HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Markus Metso

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Lokaalin riskin minimoivat sijoitusstrategiat ja arbitraasi

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Marraskuu 2017	44 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Lokaalin riskin minimoiva sijoitusstrategia on diskreettiaikainen, arvopapereiden hankkimisesta aiheutuvien kustannusten keskineliöpoikkeaman minimointiin perustuva strategia, jonka avulla finanssimarkkinoilla toimiva pystyy suojautumaan kohtuuttoman suuria tappioita vastaan. Luonnollisesti tällaisella suojautumisella on jonkin hinta, ja mikäli tämä hinta on liian suuri tai liian pieni, päädytään helposti arbitraasitilanteisiin. Tässä tutkielmassa esitetään vaatimukset, jotka finanssimarkkinoiden tulee täyttää ja jotka toimijan tulee arvopapereiden kanssa operoidessaan ottaa huomioon, jotta tällaisia tilanteita ei pääsisi muodostumaan.

Lokaalin riskin minimoivan sijoitusstrategian arbitraasivapauden keskeinen vaatimus on minimaalisen martingaalimitan, erään riskineutraalien todennäköisyysmittojen erikoistapauksen, olemassaolo. Minimaalisen martingaalimitan olemassaolo finanssimarkkinoilla ei kuitenkaan ole itsestäänselvyys ja tässä tutkielmassa johdetaan edellytykset sen löytymiselle finanssimarkkinoilta, jotka koostuvat yhdesta riskittömästä ja yhdestä riskillisestä arvopaperista, sekä pohditaan, mitä seikkoja toimijan tulee tarkastella arbitraasin välttämiseksi tilanteessa, jossa minimaalisen martingaalimitan olemassaolon kriteerit eivät täyty.

Lopuksi tarkastellaan lokaalin riskin minimoivien sijoitusstrategioiden yhteyksiä sijoitussidonnaisten henkivakuutusten suojaamiseen, sekä esitetään vaihtoehtoinen keino suojata toistettavan arvopaperin arvoon sidotun elämänvaravakuutuksen korvaus tilanteessa, jossa finanssimarkkinoilla ei ole olemassa minimaalista martingaalimittaa.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Lokaali riski, Arbitraasi, Minimaalinen martingaalimitta, Sijoitussidonnainen henkivakuutus

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Lokaalin riskin minimoivat sijoitusstrategiat ja arbitraasi

Markus Metso

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Finanssimarkkinoilla jokainen rationaalinen toimija haluaa tavoitella itselleen mahdollisimman paljon voittoa ja pyrkiä mahdollisimman pieniin tappioihin. Toimijoilla on usein vastattavinaan erilaisia velvoitteita ja nämä luonnollisesti haluavat suoriutua niistä mahdollisimman edullisesti, eli toimijat haluavat minimoida velvotteisiinsa liittyvät riskit niin tehokkaasti, kuin mahdollista. Tässä tutkielmassa keskitytään yhteen tällaiseen menetelmään, niin kutsuttuun *lokaalin riskin minimointiin*. Koska toimijat haluavat itselleen mahdollisimman paljon hyötyä, tavoittelevat he luonnollisesti tilanteita, joissa on mahdollisuus tehdä voittoa ilman tappion riskiä. Tässä tutkielmassa tarkastellaan, miten lokaalin riskin minimointi liittyy tällaisiin tilanteisiin.

Tutkielman toisessa luvussa puetaan nämä asiat matemaattiseen muotoon ja esitetään muun muassa arbitraasin, martingaalien, sekä riskineutraalien todennäköisyysmittojen käsitteet. Niiden avulla tarkastellaan ehtoja, jotka takaavat toimijoiden pystymättömyyden riskittömiin voittoihin.

Kolmannessa luvussa esitellään lokaalin riskin minimointi ja siihen liittyvät vaatimukset. Tämä tehdään määritelmien, lauseiden ja esimerkin avulla. Luvussa käsitellään myös erästä stokastisen prosessien jatkossa hyödyllistä ominaisuutta, niin sanottua *vahvaa ortogonaalisuutta*.

Neljännessa luvussa yhdistetään arbitraasivapaus ja lokaalin riskin minimointi. Käy ilmi, että nämä kytkeytyvät toisiinsa niin kutsutun minimaalisen martingaalimitan kautta. Tätän varten esitellään muun muassa *Hilbert-avaruuden* ominaisuuksia ja diskreettiaikainen versio *Kunita-Watanaben hajotelmasta*. Näiden avulla esitetään ehdot minimaalisen martingaalimitan olemassaololle. Lopuksi esitetään esimerkki minimaalisesta martingaalimitasta ja pohditaan tilannetta, jossa tällaista ei löytyisikään.

Viidennessä luvussa yhdistetää lokaalin riskin minimointi ja minimaaliset martingaalimitat sijoitussidonnaisten henkivakuutusten suojaamiseen, sekä käsitellään sijoitussidonnaisen elämänvaravakuutuksen suojaamista tilanteessa, jossa minimaalista martingaalimittaa ei ole olemassa.

Luku 2

Arvopaperit, salkut ja arbitraasimahdollisuudet

Tässä luvussa tutustutaan lyhyesti finanssimarkkinoiden matemaattiseen esitystapaan, arbitraasikäsitteeseen, sekä arbitraasivapauden edellytyksiin.

2.1 Finanssimarkkinat

Finanssimarkkinat koostuvat erilaisista arvopapereista. Tällaisia ovat esimerkiksi erilaiset osakkeet ja optiot. Nämä ovat niin sanotusti riskillisiä arvopapereita, eli niiden arvoa tulevaisuudessa ei voida varmuudella tietää. Sen vuoksi ne kuvataan satunnaismuuttujina jollakin todennäköisyyskentällä. Lisäksi on olemassa riskittömia arvopapereita kuten *bondi* (eng. *bond*), joka antaa omistajalleena sovittuna hetkenä, nk. *maturiteettihetkenä* (eng. *maturity*), summan 1. Toimijan omistaman k-vuotisen bondin voidaan ajatella vastaavan k:n vuoden pankkitalletusta, jolloin bondin eri hetkien arvoihin vaikuutta ainoastaan korko. Tässä tutkielmassa oletetaan tästä eteenpain, että markkinoilla on aina saatavilla bondi ja että korko on vakio.

Jatkossa oletetaan myös, ellei toisin mainita, että markkinoilla on n kappaletta arvopapereita ja että näitä on vapaasti ostettavissa ja myytävissä kaikkina diskreetteinä *kaupankäyntihetkinä* (eng. *trading time*) $k = 0, 1, ..., T$. Arvopaperin n, $n = 1, 2, ..., N$, arvoa hetkellä k merkitään symbolilla $\tilde{S}_n(k)$ kaikilla $k = 0, 1, ..., T$. Arvopaperi 1 on tästä eteenpäin aina bondi, joten sen arvot ovat vakioita jokaisena ajanhetkena. Sen sijaan arvopaperit $2, 3, ..., N$ ovat riskillisiä ja niiden arvoista ainoastaan hetken 0 arvo, eli hinta, on tunnettu. Hetkien $1, 2, ..., T$ arvot ovat satunnaismuuttujia ja niiden tulee olla määriteltynä mallin taustalla olevalla todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On myös mahdollista, että 'toteutunut maailmantila' $\omega \in \Omega$ kirjoitetaan näkyviin, jolloin arvopaperin n hetken k arvoa kuvataan symbolilla $\tilde{S}_n(k, \omega)$.

Finanssimarkkinoiden matemaattisessa mallinnuksessa arvopapereita hankittavat määrät kuvataan stokastisina prosesseina, mikäli kaupankäyntihetkiä on enemmän kuin yksi. Tätä esitystapaa varten tarvitsemme vielä seuraavat määritelmät.

Määritelmä 2.1. *Filtraatioksi* todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ kutsutaan sigma-algebraperhettä $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_k : k = 0, 1, ..., T\}$, jolle pätee

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T. \tag{2.2}$$

Voidaan lisäksi olettaa, että

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{ja} \quad \mathcal{F}_T = \mathcal{F}. \tag{2.3}$$

Filtraation sisältävää todennäköisyyskenttää kutsutaan *stokastiseksi kentäksi* ja siitä käytetään merkintää $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$.

Tämän tutkielman kontekstissa sigma-algebra $\mathcal{F}_k$ kuvaa hetkellä k saatavilla olevaa informaatiota, kuten esimerkiksi jonkin arvopaperin hintakehitystä hetkeen k mennessä.

Määritelmä 2.4. Stokastinen prosessi X on $\mathbb{F}$-*sopiva* (tai lyhyemmin *sopiva*) (eng. *adapted*), jos $X(k)$ on $\mathcal{F}_k$ -mitallinen kaikilla $k = 0, 1, ..., T$.

Määritelmä 2.5. Stokastinen prosessi X on $\mathbb{F}$-*ennustettava* (tai *ennustettava*) (eng. *predictable*), jos $X(k)$ on $\mathcal{F}_{k-1}$ -mitallinen kaikilla $k = 1, 2, ..., T$

Määritelmä 2.6. Hetkellä k hankittavaksi *salkuksi* (eng. *portfolio*), kutsutaan N-ulotteista vektoria $\theta(k) = (\theta_1(k), \theta_2(k), ..., \theta_N(k))^T$.

$\theta_n(k) \in \mathbb{R}$ kuvaa arvopaperia n hetkellä k hankittavaa määrää. Se voi olla siis myös negatiivinen, jolloin puhutaan ns. *lyhyeksi myynnistä*, joka voidaan ajatella niin, että toimija lainaa kyseisen määrän arvopaperia ja myy sen heti eteenpäin. Luonnollisesti tämä laina tulee maksaa takaisin ja jos arvopaperin hinta on matalampi takaisinmaksuhetkenä, jää toimija voitolle ja vastaavasti tappiolle, mikäli arvopaperin hinta nousee.

Prosessi $\theta = \{\theta(k) : k = 0, 1, ..., T\}$ kuvaa hankittavaa arvopapereiden määrää kunakin kaupankäyntihetkenä. Strategia on *omavarainen* (eng. *self-financing*), kun sen ainoa kustannus syntyy salkun perustamisesta ja tästä eteenpäin suoritukset hetkellä $k = 1, 2, ..., T$

rahoitetaan ainoastaan senhetkisen salkun varallisuudella. Mikäli strategia on omavarainen, toimija hankkii hetkellä $k-1$ haluamansa arvopaperit, pitää niitä hallussaan hetkeen k saakka ja tällöin realisoi salkkunsa. Toimija tietää siis jo hetkellä $k-1$ kuinka paljon hänellä on hallussaan arvopaperia n hetkellä k, joten $\theta(k) \in \mathcal{F}_{k-1}$. Arvopapereita hankittavat määrät on siis luonnollista kuvata tässä tapauksessa ennustettavina prosesseina. Näin ei kuitenkaan aina ole, vaan luvussa 3 tarkastellaan myös sopivia prosesseja.

Arvopapereiden arvokehitykset kuvataan sopivina stokastisina prosesseina, sillä on perusteltua olettaa, että hetkellä k tiedetään kunkin arvopaperin senhetkinen arvo. Salkun arvo hetkellä k on

$$\sum_{n=1}^{N} \tilde{S}_n(k)\theta_n(k) := \tilde{S}(k)\theta(k),$$

missä $\tilde{S}(k) \in \mathbb{R}^N$ on nk. *arvovektori*. Jatkossa arvovektoria merkitään selvyyden vuoksi symbolilla $(\tilde{S}_1(k), \tilde{S}'(k))$, missä $\tilde{S}'(k) := (\tilde{S}_2(k), \tilde{S}_3(k), ..., \tilde{S}_N(k))$ on riskillisten arvopapereiden muodostama $(N-1)$ -ulotteinen vektori.

Todellisuudessa bondin hinta ei ole koskaan 1, sillä korko vaikuttaa siihen. Tässä tutkielmassa oletetaan, etta korko r on vakio ja $r > -1$, jolloin hetkellä k ostetun t -vuotisen bondin hinta on $(1+r)^{-t}$. Tosiaan, kun tämä summa talletetaan t:ksi vuodeksi r-korkoiselle pankkitilille, on hetkellä $k+t$ nostettavissa summa 1. Korko vaikuttaa myös riskillisiin arvopapereihin, sillä sen vaikutuksesta niiden hetkien $1, 2, ..., T$ arvot eivät ole vertailukelpoisia hetken 0 arvon kanssa. Tämä korjataan *diskonttaamalla* (eng. *discount*) hetken k arvot hetkeen 0, eli laskemalla arvopaperin arvon *nykyarvo*. Diskonttaustekijänä, eli *numeräärinä* (eng. *numéraire*) toimii riskitön arvopaperi, jolloin arvopaperin n hetken k diskontattu (hetkeen 0) arvo on

$$S_n(k) := \frac{\tilde{S}_n(k)}{\tilde{S}_1(k)}.$$

Esimerkki 2.7. Tarkastellaan yhden periodin finanssimarkkinoita, jotka koostuvat kahdesta arvopaperista, bondista ja osakkeesta. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että korko r on 0, jolloin $\tilde{S}_1 \equiv 1$. Olkoon osakkeen hetken 0 arvo $3/2$ ja hetken 1 mahdolliset arvot ovat 0, 2 ja 3 todennäköisyyksillä $1/6, 1/2$ ja $1/3$. Mallissa on siis kolme "maailmantilaa", jolloin perusjoukko Ω koostuu kolmesta alkiosta. Matemaattisesti esitettynä tilanne on siis seuraava.
Merkitään $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, missä $\omega_1 = \{S_2(1) = 0\}, \omega_2 = \{S_2(1) = 2\}$ ja $\omega_3 = \{S_2(1) = 3\}$. Lisäksi $\mathbb{P}(\omega_1) = 1/6$, $\mathbb{P}(\omega_2) = 1/2$ ja $\mathbb{P}(\omega_3) = 1/3$.

2.2 Arbitraasi

Esimerkiksi markkinoiden tehottomuudesta johtuen markkinoilla voi esiintyä *arbitraasimahdollisuuksia* (eng. *arbitrage opportunities*), eli mahdollisuuksia tehdä tyhjästä rahaa. Matemaattisesti muotoiltuna asia voidaan esittää seuraavasti.

Määritelmä 2.8. Markkinoilla on arbitraasimahdollisuus, jos on olemassa sellainen omavarainen strategia θ, että

1. $S(0)\theta(0) \leq 0$
2. $\mathbb{P}(S(T)\theta(T) \geq 0) = 1$
3. $\mathbb{P}(S(T)\theta(T) > 0) > 0$.

Toisien sanoen, että ilman alkuvaroja, tai jopa negatiivisella sellaisella, on mahdollisuus tehdä voittoa ilman tappion riskiä. Seuraavaksi esitetään riittävä ja välttämätön ehto arbitraasivapaudelle, mutta ensin kerrataan eräät todennäköisyysteoriasta tutut määritelmät. Tarkastellaan todennäköisyyskenttää $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Määritelmä 2.9. Kaksi todennäköisyysmittaa $\mathbb{P}$ ja $\mathbb{P}^*$ avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ ovat keskenään ekvivalentteja, jos $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}^*(A) = 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$. Tällöin merkitään $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$.

