Pro gradu -tutkielma

Cliffordin analyysi ja sovelluksia

Sylvester Eriksson-Bique

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA

Ohjaaja: Jari Taskinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Helsingin Yliopisto

Helsinki, Toukokuu 2011

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos Institution – Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos	

Tekijä Författare – Author

Sylvester David Eriksson-Bique

Työn nimi Arbetets titel – Title

Cliffordin analyysi ja sovelluksia

Oppiaine Läroämne – Subject

Matematiikka

Työn laji Arbetets art – Level	Aika Datum – Month and year	Sivumäärä Sidoantal – Number of pages
Pro gradu	5/2011	76

Tiivistelmä Referat – Abstract

Cliffordin algebrat ovat äärellisulotteisia reaali- tai kompleksikertoimisia algebroja, jotka yleistävät kvaterneja ja kompleksilukuja. Näitä algebroja on kutsuttu myös geometrisiksi algebroiksi. Tässä tutkielmassa tarkastellaan analyysiä Cliffordin algebroilla ja sen sovelluksia. Analyysi tässä tarkoittaa sitä, että tarkastellaan Cliffordin algebra-arvoisia funktioita, jotka omaavat erikseen määriteltyjä sileysominaisuuksia. Sovelluskohteina ovat osittaisdifferentiaaliyhtälöt ja reuna-arvo-ongelmat. Menetelmät ovat klassisia kompleksianalyysin menetelmiä.

Tutkielmassa esitellään Cliffordin algebrat yleisille neliömuodollisille avaruuksille. Keskeisiä algebrallisia ominaisuuksia ovat Frobeniuksen teoreema ja perusoperaatiot. On yleisesti tunnettua, että kvaterneilla voidaan esittää kolmiulotteisen ja neljäulotteisen avaruuden rotaatiot. Tutkielmassa esitellään, miten Cliffordin ryhmiä, jotka ovat Cliffordin algebrojen osajoukkoja, käytetään useamman ulottuvuuden rotaatioiden esityksessä. Toinen sovelluskohde on Möbius-kuvausten esittäminen Vahlenin matriiseilla.

Tutkielman toisessa osiossa määritellään monogeeniset funktiot erään Diracin operaattorin nollaratkaisuina. Monogeenisten funktioiden pääominaisuus on Cauchyn integraalikaava. Välittömiä seurauksia ovat esimerkiksi potenssisarjakehitelmät, analyyttisuus, Liuvillen teoreema ja muut klassisen kompleksianalyysin tuloksien yleistykset. Toisaalta monet kompleksianalyysin tulokset eivät yleisty. Esimerkiksi monogeenisten funktioiden tulo ei ole yleisesti ottaen monogeeninen. Potenssisarjat voidaan esittää monogeenisten polynomeiden avulla. Esitämme kannan monogeenisten polynomien avaruudelle käyttäen CK-laajennusta.

Cauchyn ytimen ominaisuuksien avulla tarkastelemme Diracin operaattorin reuna-arvo-ongelmia ja nk. D-ongelmaa. Käyttäen Rungen lauseen yleistystä osoitamme D-ongelman yleisen ratkaistavuuden. Toisaalta reuna-arvo-ongelman ratkaistavuus karakterisoidaan käyttäen Cauchyn ytimen reuna-arvo-ominaisuuksia ja hyppyrelaatioita. Keskeinen sovellus tuloksille on aikaharmonisen Maxwellin yhtälön reuna-arvo-ongelmien tarkastelu. Mielenkiintoista on myös, miten Diracin operaattori linearisoi Laplacen operaattorin ja aalto-operaattorin. Toisaalta Diracin operaattorin avulla voidaan ilmaista Maxwellin yhtälöt tiiviissä muodossa.

Muita tuloksia tutkielmassa ovat meromorfifunktioiden määritelmä ja Mittag-Lefflerin lause. Tutkielman lopuksi tarkastellaan lyhyesti harmonisten funktioiden ja monogeenisten funktioiden suhdetta. Jokainen harmoninen funktio on jonkin monogeenisen funktion reaaliosa. Tosin monogeeninen funktio ei ole yksikäsitteisesti määrätty sen reaaliosan avulla.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Cliffordin analyysi, Cliffordin algebrat, Möbius-kuvaukset, osittaisdifferentiaaliyhtälöt, reuna-arvo-ongelmat, kvaternit, kompleksianalyysi, Diracin operaattorit

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Abigail Biquelle

Sisältö

1 Johdanto

Cliffordin analyysi on tiiviisti esitettynä analyysiä Cliffordin algebra -arvoisilla funktioilla. Tämä on siitä mielenkiintoinen alue, että sitä tarkastellaan ja tutkitaan kahdesta hyvin erilaisesta näkökulmasta käsin. Yksi suuntaus pyrkii tarkastelemaan teoriaa kompleksianalyysin yleistyksenä. Toinen suunta taas pyrkii tarkastelemaan teoriaa sen perusolion, Diracin operaattorin, teoriana. Kompleksianalyyttiselle lähestymistavalle on tyypillistä korostaa Cliffordin a nalyysin ja kompleksianalyysin yhteyksiä ja pyrkiä esittämään teoria klassisen kompleksianalyysin tavoin. Diracin operaattorien tapauksessa taas konteksti tulee geometriasta ja ongelmat nousevat differentiaaligeometriasta. Cliffordin algebrat ovat vain sivuseikka.

Molemmilla suuntauksilla on kannattajansa ja historiansa. Kompleksianalyyttinen suuntaus johtaa juurensa Fueterin tutkimuksiin derivoituvuudesta kvaterneilla ja monogeenisista polynomeista [19]. Diracin operaattorien luontaiseksi isäksi nähdään Dirac. Hänen tavoitteensa oli faktoroida aalto-operaattori kahdeksi lineaariseksi differentiaalioperaattoriksi. Hänen konstruktiossa käytettiin nk. Diracin algebroja [13]. Ei kovinkaan yllättäen, perspektiivi on hyvin erilainen. Ensimmäinen näkökulma on analyyttinen, matemaattinen ja teoreettinen, kun taas jälkimmäinen on jossain määrin fysikaalinen ja liittyy osittaisdifferentiaaliyhtälöihin. Kirjoittajan mielestä tämä ero näkyy edelleen tutkimuskirjallisuudessa ja tutkimusyhteisössä. Tosin on mainittava, että tutkimus tällä alalla on jo kovin laajaa, ja mikään yksinkertainen luokittelu ei voi antaa täydellistä kuvaa alasta.

Tässä tutkielmassa edetään jokseenkin kompleksianalyyttisen ”koulukunnan” suuntaisesti. Tutkielmassa esitellään ensimmäisenä Cliffordin algebrojen teoriaa. Algebroja lähestytään kompleksilukujen yleistyksenä. Esitys juontaa juurensa Grassmannin ja Hamiltonin tutkimuksista. Eräät klassiset geometriset ja algebralliset tulokset esitetään tiiviisti, kuten Frobeniuksen teoreema, suhde Möbius-kuvauksiin, rotaatiot ja matriisiesitykset. Esittelemme algebrojen teorian melko yleisellä tasolla, jotta pystymme soveltamaan sitä erilaisiin tilanteisiin, kuten Maxwellin yhtälön reuna-arvo-ongelmien ratkaisuun.

Algebrallisen osion jälkeen siirrytään tarkastelemaan monogeenisia funktioita erään Diracin operaattorin ratkaisuna ja esittelemme erilaisia operaattoreita ja niiden keskinäisiä suhteita. Kehitämme klassisen kompleksianalyysin kaltaisen teorian useampaan ulottuvuuteen Cauchyn integraalikaavoineen ja potenssisarjoineen. Sovellamme saatuja operaattoreita reuna-arvo-ongelmien ratkaisuun. Lopuksi esittelemme klassisen Rungen lauseen yleistyksiä ja hieman suhdetta harmonisiin funktioihin.

Esitys seuraa erityisesti Gürlebeckin teosta [14], Hörmanderin useamman kom pleksimuuttujan analyysin kirjaa [15] ja Lassi Päivärinnan luentomuistiinpanoja [23]. Osaltaan sattumalta, mutta osaltaan suunnitellusti, tutkielman aihevalinnat seuraavat Richard Delanghen esitystä Cliffordin analyysin perusteista [8]. Tutkielman kokonaisuus ei kuitenkaan seuraa mitään yksittäistä edellä annetuista teoksista. Tässä tutkielmassa on pyritty erityisesti painottamaan, miten Cliffordin algebrojen strukturaalisia ominaisuuksia pystytään soveltamaan eri ongelmien ratkaisuun. Siten teoria ja sovellukset vuorottelevat. Suurin osa todistuksista on pienin muutoksin kirjallisuudesta, mutta osa todistuksista on kirjoittajan itsensä kehittämiä. Niidenkään kohdalla ei kirjoittaja väitä, etteikö vastaavia todistuksia olisi jo julkaistu.

Tarvittavia ennakkotietoja ovat kompleksi- ja reaalianalyysin hallinta, algebrojen perusteorian tuntemus, vektorianalyysi, distribuutioteorian perusteet ja joitakin yksittäisiä tuloksia osittaisdifferentiaaliyhtälöistä, funktionaalianalyysistä, esitysteoriasta ja harmonisten funktioiden teoriasta.

1.1 Kiitokset

Haluan esittää loputtomat kiitokset ohjaajalleni dosentti Jari Taskiselle (Helsingin yliopisto), jonka kärsivällisyys ja kannustus on ollut korvaamatonta. Kiitos kuuluu myös professori Ilse Ipsenille (North Carolina State University), joka on tartuttanut lopullisesti kirjoittajaan innostuksen matematiikkaan ja sen sovelluksiin. Kiittän professori Lassi Päivärintaa (Helsingin yliopisto) kannustuksesta, opetuksesta ja avusta opintojen loppuvaiheessa. Huolellisesta tutkielman tarkastamisesta, lukuisista parannusehdotuksista ja tukielman arvioimisesta kiitän Mika Koskenojaa (Helsingin yliopisto).

On mahdotonta listata kaikkia niitä hyviä ystäviä, opettajia ja tutkijoita, joiden tuki tavalla tai toisella näkyy tässäkin tutkielmassa. Suurin kiitos kuuluu vanhemmilleni ja rakkaille sisarilleni. Osaltaan äitini Sirkka-Liisa Eriksson (Tampereen teknillinen yliopisto) lienee syyllinen tutkielmani aiheen valintaan. Isäni on ollut korvaamaton tuki opintojeni aikana. Toivottavasti voin antaa kenellekään toiselle edes vähän siitä, josta saan kiittää kaikkia teitä.

Haluaisin lausua myös kiitoksen Onni Talaan säätiölle, Työväen opintorahastolle ja Matemaattis-luonnontieteellisen tiedekunnan rahastolle opintojeni taloudellisesta tukemisesta. Tässä yhteydessä esitän kiitoksen myös Kameli Oy:lle, joka on tarjonnut ympäristön, jossa olla innostunut matematiikasta, vaikka joskus se saattaisikin tuntua erämaavaellukselta.

2 Merkintöjä

Merkitään joukkoa $\{1 \dots n\} = \mathcal{P}_n$. Permutaatioryhmää merkitään S_m, missä m on alkioiden lukumäärä. Kroneckerin delta määritellään

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

Toistuvasti käytetään multi-indeksinotaatiota. Sanotaan, että $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on multi-indeksi, jonka kertaluku on $|\alpha|$ ja kertoma on $\alpha! = \prod_i \alpha_i!$. Voidaan määritellä myös potenssi, kun $x \in \mathbb{R}^n$. Siis

$$x^\alpha = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha(i)}.$$

Jos "sijoitetaan" muuttujan x paikalle derivaattta D, niin voimme määritellä vastaavasti

$$D^\alpha = \prod_{i=1}^{n} \partial_i^{\alpha(i)}.$$

Klassisia funktioluokkia ovat esimerkiksi C, L^p, C^n, C^∞, jotka ovat jatkuvien, L^p-integroituvien, n kertaa derivoituvien ja sileiden funktioiden avaruudet. Merkitään joukon Ω äärellisten Borel-mittojen joukkoa $M(\Omega)$. Määrittelemme lisäksi Hölder-jatkuvien funktioiden joukon $C^{(0,\alpha)}$, missä $0 < \alpha \leq 1$. Funktio $f : X \mapsto Y$, metriseltä avaruudelta X metriselle avaruudelle Y on Hölder-jatkuva, jos kaikille x on olemassa C, jolle $d_Y(f(x), f(y)) \leq C d_X(x, y)^\alpha$. Selvästi funktio on tällöin jatkuva. Käytämme tätä määritelmää lähinnä kun X ja Y reaalisia vektoriavaruuksia.

