtävänumero 3) __________　　Tehtävänumero 6b) __________

Tehtävänumero 4) __________　　Tehtävänumero 6c) __________