Määritelmä 2.10. Olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Satunnaismuuttujan Y, jolle pätee $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, *ehdollinen odotusarvo* (eng. *conditional expectation*) $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$ on mikä tahansa satunnaismuuttuja, joka toteuttaa ehdon

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}}\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\mathcal{A}}Y] \tag{2.11}$$

kaikilla $\mathcal{A} \in \mathcal{G}$

Lause 2.12. *Ehdollisen odotusarvon ominaisuuksia*

1. *Jos satunnaismuuttuja Y on $\mathcal{G}$-mitallinen, niin $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = Y$ $\mathbb{P}$-m.v.*
2. *Jos satunnaismuuttuja Y on riippumaton sigma-algerasta $\mathcal{G}$, niin $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[Y]$ $\mathbb{P}$-m.v.*
3. *Jos $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$, niin $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_2]\big|\mathcal{G}_1\big] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{G}_1]$. Erityisesti $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[Y]$.*

Todistus. Kts. esim [4]. □

Tästä eteenpäin merkintää $\mathbb{E}$ käytetään fyysisen todennäköisyysmitan tapauksessa. Mikäli odotusarvo otetaan jonkin muun todennäköisyysmitan $\mathbb{P}^*$ suhteen, käytetään merkintää $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}$.

Määritelmä 2.13. $\mathbb{F}$-sopivaa stokastista prosessia X kutsutaan $\mathbb{P}^*$-*martingaaliksi* (eng. *martingale*), jos kaikilla $k = 0,\ 1,...,\ T-1$

1. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[|X(k)|] < \infty$
2. $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X(k+1)|\mathcal{F}_k] = X(k)$.

Martingaali on siis ikään kuin stokastinen versio vakiofunktiosta. Martingaaleilla mallinnetaan usein esimerkiksi vedonlyönnissä "reiluja"pelejä: jos X on martingaali ja $X(k)$ kuvaa uhkapelaajan varallisuutta hetkellä k, on peli reilu siinä mielessä, että varallisuuden lisäyksen odotusarvo on 0 jokaisella välillä $[k, k+1)$. Tarkastellaan vieä muutamia jatkossa hyödyllisiä martingaalien ominaisuuksia.

Lemma 2.14. *Kahden martingaalin summa on martingaali.*

Todistus. Olkoon M ja N martingaaleja, jolloin kaikilla $k = 0, 1, 2, ...$

$$\mathbb{E}[M(k) + N(k)] = \mathbb{E}[M(k)] + \mathbb{E}[N(k)] < \infty.$$

Lisäksi

$$\mathbb{E}[M(k+1) + N(k+1)|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[M(k+1)|\mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[N(k+1)|\mathcal{F}_k] = M(k) + N(k).$$

□

Määritelmä 2.15. Reaaliarvoinen satunnaismuuttuja τ on *pysäytyshetki* (eng.*stopping time*), jos $\{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Finanssimarkkinoita tarkastellessa pysäytyshetki voi kuvata esimerkiksi hetkeä, jolloin toimija päättää suorittaa jonkin operaation koskien tiettyä arvopaperia. Tämä voi esimerkiksi suunnitella myyvänsa arvopaperin, kun sen arvo on tarpeeksi korkea, jolloin τ on se hetki, kun arvopaperi saa tämän arvon. Se on luonnollisesti satunnaismuuttuja, sillä se määräytyy toisen satunnaismuuttujan mukaan ja se on $\mathcal{F}_k$-mitallinen, sillä hetkellä k toimija tietää onko arvo jo ollut halutunsuuruinen. Seuraavaksi huomataan, että mikäli arvopaperin diskontattu arvoprosessi on martingaali, toimija ei voi valita pysäytyshetkeä siten, että saisi siitä hyötyä odotusarvotasolla. Tulos on versio *Doobin pysäytyslauseesta* (eng. *Doob stopping theorem*). Sitä varten esitetään vielä pysäytetyn sigma-algebran määritelmä.

Määritelmä 2.16. Olkoon σ pysäytyshetki. Tällöin

$$\mathcal{F}_\sigma := \{\mathcal{A} \in \mathcal{F} : \mathcal{A} \cap \{\sigma \leq k\} \in \mathcal{F}_k \text{ kaikilla } k\}$$

on pysäytetty sigma-algebra.

Lause 2.17. *Olkoon $\tilde{M}$ $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali. Tällöin*

1. *$\tilde{M}(k \wedge \tau)$ on $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali kaikilla pysäytyshetkillä τ*
2. *$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}(k \wedge \tau)\big] = \tilde{M}(0)$*
3. *$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[M(\tau)\big|\mathcal{F}_\sigma\big] = M(\tau \wedge \sigma)$ kaikille pysäytyshetkille $\tau \leq T$ ja σ.*

Todistus. Osoitetaan ensin kohta 1. Merkitään $\tilde{M}^\tau(k) := \tilde{M}(k \wedge \tau)$ ja huomataan, että

$$\tilde{M}^\tau(k+1) - \tilde{M}^\tau(k) = \big(\tilde{M}(k+1) - \tilde{M}(k)\big)\mathbb{I}_{\{\tau > k\}}.$$

Koska τ on pysäytyshetki, $\{\tau > k\} \in \mathcal{F}_k$ ja

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}^\tau(k+1) - \tilde{M}^\tau(k)\big|\mathcal{F}_k\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}(k+1) - \tilde{M}(k)\big|\mathcal{F}_k\big] \cdot \mathbb{I}_{\{\tau > k\}} = 0.$$

Kohdan 2 osoittamiseksi riittää huomata, että

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}^\tau(k)\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\Big[\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}^\tau(k)\big|\mathcal{F}_0\big]\Big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}^\tau(0)\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}(0)\big] = \tilde{M}(0).$$

Osoitetaan vielä kohta 3. Olkoon $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_\sigma$. Huomataan, että

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_\mathcal{A} M(\tau)\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau\leq\sigma\}} M(\tau)\big] + \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau>\sigma\}} M(\tau)\big]. \tag{2.18}$$

Lisäksi

$$\mathcal{A} \cap \{\sigma = k\} \cap \{\tau > \sigma\} = \mathcal{A} \cap \{\sigma = k\} \cap \{\tau > k\} \in \mathcal{F}_k,$$

joten koska kohdan 2 mukaan pysäytetty prosessi M^τ on martingaali

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau>\sigma\}} M(\tau)\big] &= \sum_{j=0}^{T} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\sigma=j\}\cap\{\tau>\sigma\}} M(T \wedge \tau)\big] \\
&= \sum_{j=0}^{T} \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\sigma=j\}\cap\{\tau>\sigma\}} M(k \wedge \tau)\big] \\
&= \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau>\sigma\}} M(\sigma)\big]
\end{aligned}$$

Yhtälö 2.18 saa muodon

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_\mathcal{A} M(\tau)\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau\leq\sigma\}} M(\tau)\big] + \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}\cap\{\tau>\sigma\}} M(\sigma)\big] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\mathbb{I}_\mathcal{A} M(\tau \wedge \sigma)\big],$$

joten väite seuraa ehdollisen odotusarvon määritelmästä. $\square$

Martingaaleilla on keskeinen rooli rahoitusteoriassa ja seuraava määritelmä luo perustan rahoitusteorian ensimmäiselle päälauseelle, joka on tässä tutkielmassa muotoiltu lauseeksi 2.20.

Määritelmä 2.19. Todennäköisyysmittaa $\mathbb{Q}$ sanotaan *riskineutraaliksi* (eng. *risk neutral*) todennäköisyysmitaksi, jos $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ ja arvopaperin n, n =1,2,...,N, diskontattu arvoprosessi on $\mathbb{Q}$-martingaali.

Markkinoiden toimijoilla on aina eri näkemykset arvopapereiden tulevista arvokehityksistä, ja he suhtautuvat niihin liittyviin riskeihin eri tavoin. Tämän vuoksi ainoastaan fyysistä todennäköisyysmittaa käyttäen etenkin johdannaisten hinnoittelu olisi hyvin työlästä, koska reilu hinta tulisi räätälöidä jokaiselle toimijalle erikseen tämän riskipreferenssit huomioiden. Riskineutraalit mitat, nimensä mukaisesti, eivät huomoi näitä seikkoja, vaan mahdollistavat mallin kaikkien arvopapereiden hinnoittelun yksinkertaisella, ja arbitraasivapaalla, tavalla.

Lause 2.20. *Markkinamalli on arbitraasivapaa jos ja vain jos on olemassa ainakin yksi riskineutraali todennäköisyysmitta.*

Todistus. Kts. esim. [1]. $\square$

Esimerkki 2.21. Jatkoa esimerkille 2.7. Määritetään mallin riskineutraalit todennäköisyysmitat. Olkoon $\mathbb{Q}$ todennäköisyysmitta, siten että $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$. Tulee siis löytää sellainen $\mathbb{Q}$, että $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_2(1)|\mathcal{F}_0] = S_2(0)$. Koska $\mathcal{F}_0 = (\Omega, \emptyset)$, edellä esiintyvä ehdollinen odotusarvo vastaa normaalia odotusarvoa. $\mathbb{Q}$:lle tulee siis päteä

$$0 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) + 2 \cdot \mathbb{Q}(\omega_2) + 3 \cdot \mathbb{Q}(\omega_3) = \frac{3}{2}.$$

Lisäksi koska $\mathbb{Q}$ on todennäköisyysmitta, joka on ekvivalentti $\mathbb{P}$:n kanssa, tulee päteä

$$\mathbb{Q}(\omega_1) + \mathbb{Q}(\omega_2) + \mathbb{Q}(\omega_3) = 1.$$

Näistä yhtälöistä saadaan

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(\omega_2) = -\frac{3}{2} \cdot \big(2 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) - 1\big) \\
&\mathbb{Q}(\omega_3) = \frac{1}{2} \cdot \big(4 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) - 1\big) \\
&\frac{1}{4} < \mathbb{Q}(\omega_1) < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Riskineutraaleja mittoja ovat kaikki ne $\mathbb{P}$:n kanssa ekvivalentit todennäköisyysmitat, jotka toteuttavat nämä ehdot.

Esimerkki 2.22. Jatkoa esimerkille 2.21. Muodostetaan markkinoille kolmas arvopaperi, joka antaa omistajalleen hetkellä 1 summan $\max(S_2(1) - 1, 0)$. Siis

$$S_3(1) = \begin{cases} 0, & \text{jos } \omega = \omega_1 \\ 1, & \text{jos } \omega = \omega_2 \\ 2, & \text{jos } \omega = \omega_3, \end{cases}$$

missä ω on "toteutunut maailmantila". Tämän arvopaperin arbitraasivapaat hinnat voidaan määrätä, kun riskineutraalit mitat tunnetaan. Arbitraasivapauden ehdosta seuraa, että hinnalle tulee päteä

$$\begin{aligned} S_3(0) &= 0 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) + 1 \cdot \mathbb{Q}(\omega_2) + 2 \cdot \mathbb{Q}(\omega_3) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot \big(2 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) - 1\big) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \big(4 \cdot \mathbb{Q}(\omega_1) - 1\big) \\ &= \mathbb{Q}(\omega_1) + \frac{1}{2} \qquad \in \big(\frac{3}{4}, 1\big). \end{aligned}$$

Siis vain ja ainoastaan tällä välillä olevat hinnat käyvät.

Luku 3

Lokaalin riskin minimointi

Toimijat saavat finanssimarkkinoilla vastattavakseen erilaisia *vaateita* (eng. *claims*). Tällainen voi olla esimerkiksi yritystoimijan tapauksessa jonkinlainen optio. Koska usein vaateiden tarkkaa maksumäärää ei sopimushetkellä tiedetä, kantaa toimija aina jonkinasteista riskiä. Tätä riskiä pienentääkseen toimijan kannattaa suojautua (eng. *hedge*) tappioilta sopivalla sijoitusstrategialla. Yleensä suojauksella on jokin hinta. Vaateiden suojaamisen motiiveja voidaan verrata esimerkiksi vakuutuksenoton motiiveihin. Molemmissa tapauksissa toimija on valmis maksamaan siitä, että epäsuotuisan skenaarion toteutuessa tappiot eivät ole kohtuuttoman suuria. Tässä luvussa tutkitaan vaateen X suojaavia strategioita, jotka eivät välttämättä ole omavaraisia.

Vaade X voidaan *toistaa*, jos on olemassa omavarainen strategia, jonka varallisuus hetkellä T on yhtä suuri kuin vaade X, eli jonka diskontatulle arvoprosessille pätee $V(T) = X$ $\mathbb{P}$-melkein varmasti. *Täydellisillä* markkinoilla jokainen vaade voidaan toistaa. Jos täydellisillä markkinoilla omavarainen salkku toistaa vaaten X, on toimija muodostanut vaateelle *täydellisen suojan* (eng. *perfect hedge*), sillä arbitraasivapailla ja täydellisillä markkinoilla kahden saman tuoton antavan salkun hetken 0 hinnat tulee olla samat, jolloin toimija ei kanna minkäänlaista riskiä.

Todellisuudessa, varsinkin diskreetissä ajassa tarkasteltuna, markkinat ovat harvoin täydellisiä, eli vaateita ei pystytä täysin suojaamaan omavaraisilla strategioilla. Suojaaminen kuitenkin onnistuu, jos sallitaan rahalliset panostukset salkkuun myös hetken 0 jälkeen. Tälloin toimijan kannattaa luonnollisesti muodostaa vaateen suojaava strategia, johon täytyy panostaa prosessin aikana vähiten rahaa. Tässä luvussa sallitaan tällainen panostaminen ja se tapahtuu sijoittamalla bondiin.

Määritelmä 3.1. *Yleistetyksi sijoitusstrategiaksi* kutsutaan paria (θ_1, θ'), missä θ_1 on sopiva stokastinen prosessi ja $\theta' = (\theta_2, \theta_3, ..., \theta_N)^T$ on $N-1$ -ulotteinen, ennustettava stokastinen prosessi. Tämän parin muodostama diskontattu arvoprosessi on V, jolle pätee

$$V_k := \theta_1(k) + \theta'(k+1)S'(k), \qquad k = 0, 1, ..., T$$

Määritelmässä 3.1 $\theta_1(k)$ vastaa edelleen bondia ja $\theta_n(k)$ arvopaperia n hetkellä k hankittavaa määrää. Riskillisiä arvopapereita hankittava määrä on ennustettava prosessi, sillä kun toimija on tehnyt tarvittavat toimenpiteet hetkellä $k-1$, tietää hän kuinka paljon hänellä on riskillisiä arvopapereita hetkellä k. Bondiin sijoitettava määrä on omavaraisista strategioista poiketen sopiva prosessi, sillä tässä tapauksessa toimija voi minä hetkenä $k = 0, 1, ..., T$ tahansa sijoittaa lisää rahaa salkkuunsa ja tekee tämän bondin kautta. $V(k)$ tulkitaan siis salkun arvoksi, kun hetkellä k suoritettavat operaatiot on jo tehty. Ennen kyseisiä operaatiota salkun arvo on

$$V(k-) = \theta_1(k-1) + \theta'(k)S'(k), \qquad k = 0, 1, ..., T.$$

Lisäksi sovitaan, että $V(0-) = 0$.