3 Cliffordin algebrat

3.1 Perusteita

Cliffordin algebrat ovat kvaternien yleistys. Hamilton keksi kvaternit 1843 pyrkiessään yleistämään kompleksilukujen algebran kolmeen ulottuvuuteen, mikä osoittautui mahdottomaksi. Neljässä ulottuvuudessa yleistys onnistui ja tuloksena syntyivät kvaternit. Kvaternien tulon avulla voitiin määritellä vektorianalyysin operaatiot, piste- ja ristitulo, jotka nykyaikaisessa muodossa määritteli Gibbs 1901. Clifford yleisti Hamiltonin kvaternit useampaan ulottuvuudeen soveltaen vastaavia ideoita kuin Grassman. Erityisen hyödyllisiksi Cliffordin algebrat osoittautuivat kvanttifysiikassa. Niiden avulla Pauli sisällytti sähkömagneettiset ilmiöt Schrödingerin yhtälöön. [19]

Kvaternit $\mathbb{H}$ voidaan määritellä, nimensä mukaisesti, neljäulotteiseksi reaaliseksi algebraksi, jonka kannan muodostavat vektorit $1, i, j, k$. Kertolasku voidaan määritellä asettamalla kantaelementtien välille kertolasku. Tässä operaatiossa 1 on identiteetti, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ja $ij = k = -ji$. Näistä voidaan määrittää kertotaulu ja todeta, että kertolaskun suhteen $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ muodostavat 8 alkion ryhmän, nk. kvaternisen ryhmän. Kvaterneista voi lukea lisää mm. [29, 28, 27]. Joskus tarkastellaan myös kompleksikertoimisia kvaterneja, joissa skalaarikuntana ovat kompleksiluvut. Merkitsemme näiden lukujen avaruutta $\mathbb{H}_c$.

Kvaterneilla on algebrassa suuri merkitys. Merkittävin tulos lienee Frobeniuksen teoreema.

Lause 3.1. *Ainoat (assosiatiiviset) äärellisulotteiset reaalikertoimiset jakoalgebrat ovat reaaliluvut $\mathbb{R}$, kompleksiluvut $\mathbb{C}$ ja kvaternit $\mathbb{H}$.*

Sivuutamme todistuksen, joka löytyy monesta algebran oppikirjasta, ks. esimerkiksi [16, 28]. Kvaternit ovat siis hyvin erikoinen struktuuri, joka esiintyy monissa algebran luokittelutuloksissa. Määrittelemme nyt Cliffordin algebrat.

3.2 Määritelmä

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ja B bilineaarinen muoto vektoriavaruudella V. Toisin sanoen $B : V \times V \mapsto \mathbb{K}$ on lineaarinen molemmissa komponenteissaan. Jokaista tällaista B:tä vastaa neliömuoto $Q : V \mapsto K$, joka määritellään $Q(x) = B(x, x)$. Näiden muotojen välillä on suhde $\frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) = B(x, y)$, $\forall x, y \in V$. Tämä seuraa suoraan bilineaarisuudesta. Paria (V, Q) kutsutaan neliömuodolliseksi avaruudeksi.

Esimerkkejä: Jos $V = \mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{C}^n$ ja $B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, eli klassinen sisätulo, niin saadaan Euklidisen avaruus. Vastaava neliömuoto on $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Toisaalta, jos $V = \mathbb{R}^4$ ja $B(x, y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i - x_4 y_4$, niin saadaan Minkowskin avaruus ja sillä on tunnettu neliömuoto $Q(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - x_4^2$. Tämä kuvaa fysiikassa klassisen suhteellisuusteorian aika-avaruutta, kun valonnopeus on skaalattu eli $c = 1$.

Luonnollisesti määritellään, että (V, Q) ja (V', Q') ovat isomorfisia, jos on olemassa lineaarinen isomorfismi $T : V \mapsto V'$, joka on yhteensopiva neliömuodollisten struktuurien kanssa: $Q' \circ T = Q$. Luonnollisesti määritellään myös neliömuodollisten avaruuksien summa: $(V \oplus V', Q \oplus Q')$, missä $Q \oplus Q'(v \oplus v') = Q(v) + Q'(v')$. Myös neliömuodollisten avaruuksien tensoritulolla on kanoninen neliömuodollinen struktuuri: $(V \otimes V', Q \otimes Q')$, missä $Q \otimes Q'(\sum_i v_i \otimes v_i') = \sum_{i,j} B(v_i, v_j)B'(v_i', v_j')$. Voimme luokitella neliömuodolliset avaruudet, modulo isomorfismit, käyttäen Sylvesterin teoreemaa.

Lause 3.2. *(Sylvesterin teoreema)*[1] *Olkoon* (V, Q) *neliömuodollinen avaruus.*

Jos kerroinkunta on $\mathbb{C}$*, voimme esittää avaruuden suorana summana* $(V, Q) \cong (V_l, Q_l) \oplus (V_p, Q_p)$*. Tässä* $Q_l = 0$ *on nollakuvaus* l*-ulotteisella vektoriavaruudella* V_l *ja* V_p *on* p*-ulotteinen kompleksinen vektoriavaruus, jolla on kanta* $\{e_i\}$*, ja* $Q_p(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i) = x_i^2$*.*

Jos kerroinkunta on $\mathbb{R}$*, voimme esittää avaruuden suorana summana* $(V, Q) \cong (V_l, Q_l) \oplus (V_p, Q_p) \oplus (V_q, Q_q)$*. Tässä kaksi ensimmäistä summan komponenttia ovat kuten yllä, paitsi että kyseessä ovat reaaliset vektoriavaruudet. Vektoriavaruus* V_q *on* q*-ulotteinen ja sillä on kanta* $\{f_i\}$ *ja* $Q_q(\sum_{i=1}^{q} x_i f_i) = -\sum_{i=1}^{l} x_i^2$*.*

Huomautus: Isomorfismi indusoi vektoriavaruudelle V (ortonormaalin) kannan

$$e_1 \dots e_l, f_1 \dots f_p, g_1 \dots g_q,$$

jonka suhteen neliömuoto saa esityksen

$$Q(\sum_{i=1}^{l} x_i e_i + \sum_{i=1}^{p} y_i f_i + \sum_{i=1}^{q} z_i g_i) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=1}^{q} z_i^2.$$

Merkitsemme avaruutta $V_l = Rad(V, Q)$, kun se tulkitaan avaruuden V aliavaruutena.

Todistus: Valitaan mielivaltainen kanta vektoriavaruudelle V. Tämän suhteen Q voidaan esittää matriisilla $A \in \mathbb{K}^{s \times s}$, missä s on avaruuden V dimensio. Siis $Q(x) = x^T A x$.

[1] Sylvesterin julkaisu muotoilee lauseen eri tavalla. Hän todisti vain, että tyyppi on yksikäsitteinen. Hänelle oli jo tunnettua, että neliömuodot voidaan aina kirjoittaa neliöiden summina. Sylvesterin julkaisussa on hyvin elegantti todistus sille, että symmetrisen reaalisen matriisin ominaisarvot ovat reaalisia. Hänen mukaansa Cauchy olisi todistanut tämän tosin ensin, vaikka hän ei kertonut missä tai miten. [30]

Erityisesti voimme olettaa, että A on symmetrinen. Tällöin Schurin lemma sanoo, että on olemassa kannan vaihto S, joka diagonalisoi matriisin A. Voimme siis olettaa, että A on diagonaalinen. Tosin, jos skaalaamme matriisia A, niin voimme olettaa, että diagonaalielementit ovat $d_i = \pm 1, 0$ reaalitapauksessa ja $d_i = 1, 0$ kompleksitapaukessa.

Nyt on osoitettava, että kyseinen esitys on yksikäsitteinen. Siis osoitamme, että kaksikko (l, p) tai kolmikko (l, q, p), eli matriisin tyyppi, [2] on yksikäsitteisesti määrätty. Seuraamme tässä Carl Meyerin argumenttia [22]. Olkoon $A' = [d'_1 \dots d'_n]$ esitys neliömuodolle Q toinen diagonalisaatio, jonkin toisen kannan suhteen. Kannanvaihdon avulla siis $A' = C^T AC$, missä C on ei-singulaarinen. Välittömästi saamme, että näiden nolla-avaruuksien dimensio on sama ja siten l on yksikäsitteinen. Siis kompleksikertoiminen tapaus on selvä. Rajoitumme nyt reaaliseen tapaukseen. Määrittelemme matriisin $A_\epsilon = A + I\epsilon$, missä $\epsilon > 0$ ja pieni. Jos voimme osoittaa, että matriisilla $C^T A_\epsilon C$ on sama tyyppi kuin matriisilla A_ϵ, niin ominaisarvojen jatkuvuudesta seuraa, kun $\epsilon \to 0$, että matriisilla A' on sama tyyppi kuin matriisilla A.

Hajotamme matriisin C tuloksi QR-hajotelmalla, missä Q on matriisi, jonka sarakkeet ovat ortonormaaleja ja R on yläkolmiomatriisi. Olkoon $t \in [0, 1]$ ja määrittelemme $f(t) = (tLQ + (1-t)QR)^T A_\epsilon (tLQ + (1-t)QR)$. Valitsemme vakion $L \in \mathbb{R}$ niin suureksi, että kuvaus on $tLQ + (1-t)QR$ ei ole singulaarinen (esimerkiksi $L > ||R||$). Matriisilla $f(t)$ on aina vain reaalisia ominaisarvoja (se on symmetrinen) ja ne eivät koskaan ole nollia, koska $f(t)$ on ei-singulaarinen. Siten soveltamalla ominaisarvojen jatkuvuutta saamme, että matriisilla $f(0) = C^T A_\epsilon C$ on sama tyyppi kuin matriisilla $f(1) = L^2 Q^T AQ$, jolla tosin on selvästi sama tyyppi kuin matriisilla A. Nimittäin ominais arvot eivät voi vaihtaa merkkiä, koska muutoin matriisi muuttuisi singulaariseksi.

$\blacksquare$

Teoreeman nojalla riittää siis tarkastella yhtälöiden oikeiden puolien ”kanonisia” neliömuodollisia avaruuksia. Merkitsemme kanonisia avaruuksia, ortonormaalilla kannallaan, $\mathbb{C}_{l,p}$ ja $\mathbb{R}_{l,q,p}$. Lisäksi teoreema takaa ortonormaalin kannan. Sanomme, että näiden avaruuksien tyypit ovat (l, p) ja (l, q, p). Tästä lähtien tarkastelemme vain ei-degeneratiivista tapausta. Eli $Rad(V, Q) = 0$. Rajoitumme tarkastelemaan neliömuodollisia avaruuksia $\mathbb{C}_{0,0,p}$, joita merkitsemme $\mathbb{C}_p$ ja vastaavasti avaruuksia $\mathbb{R}_{q,p} = \mathbb{R}_{0,q,p}$. Jälkimmäisen avaruuden tyyppi on (q, p).

[2]Sylvester kutsuu näitä matriisin A inertiaksi.

Voimme nyt määritellä Cliffordin algebran. Tämä on hyvin laaja määritelmä ja usein tulemme tarvitsemaan vain paljon suppeampaa määritelmää.

Määritelmä 3.3. *Olkoot V vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ja Q neliömuoto. Cliffordin algebra (neliömuodolliselle avaruudelle (V, Q)) on yksiköllinen $\mathbb{K}$-kertoiminen algebra $\mathcal{C}$, johon liittyy $\mathbb{K}$-lineaarinen kuvaus $\nu : V \mapsto \mathcal{C}$, jolle*

$$\nu(v)^2 = -Q(v)$$

ja kuva-avaruus $\nu(V)$ virittää algebran $\mathcal{C}$.

Esimerkkejä: Jos $V = \mathbb{R}$, $B(x, y) = xy$ ja $Q(x) = x^2$, niin $\mathbb{C}$ on Cliffordin algebra neliömuodolliselle avaruudelle (V, Q). Tässä tapauksessa $\nu(x) = xi$. Jos taas $V = \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = (x, y)$ ja $Q(x) = ||x||^2$, niin kvaternit $\mathbb{H}$ muodostavat Cliffordin algebran. Tällöin $\nu(x) = x_1 i + x_2 j + x_3 j$. Toisaalta, jos $V = \mathbb{R}^2$ ja edelleen euklidinen pistetulo ja neliömuoto, niin $\mathbb{H}$ on tämänkin neliömuodollisen avaruuden Cliffordin algebra, kun $\nu(x) = x_1 i + x_2 j$.

Jos otamme avaruudelle V sen ortonormaalin kannan $\{e_i\}$, jonka olemassaolon Sylvesterin teoreema takaa, voimme ilmaista kertolaskun laskusäännön muodossa

$$\nu(e_i)\nu(e_j) + \nu(e_j)\nu(e_i) = -\delta_{ij} Q(e_i) = -2\delta_{ij} Q(e_j).$$

Erityisesti saamme, että kantaelementit e_i antikommutoivat.

Lisäksi $\nu(v) = 0$, jos ja vain jos $v = 0$. Nimittäin $\nu(v)\nu(e_i) + \nu(e_i)\nu(v) = 0 = -2v_i \nu(e_i)^2$. Tästä seuraa $v_i = 0$, koska neliöavaruus oli ei-degeneratiivinen ja siten $\nu(e_i)^2 \neq 0$. Siis ν on injektiivinen kuvaus.

Käyttäen Cliffordin algebran määritelmää ja edellisiä laskusääntöjä huomaamme, että jos $E_i = \nu(e_i)$, niin Cliffordin algebran virittävät vektoriavaruutena alkiot

$$1, E_1, \ldots, E_n, E_1 E_2 \ldots, E_1 E_2 \cdots E_n.$$

Nämä alkiot eivät tosin, *a priori*, ole lineaarisesti riippumattomia. Yksinkertaistamme usein merkintöjä ja sanomme, kun $A \subset \mathcal{P}$: $E_A = \prod_{i=1, i \in A}^{n} E_i$. Erityisesti $E_\emptyset = 1$ eli identiteetti. Määrittelemme universaalin Cliffordin algebran niin, että nämä ovat lineaarisesti riippumattomia ja erityisesti muodostavat vektoriavaruuden kannan. Koska osoitimme, että ν on injektiivinen kuvaus, emme useinkaan tee eroa algebran alkioiden $\nu(e_i) = E_i$ ja vektoriavaruuden alkioiden e_i välillä, vaan tulkitsemme, että $V \subset \mathcal{C}$. Erityisesti, merkitsemme $e_i = E_i$ ja $E_A = e_A$. Aliavaruus V ajatellaan vektorien, tai 1-vektorien, joukkona.