Määritelmä 3.2. Yleistetyn sijoitusstrategian (θ_1, θ') *tuottoprosessi* (eng. *gains process*) G määräytyy ehdoista

$$G(0) := 0 \quad \text{ja} \quad G(k) := \sum_{j=1}^{k} \theta'(j)(S'(j) - S'(j-1)), \qquad k = 1, 2, ..., T \tag{3.3}$$

Hetkellä k toimija joutuu lisäämään rahaa strategiaan, mikäli senhetkisen salkun varallisuus ei riitä hankkimaan toivottua salkkua. Tästä syntyy luonnollisesti kustannuksia ja tätä kuvaava (θ_1, θ'):n *kustannusprosesssi* (eng. *cost process*) on

$$C(k) := V(k) - G(k), \qquad k = 0, 1, ..., T \tag{3.4}$$

Kuten edellä todettiin, epätäydellisillä markkinoilla kaikkia vaateita ei pystytä toistamaan omavaraisilla strategioilla. Tässä luvussa tutkitaan toimijan kannalta edullisimpia strategioita, jotka toistavat annetun vaateen X. Lisäksi oletetaan, että diskontattu vaade ja riskillisten arvopapereiden diskontatut arvoprosessit ovat neliöintegroituvia.

Määritelmä 3.5. $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävä strategia X:n suojaamiseksi on yleistetty sijoitusstrategia (θ_1, θ'), jonka diskontatulle arvoprosessille V pätee

$$V(T) = X \quad \mathbb{P}\text{-m.v.} \qquad \text{ja} \qquad V(k) \in L^2(\mathbb{P}) \quad \text{kaikille } k = 0, 1, ..., T \tag{3.6}$$

ja jonka tuottoprosessille G pätee

$$G(k) \in L^2(\mathbb{P}) \quad \text{kaikille } k = 0, 1, ..., T \tag{3.7}$$

Toimija haluaa siis suojata vastattavakseen saadun vaateen mahdollisimman edullisesti. Tämä onnistuu esimerkiksi minimoimalla kaikkina kaupankäyntihetkinä ns. *lokaali riski*, eli kustannukseen, joka syntyy hetkellä k muodostettavasta salkusta, liittyvä riski. Matemaattisesti tämä voidaan esittää seuraavasti.

Määritelmä 3.8. $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävän yleistetyn sijoitusstrategian (θ_1, θ') *lokaali riskiprosessi* (eng. *local risk process*) on prosessi

$$R_{(\theta_1,\theta')}(k) := \mathbb{E}[(C(k+1) - C(k))^2 | \mathcal{F}_k], \qquad k = 0, 1, ..., T-1 \tag{3.9}$$

Määritelmä 3.10. $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävä strategia $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}')$ on *lokaalin riskin minimoiva* (eng. *locally risk minimizing*), jos kaikille k

$$R_{(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}')}(k) \leq R_{(\theta_1,\theta')}(k) \qquad \mathbb{P}-\text{m.v.} \tag{3.11}$$

kaikille $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttäville strategioille (θ_1, θ'), joiden diskontattu arvoprosessi toteuttaa ehdon

$$V(k+1) = \hat{\theta}_1(k+1) + \hat{\theta}'(k+2)S'(k+1) = \hat{V}(k+1), \tag{3.12}$$

missä $\hat{V}$ on lokaalin riskin minimoivan strategian diskontattu arvoprosessi.

Toimija pystyy konstruoimaan optimaalisen strategian minimoimalla ensin välin $[T-1, T)$ riskin. Tästä saatu optimaalinen salkku antaa jonkin arvon $\hat{V}(T-1)$, jolloin toimija minimoi tämän salkun hankintaan liittyvän riskin. Näin edeten ajassa taaksepäin toimija konstruoi optimaalisen strategian. Tässä tutkielmassa ei keskitytä tähän tämän tarkemmin, vaan kiinnostunut lukija ohjataan esimerkiksi lähteeseen [1].

Vaikka epätäydellisillä markkinoilla ei yleensä esinny täydellisen suojan vaateelle X antavia strategioita, omavaraisuuteen voidaan päästä ainakin odotusarvotasolla.

Määritelmä 3.13. $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävä strategia on *odotusarvoltaan omavarainen* (eng. *mean self-financing*), jos sen kustannusprosessi C on $\mathbb{P}$-martingaali.

Lokaalin riskin minimoivien strategioiden olemassaolon vaatimuksen muotoilua varten tarvitaan vielä seuraava käsite.

Määritelmä 3.14. Kaksi sopivaa stokastista prosessia Z ja Y ovat *vahvasti ortogonaalisia* (eng. *strongly orthogonal*), jos kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$

$$Cov[Z(k+1) - Z(k), Y(k+1) - Y(k) | \mathcal{F}_k] = 0 \qquad \mathbb{P}-\text{m.v.} \tag{3.15}$$

ja nämä kovarianssit ovat hyvin määriteltyjä.

Lause 3.16. *$L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävä strategia on lokaalin riskin minimoiva jos ja vain jos se on odotusarvoltaan omavarainen ja sen diskontattu kustannusprosessi, sekä riskillisten arvopapereiden arvoprosessi ovat vahvasti ortogonaalisia*

Todistus. Kts. esim [5]. □

Huomautus 3.17. Koska odotusarvoltaan omavarainen kustannusprosessi on $\mathbb{P}$-martingaali, lause 3.16 sanoo, etta $L^2(\mathbb{P})$-hyväksyttävä strategia on omavarainen jos ja vain jos kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$

1. $\mathbb{E}[C(k+1) - C(k)|\mathcal{F}_k] = 0$ $\mathbb{P}$-m.v.
2. $\mathbb{E}[(C(k+1) - C(k))(S'(k+1) - S'(k))|\mathcal{F}_k] = 0$ $\mathbb{P}$-m.v.

Seuraava tulos karakterisoi vaatimuksen lokaalin riskin minimoivan strategian olemassaololle.

Lause 3.18. *On olemassa lokaalin riskin minimoiva strategia jos ja vain jos X:llä on hajotelma*

$$X = c + \sum_{k=1}^{T} \theta'(k)(S'(k) - S'(k-1)) + L(T), \tag{3.19}$$

missä c on vakio, θ on $(N-1)$-ulotteinen ennnustettava prosessi, jolle

$$\theta'(k)(S'(k) - S'(k-1)) \in L^2(\mathbb{P}) \qquad \textit{kaikille } k$$

ja L on neliöintegroituva S':n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali ja jolle pätee $L(0) = 0$. Lisäksi vakio c ja martingaali L ovat yksikäsitteisesti määriteltyjä.

Todistus. Olkoon $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}')$ lokaalin riskin minimoiva strategia ja $\hat{V}$ sekä $\hat{C}$ sitä vastaavat arvo- ja kustannusprosessi. Tällöin vaade X voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} X &= \hat{V}(T) = \hat{C}(T) - \hat{C}(0) + \hat{G}(T) \\ &= \hat{C}(T) - \hat{\theta}_1(0) + \sum_{k=1}^{T} \hat{\theta}'(k)(S'(k) - S'(k-1)) \qquad \mathbb{P} - \text{m.v.}. \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_1(0)$ on salkun perustamiseen tarvittava rahamäärä, joten se on vakio ja lauseen 3.16 mukaan kustannusprosessi $\hat{C}$ on S':n kanssa vahvasti ortogonaalinen. Koska $\hat{C}$ on neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali, valinnoilla $c = \hat{\theta}_1(0)$ ja $L = \hat{C}$ yhtälö 3.19 toteutuu.

Oletetaan nyt, että 3.19 toteutuu, jolloin strategialle (θ_1, θ') pätee

$$V(T) = c + \sum_{k=1}^{T} \theta'(k)(S'(k) - S'(k-1)) + L(T) = c + G(T) + L(T) = G(T) + C(T),$$

missä $C = c + L$. Koska L on S':n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali, myös C on. Nyt lauseesta 3.16 seuraa, että (θ_1, θ') on lokaalin riskin minimoiva strategia.
Osoitetaan vielä yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa toinen tällainen hajotelma, eli

$$X = \tilde{c} + \sum_{k=1}^{T} \tilde{\theta}'(k)(S'(k) - S'(k-1)) + \tilde{L}(T).$$

Merkitään

$$N(k) := c - \tilde{c} + L(k) - \tilde{L}(k) = \sum_{j=1}^{k} \big(\tilde{\theta}'(j) - \theta'(j)\big)\big(S'(j) - S'(j-1)\big).$$

$\tilde{L}$ ja L ovat neliöintegroituvia $\mathbb{P}$-martingaaleja ja S':n kanssa vahvasti ortogonaalisia, joten myös N:llä on nämä ominaisuudet. Siis

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}\big[\big(\tilde{\theta}'(k) - \theta'(k)\big)\big(S'(k) - S'(k-1)\big)\big(S'(k) - S'(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ \Leftrightarrow 0 &= \mathbb{E}\big[\big(\big(\tilde{\theta}'(k) - \theta'(k)\big)\big(S'(k) - S'(k-1)\big)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big], \end{aligned}$$

joten täytyy päteä, että $N(k) - N(k-1) = 0$. Koska $\tilde{L}(0) = L(0) = 0$, niin $\tilde{L} = L$ ja $\tilde{c} = c$. □

Esimerkki 3.20. Jatkoa esimerkille 2.22. Suojataan arvopaperi 3 käyttäen lokaalin riskin minimointimenetelmää. Halutaan minimoida

$$\mathbb{E}\big[\big(C(1) - C(0)\big)^2\big] = \mathbb{E}\big[\big(V(1) - \big(V(0) + \theta_2(1) \cdot \big(S_2(1) - S_2(0)\big)\big)\big)^2\big],$$

missä parametreina on $\theta_2(1)$ ja $V(0)$. Ratkaisu on

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_2(1) &= \frac{\operatorname{cov}\big(\hat{V}(1), S_2(1) - S_2(0)\big)}{\operatorname{var}\big(S_2(1) - S_2(0)\big)} \\ \hat{V}(0) &= \mathbb{E}\big[\hat{V}(1)\big] - \hat{\theta}_2(1) \cdot \mathbb{E}\big[S_2(1) - S_2(0)\big] \end{aligned}$$

Koska strategian tulee suojata arvopaperi 3, tulee olla $\hat{V}(1) = S_3(1)$ $\mathbb{P}$-m.v. Joten ratkaisuksi saadaan $\hat{\theta}_2(1) = 2/3$. Lisäksi

Tämän salkun hinta on

$$\hat{V}(0) = \frac{7}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Luku 4

Minimaaliset martingaalimitat

Tässä luvussa tutkitaan, voidaanko lokaalin riskin minimoivan strategian tuottamaa diskontattua arvoprosessia pitää arbitraasivapaana hintana vaateelle X. Sitä varten tarvitsemme Hilbert-avaruuden käsitettä.

4.1 Hilbert-avaruus

Todennäköisyysteorian konseptit ovat usein hyvin monimutkaisia ja abstrakteja. Hilbert-avaruuden avulla näista voidaan kuitenkin jossain määrin saada geometrista intuitiota. Lyhyesti sanottuna Hilbert-avaruus täydellinen sisätuloavaruus, mutta seuraava lause esittää tarkan vaatimuksen tälle.

Lause 4.1. *Olkoon* $\mathcal{L}^2 := \{Y : Y = \text{ neliöintegroituva reaaliarvoinen satunnaismuuttuja}\}$. *Tällöin* $\mathcal{L}^2$ *on Hilbert-avaruus, jos sen sisätulona on*

$$< Y, Z >_{\mathcal{L}^2} = \mathbb{E}(YZ), \qquad \textit{kaikilla} \qquad Y, Z \in \mathcal{L}^2.$$

Todistus. Sivuutetaan. □

Määritelmä 4.2. $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2$ on $\mathcal{L}^2$:n aliavaruus, jos se on suljettu äärellisten lineaarikombinaatioiden suhteen.

Määritelmä 4.3. Olkoon $Y \in \mathcal{L}^2$ ja olkoon $\mathcal{H}$ avaruuden $\mathcal{L}^2$ suljettu aliavaruus. $Y^* \in \mathcal{H}$ on Y:n *ortogonaalinen projektio* (eng. *orthogonal projection*) avaruudelle $\mathcal{H}$, jos $< Y - Y^*, \mathcal{H} >_{\mathcal{L}^2} = 0$.

Tarkastellaan vielä, miten martingaalit liittyvät Hilbert-avaruuksiin. Olkoon $\mathcal{M}^2$ kaikkien neliöintegroituvien $\mathbb{P}$-martingaalien muodostama avaruus. Huomataan, että koska

$M(k) = \mathbb{E}[M(T)|\mathcal{F}_k]$, kaikki martingaalit $M \in \mathcal{M}^2$ voidaan tunnistaa näiden päätearvojen $M(T) \in L^2(\mathbb{P})$ avulla. Siis $\mathcal{M}^2$ on Hilbert-avaruus, jos sisätulona on

$$< M, N >_{\mathcal{M}^2} = \mathbb{E}\big[M(T)N(T)\big], \qquad M, N \in \mathcal{M}^2.$$

Jatkoa varten esitetään vielä pysäytettyihin martingaaleihin liittyvä määritelmä.

Määritelmä 4.4. $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}^2$ on *vakaa* (eng. *stable*), jos kaikille martingaaleille $M \in \mathcal{H}$ pätee $M(k \wedge \tau) \in \mathcal{H}$ kaikilla k ja kaikilla pysäytyshetkillä τ.

4.2 Minimaaliset martingaalimitat

Mikäli fyysinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ on martingaalimitta, lokaalin riskin minimoivan strategian diskontattu arvoprosessi on vaateen X arbitraasivapaa hinta, kuten kohta huomataan.

Ensin kuitenkin tarkastellaan erästä hyödyllistä tulosta, niin kutsuttua diskreettiaikaista versiota *Kunita-Watanaben hajotelmasta.* Tätä varten on hyödyllistä esittää markkinoiden arbitraasivapauden ehdolle vaihtoehtoinen esitystapa. Seuraava tarkastelu koskee periodia [0,1], mutta merkinnät ja tulokset yleistyvät helposti kaikille periodeille, joiden pituus on 1. Merkitään symbolilla L^0_+ avaruuden $L^0(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$ positiivisia jäseniä. Merkitään vielä

$$\mathcal{K} := \{\theta' \cdot \big(S'(1) - S'(0)\big) : \theta' \in \mathbb{R}^{N-1}\},$$

$\mathcal{K}$ koostuu siis jonkin salkun mahdollisista diskontatuista tuotoista. Markkinoiden arbitraasivapaus on siis yhtäpitävää ehdon

$$\mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\}$$

kanssa.

Lemma 4.5. *Olkoon $\mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\}$. Tällöin $\mathcal{K}$ on suljettu avaruudessa $L^0(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$.*

Todistus. Kts. esim [1]. □

Lemma 4.6. *Kaksi neliöintegroituvaa martingaalia M ja N ovat vahvasti ortogonaalisia jos ja vain jos prosessi MN on martingaali.*

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\big(M(k+1) - M(k)\big)\big(N(k+1) - N(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
&= \mathbb{E}\big[M(k+1)N(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] - \mathbb{E}\big[M(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]N(k) - M(k)\mathbb{E}\big[N(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] + M(k)N(k) \\
&= \mathbb{E}\big[M(k+1)N(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] - N(k)M(k).
\end{aligned}$$

Tämä on 0 jos ja vain jos MN on martingaali. □

Lemma 4.7. *Olkoon $\mathcal{H}$ avaruuden $\mathcal{M}^2$ vakaa aliavaruus ja olkoon prosessi $L \in \mathcal{M}^2$ sellainen, että $L(0) = 0$ ja L on ortogonaalinen avaruuden $\mathcal{H}$ kanssa. Tällöin L on vahvasti ortogonaalinen avaruuden $\mathcal{H}$ kanssa, eli kaikilla $M \in \mathcal{H}$*

$$\mathbb{E}\big[\big(L(k+1) - L(k)\big)\big(M(k+1) - M(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] = 0.$$

Todistus. L ja M ovat ortogonaalisia, eli $< L, M^\tau >_{\mathcal{L}^2} = 0$. Toisaalta kaikilla $\tau \leq T$

$$< L, M^\tau >_{\mathcal{L}^2} = \mathbb{E}\big[L(T)M(\tau)\big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[L(T)M(\tau)\big|\mathcal{F}_\tau\big]\Big] = \mathbb{E}\big[L(\tau)M(\tau)\big]$$

Osoitetaan nyt, että LM on martingaali. Merkitään $N := LM$. Olkoon $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_k$ ja olkoon τ sellainen pysäytyshetki, että

$$\tau(\omega) = \begin{cases} k, & \text{jos } \omega \in \mathcal{A} \\ T & \text{jos } \omega \notin \mathcal{A}. \end{cases}$$

Huomataan, että

$$0 = \mathbb{E}\big[N(T \wedge \tau)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}} N(k)\big] + \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}^C} N(T)\big]. \tag{4.8}$$

Olkoon nyt $\tau = T$, jolloin

$$0 = \mathbb{E}\big[N(T)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}} N(T)\big] + \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}^C} M(T)\big]. \tag{4.9}$$

Yhdistämällä yhtälöt 4.8 ja 4.9 saadaan

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}} N(T)\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\mathcal{A}} N(k)\big],$$

kun $t < T$. N:n martingaaliominaisuus seuraa ehdollisen odotusarvon määritelmästä. Koska LM on martingaali, lemmasta 4.6 seuraa, että L ja M ovat vahvasti ortogonaalisia. □

Nyt voidaan esittää edellä puhuttu hajotelma kaikille neliöintegroituville $\mathbb{P}$-martingaaleille.

Lause 4.10. *Olkoon prosessi Y neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali. Tällöin kaikki martingaalit $M \in \mathcal{M}^2$ voidaan kirjoittaa muodossa*

$$M(k) = M(0) + \sum_{j=1}^{k} \eta(j)\big(Y(j) - Y(j-1)\big) + L(k),$$

missä η on $n-1$ ulotteinen ennustettava prosessi, siten että $\eta(k)\cdot(Y(k)-Y(k-1)) \in L^2(\mathbb{P})$ kaikilla k ja L on Y:n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali, joka toteuttaa ehdon $L(0) = 0$. Lisäksi L on yksikäsitteisesti määritelty.

Todistus. Olkoon $\mathcal{X} := \{\eta : \eta(k)\big(Y(k) - Y(k-1)\big) \in L^2(\mathbb{P})$ kaikilla $k = 1, 2, ..., T\}$. Merkitään

$$G_\eta(k) = \sum_{j=1}^{k} \eta(j) \cdot \big(Y(j) - Y(j-1)\big), \qquad k = 0, 1, ..., T$$

Koska Y on neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali, G_η on myös sellainen, kun $\eta \in \mathcal{X}$. Merkitäään vielä

$$\mathcal{H} := \{G_\eta : G_\eta \in \mathcal{M}^2\},$$

jolloin $\mathcal{H}$ on Hilbert-avaruuden $\mathcal{M}^2$ aliavaruus. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{H}$ on suljettu. Koska G_η on martingaali, voidaan kirjoittaa

$$< G_\eta, G_\eta >_{\mathcal{L}^2} = \mathbb{E}\big[G_\eta(T)^2\big] = \sum_{j=1}^{T} \mathbb{E}\Big[\big(\eta(j) \cdot \big(Y(j) - Y(j-1)\big)\big)^2\Big].$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että $\mathbb{E}\big[G_\eta(k)\big] = \mathbb{E}\big[G_\eta(0)\big] = G_\eta(0) = 0$. Oletetaan nyt, että $\eta^{(n)}$ on sellainen, että $G_{\eta^{(n)}}$ on Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{L}^2$. Tällöin siis $\eta^{(n)}(k)\big(Y(k)-Y(k-1)\big)$ on Cauchy-jono avaruudessa $L^2(\mathbb{P})$. Koska $\mathbb{P}$ on martingaalimitta, lemmasta 4.5 seuraa, että on olemassa $\eta(k) \in \mathbb{R}^{N-1}$ siten, että $\eta^{(n)}(k)\big(Y(k)-Y(k-1)\big) \to \eta(k)\big(Y(k) - Y(k-1)\big)$, kun $n \to \infty$. Siis $\mathcal{H}$ on suljettu avaruudessa $\mathcal{M}^2$. Osoitetaan nyt, että $\mathcal{H}$ on myös vakaa. Olkoon jälleen $\eta \in \mathcal{X}$ ja olkoon τ pysäytyshetki. Merkitään

$$\tilde{\eta}(j) = \eta(j) \cdot \mathbb{I}_{\{\tau \geq j\}},$$

jolloin $G_\eta(k \wedge \tau) = G_{\tilde{\eta}}(k)$. Lisäksi

$$\mathbb{E}\Big[\big(\tilde{\eta}(k) \cdot \big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big)^2\Big] < \mathbb{E}\Big[\big(\eta(k) \cdot \big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big)^2\Big] < \infty,$$

joten $\tilde{\eta} \in \mathcal{X}$. Olkoon N prosessin $M - M(0)$ ortogonaalinen projektio avaruudelle $\mathcal{H}$. Siis $N \in \mathcal{H}$, joten se on martingaali. Valitaan nyt $L := M - M(0) - N$, jolloin myös L on martingaali ja $L(0) = 0$. Lisäksi lemmasta 4.6 seuraa, että kaikilla $X \in \mathcal{H}$, prosessi LX on martingaali, jolloin kaikilla k $\mathbb{E}[L(k)X(k)] = 0$. Siis L on ortogonaalinen avaruuden $\mathcal{H}$ kanssa, joten lemmasta 4.7 seuraa, että L on vahvasti ortogonaalinen avaruuden $\mathcal{H}$ kanssa. Koska $Y \in \mathcal{H}$, L on vahvasti ortogonaalinen Y:n kanssa. Siis $M = M(0) + N + L$, joka on väitteen mukainen hajotelma. Yksikäsitteisyys seuraa samanlaisella päättelyllä kuin lauseen 3.18 todistuksessa.

$\square$

Korollaari 4.11. *Jos fyysinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta, on olemassa lokaalin riskin minimoiva strategia, joka on yksikäsitteinen siinä mielessä, että sen diskontattu arvoprosessi määräytyy ainoastaan ehdosta*

$$\hat{V}(k) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_k), \qquad k = 0, 1, ..., T \tag{4.12}$$

ja sen kustannusprosessi on

$$\hat{C}(k) = \hat{V}(0) + L(k), \qquad k = 0, 1, ..., T, \tag{4.13}$$

missä L on neliöintegroituva, S':n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali, jolle pätee $L(0) = 0$

Ehto 4.12 mahdollistaa diskontatun arvoprosessin $\hat{V}$ hetken k arvon tulkitsemisen vaateen X hetken k arbitraasivapaaksi hinnaksi, mikäli fyysinen todennäköisyysmitta on riskineutraali. Todellisuudessa tällainen tilanne on hyvin harvinainen, sillä rationaaliset markkinoilla toimijat enemmään tai vähemmän välttävät riskiä, jolloin ne toimijat, jotka kantavat enemmän riskiä, haluavat siitä "hyvitystä". Tämän vuoksi arvopapereiden diskontatut arvot ovat pienempiä kuin tulevaisuuden arvojen odotusarvot, jolloin fyysinen todennäköisyysmitta ei ole martingaalimitta. Seuraavaksi tarkastellaan tilannetta tällaisilla markkinoilla. Sitä ennen kuitenkin tarkastellaan hieman eräitä ekvivalenttien todennäköisyysmittojen ominaisuuksia. Olkoot $\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ todennäköisyysmittoja mitallisella avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$. Kuten luvussa 2 todettiin, nämä ovat ekvivalentteja, jos ne kuvaavat samat joukot nollamittaiksi joukoiksi. Mikäli implikaatio tapahtuu vain yhteen suuntaan, eli jos kaikille $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}(A) = 0,$$

sanotaan, että $\tilde{\mathbb{P}}$ on absoluuttiseti jatkuva suhteessa $\mathbb{P}$:hen. Tällöin merkitään $\tilde{\mathbb{P}} \ll \mathbb{P}$.

Lemma 4.14. *$\tilde{\mathbb{P}}$ on absoluuttisesti jatkuva suhteessa $\mathbb{P}$:hen, jos ja vain jos on olemassa $\mathcal{F}$-mitallinen funktio $\varphi \geq 0$ siten, että*

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}(F) = \int F d\tilde{\mathbb{P}} = \int F\varphi d\mathbb{P} = \mathbb{E}(F\varphi)$$

kaikille $\mathcal{F}$-mitallisille funktioille $F \geq 0$.

Todistus. Katso esim. [4] □

Funktiota

$$\varphi := \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$$

kutsutaan *Radon-Nikodymin derivaataksi* ja sille pätee

$$\mathbb{E}\left(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right) = \int \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} d\mathbb{P} = \int d\tilde{\mathbb{P}} = \tilde{\mathbb{P}}(\Omega) = 1$$

Korollaari 4.15. *Jos $\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ ovat ekvivalentteja, niin $\varphi > 0$ $\mathbb{P}$-m.v.*

Määritelmä 4.16. Riskineutraali mitta $\hat{\mathbb{P}}$ on *minimaalinen martingaalimitta* (eng. *minimal martingale measure*), jos

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right)^2\right] < \infty$$

ja jos jokainen S':n kanssa ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali $M \in \mathcal{M}^2$ on myös $\hat{\mathbb{P}}$-martingaali.

Lause 4.17 näyttää, että $\hat{\mathbb{P}}$:lla mitattuna $\hat{V}$ on vaateen X arbitraasivapaa hinta, mikäli tällainen minimaalinen martingaalimitta on olemassa.

Lause 4.17. *Oletetaan, että $\hat{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta ja että $\hat{V}$ on lokaalin riskin minimoivan strategian diskontattu arvoprosessi. Tällöin*

$$\hat{V}(k) = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}(X|\mathcal{F}_k), \qquad k = 0, 1, ..., T$$

Todistus. Lauseen 3.19 mukaan X:lla on hajotelma

$$X = c + \sum_{k=1}^{T} \theta'(k)(S'(k) - S'(k-1)) + L(T),$$

joten $\hat{V}$ määräytyy ehdosta

$$\hat{V}(k) = c + \sum_{j=1}^{k} \theta'(j)(S'(j) - S'(j-1)) + L(t).$$

$\hat{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta ja prosessi L on S':n kanssa ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali, joten L on myös $\hat{\mathbb{P}}$-martingaali. Lisäksi $\theta(k)(S'(k) - S'(k-1))$ ja $\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$ ovat neliöintegroituvia $\mathbb{P}$:n suhteen, joten $\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\theta(k)(S'(k) - S'(k-1))] < \infty$. Koska $\hat{\mathbb{P}}$ on riskineutraali mitta, $\theta(k)(S'(k) - S'(k-1))$ on $\hat{\mathbb{P}}$-martingaali. Joten lemman 2.14 mukaan $\hat{V}$ on $\hat{\mathbb{P}}$-martingaali. Koska $\hat{V}(T) = X$ $\mathbb{P}$-m.v., väite seuraa. □

Seuraava tulos näyttää, miten satunnaismuuttujan ehdollinen odotusarvo todennäköisyysmitan suhteen saadaan konstruioitua Radon-Nikodymin derivaatan ja toisen ekvivalentin todennäköisyysmitan suhteen otetun odotusarvon avulla.

Lemma 4.18. *Olkoon $\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ ekvivalentteja todennäköisyysmittoja mitallisella avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ ja olkoon $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Merkitään $Z(k) := \mathbb{E}[d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}|\mathcal{F}_k]$. Tällöin kaikille $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaaleille $\tilde{M}$ pätee*

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[\tilde{M}(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] = \frac{1}{Z(k)} \cdot \mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big].$$

Todistus. Olkoon $G(k) = \mathbb{I}_{\{\tilde{M}(k+1)\in A\}}$, kaikilla $A \in \mathcal{F}_k$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\big[G(k)\tilde{M}(k+1)\big] &= \mathbb{E}\bigg[G(k)\tilde{M}(k+1)\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[G(k)\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_k\big]\bigg] = \mathbb{E}\bigg[G(k)\mathbb{E}\big[\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_{k+1}\big]\big|\mathcal{F}_k\big]\bigg] \\
&= \mathbb{E}\bigg[G(k)\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]\bigg].
\end{aligned}$$

$\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ ovat ekvivalentteja, joten $Z(k) > 0$ $\tilde{\mathbb{P}}$-m.v. kaikilla k. Voidaan siis olettaa, että $\mathbb{P}$-m.v. $G(k) = 0$, kun $Z(k) = 0$. Siis

$$\mathbb{E}\bigg[G(k)\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]\bigg] = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\bigg[G(k)\cdot\frac{1}{Z(k)}\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]\bigg],$$

joten väite seuraa suoraan ehdollisen odotusarvon määritelmästä. □

Lemma 4.19. *Olkoon $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$. Sopiva prosessi $\tilde{M}$ on $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali jos ja vain jos prosessi*

$$\tilde{M}(k)\cdot\mathbb{E}\bigg[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_k\bigg], \qquad k = 0, 1, ..., T$$

on $\mathbb{P}$-martingaali.