Määritelmä 3.4. *Jos $\mathcal{C}$ on Cliffordin algebra neliömuodollisella avaruudella (V, Q), niin se on universaalinen, jos vektoriavaruuden dimensio $dim(\mathcal{C}) = 2^{dim(V)}$. Tässä dimensiot lasketaan saman kerroinkunnan suhteen.*

Tämä voidaan ilmaista kategoriateoreettisesti. Kategoria määritellään joukoksi objekteja, joiden välille olemme määritelleet morfismeja, ks. tarkemmin esimerkiksi [16]. Määrittelemme Cliffordin algebrojen kategorian $\mathfrak{C}$, jonka alkioina ovat neliömuodollisen avaruuden (V, Q) Cliffordin algebrat $\mathcal{C}$, ja jonka morfismeja ovat algebrahomomorfismit $f : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$, jotka ovat yhteensopivia Cliffordin algebran struktuurin kanssa. Siis $f \circ \nu = \nu'$. Selvästi tämä määrittelee kategorian. Määrittelemme (yleisesti) kategorian universaalin objektin.

Määritelmä 3.5. *Olkoot $\mathfrak{C}$ kategoria. Tällöin objekti $I \in \mathfrak{C}$ on universaalinen, jos kaikille objekteille $C \in \mathfrak{C}$ on olemassa yksikäsitteinen morfismi $I \mapsto C$.*

Voimme nyt osoittaa, että universaalinen Cliffordin algebra on kategorisessa mielessä universaalinen.

Lause 3.6. *Universaalinen Cliffordin algebra $\mathcal{C}$ neliömuodollisella avaruudella (V, Q) on Cliffordin algebrojen kategoriassa universaalinen.*

Todistus: Olkoot $\mathcal{C}'$ toinen Cliffordin algebra samalla neliömuodollisella avaruudella. Määritellään algebran $\mathcal{C}$ kantaelementeille kuvaus

$$f(E_A) = \prod_{i=1, i \in A}^{n} \nu'(e_i).$$

Tämä laajenee lineaarisesti koko algebraan $\mathcal{C}$ ja se on algebrahomomorfismi, mistä väite seuraa. Toisaalta, koska funktion f pitää kommutoida Cliffordin algebran struktuurin kanssa, niin on selvää, että funktio f saa annetun muodon.

$\blacksquare$

Koska kategorioiden universaaliset objektit ovat keskenään isomorfisia [16, 13], niin universaali Cliffordin algebra on – isomorfiaa vaille – yksikäsitteinen. Usein määritelläänkin

Cliffordin algebrat suoraan universaaleiksi Cliffordin algebroiksi. Jos nyt $(V, Q) \cong \mathbb{C}_n$, niin tämän universaalia Cliffordin algebraa merkitään $\mathbb{C}l_n$. Jos taas $(V, Q) \cong \mathbb{R}_{q,p}$, niin sitä merkitään $Cl_{q,p}$. Jos kyseessä on Euklidinen tapaus, eli $q = 0$, niin usein merkitään Cl_p.

Edellä käsitellyn mukaisesti e_A määrittelee Cliffordin algebran kannan, kun $A \subset \mathcal{P}_n$. Merkitsemme Cliffordin luvun x komponenttia alkion e_A suunnassa x_A tai $[x]_A$. Siis toisin sanoen

$$x = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} x_A e_A.$$

Usein merkitään $x_0 = x_\emptyset$ ja $e_{1\ldots n} = e_{\mathcal{P}_n}$.

Huomaa, että tässä ei ole osoitettu, että Cliffordin algebrojen kategorioissa yleensä olisi universaaleja objekteja. Tämän osoitus on tekninen ja kiinnostunut lukija löytää jopa kolme erilaista konstruktiota [13]. Jotta saisimme jonkinlaista konkretiaa käsittelemiimme algebroihin, niin tarkastelemme esitysteorian avulla niiden algebrallista struktuuria. Kompleksinen tapaus on huomattavasti yksinkertaisempi kuin reaalinen tapaus.

Tarvitaan algebran keskuksen määritelmää.

Määritelmä 3.7. *Olkoon A algebra. Algebran A keskus $Z(A)$ koostuu kaikista niistä alkioista, jotka kommutoivat kaikkien muiden alkioiden kanssa:*

$$Z(A) = \{a \in A | \forall b \in A : ab = ba\}.$$

Huomautus: Määritelmästä on selvää esimerkiksi, että keskus on alialgebra. Sama määritelmä toimii myös ryhmille.

Määritetään Cliffordin algebran keskus.

Apulause 3.8. *Olkoot $\mathcal{C}$ universaali Cliffordin algebra neliömuodollisella avaruudella (V, Q) (kerroinkunnalla ei ole merkitystä) , jolla $dim(V) = n$. Jos n on parillinen, niin $Z(\mathcal{C}) = \mathbb{K}$. Jos taas n on pariton, niin $Z(\mathcal{C}) = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}e_{1\ldots n}$.*

Huomautus: Parittomassa tapauksessa alkiota $e_{1\ldots n}$ kutsutaan pseudoskalaariksi. Jos $n \equiv 1(\mathrm{mod}4)$, niin $e_{1\ldots n}^2 = 1$. Jos taas $n \equiv 3(\mathrm{mod}4)$, niin $e_{1\ldots n}^2 = -1$. Tässä tapauksessa reaalisella Cliffordin algebralla on kompleksinen struktuuri ja se voidaan ajatella kompleksisena Cliffordin algebrana $\mathbb{C}l_{n-1}$, jonka generoivat $e_1 \ldots e_{n-1}$. Nimittäin kompleksiluvulla kertominen määritellään $(a+bi)c = ac + be_{1\ldots n}c$. Toisessa tapauksessa Cliffordin algebra on moduli nk. Studyn luvuilla $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Todistus: Jos $x \in Z(\mathcal{C})$, niin $[x, e_A] = xe_A - e_Ax = 0$ kaikille $A \subset \mathcal{P}_n$. Olkoot $A \neq \mathcal{P}_n, \emptyset$. Jos $|A|$ on pariton, niin valitaan $i \notin A$, tai jos $|A|$ on parillinen, niin $i \in A$. Tällä valinnalla $[e_A, e_i] = 2e_B$, missä $e_Ae_i = e_B$. Erityisesti $[x, e_i]_B = 2x_A = 0$, eli $x_A = 0$. Sama argumentti toimii joukolle $A \in \mathcal{P}_n$, jos n on parillinen. Siis tällöin $x \in \mathbb{K}$, koska $x_{1\ldots n} = 0$. Muutoin $e_{1\ldots n}$ on keskuksessa ja väite seuraa.

$\blacksquare$

Seuraavaksi määritetään kompleksisten Cliffordin algebrojen struktuuri. Todistus on erilainen kuin mitä kirjallisuudessa nähdään.

Lause 3.9. *Kompleksiset Cliffordin algebrat ovat isomorfisia kompleksisten matriisialgebrojen tai niiden summan kanssa. Jos n on parillinen eli $n = 2k$, niin*

$$\mathbb{C}l_n \cong \mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$$

ja algebra on yksinkertainen[3]*. Jos n on pariton eli $n = 2k+1$, niin*

$$\mathbb{C}l_n \cong \mathbb{C}^{2^k \times 2^k} \oplus \mathbb{C}^{2^k \times 2^k} \cong \mathbb{C}l_{n-1} \oplus \mathbb{C}l_{n-1}.$$

Todistus: Oletamme, että $n = 2k$. Osoitamme, että algebra on yksinkertainen. Olkoot $I \subset \mathbb{C}l_n$ mielivaltainen ideaali ja $I \neq \{0\}$. Valitaan alkio $x_0 = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} x_Ae_A \in I$. Voimme olettaa, että $x \notin \mathbb{K}$, koska muuten $I = \mathbb{C}l_n$. Valitaan jokin i, jolle $[x, e_i] \neq 0$. Tällainen on olemassa apulauseen 3.8 seurauksena. Määritellään $x_1 = [x_0, e_i] \in I$. Edelleen $x_1 \notin \mathbb{K}$. Määritelmästä seuraa, että $[x_1]_A = 0$ kaikille $A \subset \mathcal{P}_n$, joille e_i kommutoi matriisin A kanssa. Voimme toistaa tämän prosessin niin pitkään kuin $x_i \notin Z(\mathbb{C}l_n)$. Koska lopulta $x_i \neq 0$ ja $x_i \in Z(\mathbb{C}l_n)$, niin $I \cap \mathbb{K} \neq 0$ ja siten $I = \mathbb{C}l_n$, mistä väite. Siis algebralla $\mathbb{C}l_n$ ei ole epätriviaaleja ali-ideaaleja.

Voimme soveltaa Artin-Wedderburn teoreemaa [4], jonka nojalla puoliyksikertaiset ja siten yksinkertaiset algebrat ovat matriisialgebrojen summia. Tosin yksinkertaiset matriisialgebrojen summat ovat matriisialgebroja ja dimensionaalisilla tarkasteluilla $\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}^{2^k \times 2^k}$.

[3] Sillä ei ole aitoja epätriviaaleja ali-ideaaleja.
[4] Ks. esim. [10].

Olkoot $n = 2k+1$. Merkitään $f_+ = \frac{1}{2}(1+e_{1\dots n}) \in I$ tai $f_- = \frac{1}{2}(1-e_{1\dots n}) \in I$. Huomaa, että $f_+^2 = f_+$ ja $f_-^2 = f_-$, eli ne ovat idempotentteja ja lisäksi $f_\pm \in Z(\mathbb{C}l_n)$. Merkitään $I_\pm = \mathbb{C}l_n(1 \pm e_{1\dots n})$. Selvästi $I_+ \cap I_-$, koska $I_+ I_- = 0$. Lisäksi $I_- \oplus I_+ = \mathbb{C}l_n$. Koska f_+ ja f_- ovat idempotentteja, niin saamme, että I_- ja I_+ koostuvat lineaarisen muunnoksen $L(x) = \frac{1}{2}e_{1\dots n}x$ ominaisarvoja $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{2}$ vastaavista ominaisvektoreista. Lasketaan tämän kuvauksen jälki kannan $\{e_A\}$ suhteen:

$$\mathrm{tr}(L) = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} \frac{1}{2}[e_{1\dots n}e_A]_A = 0.$$

Välittömästi seuraa, että $\dim(I_-) = \dim(I_+) = 2^{2k}$. Toisaalta, jos määrittelemme kuvauksen

$$\nu_\pm(v') = (\sum_{i=1}^{n-1} v_i e_i) f_\pm,$$

missä $v' \in \mathrm{span}\{e_1 \dots e_{n-1}\} = V'$. Näin $I_\pm$ muodostavat vektoriavaruudelle V' universaalin Cliffordin algebran, mistä väite seuraa todistuksen alkuosan nojalla, koska $I_+ \cong \mathbb{C}l_{n-1} \cong I_-$. Tässä samaistuksessa identiteettiä vastaa f_+ ja f_-, vastaavasti.

■

Reaalinen tapaus on huomattavan monimutkainen ja emme tässä pyri esittelemään sitä. Vastaavia tuloksia kuin edellä voidaan johtaa ja voimme osoittaa, että myös reaaliset Cliffordin algebrat voidaan esittää reaalisten, kompleksisten tai kvaternisten matriisialgebrojen summana. Lisää esimerkiksi [13].

Voimme tosin kaikissa tapauksissa osoittaa, että algebrat ovat homomorfisia matriisialgebran alialgebran kanssa[5].

Apulause 3.10. *Olkoon $\mathcal{C}$ Cliffordin algebra, joko reaalinen tai kompleksinen. Jokaiselle $x \in \mathcal{C}$ voidaan määritellä lineaarinen kuvaus $M_x : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$, joka on vasemmalta kertomista: $M_x(v) = xv$. Kuvaus $x \mapsto M_x$ määrittää injektiviisen algebrahomomorfismin lineaarikuvausten avaruudelle $B(\mathcal{C})$. Lisäksi x on kääntyvä, jos ja vain jos M_x on kääntyvä, ja $M_{x^{-1}} = M_x^{-1}$.*

Todistus: Suoraan määritelmästä jokainen kuvaus M_x on lineaarinen. Toisaalta mielivaltaiselle $v \in \mathcal{C}$:

$$M_{xy}(v) = xyv = M_x(yv) = M_x(M_y(v)).$$

[5] On selvää, että sama todistus pätee kaikille äärellisulotteisille algebroille.

Lisäksi $M_1(v) = v$ ja

$$M_{\alpha x + \beta y}(v) = (\alpha x + \beta y)v = (\alpha M_x + \beta M_y)(v),$$

joten $x \mapsto M_x$ on algebrahomomorfismi. Toisaalta tällä kuvauksella on käänteiskuvaus $M \mapsto M(1)$, mikä osoittaa injektiivisyyden. Nimittäin $M_v(1) = v * 1 = v$.

Jos M_x on kääntyvä, niin se on surjektiivinen. Siispä on olemassa $v \in \mathcal{C}$, jolle $M_x(v) = 1 = xv$, mistä seuraa kääntyvyys. Toisaalta, jos x on kääntyvä, niin $M_{x^{-1}} M_x = M_{x^{-1}x} = I$, eli matriisi on kääntyvä. Toisaalta edellisestä yhtälöstä seuraa annettu kaava.