Todistus. Merkitään

$$Z(k) = \mathbb{E}\bigg[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_k\bigg]$$

Koska $\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ ovat ekvivalentteja, Z on aidosti positiivinen $\mathbb{P}$-melkein varmasti. Lisäksi $\tilde{M}(k)$ on integroituva jos ja vain jos $\tilde{M}(k)Z(k)$ on integroituva. Joten lemman 4.18 mukaan

$$Z(k)\cdot\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[\tilde{M}(k+1)|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)|\mathcal{F}],$$

jolloin $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[\tilde{M}(k+1)|\mathcal{F}_k] = \tilde{M}(k)$ jos ja vain jos $\mathbb{E}[\tilde{M}(k+1)Z(k+1)|\mathcal{F}_k] = \tilde{M}(k)Z(k)$. □

Propositio 4.20. *Jos $\tilde{\mathbb{P}}$ on on $\mathbb{P}$:n kanssa ekvivalentti todennäköisyysmitta, on olemassa $\mathbb{P}$-martingaali Λ, siten että*

$$\Lambda(0) = 1 \quad \textit{ja} \quad \Lambda(k+1) - \Lambda(k) > -1 \tag{4.21}$$

ja siten, että martingaali

$$Z(k) := \mathbb{E}\bigg[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_k\bigg], \qquad k = 0, 1, ..., T$$

voidaan esittää muodossa

$$Z(k) = \prod_{j=1}^{k} \big(1 + \Lambda(j) + \Lambda(j-1)\big), \qquad k = 0, 1, ..., T. \tag{4.22}$$

Kääntäen, jos Λ on sellainen $\mathbb{P}$-martingaali, että 4.21 pätee ja että 4.22 määrittelee $\mathbb{P}$-martingaalin Z, niin

$$d\tilde{\mathbb{P}} := Z(T)d\mathbb{P}$$

määrittelee todennäköisyysmitan $\tilde{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$

Todistus. Olkoon $\tilde{\mathbb{P}}$ ja $\mathbb{P}$ ekvivalentteja. Olkoon lisäksi Λ sellainen, että

$$\Lambda(0) = 1 \qquad \text{ja} \qquad \Lambda(k+1) := \Lambda(k) + \frac{Z(k+1) - Z(k)}{Z(k)}, \qquad k = 0, 1, ..., T-1.$$

Huomataan, että kaikilla $k = 1, ..., T-1$

$$Z(k+1) = Z(k) \cdot \big(1 + \Lambda(k+1) - \Lambda(k)\big),$$

missä

$$Z(k) = Z(k-1) \cdot \big(1 + \Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big). \tag{4.23}$$

Koska $\Lambda(0) = 1$, jatkamalla rekursiivisesti saadaan esitys 4.22. Myös 4.21 pätee tällaiselle Λ:lle, sillä $\tilde{\mathbb{P}}$:n ja $\mathbb{P}$:n ekvivalenttiudesta seuraa, että $Z(k)$ on $\mathbb{P}$-m.v. aidosti positiivinen kaikilla k, joten

$$\Lambda(k+1) - \Lambda(k) = \frac{Z(k+1)}{Z(k)} - 1 > -1.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että Λ on martingaali. Induktiolla huomataan, että Λ on integroituva kaikilla k. Selvästi $\Lambda(0) = 1 \in L^1(\mathbb{P})$. Oletetaan nyt, että $\Lambda(k) \in L^1(\mathbb{P})$ jollakin k. Z on ei-negatiivinen martingaali, joten osamäärän $Z(k+1)/Z(k)$ ehdollinen odotusarvo on hyvin määritelty $\mathbb{P}$-m.v. ja se on

$$\mathbb{E}\left[\frac{Z(k+1)}{Z(k)}\bigg|\mathcal{F}_k\right] = \frac{1}{Z(k)} \cdot \mathbb{E}[Z(k+1)|\mathcal{F}_k] = \frac{1}{Z(k)} \cdot Z(k) = 1 \in L^1(\mathbb{P}). \tag{4.24}$$

Joten myös $Z(k+1)/Z(k) \in L^1(\mathbb{P})$ ja edelleen

$$\Lambda(k+1) = \Lambda(k) - 1 + \frac{Z(k+1)}{Z(k)} \in L^1(\mathbb{P}). \tag{4.25}$$

Λ:n martingaaliominaisuus seuraa Z:n martingaaliominaisuudesta, sillä

$$\mathbb{E}[\Lambda(k+1)-\Lambda(k)|\mathcal{F}_k] = \mathbb{E}\left[\frac{Z(k+1)-Z(k)}{Z(k)}\middle|\mathcal{F}_k\right]$$
$$= \frac{1}{Z(k)}\cdot\mathbb{E}[Z(k+1)-Z(k)|\mathcal{F}_k] = \frac{1}{Z(k)}\cdot 0 = 0.$$

□

Seuraava hajotelma on hyödyllinen, kun tutkitaan miten martingaali käyttäytyy, kun todennäköisyysmittaa muutetaan.

Lause 4.26. *Doobin hajotelma. Olkoon $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ stokastinen kenttä ja Y sopiva prosessi, jolle $\mathbb{E}(|Y_k|)<\infty$ kaikilla k. Tällöin on olemassa $\mathbb{P}$-martingaali M ja integroituva ennustettava prosessi A, jolle $A(0)=0$, siten että $Y=M+A$ kaikilla k. Tämä hajotelma on $\mathbb{P}$-m.v. yksikäsitteinen.*

Todistus. Olkoon $A(0)=M(0)=0$ ja kaikilla $k=1,2,...$

$$A(k)=\sum_{j=1}^{k}\big(\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]-Y(j-1)\big)$$

ja

$$M(k)=Y(0)+\sum_{j=1}^{k}\big(Y(j)-\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]\big). \tag{4.27}$$

Huomataan, että kaikilla $k=1,2,...$

$$M(k)+A(k)=Y(0)+\sum_{j=1}^{k}\big(Y(j)-Y(j-1)\big)+\sum_{j=1}^{k}\big(\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]-\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]\big)$$
$$=Y(0)+\big(Y(k)-Y(0)\big)+0=Y(k)$$

Koska Y on sopiva, $A(k+1)$ ja $M(k)$ ovat $\mathcal{F}_k$-mitallisia kaikilla k. Y on myös integroituva, joten A ja M ovat integroituvia. Martingaaliominaisuus pätee M:lle, sillä

$$M(k+1)-M(k)=Y(0)+\sum_{j=1}^{k+1}\big(Y(j)-\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]\big)-Y(0)-\sum_{j=1}^{k}\big(Y(j)-\mathbb{E}[Y(j)|\mathcal{F}_{j-1}]\big)$$
$$=Y(k+1)-\mathbb{E}[Y(k+1)|\mathcal{F}_k]$$

joten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M(k+1)-M(k)|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}\big[Y(k+1)-\mathbb{E}[Y(k+1)|\mathcal{F}_k]\big|\mathcal{F}_k\big]\\ &= \mathbb{E}[Y(k+1)|\mathcal{F}_k]-\mathbb{E}[Y(k+1)|\mathcal{F}_k]=0\end{aligned}$$

Osoitetaan vielä hajotelman yksikäsitteisyys. Oletetaan, että Y:llä on myös toinen hajotelma, eli $Y = M' + A'$. Siis $M - M' = A - A'$. M ja M' ovat martingaaleja, joten $M - M'$ on martingaali. Siis kaikilla k

$$\mathbb{E}[M(k+1)-M'(k+1)|\mathcal{F}_k] = M(k)-M'(k) \qquad \mathbb{P}\text{-m.v.}$$

Toisaalta A ja A' ovat ennustettavia, joten myös $M - M'$ on ennustettava. Joten

$$\mathbb{E}[M(k+1)-M'(k+1)|\mathcal{F}_k] = M(k+1)-M'(k+1) \qquad \mathbb{P}-\text{m.v.}$$

Siis kaikilla k: $M(k+1)-M'(k+1) = M(k)-M'(k)$. Koska $M(0) = 0$, $M - M' \equiv 0$, eli $M \equiv M'$ ja $A \equiv A'$. □

Edellinen tulos kertoo siis, että mikä tahansa $\mathbb{P}$-martingaali voidaan "kompensoida"$\tilde{\mathbb{P}}$-martigaaliksi oikeanlaisen ennustettavan prosessin avulla. Seuraava lause näyttää, että tällainen prosessi voidaan muodostaa propositiossa 4.20 esiintyvän martingaalin Λ avulla.

Lause 4.28. *Olkoon $\mathbb{P} \sim \tilde{\mathbb{P}}$ ja Λ proposition 4.20 mukainen martingaali, eli*

$$\Lambda(0)=1 \quad \textit{ja} \quad \Lambda(k)-\Lambda(k-1) = \frac{Z(k)-Z(k-1)}{Z(k-1)}, \qquad k=1,2,...,T,$$

missä $Z(k) = \mathbb{E}[d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}|\mathcal{F}_k]$. Jos $\tilde{M}$ on sellainen $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali, että $\tilde{M}(k) \in L^1(\mathbb{P})$ kaikilla k, niin

$$M(k) := \tilde{M}(k) + \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j)-\Lambda(j-1)\big)\big(\tilde{M}(j)-\tilde{M}(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big]$$

on $\mathbb{P}$-martingaali.

Todistus. Huomataan, että

$$\begin{aligned}(4.29)\quad \big(\Lambda(k)-\Lambda(k-1)\big)\big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big) &= \frac{Z(k)-Z(k-1)}{Z(k-1)}\cdot\big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big)\\ &= \frac{1}{Z(k-1)}\Big(Z(k)\big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big)\Big) - \big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big)\end{aligned}$$

Lemman 4.19 mukaan $Z(k)\big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big)$ on $\mathbb{P}$-martingaali ja täten kuuluu $L^1(\mathbb{P})$:hen. Siis 4.29 on $\mathbb{P}$-martingaali, kunhan $Z(k-1)$ poikkeaa nollasta. Tämä vaatimus täyttyy, kun määritellänän jono τ_n pysäytyshetkiä, siten että

$$\tau_n := \inf\{k : Z(k) < n\} \wedge T, \qquad k = 2, 3, ...,$$

jolloin $\mathbb{I}_{\{\tau_n > k\}}\big(\Lambda(k)-\Lambda(k-1)\big)\big(\tilde{M}(k)-\tilde{M}(k-1)\big) \in L^1(\mathbb{P})$. Erityisesti, lauseessa esiintyvät ehdolliset odotusarvot ovat hyvin määriteltyjä. Lisäksi yhtälöstä 4.29 seuraa, että $\mathbb{P}$-m.v. kaikilla $k \leq \tau_n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = \frac{1}{Z(k-1)} \cdot \mathbb{E}\big[Z(k)\big(\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\ -\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big)\big(\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big].\end{aligned}$$

Yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi häviää, sillä

$$\begin{aligned}&\frac{1}{Z(k-1)} \cdot \mathbb{E}\big[Z(k)\big(\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\ =&\frac{\mathbb{E}\big[Z(k)\tilde{M}(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]}{Z(k-1)} - \frac{\mathbb{E}\big[Z(k)\tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]}{Z(k-1)}\\ =&\frac{\mathbb{E}\big[Z(k)\tilde{M}(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]}{Z(k-1)} - \frac{\mathbb{E}\big[Z(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\tilde{M}(k-1)}{Z(k-1)}\\ =&\frac{Z(k-1)\tilde{M}(k-1)}{Z(k-1)} - \frac{Z(k-1)\tilde{M}(k-1)}{Z(k-1)} = 0.\end{aligned}$$

Siis

$$\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = -\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big)\big(\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big].$$

Olkoon siis $M(k) := \tilde{M}(k) + \sum_{j=1}^{k} \big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(\tilde{M}(j) - \tilde{M}(j-1)\big)$,
jolloin $M(k)$ on $\mathbb{P}$-integroituva kaikilla k ja

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[M(k) - M(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\ =&\mathbb{E}\Bigg[\tilde{M}(k) + \sum_{j=1}^{k} \big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(\tilde{M}(j) - \tilde{M}(j-1)\big)\\ &-\tilde{M}(k-1) - \sum_{j=1}^{k-1} \big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(\tilde{M}(j) - \tilde{M}(j-1)\big)\Bigg|\mathcal{F}_{k-1}\Bigg]\\ =&\mathbb{E}\big[\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] + \mathbb{E}\big[\big(\Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big)\big(\tilde{M}(k) - \tilde{M}(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = 0.\end{aligned}$$

Siis M on $\mathbb{P}$-martingaali. □

Merkitään nyt

$$S' = Y + B, \tag{4.30}$$

missä Y on $(N-1)$-ulotteinen $\mathbb{P}$-martingaali ja $B := \{B(k) : k = 1, 2, ..., T\}$ on $n-1$-ulotteinen ennustettava prosessi. Kyseessä on siis S':n Doobin hajotelma $\mathbb{P}$:n suhteen. Seuraavan tuloksen avulla voidaan määrittää markkinoiden riskineutraalit mitat.

Korollaari 4.31. *Olkoon $\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$ sellainen, että $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[|S'(k)|] < \infty$ kaikilla k ja Λ yhtälössä 4.22*

$$\mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_k\right] = \prod_{j=1}^{k}\big(1 + \Lambda(j) + \Lambda(j-1)\big), \qquad k = 0, 1, ..., T$$

esiintyvä $\mathbb{P}$-martingaali. Tällöin $\mathbb{P}^*$ on ekvivalentti martingaalimitta, jos ja vain jos hajotelman 4.30 ennustettavalle prosessille B pätee

$$\begin{aligned} B(k) &= -\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(Y(j) - Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= -\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(S'(j) - S'(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$-m.v. kaikilla $k = 1, 2, ..., T$.

Todistus. Jos $\mathbb{P}^*$ on ekvivalentti martingaalimitta, S' on luonnollisesti $\mathbb{P}^*$-martingaali ja toivottu esitys prosessille B seuraa lauseesta 4.28. Toisen suunnan osoittamiseksi muodostetaan S':lle Doobin hajotelma $\mathbb{P}^*$:n suhteen merkitsemällä

$$S' = Y^* + B^*,$$

jolloin Y^* on $\mathbb{P}^*$-martingaali. Valitaan nyt prosessi $\tilde{B}^*$ siten, että

$$\tilde{B}^*(k) := \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(Y^*(j) - Y^*(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = -B(k),$$

jolloin lauseesta 4.28 seuraa, että $\tilde{Y}^* := Y^* + \tilde{B}^*$ on $\mathbb{P}$-martingaali. Toisaalta S':n hajotelmasta 4.30 seuraa, että $Y = S' - B$ on $\mathbb{P}$-martingaali. Edellä muodostetusta S':n hajotelmasta $\mathbb{P}^*$:n suhteen saadaan

$$Y = Y^* + B^* - B = \tilde{Y}^* - \tilde{B}^* + B^* - B = \tilde{Y}^* + B + B^* - B = \tilde{Y}^* + B^*.$$

Koska Y ja $\tilde{Y}^*$ ovat $\mathbb{P}$-martingaaleja ja Doobin hajotelma on yksikäsitteinen, tulee päteä, että $B^* \equiv 0$. $\square$

Nyt voimme palata minimaalisen martingaalimitan karakterisoimiseen.

Lause 4.32. *Olkoon $\tilde{\mathbb{P}}$ riskineutraali mitta siten, että $\mathbb{E}[d\tilde{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}] < \infty$. Tällöin $\tilde{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta jos ja vain jos yhtälössä 4.22 esiintyvä $\mathbb{P}$-martingaali Λ voidaan esittää S':n Doobin hajotelmassa 4.30 esiintyvän $\mathbb{P}$-martingaalin Y avulla muodossa*

$$\Lambda(k) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \lambda(j) \cdot \big(Y(j) - Y(j-1)\big), \qquad k = 0, 1, ..., T, \tag{4.33}$$

jollakin $(N-1)$-ulotteisella ennustettavalla prosessilla λ.

Todistus. Oletetaan, että 4.33 pätee ja että $M \in \mathcal{M}^2$ on S':n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali. Tällöin määritelmän mukaan $\tilde{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta, jos M on myös $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali. Olkoon jälleen kaikilla $k = 0, 1, ..., T$

$$Z(k) := \mathbb{E}\left[\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_k\right].$$

Lemmasta 4.19 seuraa, että M on $\tilde{\mathbb{P}}$-martingaali, jos MZ on $\mathbb{P}$-martingaali. Selvästi MZ on integroituva, sillä M ja Z ovat neliöintegroituvia. Osoitetaan seuraavaksi martingaaliominaisuus. Sitä varten valitaan jono pysäytyshetkiä siten, että

$$\tau_n := \inf\{k \geq 0 : |\lambda(k+1)| > n\}.$$

Pysäyttämällä martingaali Λ hetkeen τ_n estetään sen "räjähtäminen", eli pidetään se äärellisenä. Näin muodostuu $\mathbb{P}$-martingaali $\Lambda(\tau_n \wedge k) := \Lambda^{\tau_n}$. Koska S' on neliöintegroituva, Jensenin epäyhtälön avulla huomataan, että $\mathbb{E}\big[|Y(k)|\big] < \infty$ kaikilla k

Koska M on $\mathbb{P}$-martingaali, $M\Lambda^{\tau_n}$ on $\mathbb{P}$-integroituva. Huomataan, että $\mathbb{P}$-m.v. kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{cov}\big(M(k), S(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big) = \operatorname{cov}\big(M(k), Y(k) + B(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big) \\
&= \mathbb{E}\big[M(k)\big(Y(k) - B(k)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] - \mathbb{E}\big[M(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\mathbb{E}\big[Y(k) - B(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\
&= \mathbb{E}\big[M(k)Y(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] - \mathbb{E}\big[M(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\mathbb{E}\big[Y(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\
&= \operatorname{cov}\big(M(k), Y(k)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big).
\end{aligned}$$

Siis myös M ja Y ovat vahvasti ortogonaalisia. Lemmasta 4.6 seuraa, että MY on $\mathbb{P}$-martingaali. Joten

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[M(k+1)\big(\Lambda^{\tau_n}(k+1) - \Lambda^{\tau_n}(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
&= \mathbb{I}_{\{k+1 \leq \tau_n\}}\mathbb{E}\big[M(k+1)\big(\lambda(k+1)\big(Y(k+1) - Y(k)\big)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
&= \mathbb{I}_{\{k+1 \leq \tau_n\}}\lambda(k+1) \cdot \big(\mathbb{E}\big[M(k+1)Y(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] - \mathbb{E}\big[M(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]Y(k)\big) \\
&= \mathbb{I}_{\{k+1 \leq \tau_n\}}\lambda(k+1) \cdot \big(M(k)Y(k) - M(k)Y(k)\big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Koska Z^{τ_n} on neliöintegroituva ja

$$Z^{\tau_n}(k) = \prod_{j=1}^{k} \big(1 + \Lambda^{\tau_n}(j+1) - \Lambda^{\tau_n}(j)\big),$$

huomataan, että

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[M(k+1)Z^{\tau_n}(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] = \mathbb{E}\big[M(k+1)Z^{\tau_n}(k)\big(1 + \Lambda^{\tau_n}(k+1) - \Lambda^{\tau_n}(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big]\\ &= Z^{\tau_n}(k) \cdot \mathbb{E}\big[M(k+1)\big(1 + \Lambda^{\tau_n}(k+1) - \Lambda^{\tau_n}(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] = Z^{\tau_n}(k)M(k).\end{aligned}$$

Toisin sanoen $Z^{\tau_n}M$ on $\mathbb{P}$-martingaali kaikilla n. Lauseen 2.17 mukaan siis myös prosessi

$$(Z^{\tau}M)^{\tau} = (ZM)^{\tau}$$

on $\mathbb{P}$-martingaali. Selvästi $\tau_n \nearrow T$ $\mathbb{P}$-melkein varmasti. Lisäksi

$$\big|M^{\tau}(k+1)Z^{\tau}(k+1)\big| \le \sum_{j=0}^{T} \big|M(j)Z(j)\big| \in L^1(\mathbb{P}),$$

joten voidaan soveltaa dominoidun konvergenssin lausetta. Siis

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big[M(k+1)Z(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] = \mathbb{E}\big[\lim_{n\to\infty} M^{\tau}(k+1)Z^{\tau}(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big]\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\big[M^{\tau}(k+1)Z^{\tau}(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] = \lim_{n\to\infty} M^{\tau}(k)Z^{\tau}(k) = M(k)Z(k).\end{aligned}$$

Joten MZ on martingaali ja siksi $\tilde{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta.

Osoitetaan nyt väitteen toinen suunta. Oletetaan, että $\hat{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta. Muodostetaan lemman 4.10 mukainen hajotelma prosessille Z, eli merkitään

$$Z(k) = 1 + \sum_{j=1}^{k} \eta(j)\big(Y(j) - Y(j-1)\big) + L(k). \tag{4.34}$$

Siis L on Y:n kanssa vahvasti ortogonaalinen $\mathbb{P}$-martingaali, joten se on myös X:n kanssa vahvasti ortogonaalinen, kuten todistuksen alkuosassa todettiin. Koska $\hat{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta, L:n täytyy olla myös $\hat{\mathbb{P}}$-martingaali. Nyt lemmasta 4.19 seuraa, että prosessi

$$L(k)Z(k) = L(k) + L(k)\sum_{j=1}^{k} \eta(j)\big(Y(j) - Y(j-1)\big) + L(k)^2 \tag{4.35}$$

on $\mathbb{P}$-martingaali. Koska L ja Y ovat vahvasti ortogonaalisia, prosessi

$$L(k)\sum_{j=1}^{k}\eta(j)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)$$

on $\mathbb{P}$-martingaali. Siis jotta 4.35 pätisi, tulee L^2:n olla myös $\mathbb{P}$-martingaali. Erityisesti

$$\mathbb{E}\big[L(k)^2\big]=\mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[L(k)^2\big|\mathcal{F}_0\big]\Big]=\mathbb{E}\big[L(0)^2\big]=0.$$

Koska $L^2(k)\geq 0$ kaikilla k, täytyy siis olla, että $L\equiv 0$ $\mathbb{P}$-m.v., joten yhtälö 4.34 saa muodon

$$Z(k)=1+\sum_{j=1}^{k}\eta(j)\big(Y(j)-Y(j-1)\big).$$

Nähdään siis, että

$$\Lambda(k+1)-\Lambda(k)=\frac{Z(k+1)-Z(k)}{Z(k)}=\frac{\eta(k+1)\big(Y(k+1)-Y(k)\big)}{Z(k)}.$$

Valitaan nyt $\lambda(k)=\eta(k)/Z(k-1)$, jolloin yhtälö 4.33 saa muodon

$$\Lambda(k)=1+\sum_{j=1}^{k}\frac{\eta(j)}{Z(j-1)}\Big(Y(j)-Y(j-1)\Big).$$

Valitsemamme λ on ennustettava, sillä η on ennustettava ja Z on sopiva. Joten väite pätee. $\square$

Seuraavaksi huomataan, että mikäli markkinoilla on olemassa minimaalinen martingaalimitta, se on yksikäsitteinen.

Korollaari 4.36. *On olemassa korkeintaan yksi minimaalinen martingaalimitta.*

Todistus. Olkoon $\hat{\mathbb{P}}$ ja $\hat{\mathbb{P}}'$ kaksi minimaalista martingaalimittaa, sekä Λ ja Λ' vastaavat propositiossa 4.20 esiintyvät $\mathbb{P}$-martingaalit. Merkitään $N:=\Lambda-\Lambda'$. Koska $\hat{\mathbb{P}}$ ja $\hat{\mathbb{P}}'$ ovat riskineutraaleja todennäköisyysmittoja, korollaarista 4.31 seuraa, että S':n Doobin hajotelmissa esiintyville ennustettaville prosesesseille tulee päteä kaikilla k

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j)-\Lambda(j-1)\big)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big[\big(\Lambda'(j)-\Lambda'(j-1)\big)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big] \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j)-\Lambda(j-1)-(\Lambda'(j)-\Lambda'(j-1))\big)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big]=0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\big[\big(N(j)-N(j-1)\big)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big]=0.
\end{aligned}
$$

Siis N ja Y ovat vahvasti ortogonaalisia. Toisaalta lauseesta 4.33 seuraa, että N voidaan kirjoittaa muodossa

$$
N(k)=\sum_{j=1}^{k}\big(\lambda(j)-\lambda'(j)\big)\cdot\big(Y(j)-Y(j-1)\big), \qquad k=0,1,...,T.
$$

Olkoon nyt $\tau_n=\inf\{k : \big|\lambda(k+1)-\lambda'(k+1)\big|>n\}$, jolloin $N_n^{\tau}\in L^2(\mathbb{P})$. Koska N ja Y ovat vahvasti ortogonaalisia, kaikilla k pätee

$$
0=\mathbb{E}\big[\big(\lambda(k)-\lambda'(k)\big)\cdot\big(Y(k)-Y(k-1)\big)\big(Y(k)-Y(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big].
$$

λ ja λ' ovat ennustettavia, joten edellisen yhtälön kertominen niiden erotuksella antaa

$$
0=\mathbb{E}\big[\big(\big(\lambda(k)-\lambda'(k)\big)\cdot\big(Y(k)-Y(k-1)\big)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big],
$$

jolloin selvästi $N(k)-N(k-1)=\big(\lambda(j)-\lambda'(j)\big)\cdot\big(Y(j)-Y(j-1)\big)=0$ $\mathbb{P}$-melkein varmasti. Koska $N(0)=\Lambda(0)-\Lambda'(0)=1-1=0$, tulee olla, että $N\equiv 0$, jolloin $\hat{\mathbb{P}}$ ja $\hat{\mathbb{P}}'$ ovat samat. □

Oletetaan tästä eteenpäin, että markkinat koostuvat yhdestä bondista ja yhdestä osakkeesta ja tarkastellaan minimaalisen martingaalimitan olemassaolon edellytyksiä tällaisessa ympäristössä. Nyt siis $S'=S_2$. Merkitään lisäksi S':n lisäysten ehdollista varianssia symbolilla σ^2, eli

$$
\sigma^2(k)=\mathrm{var}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big].
$$

Korollaari 4.37. *Oletetaan, että $n=2$ ja että $\hat{\mathbb{P}}$ on minimaalinen martingaalimitta. Tällöin*

1. Yhtälössä 4.33 esiintyvä ennustettava prosessi λ määräytyy ehdosta

$$\lambda(k) = -\frac{\mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]}{\sigma^2(k)} \cdot \mathbb{I}_{\{\sigma^2(k)\neq 0\}} \ \mathbb{P}\text{-}m.v. \tag{4.38}$$

2. Kaikilla k, $\mathbb{P}$-melkein varmasti, kun $\sigma^2(k) \neq 0$

$$\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)\cdot\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] < \mathbb{E}\big[\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \tag{4.39}$$

Todistus. Osoitetaan ensin kohta 1. Muodostetaan S_2:n Doobin hajotelma suhteessa $\mathbb{P}$:hen, eli merkitään $S_2 = Y + B$. Korollaarista 4.31 ja lauseesta 4.33 seuraa, että $\mathbb{P}$-martingaali Λ toteuttaa ehdon

$$\begin{aligned} B(k) - B(k-1) &= -\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big)\big(S_2(k) - S_2(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= -\mathbb{E}\big[\lambda(k)\big(Y(k) - Y(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Koska Y on $\mathbb{P}$-martingaali,

$$\begin{aligned} \sigma^2(k) &= \mathrm{var}\big[Y(k) - B(k) - \big(Y(k-1) - B(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = \mathrm{var}\big[Y(k) - Y(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\big(Y(k) - Y(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] - \mathbb{E}\big[Y(k) - Y(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]^2 \\ &= \mathbb{E}\big[\big(Y(k) - Y(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]. \end{aligned}$$

Toisaalta, koska B on ennustettava,

$$\begin{aligned} B(k) - B(k-1) &= \mathbb{E}\big[B(k) - B(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[S_2(k) - Y(k) - \big(S_2(k-1) - Y(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] - \mathbb{E}\big[Y(k) - Y(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] \\ &= \mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big], \end{aligned}$$

joten yhtälöstä 4.40 seuraa, että

$$\mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = -\lambda(k)\cdot\sigma^2(k),$$

mikä todistaa väitteen.

Osoitetaan vielä kohta 2. Proposition 4.20 mukaan $\mathbb{P}$-martingaalin Λ tulee olla sellainen, että

$$\Lambda(k) - \Lambda(k-1) = \lambda(k)\big(Y(k) - Y(k-1)\big) > -1 \quad \mathbb{P}\text{-m.v. kaikille } k$$

Voidaan olettaa, että kohta 1 pätee, jolloin

$$-\frac{\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]}{\sigma^2(k)}\cdot\big(Y(k)-Y(k-1)\big)>-1$$

$$\Leftrightarrow \big(Y(k)-Y(k-1)\big)\cdot\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]<\sigma^2(k) \tag{4.41}$$

Huomataan, että yhtälön vasen puoli saa muodon

$$\begin{aligned}
&\big(Y(k)-Y(k-1)\big)\cdot\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\
&=\big(S_2(k)-S_2(k-1)-(B(k)-B(k-1))\big)\cdot\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\
&=\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]-\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]^2.
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\sigma^2(k)=\mathbb{E}\big[\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]-\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]^2,$$

jolloin yhtälö 4.41 saadaan haluttuun muotoon. □

Edellisen tuloksen ehto 2 on melko rajoittava, mutta mikäli se täyttyy, ollaan jo hyvin lähellä minimaalisen martingaalimitan olemassaolon varmistumista, ja ennenkaikkea sen löytymistä.

Lause 4.42. *Oletetaan, että finanssimarkkinat koostuvat yhdestä bondista ja yhdestä osakkeesta siten, että ehdot*

1. *On olemassa $C\in\mathbb{R}$ siten, että*

$$\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]^2\le C\cdot\sigma^2(k)\qquad \mathbb{P}-m.v.\ kaikilla\ k=0,1,...,T$$

2. *Kaikille k, $\mathbb{P}$-m.v., kun $\sigma^2(k)\neq 0$*

$$\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)\cdot\mathbb{E}\big[S_2(k)-S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]<\mathbb{E}\big[\big(S_2(k)-S_2(k-1)\big)^2\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]$$

täyttyvät. Tällöin on olemasssa yksikäsitteinen minimaalinen martingaalimitta $\hat{\mathbb{P}}$, jonka Radon-Nikodymin derivaatta $Z(T)=d\hat{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$ määräytyy ehdosta

$$Z(T)=\prod_{j=1}^{T}\big(1+\lambda(j)\big(Y(j)-Y(j-1)\big)\big),$$

missä λ on yhtälön 4.38 mukainen ennustettava prosessi ja Y on S_2:n Doobin hajotelmassa 4.30 esiintyvä $\mathbb{P}$-martingaali.