■

Matriisiesityksestä on se hyöty, että sen kautta voidaan ilmaista monia Cliffordin algebrojen ominaisuuksia. Esimerkiksi osoittaakseen, että Cliffordin luku on kääntyvä, riittää osoittaa, että sillä on yksipuoleinen käänteisalkio. Voimme todeta – kertolaskun määritelmästä – että jokainen matriisin M_x rivi on muotoa $[\pm x_{\{}\sigma(A)\}]_A$, missä matriisi on esitetty kannan $\{e_A\}$ suhteen ja σ on jokin permutaatio tällä joukolla.

Mainitsemme vielä yhden esitysteoreettisen tuloksen, joka on yleisesti tunnettu.

Esimerkki: Määrittelemme Paulin (spin-) matriisit[6]

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nämä toteuttavat seuraavat algebralliset ominaisuudet, jotka voidaan vahvistaa yksinkertaisilla laskuilla:

$$\sigma_0^2 = 1, \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1, \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = \delta_{ij}.$$

Lisäksi $\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma_3$, ja voimme permutoida tässä alkioita $1, 2, 3$ syklisesti edellisten laskukaavojen nojalla. Määrittelemme nyt alkiot $e_0 = \sigma_0$ ja $e_i = i\sigma_i$. Määrittelemme edelleen kuvaukset $x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \mapsto \sum_{i=0}^{3} x_i e_i$. Tämän voi osoittaa homomorfismiksi tarkistamalla homomorfismin ominaisuudet kantaelementeille, mikä on mekaaninen lasku.

Tämä homomorfismi samaistaa kvaternit (injektiivisesti) avaruuden $\mathbb{C}^2$ o sajoukon kanssa. Voimme kirjoittaa homomorfismin auki ja saamme, että Kvaternit voidaan

[6]Lounesto esittelee hyvin näiden matriisien motivaation ja sovelluksen kvanttifysiikassa [19].

ajatella matriiseina

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix},$$

missä $u, v \in \mathbb{C}$ ja $u = x_0 + x_3 i$ ja $v = x_2 + x_1 i$. Joskus kvaternit määritellään tällaisten matriisien algebrana.

3.3 Sovelluksia geometriaan

Tarkastelemme lyhyesti Cliffordin algebrojen lukuisia sovelluksia geometriaan. Tehdäksemme tämän tarvitsemme muutaman perusoperaation. Cliffordin algebran alkio eli Cliffordin luku voidaan esittää komponenteittain muodossa

$$x = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} [x]_A e_A.$$

Voimme toisaalta jakaa Cliffordin algebran termien asteen mukaisesti joukkoihin $C_i = \mathrm{span}\{e_A || A| = i\}$. Jos vertaamme tätä Grassmannin ulkotuloalgebran kanssa, niin voidaan ajatella, että C_0 on skalaarit, C_1 on vektorit, C_2 on bivektorit ja yleisesti C_k on k-vektorien joukko. Louneston kirjassa on hyvä tarkastelu Cliffordin algebrojen ja ulkotuloalgebrojen suhteesta [19]. Lisäksi voimme jakaa Cliffordin algebran parittomaan ja parilliseen osaan $Cl_+ = \mathrm{span}\{e_A | \exists i \in \mathbb{N}, |A| = 2i\}$ ja parittomaan osaan $Cl_+ = \mathrm{span}\{e_A | \exists i \in \mathbb{N}, |A| = 2i + 1\}$. Näistä Cl_+ on alialgebra ja selvästi Cliffordin algebra, kun määritämme $V = \mathrm{span}\{e_1 e_j, 2 \leq j \leq n\}$ ja tälle luonnollisen neliömuodon.

Voimme määritellä näiden hajotelmien avulla perusoperaatiot.

Määritelmä 3.11. *Olkoon $a = \sum_{i=0}^{n} [a]_i$, missä $a_i \in C_i$. Määrittelemme perusoperaatiot.*

1. *Reversio $a^* = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{(i(i-1))/2} [a]_i$*
2. *Pääinvoluutio $a' = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [a]_i$*
3. *Konjugaatio $\overline{a} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{(i(i+1))/2} [a]_i$*

Huomautus: Perusoperaatiot kommutoivat keskenään, koska ne on kantaelementeillä määritelty skalaarikertolaskulla, joka kommutoi. Toisaalta suora lasku osoittaa, että reversio kantaelementille on $(e_{i_1} \cdots e_{i_n})^* = e_{i_n} \cdots e_{i_1}$. Toisaalta pääinvoluutio on automorfismi $(ab)' = a'b'$. Konjugaatio voidaan ilmaista reversion ja konjugaation avulla

$a'^* = \overline{a}$. Saamme myös välittömästi, että reversio ja konjugaatio ovat antiautomorfismeja, eli $(ab)^* = b^*a^*$ ja $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$.

Esimerkkejä: Jos tarkastelemme kompleksilukuja, pääinvoluutio yhtyy konjugaation kanssa ja reversio yhtyy identiteetin kanssa. Konjugaatio on tässä tapauksessa sama kuin kompleksikonjugaatio. Jos taas tarkastelemme kvaterneja Cliffordin algebrana Cl_2, niin konjugaatio voidaan ilmaista

$$\overline{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k,$$

mikä voidaan ilmaista siten, että ”imaginaariosa” tai ”vektoriosa” vaihtaa merkkiä.

Konjugaatiolla on merkitystä lukuteoriassa, koska $x\overline{x} \in \mathbb{K}$, kun $n = 1, 2$. Erityisesti, jos luvun x komponentit ovat kokonaislukuja, niin $x\overline{x} \in \mathbb{N}$. Tämä heijastaa sitä, että kahden neliön ja neljän neliön summina ilmaistavien lukujen tulot ovat vastaavasti ilmaistavissa kahden ja neljän neliön summana. Todistus on suoraviivainen. Tämän ominaisuuden voi yleistää vielä korkeampiin ulottuvuuksiin, mutta assosiatiivisuudesta on luovuttava. Toimiva algebra on oktonien algebra, jota ei tässä tutkielmassa käsitellä. Kiinnostunut lukija voi lukea esimerkiksi Sudberyn artikkelit [29, 28, 27].

Cliffordin algebrojen esitys lineaarikuvauksina tarjoaa mahdollisuuden esittää konjugaatio matriisin transpoosin avulla. Muille perusoperaatioille vastaava tulos ei ole mahdollinen samalla tavalla. Esitetty todistus käyttää joitakin hyödyllisiä tekniikoita.

Apulause 3.12. *Olkoot $x, \mathcal{C}, M_x$ kuten apulauseessa 3.10. Tällöin $M_{\overline{x}} = M^T$.*

Todistus: Olkoot valittu joku kannan $\{e_A\}$ järjestys ja esitetään lineaarikuvaukset M_x ja $M_{\overline{x}}$ tässä kannassa. Matriisin alkio (A, B) on

$$[M_x]_{A,B} = [xe_A]_B = [xe_A\overline{e_B}]_0.$$

Kun a, b ovat mielivaltaisia Cliffordin lukuja, niin

$$[ab]_0 = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} a_A b_A e_A^2 = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} b_A a_A e_A^2 = [ba]_0.$$

Siis, kun sovellamme näitä kaavoja, saamme konjugaation määritelmästä, että

$$[xe_A\overline{e_B}]_0 = [e_A\overline{e_B}x]_0 = [\overline{e_A\overline{e_B}x}]_0 = [\overline{x}e_B\overline{e_A}]_0.$$

Toisin sanoen $[M_x]_{A,B} = [M_{\overline{x}}]_{B,A}$, mikä onkin väite.

■

Edellinen tarkastelu on yhtäpitävästi mahdollinen kompleksisessa ja reaalisessa tapauksessa, mutta nyt rajoitumme reaaliseen euklidiseen tapaukseen (eli $e_i^2 = -1$ kaikille kantavektoreille), koska sillä on erityinen suhde euklidiseen geometriaan.

Reaalisissa Cliffordin algebroissa erityistä roolia pelaavat paravektorit $A_n = \mathbb{K} \oplus V$, koska ne ovat kääntyviä ja ne voidaan samaistaa vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ kanssa. Jos $x \in \mathbb{K} \oplus V$, niin $x\overline{x} = ||x||^2$, missä normi on klassinen euklidinen normi kannan $\{1, e_1 \dots e_n\}$ suhteen. Jos $x \neq 0$, niin

$$x^{-1} = \frac{\overline{x}}{||x||^2}.$$

Huomautus: Jos kyseessä on kompleksinen Cliffordin algebra, tämä tulos ei päde. Nimittäin $(1 + ie_1)(1 - ie_1) = 0$. Tämä on yksi syy, miksi joissakin tilanteissa reaaliset Cliffordin algebrat käyttäytyvät paremmin kuin kompleksiset Cliffordin algebrat.

Paravektoreiden toinen hyöty on siinä, että ne ovat suljettuja juuren oton ja potenssin suhteen.

Apulause 3.13. *Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $a \in A_n$, niin on olemassa (joko n kappaletta tai äärettömästi) juuria $b \in A_n$, joille $b^n = a$. Lisäksi $a^n \in A_n$.*

Todistus: Käytämme usein hyödyllistä menetelmää. Voimme aina esittää luvun a muodossa

$$a = a_0 + a_v \mathbf{a},$$

missä $a_0, a_v \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in V$ ja $|\mathbf{a}| = 1$. Jos a on skalaari, voimme valita vektoriosan $\mathbf{a}$ mielivaltaisesti. Määrittelemme joukon $A' = \operatorname{span}\{a, \mathbf{a}\}$. Koska $\mathbf{a}^2 = -1$, tämä on suljettu alialgebra ja lisäksi $a \mapsto a + a_v i$ määrittää algebraisomorfismin aliavaruudelta A' kompleksiluville. Lauseen tulos pätee kompleksiluvuille (esimerkiksi esittämällä luku polaarimuodossa väite on helppo nähdä De Moivren kaavan nojalla). Toisaalta juurten lukumääräkin seuraa siitä, koska niitä on sama määrä kuin kompleksiluvuilla. Tosin, jos a on skalaari ja yhtälöllä $b^n = a$ on aidosti kompleksisia ratkaisuja, niin vektoriosan $\mathbf{a}$ valinnan mielivaltaisuudesta seuraa, että ratkaisuja on äärettömästi.

■

Frobeniuksen teoreema osoittaa, ettemme voi odottaakaan, että Cliffordin algebrat olisivat jakoalgebroja. Sen sijaan jo kun $p+q=n\geq 3$, niin meillä on algebrassa $Cl_{p,q}$ nollan jakajia. Jos $q\neq 0$, niin jollekin i pätee $(1+e_i)(1-e_i)=0$, koska $e_i^2=1$ jollekin i. Toisaalta, jos $q=0$, niin $e_{123}^2=1$, mistä väite seuraa edellisen lauseen tavoin.

Voimme tosin paravektorien avulla konstruoida monia keskeisiä ryhmiä. Yksi on Cliffordin ryhmä $\Gamma_v=\{v_1\dots v_n|v_i\in V\}$[7]. Määritämme tämän aliryhmän $\Sigma_v=\{v_1\dots v_n|v_i\in V, ||v||=1\}$. Tämä on homomorfinen klassisen ryhmän $O(V)$ kanssa. Tässä homemorfismin antaa lauseke $v\mapsto C_v$, missä $C_v: V\mapsto V$ ja $C_v(x)=vxv'$. Toisaalta määrittelemme ryhmän $\Gamma'_v=\{v_1\dots v_{2n}|v_i\in V\}$, jonka aliryhmä $\Sigma'_v=\{v_1\dots v_{2n}|v_i\in V,||v||=1\}$ on homomorfinen klassisen ryhmän $SO(V)$ kanssa samalla homomorfismilla ilmaistuna. Voimme määritellä Spin-ryhmän oikeastaan $\Sigma'_v\cong Spin(V)$. Todistukset ovat lähinnä hieman teknisiä laskuja, jotka käyttävät suoraan kertolaskun määritelmää ja sitä, että $(a,b)=\frac{1}{2}(a\bar{b}+b\bar{a})$, kun $a,b\in A_n$. Ks. esimerkiksi [14, 13].

Vaikkakin rotaatioiden esityksessä nämä ryhmät ovat keskeisessä asemassa, niin Möbiuskuvausten esittämisessä ja analyyttisessä mielessä on mielekästä tarkastella kokonaista Cliffordin ryhmää $\Gamma=\{v_1\dots v_n|v_i\in V\oplus\mathbb{R}\}$. Jos määrittelemme aliryhmän $\Sigma=\{g\in\Gamma||g|=1\}$ ja kuvaukset kuten edellisessä kappaleessa, niin Σ on homomorfinen klassisen ryhmän $SO(V\oplus\mathbb{R})$ kanssa. [8] Tämä vastaa kompleksianalyysissä sitä, että puhtaasti imaginaaristen lukujen sijasta tarkastellaan myös reaaliosaa.

Kun $n=p=2$, niin saamme kvaternit ja niiden avulla esityksen avaruuden $\mathbb{R}^3$ rotaatioille, mikä on yleisesti tunnettu tietojenkäsittelytieteessä. Mainittakoon, että kvaterinien avulla voidaan esittää myös avaruuden $\mathbb{R}^4$ rotaatiot. Rotaatioiden esitykset osoittavat, että Cliffordin algebroilla on suhde nk. klassisiin ryhmiin ja Lien algebroihin, joista lisää voi lukea esimerkiksi Murrayn kirjasta [13]. Tähän teoriaan liittyvät myös Spin-stuktuurit, K-teoria ja kuuluisa Atiyah-Singerin teoreema, joka koskee differentiaalioperaattorien topologisia ja analyyttisiä indeksejä. Näiden tarkastelu kuitenkin johtaisi tämän tutkielman rajusti sivuraiteille.

[7] Käsitteistössä on jonkin verran vaihtelua. Ahlfors ja Lounesto kutsuvat vektoreiden generoimaa vastaavaa ryhmää Lipschitz-Chevalleyn ryhmäksi. Lisäksi vaihtelua käsitteistössä tulee siitä, että Cliffordin algebra on joskus määritelty hieman eri tavalla tai $V=\mathbb{R}^n$ on samaistettu eri osajoukon kanssa. [3]

[8] Nämä kaikki homomorfismit ovat siitä ”ekonomisia”, että ne antavat nk. kaksinkertaisen peitteen kuvajoukoilleen. Toisin sanoen, homomorfismien ytimet koostuvat vain ± 1. Erityisesti siis näiden monistojen dimensiot ovat samoja. [13]

Tarvitsemme joitakin perusominaisuuksia, jotka kokoamme seuraavaan tekniseen apulauseeseen.

Apulause 3.14. *Olkoon $a \in Cl_n$. Tällöin pätee*

1. *Jos $a \in A_n$, niin $a^* = a$. Lisäksi jos $a \in A_n \oplus C_2$ ja $a^* = a$, niin $a \in A_n$. Toisaalta, jos $a \in A_n \oplus C_2$ ja $a = \overline{a}$, niin $a \in \mathbb{K}$.*

2. *$a \in Cl_+$, jos ja vain jos $a' = a$.*

3. *Olkoon $b \in Cl_n$ mielivaltainen. Tällöin $[a\overline{b}]_0 = (a, b)$, missä sisätulo on klassinen euklidinen sisätulo. Erityisesti $[a\overline{a}]_0 = |a|^2$.*

4. *Jos $a \in \Gamma$, niin $a\overline{a} \in \mathbb{K}$. Oikeastaan $a\overline{a} = |a|^2$, missä $|a|$ on euklidinen normi 2^n-ulotteisessa vektoriavaruudessa.*

5. *Jos $v \in \Sigma_v$, niin $(v')^{-1} = v^*$*

Todistus: Ensimmäinen ja toinen kohta ovat selviä involuutioiden määritelmistä. Kolmas kohta seuraa siitä, että $e_A\overline{e_A} = 1$, joten

$$[a\overline{b}]_0 = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} a_A b_A e_A \overline{e_A} = (a, b).$$

Koska paravektoreille pätee $a\overline{a} = |a|^2$, niin tulos yleistyy koko Cliffordin ryhmälle. Viimeinen osa väittämää seuraa, kun lasketaan tulon $a\overline{a}$ skalaariosa. Viimeinen tulos pätee vektoreille, koska $v^{-1} = \overline{v}/|v|^2$. Toisaalta $\overline{v}^* = v'$, mikä seuraa komponenteittaisesta tarkastelusta.

■

Osoitamme mielenkiintoisen tuloksen Cliffordin ryhmille, joka jossain määrin oikeuttaa niiden määritelmät[9]. Toisaalta teoreema osoittaa, että nämä ryhmät voidaan määritellä puhtaasti niiden kuvausominaisuuksien avulla.

[9] Ahlfors esittää tämän tuloksen eri muodossa, mutta se johtuu siitä, että hänen algebransa on erilailla määritelty. [3] Toisaalta Gilbert ja Murray esittävät tuloksen jossain määrin yleisemmässä tapauksessa, mutta paljon monimutkaisemmin ja pelkästään Cliffordin ryhmän tapauksessa. [13] Tämä on muokkaus molempia muotoiluita. Todistuksemme on myös oma ja sisältää vaikutteita Gilbertin ja Murrayn todistuksesta.

Lause 3.15. *Olkoon a' kääntyvä*[10]*. Kokonaiselle Cliffordin ryhmälle pätee, että*

$$a \in \Gamma \Leftrightarrow \forall x \in A_n, ax(a')^{-1} \in A_n.$$

Toisaalta Cliffordin ryhmälle pätee, että

$$a \in \Gamma_v \Leftrightarrow \forall x \in V, ax(a')^{-1} \in V.$$

Todistus: Oikealle päin molemmat implikaatiot ovat triviaaleja. Todistamme implikaatioiden toiset suunnat. Osoitamme ensin, että $\bar{a}a \in \mathbb{R}$. Merkitsemme $w = ax(a')^{-1}$. Erityisesti pätee $ax = wa'$. Oletamme, että $w \in A_n$ kaikille $x \in V$, jolloin todistuksemme toimii molemmissa tapauksissa. Laskemme

$$\bar{a}ax = \bar{a}wa' = (wa')^* a' = (ax)^* a' = xa^* a'.$$

Merkitään $c = \bar{a}a$. Tällöin $c' = a^* a'$. Siis saamme, että $cx = xc'$ kaikille $x \in V$. Sijoitamalla e_i yhtälöön, pienen laskutoimituksen jälkeen ja vertailemalla komponentteja saamme, että $c_A = -c_A$, jos $i \in A$. Tästä seuraa, että $c_A = 0$, kun A on epätyhjä. Erityisesti, $c \in \mathbb{R}$[11]. Toisaalta tiedämme, että $c_0 = c = |a|^2$, joten skaalaamalla reaaliluvulla voimme olettaa, että $|a| = 1 = a\bar{a}$. Erityisesti $a^{-1} = \bar{a}$.

Käyttämällä tulosta $a^{-1} = \bar{a}$, ja sitä, että käänteisalkion otto kommutoi perusoperaatioiden kanssa, saamme lyhyellä laskulla, että

$$|ax(a')^{-1}|^2 = ax(a')^{-1}\overline{ax(a')^{-1}} = ax(a')^{-1}(a')^{-1}\overline{xa} = |x|^2.$$

Osoitamme ensin apulauseen toisen osan. Tarkastellaan kuvausta $G_a : x \mapsto ax(a')^{-1}$. Tämä on selvästi lineaarinen ja siten edellisen nojalla se on lineaarinen isometria. Toisin sanoen: $G_a \in O(V)$. Yllä esitetyn mukaisesti on siis olemassa $b \in \Gamma_v$, jolle $G_b G_a = Id_V$. Toisin sanoen $G_{ba}(x) = bax((ba)')^{-1} = x$. Jos merkitsemme $ba = c$, niin saamme siis $cx(c')^{-1} = x$ ja $c\bar{c} = 1$. Kertomalla oikealta luvulla c' saamme, että $cx = xc'$ kaikille $x \in V$. Kuten yllä, tästä seuraa, että $c = 1$. Tosin tällöin $a = b^{-1}$, mistä väite seuraa.

Ensimmäisessä tapauksessa G_a on edelleen isometria, mutta se on määritelty $A_n \mapsto A_n$. Koska se on isometria äärellisulotteiselta vektoriavaruudelta itselleen, niin se on bijektio. Siten määritellään alkio $b = G_a^{-1}(1)$. Apulauseen 3.13 nojalla on olemassa alkio

[10] Riittää, että a on kääntyvä.

[11] On mielenkiintoista verrata tätä argumenttia Cliffordin algebran keskustan määrittämiseen apulauseen 3.8 todistuksessa. Huomaa, että keskusta riippui luvun n parillisuudesta ja tässä tämä riippuvuus häviää.

$c \in A_n$, jolle $c^2 = b$. Erityisesti voimme määritellä nyt kuvauksen $G_{ac} : x \mapsto acxc(a')^{-1}$. Tälle kuvaukselle pätee $G_{ac}(1) = 1$ määritelmän nojalla. Toisaalta, koska G_{ac} on isometria, niin $G_{ac}(V) \subset V$. Tämän näkee siitä, että span$\{1\}$ in invariantti osajoukko ja V on tämän ortogonaalinen komplementti. Tosin tällöin todistuksen alkukohdan nojalla $ac \in \Gamma_v$, mistä väite seuraa.

■

Huomautus: Todistuksemme näyttää myös epätriviaalin faktan, että $\Gamma = A_n\Gamma_v$. Lisäksi apulauseen 3.14 nojalla $x \mapsto axa^* = |a|^2 ax(a')^{-1}$, kun $a \in \Gamma$. Siis kuvaus on dilaation ja rotaation yhdiste. Tämä on tärkeä huomata Möbius-kuvausten esityksessä.

Seuraavaksi tarkastelemme toista sovellusta geometriaan ja konformisiin kuvauksiin. Cliffordin algebroilla voidaan esittää rotaatiot, mutta on varsin epätriviaalia, että niillä voidaan esittää Möbius-kuvaukset, eli oikeastaan kaikki avaruuden $\mathbb{R}^n$ konformikuvaukset ($n \geq 3$). Tuloksen esitti ensimmäisen kerran Vahlen, uudelleen Maaß ja popularisoi Lars Ahlfors [20, 31, 2, 14]. Esitämme ensin lyhyesti Möbius-kuvausten määritelmän ja kompleksisen tapauksen.

Määritelmä 3.16. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ Möbius-kuvaukset $M(\mathbb{R}^n)$ ovat geometristen kuvausten ryhmä, jonka virittää seuraavat kuvaukset:*

1. *translaatiot, rotaatiot ja dilaatiot: $T(x) = \lambda Ux + v$, missä U on ortogonaalinen matriisi, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ ja $v \in \mathbb{R}^n$, ja*

2. *inversio: $J(x) = \frac{x}{|x|^2}$.*

Merkitään orientaation säilyttävien Möbius-kuvausten ryhmää $M(\mathbb{R}^n)^+$ [12].

Möbius-kuvausten ja konformisten kuvausten teoria on rikas, eikä ole tässä tarkoitus perehtyä siihen. Johdannoksi näiden kuvausten teoriaan useammassa ulottuvuudessa ks. [1]. Yksi keskeinen huomio on, että Möbius-kuvaukset voivat olla epäsäännöllisiä (koska inversio on sitä) avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tosin kuvaus voidaan laajentaa Aleksandrovin kompaktifioinilla avaruuteen $\overline{\mathbb{R}^n}$, jolla se on oikeastaan homeomorfismi. Erityisesti Möbius-kuvaukset ovat hyvin määriteltyjä äärettömässä, eli arvolla $x = \infty$. Klassinen tulos kompleksianalyysistä sanoo, että kun $n = 2$ ja $\mathbb{R}^2$ samaistetaan kompleksitason $\mathbb{C}$ kanssa, niin orientaation säilyttävät Möbius-kuvaukset voidaan kirjoittaa muodossa

[12] Käsitteistö vaihtelee, joskus Möbius-kuvaukselta edellytetään orientaation säilyttämistä.

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Jotta saamme kääntyvyyden ja yksikäsitteisyyden, oletamme, että

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

On luontevaa samaistaa Möbius-kuvaus nk. Vahlenin matriisin kanssa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Olkoon tämä matriisi A ja merkitään vastaavaa Möbius-kuvausta M_A. Saadaan algebrahomomorfismi $A \mapsto M_A$, koska $M_{AB} = M_A \circ M_B$, mikä selviää suorasta laskusta. Tämä on intuitiivista. Nimittäin, jos käytämme homogeenisia kordinaatteja kompleksiluvuille $\mathbb{C}$ – toisin sanoen tarkastelemme projektiivista avaruutta $\mathbb{PC}_1$ – niin Möbius-kuvauksen M_A toiminta kompleksiluvuilla $\mathbb{C}$ vastaa matriisin A toimintaa projektiivisella avaruudella $\mathbb{PC}_1$, kun käytössä on matriisikertolasku homogeenisilla koordinaateilla.

Möbius-kuvauksilla on laaja käyttö kahdessa ulottuvuudessa. Osaltaan tämä liittyy niiden analyyttisuuteen ja tähän yksinkertaiseen esitykseen. Niillä on geometrista merkitystä hyperbolisen geometrian tarkastelussa ja toisaalta ne muodostavat yksinkertaisen luokan konformisia kuvauksia. Korkeammissa ulottuvuuksissa niillä on vastaavanlainen teoria ja on kiinnostava kysymys, liittyykö tämä Cliffordin algebroihin. Osoittautuu, että vastaavanlainen konstruktio kuin kompleksianalyysissä toimii. Ongelmana on epäkommutatiivisuus, jonka takia tarvitaan lisäehtoja, jotta voimme määritellä Vahlenin matriisien analogiat. Määrittelemme ensin nämä matriisit ja osoitamme sitten, että nämä kattavat kaikki Möbius-kuvaukset.

Määritelmä 3.17. *Olkoot $a, b, c, d \in \Gamma \cup \{0\}$. Matriisi*

$$V(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

on Vahlenin matriisi[13]*, jos ja vain jos*

1. *nk. pseudodeterminantille pätee: $ad^* - bc^* = 1$, ja*

[13] Ahlfors käyttää termiä Cliffordin matriisi osoittaakseen kunniaa itse algebran keksijälle. Tässä tutkielmassa käytetään Gürlebeckin tapaan matriisin keksijän nimeä [2, 14]

2. $ab^* \in A_n$ *ja* $cd^* \in A_n$.