Todistus. Osoitetaan väite todeksi proposition 4.20 avulla. Olkoon siis $S_2 = Y + B$ S:n Doobin hajotelma $\mathbb{P}$:n suhteen. Olkoon lisäksi $\mathbb{P}$-martingaali Λ yhtälön 4.33 mukainen prosessi. Ehdosta 1 ja valitsemastamme yhtälön 4.38 mukaisesta λ:sta seuraa, että $\mathbb{P}$-m.v. kaikilla k

$$C \geq \frac{\mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]^2}{\sigma^2(k)} = \frac{\big(-\lambda(k)\sigma^2(k)\big)^2}{\sigma^2(k)} \tag{4.43}$$

$$= \lambda(k)^2\sigma^2(k) = \mathbb{E}\Big[\big(\lambda(k)\cdot\big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big)^2\Big|\mathcal{F}_{k-1}\Big], \tag{4.44}$$

Erityisesti $\mathbb{E}[(\lambda(k)(Y(k)-Y(k-1)))^2|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[(\lambda(k)(Y(k)-Y(k-1)))^2] < \infty$. Siis Λ on neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali. Kuten korollaarin 4.37 todistuksessa huomataan, ehto 2 on yhtäpitävää ehdon $\Lambda(k) - \Lambda(k-1) > -1$ kanssa. Olkoon nyt Z sellainen, että

$$Z(k) = \prod_{j=1}^{k}\big(1 + \Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big) = \prod_{j=1}^{k}\Big(1 + \lambda(j)\big(Y(j) - Y(j-1)\big)\Big).$$

Tällainen Z on $\mathbb{P}$-m.v. aidosti positiivinen kaikilla k. Lisäksi se on luonnollisesti neliöintegroituva $\mathbb{P}$-martingaali, sillä Λ on sellainen. Siis proposition 4.20 ehdot täyttyvät, joten $\hat{\mathbb{P}}$ määräytyy ehdosta $d\hat{\mathbb{P}} = Z(T)d\mathbb{P}$. Osoitetaan vielä, että $\hat{\mathbb{P}}$ on riskineutraali. Radon-Nikodymin derivaatta $d\hat{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}$ on neliöintegroituva, joten S_2 on $\hat{\mathbb{P}}$-integroituva kaikilla k. Koska λ on yhtälön 4.38 mukainen, kaikilla k pätee

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = -\lambda(k)\sigma^2(k)\\
&= -\mathbb{E}\big[\lambda(k)\big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big]\\
&= -\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(k) - \Lambda(k-1)\big)\big(Y(k) - Y(k-1)\big)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big].
\end{aligned}$$

Toisaalta, kuten korollaarin 4.37 todistuksessa huomattiin,

$$\mathbb{E}\big[S_2(k) - S_2(k-1)\big|\mathcal{F}_{k-1}\big] = B(k) - B(k-1),$$

joten prosessille B tulee päteä kaikilla k

$$B(k) = -\sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}\big[\big(\Lambda(j) - \Lambda(j-1)\big)\big(Y(j) - Y(j-1)\big)\big|\mathcal{F}_{j-1}\big],$$

jolloin korollaarista 4.31 seuraa, että $\hat{\mathbb{P}}$ on riskineutraali todennäköisyysmitta. $\hat{\mathbb{P}}$:n yksikäsitteisyys seuraa suoraan korollaarista 4.36. $\square$

Esimerkki 4.45. Jatkoa esimerkille 3.20. Määritetään minimaalinen martingaalimitta kyseisille markkinoille. Minimaaliselle martingaalimitalle tulee siis päteä

$$d\hat{\mathbb{P}} = Z(1)d\mathbb{P},$$

missä

$$Z(1) = 1 + \lambda(1)\big(Y(1) - Y(0)\big).$$

Tiedetään, että

$$\lambda(1) = -\frac{\mathbb{E}\big[S_2(1) - S_2(0)\big]}{\operatorname{var}\big[S_2(1) - S_2(0)\big]} = -\frac{\mathbb{E}\big[S_2(1)\big] - S_2(0)}{\operatorname{var}\big[S_2(1)\big]} = -\frac{1}{2}$$

ja $Y(1,\omega) = S_2(1,\omega) + B(1)$, missä

$$\begin{aligned} B(1) &= \mathbb{E}\big[\big(\Lambda(1) - \Lambda(0)\big)\big(S_2(1) - S_2(0)\big)\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\Lambda(1)S_2(1)\big] - \mathbb{E}\big[\Lambda(1)\big]S_2(0) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big] + S_2(0). \end{aligned}$$

Koska Λ on $\mathbb{P}$-martingaali, $\mathbb{E}\big[\Lambda(1)\big] = \mathbb{E}\big[\Lambda(0)\big] = 1$. Lisäksi

$$\Lambda(1) = \Lambda(0) - 1 + \frac{Z(1)}{Z(0)} = \frac{Z(1)}{Z(0)} = Z(1),$$

sillä $Z(0) = \mathbb{E}[d\hat{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[d\hat{\mathbb{P}}/d\mathbb{P}] = 1$. Z on $\mathbb{P}$-martingaali ja koska $\hat{\mathbb{P}}$ on riskineutraali mitta, lemmasta 4.19 seuraa, että ΛS_2 on $\mathbb{P}$-martingaali. Siis $\mathbb{E}\big[\Lambda(1)S_2(1)\big] = \mathbb{E}\big[\Lambda(0)S_2(0)\big] = S_2(0)$, joten

$$B(1) = S_2(0) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big],$$

ja edelleen

$$Y(1,\omega) = S_2(1,\omega) + S_2(0) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big].$$

Koska $S_2(0)$ on vakio ja Doobin hajotelma on yksikäsitteinen, $Y(0) = S_2(0)$, jolloin

$$Z(1) = 1 + \lambda(1)\big(S_2(1,\omega) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big]\big).$$

Siis $\hat{\mathbb{P}}$ määräytyy ehdoista

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(\omega_1) &= \big(1 + \lambda(1)\big(S_2(1,\omega_1) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big]\big) \cdot \mathbb{P}(\omega_1) = \frac{1}{3} \\ \hat{\mathbb{P}}(\omega_2) &= \big(1 + \lambda(1)\big(S_2(1,\omega_2) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big]\big) \cdot \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{1}{2} \\ \hat{\mathbb{P}}(\omega_3) &= \big(1 + \lambda(1)\big(S_2(1,\omega_3) - \mathbb{E}\big[S_2(1)\big]\big) \cdot \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Huomataan, että arvopaperin 3 hinta mitalla $\hat{\mathbb{P}}$ laskettuna on

$$S_3(0) = \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\big[S_3(1)\big] = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

joka on sama kuin lokaalin riskin minimointimenetelmän mukaisen salkun hetken 0 hinta.

Esimerkissä 4.45 huomataan, että kun lauseen 4.42 ehdot toteutuvat, voidaan halutun vaateen arbitraasivapaana hintana pitää lokaalin riskin minimoivan diskontatun arvoprosessin hetken 0 arvoa. Pohditaan vielä, mitä tapahtuu, jos arvopaperin 2 arvokehitys olisikin sellainen, että ehdot eivät toteudu. Oletetaan, että ehto 1 ei toteudu, eli että ei ole olemassa sellaista vakiota C, että $\mathbb{P}$-m.v.

$$\frac{\mathbb{E}\big[S_2(1) - S_2(0)\big]^2}{\operatorname{Var}\big[S_2(1) - S_2(0)\big]} \leq C.$$

Toisin sanoen, että arvopaperin 2 odotustuotto on siihen liittyvään riskiin verrattuna rajattoman suuri. Tällaisessa tapauksessa jokainen markkinoiden rationaalinen toimija suojaa arvopaperin 3 arvopaperin 2 avulla. Joten vaikka lokaalin riskin minimoiva strategia mahdollistaakin arbitraasin tässä tapauksessa, voidaan sen merkitystä pitää merkityksettömänä, sillä todelisilla markkinoilla voidaan olettaa, ettei kukaan tällaista suojausta itseleen hanki. Ehdon 2 tapauksessa tilanne ei ole aivan näin yksinkertainen. Arbitraasimahdollisuus pystytään kuitenkin jo havaitsemaan hetkellä 0, sillä ehdossa arvopaperin 2 arvonmuutosta rajoittaa ainoastaan $\mathcal{F}_0$-mitallinen suure. Tässäkin tapauksessa siis arbitraasia pystytään hallitsemaan oikeanlaisen tarkastelun avulla. Jos toimija tietää hetkellä 0 arvopaperin 2 hetken 1 mahdolliset arvot, tämä huomaa mikäli ehto 2 ei toteudu ja pystyy päättelemään, ettei lokaalin riskin minimointi anna arbitraasivapaata hintaa vaateelle. Tämän tiedon valossa toimija pystyy kontrolloimaan arbitraasimahdollisuuksia.

Lokaalin riskin minimointi on toimijalle tehokas tapa suojata finanssimarkkinoilla esiintyviä vaateita, kunhan tämä pitää mielessä, että se tuo mukanaan myös arbitraasimahdollisuuksia. Näitä pystytään kuitenkin kohtuullisin ponnisteluin hallitsemaan, joten toimijan kannattaa pitää lokaalin riskin minimointia yhtenä vaihtoehtona suojautua kohtuuttoman suurilta tappioilta.

Luku 5

Sijoitussidonnaiset henkivakuutukset

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti sijoitussidonnaisia henkivakuutuksia ja niiden suojaamista lokaalin riskin minimoinnin keinoin. Mielenkiinnon kohteena on kuitenkin erityisesti niiden sisältämät arbitraasimahdollisuudet. Osa tuloksista esitetään ilman todistusta ja näissä tapauksissa lukijalle osoitetaan tulosten yhteydessä sopivat lisämateriaalit.

Sijoitussidonnaisen henkivakuutuksen ajatuksena on ,että maksetava korvaus riippuu finanssimarkkinoiden arvopapereiden arvokehityksestä. Lisäksi korvaukseen vaikuttaa tietenkin vakuutuksenottajan elinaika. Olkoon $S(k) = \big(S_1(k), S'(k)\big) \in \mathbb{R}^N$ finanssimarkkinoiden arvopapereiden arvovektori. Korvauksen suuruuteen ja ajankohtaan vaikuttavat siis arvopapereiden arvokehitystä kuvaava stokastinen prosessi $S := \{S(k) : k = 0, 1, ..., T\}$, sekä vakuutuksenottajan jäljellä olevaa elinaikaa kuvaava satunnaismuuttuja τ. Nämä voidaan olettaa toisistaan riippumattomiksi, jolloin mallin muodostaminen on suhteellisen yksinkertaista. Olkoon S määritelty stokastisella kentällä $(\Omega^S, \mathcal{G}, \mathbb{G}, \mathbb{P}^S)$, missä $\mathcal{G} = \mathcal{G}_T$ on finanssimarkkinoiden informaatiota kuvaava sigma-algebra ja $\mathbb{G}$ sitä vastaava filtraatio, sekä $\mathbb{P}^S$ finanssimarkkinoihin liittyvä fyysinen todennäköisyysmitta. Olkoon vastaavasti τ määritelty jollakin stokastisella kentällä $(\Omega^\tau, \mathcal{H}, \mathbb{H}, \mathbb{P}^\tau)$, missä sigma-algebra $\mathcal{H}$ on riippumaton sigma-algebrasta $\mathcal{G}$, sekä $\mathbb{P}^\tau$ on vakuutetun elinaikaan liittyvä fyysinen todennäköisyysmitta. Olkoon näiden avaruuksien tuloavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, missä nyt siis $\mathbb{P} = \mathbb{P}^S \otimes \mathbb{P}^\tau$ on yhdistetyn mallin fyysinen todennäköisyysmitta. Koska S on $\mathbb{G}$-sopiva, $S(k) \in \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{H}_k$ kaikilla $k = 0, 1, ..., T$, joten S on myös $\mathbb{F}$-sopiva.

Sijoitussidonnaisen vakuutuksena ajatuksena on, maksettava korvaus riippuu finanssimarkkinoiden kehityksestä. Hetkellä 0 alkavan vakuutuksen korvaus H voidaan siis esittää muodossa

$$H := \mathbb{I}_{E^\tau} \cdot X, \tag{5.1}$$

missä $E^\tau \in \mathcal{H}$ kuvaa vakuutuksenottajan elinaikaan liittyvää tapahtumaa kuten esimerkiksi tapahtumaa $\{\tau > T\}$, jolloin kyse on ns. *elämänvaravakuutuksesta*, johon tässä tutkielmassa keskitytään ja X on jokin finanssimarkkinoilla esiintyvä vaade. Lause 5.8 esittää lokaalin riskin minimoivan strategian tällaiselle korvaukselle. Sitä varten tarvitaan kuitenkin vielä hieman todennäköisyysteorian työkaluja.

Lemma 5.2. *Fubinin lause. Olkoon η^τ satunnaismuutuja todennäköisyyskentällä $(\Omega^\tau, \mathcal{H}, \mathbb{P}^\tau)$ ja η^S satunnaismuuttuja todennäköisyyskentällä $(\Omega^S, \mathcal{G}, \mathbb{P}^S)$. Jos η^τ ja η^S ovat riippumattomia ja $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}[|\eta^\tau \cdot \eta^S|] < \infty$, niin*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}[\eta^\tau \cdot \eta^S] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S].$$

Todistus. Kts. esim. [6]. □

Määritelmä 5.3. Kokoelma $\mathcal{B}$ joukon Ω osajoukkoja on π-systeemi, jos

$$C, D \in \mathcal{B} \Rightarrow C \cap D \in \mathcal{B}.$$

Määritelmä 5.4. Kokoelma $\mathcal{B}$ joukon Ω osajoukkoja on λ-systeemi, jos

1. $\Omega \in \mathcal{B}$,
2. Jos $C, D \in \mathcal{B}$ ja $C \subset D$, niin $D \backslash C \in \mathcal{B}$,
3. Jos $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ ja ne kaikki kuuluvat $\mathcal{B}$:hen, niin $\cup_{i=1}^\infty C_i \in \mathcal{B}$.