Määritellään (formaalisti) Vahlenin matriisia vastaava kuvaus, joka myöhemmin osoitetaan Möbius-kuvaukseksi,

$$M_V(x) = (ax+b)(cx+d)^{-1}.$$

Huomaa, että tässä ei vielä olla tarkasteltu funktion M_V määriteltävyyttä, koska jakolasku ei välttämättä ole mielekäs. Tosin seuraavasta ilmenee, että kuvaus on paravektoriarvoisille x aina mielekäs ja jos $cx + d = 0$, niin se on ∞. Osoitamme nyt Möbius-kuvauksien esitystä koskevan päätuloksen.

Lause 3.18. *Olkoon* $V = V(a, b, c, d)$ *Vahlenin matriisi. Tällöin* M_V *on paravektoriarvoinen Möbius-kuvaus avaruudella* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Lisäksi, jos* V_1 *ja* V_2 *ovat Vahlenin matriiseja, niin* V_1V_2 *on Vahlenin matriisi*[14] *ja* $M_{V_1V_2} = M_{V_1} \circ M_{V_2}$. *Matriisi* V *on kääntyvä ja*[15]

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.$$

Erityisesti, Vahlenin matriisit muodostavat ryhmän. Lisäksi kaikki avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ *Möbius-kuvaukset voidaan esittää Vahlenin matriisien avulla.*[16]

Todistus: Ensinnäkin toteamme, että seuraavat matriisit ovat Vahlenin matriiseja, kun $a \in \Gamma$:

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a')^{-1} \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se, että nämä toteuttavat Vahlenin matriisien ehdot, on selvää. Tosin niitä vastaavat Möbius-kuvaukset ovat translaatio vektorilla a, orientaation säilyttävä ortogonaalinen muunnos $x \mapsto ax(a')^{-1}$ ja kuvaus $M_J = -x^{-1}$. Kukin näistä on paravektoriarvoinen, orientaation säilyttävä ja Möbius-kuvaus klassisessa mielessä. Toisaalta jokainen Vahlenin matriisi voidaan esittäää näiden tuloina. Osoitamme nyt, että Vahlenin matriisille V kuvaus M_V on Möbius-kuvaus. Oletamme ensin $c = 0$. Koska $ad^* = 1$, niin $d^* = a^{-1}$ ja $d^{-1} = a^* = |a|^2(a')^{-1}$, mistä saadaan

$$M_V(x) = (ax+b)d^{-1} = |a|^2ax(a')^{-1} + ba^*.$$

[14] Matriisialgebralla on luonnollisesti määritelty kertolasku.

[15] Vertaa saatua kaavaa reaalisen 2×2 matriisin käänteismatriisin kaavan kanssa.

[16] Huomaa, että paravektorien dimensio on $n+1$.

Huomaa, että $(ba^*)^* = ab^* \in A_n$, joten $ba^* \in A_n$. Tämä on rotaation, dilaation ja translaation kompositio, joten se on Möbius-kuvaus. Jos taas $c \neq 0$, niin

$$\begin{aligned} M_V(x) &= (ax+b)(x+c^{-1}d)^{-1}c^{-1} \\ &= (a(x+c^{-1}d)+(b-ac^{-1}d))(x+c^{-1}d)^{-1}c^{-1} \\ &= ac^{-1}+(b-ac^{-1}d)(x+c^{-1}d)^{-1}c^{-1} \end{aligned}$$

Osoitamme, että $ac^{-1}, c^{-1}d \in A_n$ ja $b - ac^{-1}d = -(c^{-1})^*$. Jos $a = 0$, niin $ac^{-1} = 0$. Oletamme siis $a \neq 0$. Tällöin, koska $da^* - cb^* = 1$, saamme, että $c^{-1}(a^*)^{-1} = c^{-1}d - b^*(a^*)^{-1}$. Toisaalta apulauseen 3.15 ja oletuksien nojalla $c^{-1}d = c^{-1}(dc^*)(c^{-1})^* \in A_n$. Samoin $a^{-1}b \in A_n$. Siispä $a^*c \in A_n$ ja $ac^{-1} = (c^{-1})^*(c^*a)c^{-1} \in A_n$.

Koska $c^{-1}d \in A_n$, tiedämme, että $c^{-1}d = (c^{-1}d)^* = d^*(c^*)^{-1}$, mistä saamme

$$b - ac^{-1}d = (bc^* - ad^*)(c^*)^{-1} = -(c^*)^{-1}.$$

Siispä kuvaus M_V on kompositio inversiosta, rotaatiosta, dilaatioista ja kahdesta translaatiosta. Se on siten paravektoriarvoinen ja erityisesti Möbius-kuvaus. Tiedämme siis, että M_V on Möbius-kuvaus kaikille Vahlenin matriiseille V. Sen lisäksi kaikkien kuvauksien M_V joukko sisältää kaikki translaatiot, inversiot ja rotaatiot, eli orientaation säilyttävien Möbius-kuvausten generoivat alkiot. Osoitamme nyt, että Vahlenin matriisit V muodostavat ryhmän ja kuvaus $V \mapsto M_V$ on homomorfismi. Tästä seuraa, että kaikki Möbius-kuvaukset voidaan esittää Vahlenin matriisien avulla.

Osoitamme ensin, että $M_{V_1V_2} = M_{V_1}M_{V_2}$. Laskemalla Möbius-kuvausten kompositio sijoittamalla

$$
\begin{aligned}
M_{V_1}M_{V_2}(x) &= (a_1(a_2x+b_2)(c_2x+d_2)^{-1}+b_1) \\
&\quad\cdot (c_1(a_2x+b_2)(c_2x+d_2)^{-1}+d_1)^{-1} \\
&= (a_1a_2x+a_1b_2+b_1c_2x+b_1d_2)(c_2x+d_2)^{-1} \\
&\quad\cdot (c_2x+d_2)(c_1a_2x+c_1b_2+d_1c_2x+d_1d_2)^{-1} \\
&= ((a_1a_2+b_1c_2)x+(a_1b_2+b_1d_2)) \\
&\quad\cdot ((c_1a_2+d_1c_2)x+(c_1b_2+d_1d_2))^{-1} \\
&= M_{V_1V_2}(x).
\end{aligned}
$$

Tiedämme siis, että $M_{V_1V_2}$ on Möbius-kuvaus. On vielä osoitettava, että $V = V_1V_2$ on Vahlenin matriisi. Osoitamme, että matriisin V komponentit (a, b, c, d) ovat ryhmässä $\Gamma \cup \{0\}$. Osoitamme väitteen vain komponentille a, ja todistus on analoginen muille komponenteille. Siis osoitamme $a = a_1a_2 + b_1c_2 \in \Gamma \cup \{0\}$. Jos a_1 tai c_2 on nolla, niin väite on triviaali. Siis oletamme, että $a_1, c_2 \neq 0$. Tällöin $a = a_1(a_2c_2^{-1} + a_1^{-1}b_1)c_2$. Keskimmäinen termi on paravektori, ja siten tulo on kolmen $\Gamma \cup \{0\}$ alkion tulo, mistä väite.

Lasketaan pseudodeterminantti

$$
\begin{aligned}
(a_1a_2+b_1c_2)(b_2^*c_1^*+d_2^*d_1^*) &- (a_1b_2+b_1d_2)(a_2^*c_1^*+c_2^*d_1^*) = \\
&= a_1(a_2b_2^*-b_2a_2^*)c_1^*+a_1(a_2d_2^*-d_2a_2^*)d_1^* \\
&= b_1(c_2b_2^*-d_2a_2^*)c_1^*+b_1(c_2d_2^*-d_2c_2^*)d_1^* \\
&= a_1d_1^*-b_1c_1^*=1.
\end{aligned}
$$

On vielä osoitettava viimeinen ehto, että $ab^*, cd^* \in A_n$. Jos $d = 0$ tai c, jälkimmäinen väite on selvä. Siis oletamme, että $c, d \neq 0$. Sijoitetaan $x = 0$ kaavaan. Tällöin $bd^{-1} \in A_n$, koska $M_V(0) = bd^{-1}$. Sijoitamme äärettömän $x = \infty$ kaavaan (Möbius-kuvaus on laajennettu tähän), jolloin $ac^{-1} \in A_n$. Vastaavilla laskuilla kuin todistuksen ensimmäisessä osassa saamme väitteen.

Siispä $V = V_1V_2$ on Vahlenin matriisi ja joukko on suljettu kertolaskun suhteen. Toisaalta, voimme osoittaa suoraviivaisella laskulla, että

$$
V^{-1} = \begin{pmatrix} d^* & -b^* \\ -c^* & a^* \end{pmatrix}.
$$

Siispä Vahlenin matriisit muodostavat ryhmän, joka on homomorfinen orientaation säilyttävien Möbius-kuvausten ryhmän kanssa.

■

4 Monogeenisuus ja holomorfisuus

Cliffordin algebroilla on monia hyödyllisiä algebrallisia ominaisuuksia. Siirrymme nyt tarkastelemaan Cliffordin algebra -arvoisia funktioita. Tavoitteenamme on määritellä näille kompleksianalyysiä vastaava teoria ja soveltaa sitä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden reuna-arvo-ongelmiin kuten kompleksianalyysissä. Keskeisessä asemassa on Diracin operaattori.

Kompleksianalyyttisten funktioiden perusominaisuudet voidaan tiivistää yhteen peruslauseeseen[17].

Lause 4.1. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{C}$ avoin joukko. Tällöin $f \in C^1(\Omega)$ on analyyttinen/holomorfinen, jos ja vain jos jokin seuraavista yhtäpitävistä ehdoista toteutuu.*

1. *Funktio f toteuttaa nk. Cauchy-Riemannin yhtälöt, jotka voidaan tiivistää Cauchy-Riemann operaattorin avulla:*

$$\overline{\partial} f = (\partial_x + i\partial_y) f = 0.$$

2. *Funktio f on kompleksianalyyttinen. Siis jokaiselle $z_0 \in \Omega$ funktio f voidaan ilmaista jossain pisteen z_0 ympäristössä V normaalisti suppenevana*[18] *potenssisarjana:*

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n.$$

3. *Olkoon $D \subset \Omega$ mielivaltainen sileäreunainen alue, jolle $\overline{D} \subset \Omega$. Tällöin f voidaan ilmaista nk. Cauchyn integraalina, kun $z \in int(D)$:*

$$f(z) = \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

[17] Yksinkertaisuuden vuoksi esitämme tuloksen tasossa, vaikka tulos pätee yhtä hyvin n-ulotteisessa kompleksiavaruudessa.

[18] Suppenee tasaisesti kompakteilla osajoukoilla.

Huomautus: Hörmanderin kirjassa on kätevä muotoilu analyyttisyydelle. Määrittelemme differentiaalit $dz = \frac{1}{2}(dx + dyi)$ ja $d\overline{z} = \frac{1}{2}(dx - dyi)$. Tällöin $f \in C^1(\Omega)$ on analyyttinen, jos ja vain jos on olemassa $f'(z)$, jolle $df(z) = f'(z)dz$. Formaalisti ottamalla itseisarvot puolittain saamme, että $|df| = |f'||dz|$, joten f "venyttää" etäisyyksiä samalla kertoimella $|f'|$ suunnasta riippumatta. Siis se on monogeeninen, sanan varsinaisessa mielessä.

Cliffordin algebrojen kontekstissa on luontevinta yleistää analyyttisuuden määrittelemällä CR-operaattorin yleistys. Tässä on erilaisia lähestymistapoja, joita käytetään eri tilanteissa. On myös määriteltävä luokka funktioita, joita tarkastellaan. Käytetty luokka riippuu sovelluksesta. Tarkastelemme joko funktioita $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto Cl_n$, $f : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{C}l_n$, $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ tai $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$. Näiden analyysi on samanlaista ja esittelemme sen paralleelisti, vaikkakin todistukset esitämme vain tapauksessa $f : \mathbb{R}^n \mapsto Cl_n$ ja muissa tapauksissa todistukset ovat joko samoja tai hieman muokattuja.

Voimme nyt määritellä Diracin operaattorin.

Määritelmä 4.2. *Tapauksessa Cl_n ja $\mathbb{C}l_n$ Diracin operaattori on*

$$D = \sum_{i=0}^{n} \partial_{x_i} e_i.$$

Tapauksessa $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ tarkastelemme Diracin operaattoria $D = \sum_{i=0}^{3} \partial_{x_i} e_i$, missä $e_0 = 1$, $e_1 = i, e_2 = j$ ja $e_3 = k$. Tapauksessa $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}$ tai $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$ Diracin operaattori on $D = \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} e_i$.

Huomautus: Jos $n = 1$, niin Diracin operaattori on $D = \partial_{x_0} + \partial_{x_1} e_1$, mikä on sama kuin CR operaattori.

Diracin operaattori kvaternien tapauksessa saa hyvin yksinkertaisen muodon. Nimittäin tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$, jolle $f_0 = 0$ (eli skalaariosa on nolla). Tällöin

$$\begin{aligned} Df &= \sum_{i=1}^{3} e_i \partial_i \sum_{j=1}^{3} f_j e_j \\ &= \sum_{i=1}^{3} -\partial_i f_i + \sum_{1 \le i \le j \le 3} (\partial_i f_j - \partial_j f_i) e_i e_j \\ &= -\nabla f + \nabla \times f, \end{aligned}$$

koska $e_1 e_2 = e_3$ ja voimme permutoida indeksejä syklisesti.

Määrittelemme monogeeniset funktiot nyt Diracin operaattorin nolla-ratkai suiksi. Tosin on huomioitava, että algebramme on epäkommutatiivinen. Siten puhutaan vasemmalta ja oikealta monogeenisuudesta.

Määritelmä 4.3. *Olkoot Ω avoin joukko (joko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{H}$) ja $f \in C^1(\Omega)$. Tällöin sanotaan, että f on vasemmalta monogeeninen, jos*

$$Df = 0$$

ja oikealta monogeeninen, jos

$$fD = 0.$$

Lisäksi, jos $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, niin sanotaan, että f on vasemmalta tai oikealta kokonainen.

Jos ajattelemme differentiaalioperaattoria D Cliffordin lukuna, jonka komponentteina on osittaiderivaattoja, niin voimme määritellä operaattorin $\overline{D}$ kuten Cliffordin luvuille. Mainitsemme myös, että jos f on paravektoriarvoinen, niin $f^* = f$ ja siten yhtälö $Df = 0$ on ekvivalenttia yhtälön $fD = (Df)^* = 0$ kanssa. Siispä paravektoriarvoisille funktioille vasemmalta monogeenisuus on ekvivalenttia oikealta monogeenisuuden kanssa. Kutsumme näitä funktioita *monogeenisiksi.*

Määritelmä 4.4. *Olkoot Ω avoin joukko (joko avaruudessa $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{H}$) ja $f \in C^1(\Omega)$. Tällöin sanotaan, että f on monogeeninen, jos*

$$Df = 0 = fD.$$

Jos $\Omega = \mathbb{R}^{n+1}$, niin sanomme, että f on kokonainen.

Monogeenisten funktioiden teoriassa on paljon samaa kuin kompleksianalyysin teoriassa, mikä liittyy läheisesti Cauchyn integraalikaavaan. On tosin keskeisiä eroja, jotka liittyvät epäkommutatiivisuuteen. Ensinnäkin, monogeenisuus ei ole klassisessa mielessä erotusosamäärän raja-arvon olemassaolon kanssa ekvivalenttia. Pikemminkin päinvastoin; kuuluisa teoreema Krylovilta ja Mejlikhzhonilta vuodelta 1947 osoittaa, että vain tietynlaisilla lineaarisilla funktioilla on erotusosamäärän raja-arvot olemassa [27] [14, §II 5.2.1].

Toisaalta toiveet tuloksista kuten avoimen kuvauksen lauseesta, konformisuudesta ja muista geometrisista ominaisuuksista ovat heikkoja, koska kuva-ava ruuden dimensio on eri kuin lähtöavaruuden dimensio. Edes jos rajoitamme kiinnostuksen funktioille $\mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^{n+1} \subset Cl_n$ (paravektoriarvoiset), niin silloinkaan tällaisia tuloksia ei kirjoittajan tietämyksen mukaan juuri tunneta. Lisäksi, jos f ja g ovat monogeenisia, niin ei ole takuita siitä, että fg on monogeeninen.

Esimerkki: Funktiot $f(x) = x_1 - x_0e_1$ ja $g(x) = x_2 - x_0e_2$ ovat monogeenisia, mutta $fg(x) = x_1x_2 - x_0x_1e_2 - x_0x_2e_1 + x_0^2e_1e_2$ ei ole. Toisaalta funktio $f(x) = x = \sum_i x_ie_i$ ei ole vasemmalta tai oikealta monogeeninen, kuten ei ole myöskään $g(x) = x^k$ millekään $k \in \mathbb{N}$, kun $x \in A_n$ ja $n \geq 2$. Tämän voi todistaa laskemalla Dx^n käyttäen yleisesti hyödyllistä kaavaa ($x \in A_n$)

$$\sum_{i=0}^{n} e_ixe_i = (1-n)\overline{x}.$$

Lisäksi kompositio, silloinkaan kun se on määritelty ei ole aina monogeeninen, koska $f \circ g = -x_2e_1$. Tässä samaistamme paravektorit avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ kanssa, ja siten kompositio on hyvinmääritelty. Nämä kaikki ominaisuudet ovat kompleksianalyysistä tuttuja, mutta eivät päde Cliffordin analyysin tapauksessa. Jossain määrin näitä ongelmia voidaan korjata käyttämällä eri Diracin operaattoria. Tarkemmin ottaen, esimerkiksi Sirkka-Liisa Erikssonin ja Heinz Leutwilerin teoriassa x^n ovat nk. hypermonogeenisia Diracin operaattorin suhteen, joka on määritelty suhteessa hyperboliseen metriikkaan. Lisää tästä ja tämän lähestymistavan suhteesta esittämäämme teoriaan esimerkiksi [18, 17, 9]. Voimme nyt siirtyä tarkastelemaan integraalikaavoja ja sitä, miten tämä vastaa kompleksianalyysiä. Ensin tarkastellaan tosin klassisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ja niiden perusteoriaa.

5 Osittaisdifferentiaaliyhtälöitä

Haluamme motivoida Diracin operaattorin hyödyllisyyttä, ja näytämme sen suhteen joihinkin klassisiin differentiaalioperaattoreihin. Seuraamme osittain Lassi Päivärinnan luentomonistetta [23]. Keskeisessä asemassa on ilmaista klassisia differentiaalioperaattoreita ja yhtälöitä Diracin operaattorin avulla, jolloin voimme soveltaa klassisen kompleksianalyysin menetelmiä niiden tutkimiseen.

Diracin operaattori "jakaa" Laplacen operaattorin, eli $D\overline{D} = \overline{D}D = \triangle$, missä $\triangle$ on määrittelyjoukon Laplacen operaattori. Jos tarkastelemme kuvauksia $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$, niin myös $D^2 = -\triangle$. Siis on selvää, että vasemmalta tai oikealta monogeenisen funktion f komponentit ovat harmonisia. Lisäksi ne ovat (reaali-) analyyttisiä ja äärettömästi derivoituvia, koska harmoniset funktiot ovat s+itä[19]. Pätee myös kompleksianalyysin tulos, että jokainen monogeeninen funktio toteuttaa $f = \overline{D}h$ lokaalisti, missä h on harmoninen. Tämä seuraa välittömästi monogeenisuudesta ja Laplace-operaattorin hajotelmasta. Diracin operaattorilla on myös läheinen suhde Helmolzin operaattoriin kompleksikertoimisten kvaternien tapauksessa.

Määritelmä 5.1. *Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$. Määritellään operaattori $D_\alpha = D + \alpha I$, missä I on identiteetti. Tämä määritelmä on mielekäsm jos $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$.*

Suoraan määtelmästä saamme $-D_\alpha D_{-\alpha} = \triangle + \alpha^2$. Siispä, kuten yllä, operaattorin D_α nollaratkaisuiden komponentit ovat Helmholzin yhtälön ratkaisuja.

Eräs keskeisin motivaatio Cliffordin algebrojen, sekä joissain tapauksissa ulkotuloalgebrojen, käyttöön on Maxwellin yhtälöiden ilmaiseminen kompaktissa muodossa. Yleisessä tapauksessa Maxwellin yhtälöt[20] ovat ensimmäisen kertaluvun lineaarisia differentiaalyhtälöitä aikariippuville kentille seuraavasti:

$$\begin{cases} \nabla \times E = -\partial_t B \\ \nabla \times H = -\partial_t D + j \\ \nabla \cdot D = \rho \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases}.$$

Tässä $E, B, D, H : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ (tai jollain avoimella osajoukolla) ja $\rho, j : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$. Fysikaalisesti E on sähkökenttä, H magneettikenttä, B magneettivuon tiheys ja H sähkövuon tiheys. Varaustiheys on ρ ja j on virran tiheys. Kenttien välille voidaan esittää riippuvuudet +

$$D = \epsilon E, B = \mu H.$$

Tässä ϵ on paikasta riippuva tensori, joka kuvaa sähköistä permittiivisyyttä ja μ on tensori, joka kuvaa magneettista permeabiliteettiä. Oletamme tarkastelussamme, että väliaineemme on homogeeninen, eli ϵ ja μ vakioita, ja isotrooppinen, eli ϵ ja μ positii-

[19] Harmonisista funktioista voi lukea esimerkiksi [11, 5].

[20] Maxwell löysi yhtälöt 1861 ja ne ovat kenties keskeisimpiä yhtälöitä fysiikassa, koska ne kuvaavat kaikki sähkömagneettiset ilmiöt lukuun ottamatta kvanttimekaanisia ilmiöitä. Mikä tahansa fysiikkaan johdatteleva teos esittää Maxwellin yhtälöiden perusteorian.

visia skalaareita. Määrittelemme suureen $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

Tarkastelemme nyt kuvausta

$$(x,t) \mapsto V(x,t) = \sqrt{\epsilon}E(x,t) + i\sqrt{\mu}H(x,t).$$

Jos samaistamme avaruuden $\mathbb{R}^3$ avaruuden $\mathbb{H}_c$ aliavaruutena span$\{i,j,k\}$, niin voimme ajatella nyt $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{H}_c$. Erityisesti voimme nyt käyttää Diracin operaattoria. Lasketaan DV huomioiden, että $V_0 = 0$ (V on vektoriarvoinen),

$$\begin{aligned} DV &= \sqrt{\epsilon}(DE) + i\sqrt{\mu}DH \\ &= \sqrt{\epsilon}(-\nabla \cdot E + \nabla \times E) + i\sqrt{\mu}(-\nabla \cdot H + \nabla \times H) \\ &= (-\frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}} - \frac{1}{c\sqrt{\mu}}\partial_t B) + i\sqrt{\mu}(\partial_t \epsilon E + j) \\ &= i(\sqrt{\mu}j + i\frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}}) + i\frac{1}{c}(\partial_t(\sqrt{\epsilon}E + i\sqrt{\mu}H)). \end{aligned}$$

Kertomalla yhtälö puolittain yksiköllä i saamme

$$(\frac{1}{c}\partial_t + iD)V = -(\sqrt{\mu}j + i\frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}}).$$

Määrittelemme yhtälön vasemman puolen Maxwellin operaattoriksi.

Määritelmä 5.2. *(Kvaterninen) Maxwellin operaattori on*

$$M = \frac{1}{c}\partial_t + iD.$$

Edellinen lasku osoittaa, että Maxwellin yhtälö saadaan seuraavaan muotoon.

Apulause 5.3. *Maxwellin yhtälöt ovat ekvivalenttia yhtälön*

$$(\frac{1}{c}\partial_t + iD)V = -(\sqrt{\mu}j + i\frac{\rho}{\sqrt{\epsilon}})$$

kanssa.

Huomaa, että Maxwellin operaattori jakaa aalto-operaattorin: $(\frac{1}{c}\partial_t + iD)(\frac{1}{c}\partial_t - iD) = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \triangle$. Siispä, jos $(\frac{1}{c}\partial_t + iD)V = 0$, niin sen komponentit toteuttavat aaltoyhtälön. Erityisesti, edellisen apulauseen nojalla tämä pätee sähkömagneettisen kentän komponenteille, jos $j = \rho = 0$. Tämä on varsin elegantti ja tiivis todistus tälle tulokselle.

Lisäksi siitä seuraa välittömästi, että c onkin oikeastaan sähkömagneettisen aallon nopeus, eli valonnopeus.

Huomaa, että Maxwellin yhtälöt voidaan ilmaista monien eri struktuurien avulla, kuten eri Cliffordin algebrojen avulla. Seuraamme Lassi Päivärinnan luentomonisteiden käytännettä. Sen hyötynä tulemme näkemään yksinkertaisen tavan käsitellä aikaharmonista Maxwellin yhtälöä. Heikkoutena siinä on, että vastaavan Diracin operaattorin teoria on kolmiulotteinen ja siten emme käytä koko neliulotteista aika-avaruutta. Laajempi käsittely on mahdollinen ja esimerkiksi Louneston kirjassa on huolellinen tarkastelu tästä. Voidaan esimerkiksi tarkastella Cliffordin algebroja $\mathbb{C}l_3$ tai $Cl_{3,1}$. Näistä muodoista näkyy esimerkiksi relativistinen kovarianssi selkeämmin. [19]

Palataan hetkeksi operaattoriin D_α. Meille syy tämän operaattorin tarkasteluun on aikaharmonisen Maxwellin yhtälön tarkastelu. Yleisessä Maxwellin yhtälössä aikariippuvuutta ei ole millään lailla rajoitettu, mutta aikaharmonisessa tapauksessa se on harmonista. Siis

$$E(x,t) = \mathrm{Re}(E(x)e^{-i\omega t}), H(x,t) = \mathrm{Re}(H(x)e^{-i\omega t}).$$

Sallimme nyt sähkökentän ja magneettikentän olla kompleksisia. Eli $E(x,t) = E(x)e^{-i\omega t}$ ja $H(x,t) = H(x)e^{-i\omega t}$. Kompleksiluvun suunta kertoo siis vaihe-eron ja suuruus sähkökentän suuruuden siinä pisteessä. Maxwellin yhtälöt tulevat muotoon

$$\begin{cases} \nabla \times E = i\omega\mu H \\ \nabla \times H = -i\omega\epsilon E + j \\ \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla \cdot H = 0 \end{cases}.$$

Toisesta ja kolmannesta yhtälöstä seuraa derivoimalla, että $i\rho\omega = \nabla \cdot j$. Edelleen Ohmin laista saamme, että $j = \sigma E + j_0$, missä σ on sähkönjohtavuus ja j_0 on ulkoinen virta. [21] Sijoittamalla nämä, saamme edelleen yhtälöt muotoon:

$$\begin{cases} \nabla \times E = i\omega\mu H \\ \nabla \times H = (-i\omega + \sigma)\epsilon E + j_0 \\ \epsilon(1 + i\frac{\sigma}{\omega})\nabla \cdot E = \frac{-i}{\omega}\nabla \cdot j_0 \\ \nabla \cdot H = 0 \end{cases}.$$

[21] Tämän voi johtaa esimerkiksi ottamalla integaali jonkin käyrän yli ja käyttämällä tutumpaa muotoilua Ohmin laista $U = RI$, missä U on jännite, R on resistanssi ja I on virta.