Lause 5.5. *Olkoon $\mathcal{A}$ π-systeemi ja $\mathcal{B}$ λ-systeemi. Tällöin*

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}.$$

Todistus. Kts. esim. [6]. □

Lause 5.6. *Jos todennäköisyysmitat $\mathbb{P}'$ ja $\tilde{\mathbb{P}}$ mittaavat π-systeemin $\mathcal{B}$ tapahtumat samoin, ne mittaavat myös sigma-algebran $\sigma(\mathcal{B})$ tapahtumat samoin.*

Todistus. Kts. esim [6]. □

Lemma 5.7. *Oletetaan, että lauseen 5.2 oletukset pätevät. Olkoon lisäksi $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ ja $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ riippumattomia. Tällöin*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}[\eta^\tau \cdot \eta^S | \mathcal{H}' \otimes \mathcal{G}'] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau | \mathcal{H}'] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S | \mathcal{G}'].$$

Todistus. Olkoon
$$\mathcal{A} := \{E^\tau \cap E^S : E^\tau \in \mathcal{H}', E^S \in \mathcal{G}'\},$$
jolloin $\mathcal{A}$ on π-systeemi. Lisäksi $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{H}' \otimes \mathcal{G}'$. Merkitään
$$\mathcal{B} := \left\{ D \in \mathcal{H}' \otimes \mathcal{G}' : \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}[\eta^\tau \cdot \eta^S \cdot \mathbb{I}_D] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}\big[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau|\mathcal{H}'] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S|\mathcal{G}'] \cdot \mathbb{I}_D\big] \right\},$$
jolloin $\mathcal{B}$ on λ-systeemi. Merkitään vielä $\mathbb{P} := \mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S$, jolloin huomataan, että
$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\eta^\tau \cdot \eta^S \cdot \mathbb{I}_{\{E^\tau \cap E^S\}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\eta^\tau \cdot \mathbb{I}_{E^\tau} \cdot \eta^S \cdot \mathbb{I}_{E^S}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau \cdot \mathbb{I}_{E^\tau}] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S \cdot \mathbb{I}_{E^S}].$$
Toisaalta,
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau|\mathcal{H}'] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S|\mathcal{G}'] \cdot \mathbb{I}_{E^\tau \otimes E^S}\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau|\mathcal{H}'] \cdot \mathbb{I}_{E^\tau} \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S|\mathcal{G}'] \cdot \mathbb{I}_{E^S}\big] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\eta^\tau \cdot \mathbb{I}_{E^\tau} \cdot \eta^S \cdot \mathbb{I}_{E^S}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\eta^\tau \cdot \mathbb{I}_{E^\tau}] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}[\eta^S \cdot \mathbb{I}_{E^S}].\end{aligned}$$
Siis $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, joten lauseen 5.5 mukaan $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$, mikä todistaa väitteen. □

Edellä esitetyt tulokset ovat käyttökelpoisia vakuutetun elinajan ja finanssimarkkinoiden yhdistetyssä mallissa, koska kuten jo edellä todettiin, näihin liittyvät todennäköisyyskentät oletetaan toisistaan riippumattomiksi. Lisäksi on perusteltua olettaa, että finanssimarkkinoiden arvopapereiden arvot ovat positiivisia, jolloin tulosten oletukset toteutuvat.

Lause 5.8. *Olkoot sigma-algebrat $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ riippumattomia ja olkoon $\theta^S := (\theta_1^S, \theta'^S)$ lokaalin riskin minimoiva strategia finanssimarkkinoiden vaateen X suojaamiseksi. Tällöin strategia $\theta := (\theta_1, \theta')$, jolle kaikilla $k = 0, 1, ..., T$*
$$\theta(k+1) = \xi(k) \cdot \theta^S(k+1)$$
missä $\xi = (\xi(0), \xi(1), ..., \xi(T)) := (\mathbb{E}[\mathbb{I}_{E^\tau}|\mathcal{F}_0], \mathbb{E}[\mathbb{I}_{E^\tau}|\mathcal{F}_1], ..., \mathbb{E}[\mathbb{I}_{E^\tau}|\mathcal{F}_T])$, missä $E^\tau \in \mathcal{H}$, on lokaalin riskin minimoiva strategia yhtälön 5.1 mukaiselle vaateelle H.

Todistus. Olkoon C^S X:n suojaavan lokaalin riskin minimoivan strategian θ^S kustannusprosessi. Lauseesta 3.16 seuraa, että $\mathbb{P}^S$-m.v. kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\big[C^S(k+1) - C^S(k)\big|\mathcal{G}_k\big] = 0 \text{ ja} \\ &\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\big[\big(C^S(k+1) - C^S(k)\big)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\big|\mathcal{G}_k\big] = 0.\end{aligned}$$
Olkoon nyt C strategian θ kustannusprosessi. Lauseen 3.16 mukaan strategia on lokaalin riskin minimoiva jos ehdot

$$\mathbb{E}\big[C(k+1) - C(k)\big|\mathcal{F}_k\big] = 0 \text{ ja} \tag{5.9}$$
$$\mathbb{E}\big[\big(C(k+1) - C(k)\big)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] = 0 \tag{5.10}$$

pätevät $\mathbb{P}$-m.v. kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$. Osoitetaan ensin ehto 5.9. Huomataan, että

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\xi(k+1)\middle|\mathcal{H}_k\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\mathbb{I}_{E^\tau}\middle|\mathcal{H}_{k+1}\right]\middle|\mathcal{H}_k\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\mathbb{I}_{E^\tau}\middle|\mathcal{H}_k\right] = \xi(k).$$

Nyt sigma-algebrojen riippumattomuudesta seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[C(k+1) - C(k)\big|\mathcal{F}_k\big] =& \mathbb{E}\big[\theta(k+2)S(k+1) - \theta(k+1)S(k+1)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
=& \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{P}^S}\left[\xi(k+1)\theta^S(k+2)S(k+1) - \xi(k)\theta^S(k+1)S(k+1)\middle|\mathcal{G}_k \otimes \mathcal{H}_k\right] \\
=& \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\xi(k+1)\middle|\mathcal{H}_k\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+2)S(k+1)\middle|\mathcal{G}_k\right] - \\
& \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\xi(k)\middle|\mathcal{H}_k\right]\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+1)S(k+1)\middle|\mathcal{G}_k\right] \\
=& \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+2)S(k+1)\middle|\mathcal{G}_k\right] - \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+1)S(k+1)\middle|\mathcal{G}_k\right] \\
=& \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[C^S(k+1) - C^S(k)|\mathcal{F}_k\right] \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Ehdon 5.10 osoittamiseksi huomataan samalla tavalla, että

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\big[\big(C(k+1) - C(k)\big)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
=& \mathbb{E}\big[\big(\xi(k+1)\theta^S(k+2)S(k+1) - \xi(k)\theta^S(k+1)S(k+1)\big)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\big|\mathcal{F}_k\big] \\
=& \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+2)S(k+1)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\middle|\mathcal{G}_k\right] - \\
& \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\theta^S(k+1)S(k+1)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\middle|\mathcal{G}_k\right] \\
=& \xi(k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^S}\left[\big(C^S(k+1) - C^S(k)\big)\big(S'(k+1) - S'(k)\big)\middle|\mathcal{G}_k\right] \\
=& 0,
\end{aligned}$$

joten väite pätee. □

Seuraavaksi huomataan, että mikäli yhdistetyssä mallissa on olemassa minimaalinen martingaalimitta, on se elinaikaa kuvaavan mallin fyysisen todennäköisyysmitan sekä finanssimarkkinoita kuvaavan mallin minimaalisen martingaalimitan tulomitta.

Lause 5.11. *Olkoon $\hat{\mathbb{Q}}^S$ minimaalinen martingaalimitta avaruudessa $(\Omega^S, \mathcal{G}, \mathbb{G})$. Tällöin $\mathbb{P}^\tau \otimes \hat{\mathbb{Q}}^S$ on minimaalinen martingaalimitta avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$.*

Todistus. Olkoon $\hat{\mathbb{Q}}$ minimaalinen martingaalimitta avaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ ja olkoon $E^\tau \in \mathcal{H}$ ja $E^S \in \mathcal{G}$. Valitaan finanssimarkkinoiden vaade X siten, että $X = \mathbb{I}_{E^S}$. Olkoon lisäksi V yhtälön 5.1 mukaisen vaateen H:n suojaavan lokaalin riskin minimoivan strategian diskontattu arvoprosessi ja V^S X:n suojaavan lokaalin riskin minimoiva strategian diskontattu arvoprosessi. Huomataan, että kaikilla $k = 0, 1, ..., T$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \hat{\mathbb{Q}}^S}[\mathbb{I}_{E^\tau}\mathbb{I}_{E^S}|\mathcal{F}_k] = V(k) = \xi(k) \cdot V^S(k) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}[\mathbb{I}_{E^\tau}|\mathcal{H}_k] \cdot \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{Q}}^S}[\mathbb{I}_{E^S}|\mathcal{G}_k].$$

Siis mitat $\hat{\mathbb{Q}}$ ja $\hat{\mathbb{Q}}^S \otimes \mathbb{P}^\tau$ mittaavat tapahtuman $E^\tau \cap E^S$ samoin. Huomataan, että kaikkien tällaisten tapahtumien joukko

$$\left\{E^\tau \cap E^S : E^\tau \in \mathcal{H}, E^S \in \mathcal{G}\right\}$$

muodostaa π-systeemin joka generoi sigma-algebran $\mathcal{H} \otimes \mathcal{G}$, joten täytyy päteä, että $\hat{\mathbb{Q}} = \hat{\mathbb{Q}}^S \otimes \mathbb{P}^\tau$. $\square$

Minimaalisen martingaalimitan olemassaolo yhdistetyssä mallissa saattaa monesti olla melko vahva vaatimus. Tarkastellaan lopuksi vielä, voidaanko yhdistetyssä mallissa suojata vaade arbitraasivapaalla tavalla, mikäli tällaista mittaa ei löydy. Oletetaan, että finanssimarkkinat ovat arbitraasivapaat ja että ne koostuvat N kappaleesta arvopapereita. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan myös että korko $r = 0$. Koska vakuutetun elinajan ei oleteta liittyvän millään tavalla arvopapereiden arvokehitykseen, voidaan yhdistetyssä mallissa arvopaperin n, $n = 1, 2, ..., N$, hetken k, $k = 0, 1, ..., T$, arvoa kuvata satunnaismuuttujana

$$\mathbb{I}_{\{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}} S_n(k) = S_n(k) \qquad \mathbb{P}\text{-m.v.}$$

Määritellään nyt yhdistettyyn malliin todennäköisyysmitta $\mathbb{Q}$ siten, että $\mathbb{Q} := \mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S$, missä $\mathbb{Q}^S$ on jokin finanssimarkkinoiden riskineutraali mitta. Tämä on ekvivalentti mitan $\mathbb{P}$ kanssa, koska luonnollisesti $\mathbb{P}^\tau$ on ekvivalentti itsensä kanssa ja koska $\mathbb{Q}^S$ on finanssimarkkinoiden riskineutraali mitta, eli $\mathbb{Q}^S \sim \mathbb{P}^S$. Lisäksi $\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S$ -m.v. kaikilla $k = 0, 1, ..., T-1$ ja $n = 1, 2, ..., N$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{I}_{\{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}} S_n(k+1) \middle| \mathcal{F}_k\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S}\left[\mathbb{I}_{\{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}} S_n(k+1) \middle| \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{G}_k\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\left[\mathbb{I}_{\{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}} \middle| \mathcal{H}_k\right] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[S_n(k+1) \middle| \mathcal{G}_k\right] = \mathbb{P}^\tau\left(\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0} \middle| \mathcal{H}_k\right) \cdot S_n(k) \\
&= S_n(k),
\end{aligned}$$

eli $\mathbb{Q}$ on riskineutraali mitta yhdistetyn mallin finanssimarkkinoilla. Liitetään näihin markkinoihin sopimus, jossa vakuutetulle korvataan jokin arvopapereiden arvokehityksestä riippuva summa X hetkellä T, mikäli tämä on silloin elossa. Korvattava määrä on siis

$$H := \mathbb{I}_{\{\tau > T\}} \cdot X.$$

Oletetaan, että vaade X on toistettavissa finanssimarkkinoilla. Siis on olemassa omavarainen strategia, jonka mukaisen salkun arvo hetkellä T on X. Olkoon V^S tämän strategian diskontattu arvoprosessi. Koska finanssimarkkinat ovat arbitraasivapaat, voidaan tämän salkun diskontattua arvoa $V^S(k)$ pitää X:n hetken k arbitraasivapaana hintana. Toisin sanoen kaikilla $k = 0, 1, ..., T$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\left[V^S(T) \middle| \mathcal{G}_k\right] = V^S(k).$$

Olkoon strategia $\xi \cdot \theta^S$ lauseen 5.8 mukainen lokaalin riskin minimoiva strategia H:n suojaamiseksi. Tämän strategian diskontattu arvoprosessi on siis $\xi \cdot V^S$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S}\big[H \big| \mathcal{F}_k\big] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S}\big[\xi(T) V^S(T) \big| \mathcal{F}_k\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau \otimes \mathbb{Q}^S}\Big[\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\big[\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} \big| \mathcal{H}_T\big] V^S(T) \Big| \mathcal{H}_k \otimes \mathcal{G}_k\Big] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\big[\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} \big| \mathcal{H}_k\big] \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^S}\big[V^S(T) \big| \mathcal{G}_k\big] = \xi(k) \cdot V^S(k),\end{aligned}$$

joten $\xi(k)V^S(k)$ on vaateen H hetken k arbitraasivapaa hinta. Siispä lokaalin riskin minimoinnilla voidaan suojata arbitraasivapaalla tavalla sopimus, missä elämänvaravakuutukseen on sidottu finanssimarkkinoilla toistettavissa oleva vaade. Huomioitavaa on, että edellä tarkasteltu strategia on kahden lokaalin riskin minimoivan strategian tulo. Kuten todettiin, θ^S on sellainen, mutta itse asiassa myös ξ minimoi lokaalin riskin suojatessa vaadetta $\mathbb{I}_{\{\tau > T\}}$, siinä tapauksessa, jos markkinoiden ainoana arvopaperina on koroton bondi. Lisäksi erityisesti tämän strategian hetken 0 arvo on

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\big[\mathbb{I}_{\{\tau > T\}} \big| \mathcal{H}_0\big] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\tau}\big[\mathbb{I}_{\{\tau > T\}}\big] = \mathbb{P}^\tau\big(\tau > T\big),$$

joka on sama kuin perinteisten henkivakuutusten hinnoittelussa käytettävä ns. *ekvivalenssiperiaatteen* mukainen elämänvaravakuutuksen hetken 0 hinta. Tästä kiinnostunut lukija ohjataan lähteeseen [7].

Kirjallisuutta

[1] Hans Föllmer, Alexander Schied: Stochastic Finance: an Introduction in Discrete Time, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/ New York, 2011

[2] Jérôme Pansera, Discrete-time local risk minimization of payment processes and its applications to equity-linked life-insurance contracts, Elsevier B.V., 2011

[3] Hans Bühlmann, Alois Gisler: A Course in Credibility Theory and its Applications, Springer 2005

[4] Rick Durrett: Probability: Therory and Examples, 4th Edition, Cambridge University Press, 2010

[5] Harri Nyrhinen, Sijoitustoiminnan matematiikka, Helsingin yliopisto 2017

[6] Konstantin Izyurov, Probability theory, Helsingin yliopisto 2016

[7] Hans. U. Gerber, Life Insurance Mathematics, third edition, Springer 1997