Lyhennetään nyt $\epsilon \equiv \epsilon(1+i\frac{\sigma}{\omega})$. Merkitään $j = j_0$ ja $\rho = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot j$. Soveltamalla operaattoria D kuten Maxwellin operaattorin tapauksessa saadaan tiivistettyä yhtälöt seuraavaan muotoon.

Apulause 5.4. *Aikaharmoninen Maxwellin yhtälö on ekvivalentti yhtälö+n*

$$\begin{cases} DE = -\frac{\rho}{\epsilon} + i\omega\mu H \\ DH = j - i\omega\epsilon E \end{cases}$$

kanssa.

Haluamme edelleen yksinkertaistaa tätä. Määrittelemme vakion $\alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ ja funktiot

$$\begin{cases} \phi = \alpha H - i\omega\epsilon E \\ \psi = \alpha H + i\omega\epsilon E \end{cases}.$$

Voimme osoittaa nyt Maxwellin yhtälöille vielä yhden yhtäpitävän muotoilun, jota tulemme käyttämään, kun tarkastelemme reuna-arvo-ongelmia.

Lause 5.5. *Olkoot $E, H, \phi, \psi, j, \alpha, \omega, \epsilon, \mu$ kuten yllä. Tällöin aikaharmonisen Maxwellin yhtälön ratkaiseminen on ekvivalenttia yhtälöparin*

$$\begin{cases} D_{-\alpha}\phi = \nabla \cdot j + \alpha j \\ D_\alpha \psi = -\nabla \cdot j + \alpha j \end{cases}.$$

ratkaisemisen kanssa[22].

Todistus: Osoitamme, että ϕ ja ψ toteuttavat yhtälöparin. Derivoimme saamme

$$\begin{aligned} D_\alpha \psi &= \alpha DH + \alpha^2 H + i\alpha\omega\epsilon E + i\omega\epsilon DE \\ &= \alpha(j - i\omega\epsilon E) + \alpha^2 H + i\alpha\omega\epsilon E + i\omega\epsilon(-\frac{\rho}{\epsilon} + i\omega\mu H) \\ &= \alpha j - \nabla j. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla E, H funktioiden ϕ ja ψ avulla saamme

$$H = \frac{1}{2\alpha}(\phi + \psi), E = \frac{i}{2\omega\epsilon}(\phi - \psi).$$

Nyt tarkistetaan, että nämä toteuttavat aikaharmonisen Maxwell-yhtälön. Laskemalla saamme

[22] Eli kumman vain yhtälön ratkaisu voidaan muuntaa toisen yhtälön ratkaisuksi.

$$
\begin{aligned}
DH &= \frac{1}{2\alpha}(D\phi + D\psi) \\
&= \frac{1}{2\alpha}(\alpha j + \nabla j - \nabla \cdot j + \alpha j) + \frac{1}{2}(\phi - \psi) = j - i\omega\epsilon E
\end{aligned}
$$

ja

$$
\begin{aligned}
DE &= \frac{i}{2\omega}(D\phi - D\psi) \\
&= \frac{i}{2\omega}(\alpha j + \nabla j + \nabla \cdot j - \alpha j) + \frac{i\alpha}{2\omega\epsilon}(\phi + \psi) \\
&= i\frac{\nabla j}{\omega} + i\frac{\alpha^2}{\omega\epsilon}H \\
&= -\frac{\rho}{\epsilon} + i\omega\mu H.
\end{aligned}
$$

■

Huomautus: Tämän todistuksen voi ilmaista tiiviisti huomaamalla, että:

$$
\begin{pmatrix} D & -i\omega\mu \\ D & i\omega\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\omega\epsilon & \alpha \\ i\omega\epsilon & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_{-\alpha} & 0 \\ 0 & D_{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega\epsilon & \alpha \\ i\omega\epsilon & \alpha \end{pmatrix}.
$$

Kyse on siis operaattorin diagonalisoinnista ja kannan vaihdosta.

5.1 Perusratkaisuista

Differentiaalioperaattorien tarkastelussa ja ratkaisuiden löytämisessä keskeisessä asemassa ovat perusratkaisut.

Määritelmä 5.6. *Olkoon L differentiaalioperaattori avaruudella $\mathbb{R}^n$. Tällöin distribuutio u on operaattorin L perusratkaisu , jos ja vain jos*

$$Lu = \delta,$$

missä δ on Diracin distribuutio.

Lue lisää distribuutioteoriasta esimerkiksi [26, 11]. Mainitsemme vain sen, että distribuutio on kuvaus kompaktikantajaisten sileiden funktioiden duaalissa, joten $Lu = \delta$ on yhtäpitävää sen kanssa, että $\langle Lu, \phi \rangle = \phi(0)$ kaikille sileille kompaktikantajaisille ϕ. Perusratkaisun hyöty on siinä, että sen avulla voidaan ratkaista yhtälöt muotoa $Lu = f$, missä f on sileä funktio (tai kompaktikantajainen distribuutio). Kunhan integraali suppenee, ratkaisu on tällöin muotoa $f * u$, mikä seuraa konvoluution määritelmästä ja derivoimalla integraalimerkin alla.

Esitämme Laplacen yhtälön perusratkaisut, sekä näitä vastaavat funktiot Cliffordin analyysissä. Määrittelemme funktiot $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{\log(|x|)}{2\pi} & \text{, kun } n = 2 \\ \frac{-1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{, kun } n > 2 \end{cases} .$$

Nämä ovat nk. Newtonin ytimiä/potentiaaleja. Tässä ω_n on n-ulotteisen pallon pinnan pinta-ala. Tämä voidaan esittää suljetussa muodossa

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},$$

missä Γ on Eulerin gammafunktio [11, 4].

Fysikaalisesti intuitio on, että varattu pistemäinen hiukkanen indusoi kentän ympärilleen, jonka potentiaali on tämä funktio. Kun $n = 3$, määrittelemme myös funktiot

$$\phi_\alpha(x) = \phi(x) e^{i\alpha|x|},$$

kun $\alpha \in \mathbb{C}$. Osoitamme seuraavaksi, että ϕ_α on operaattorin $\triangle + \alpha^2$ perusratkaisu. Huomaa, että $\phi_0 = \phi$. Todistus , että ϕ on operaattorin $\triangle$ perusratkaisu myös ulottuvuuksilla $n \neq 3$ on samanlainen.

Lause 5.7. *Distribuutiomielessä*

$$(\triangle + \alpha^2)\phi_\alpha = \delta$$

ja

$$\triangle\phi = \delta.$$

Todistus: Olkoon $\psi \in C_0^\infty$ mielivaltainen kompaktikantajainen funktio. Valitaan Ω niin suureksi palloksi, että se sisältää funktion ψ kantajan ja origon. Ensinnäkin, funktion ϕ singulariteetti on logaritminen, kun $n = 2$, ja astetta $n - 2$, kun $n > 2$. Siispä $\phi_\alpha \in L^1_{\text{loc}}$ (lokaalisti integroituva) ja se määrää distribuution.

Valitaan $0 < \epsilon < \mathrm{dist}(0, \Omega^c)$ pieneksi. Tarkastellaan aluetta $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(0,\epsilon)$ ja sen reunaa, joka on $\partial\Omega \cup \partial B(0,\epsilon) = \Gamma$.

Olkoon ∂_ν normaaliderivaattaa pinnalla. Sovelletaan Greenin kaavaa ja saamme

$$
\begin{aligned}
& \int_\Gamma \phi_\alpha(x)\partial_\nu\psi(x) - \psi(x)\partial_\nu\phi_\alpha(x)dA \\
= & \int_{\Omega_\epsilon} \phi_\alpha(x)\triangle\psi(x) - \psi(x)\triangle\phi_\alpha(x)dV \\
= & \int_{\Omega_\epsilon} \phi_\alpha(x)(\triangle + \alpha^2)\psi(x) - \psi(x)(\triangle + \alpha^2)\phi_\alpha(x)dV.
\end{aligned}
$$

Mekaanisesti derivoimalla saamme, että $(\triangle + \alpha^2)\phi(x) = 0$ Lisäksi pintaintegraali reunalla $\partial\Omega$ häviää. Huomataan, että $\partial_\nu = \partial_r$ pinnalla $B(0,\epsilon)$, koska kyse on pallon pinnasta. Tällöin $\phi_\alpha(x) = e^{i\alpha r}/(4\pi r)$ ja $\partial_r\phi_\alpha(x) = (i\alpha/(4\pi r) - 1/(4\pi r^2))e^{i\alpha r}$. Tässä $r = |x|$. Siispä saamme käyttämällä näitä ominaisuuksia ja distribuution määritelmää:

$$
\int_{\Omega_\epsilon} \phi_\alpha(x)(\triangle + \alpha^2)\psi(x) = \int_{\partial B(0,\epsilon)} \phi_\alpha(x)\partial_\nu\psi(x) - \psi(x)\partial_\nu\phi_\alpha(x)dA.
$$

Oletimme, että ϕ on sileä. Olkoot δ mielivaltainen. Valitsemalla ϵ riittävän pieneksi saamme, että $|\psi(x)e^{i\alpha|x|} - \psi(0)| < \delta$, kun $|x-0| < \epsilon$. Termit, jotka ovat asymptoottisesti $1/|x|$ häviävät, kun $\epsilon \to 0$, koska pinta-ala on $O(|x|^2)$. Riittää siis tarkastella termiä $\psi(x)e^{i\alpha|x|}/(4\pi|x|^2))$. Toisaalta

$$
\left| \int_{\partial B(0,\epsilon)} (\psi(x)e^{i\alpha|x|} - \psi(0))/(4\pi|x|^2))dA \right| \leq \int_{\partial B(0,\epsilon)} \delta|e^{i\alpha|x|}|/(4\pi|x|^2)dA < M\delta,
$$

missä $M < \infty$ ja ei vakioista δ tai ϵ. Toisaalta suora lasku näyttää, että

$$
\int_{\partial B(0,\epsilon)} \psi(0)/(4\pi|x|^2)dA = \psi(0)\int_S d\omega \int_0^\epsilon r^2/(4\pi r^2)dr = \psi(0),
$$

missä S on yksikkökuulan pinta ja ω on pallon pintamitta. Väite seuraa nyt edellisistä estimaateista, kun $\epsilon \to 0$, koska ϕ_α on lokaalisti integroituva.

$\blacksquare$

Vastaavanlaiset tulokset kuin yllä voidaan johtaa Diracin operaattorille, kuten alla tehdään. Kuitenkin edellä määrättyjen funktioiden sijaan tarkastellaan funktiota

$$E(x) = \overline{D}\phi(x) = \frac{\overline{x}}{\omega_n |x|^{n-1}}.$$

Selvästi tämä on monogeeninen, kun $x \neq 0$, ja paravektoriarvoinen. Tätä kutsutaan kompleksianalyysin analogian mukaisesti Cauchyn ytimeksi. Huomaa, että kun $n = 1$, olemme kompleksianalyysin tilanteessa ja saamme klassisen Cauchyn ytimen $\frac{1}{z}$.[23] Näillä funktioilla on singulariteetti, tosin se on astetta $n - 1$, joten funktiot ovat edelleen lokaalisti integroituva ja määrittelevät Cliffordin arvoisen distribuution[24]. Samalla lailla määrittelemme funktion

$$E_\alpha(x) = -D_{-\alpha}\phi_\alpha(x) = (\alpha + \frac{x}{|x|^2} + i\alpha\frac{x}{|x|})\phi_\alpha.$$

Oikeastaan nämä funktiot ovat perusratkaisuita operaattoreille D ja D_α.

Lause 5.8. *Distribuutiomielessä*

$$D\phi = \delta$$

ja

$$D_\alpha\phi = \delta.$$

Huomautus: On syytä todeta, että puhumme nyt Cliffordin arvoisista distribuutioista ja epäkommutatiivisuus vaikuttaa tuloksiin. Siis, esimerkiksi yleisesti ottaen $\langle Du, \phi\rangle \neq \langle -u, D\phi\rangle$. Mutta edelleen $\langle \partial_i u, \phi\rangle \neq \langle -u, \partial_i \phi\rangle$ ja toisaalta $\langle uD, \phi\rangle \neq \langle -u, D\phi\rangle$. Nämä ovat melko suoraviivaisia johtaa, kun määritellään Cliffordin arvoinen distribuutio ja distribuution kertominen. Ks. esimerkiksi [7].

Todistus: Riittää todeta, että $D\overline{D} = \triangle$ ja $-(D + \alpha)(D - \alpha) = \triangle + \alpha^2$ ja käyttää teoreemaa 5.7.

■

Tulemme tarkastelemaan tätä kysymystä vielä huolellisemmin, kun todistamme Rungen lauseen. Nyt esitämme kuitenkin Cauchyn integraalien perusteorian.

[23]Indeksointimme vaihtelee. Huomaa, että tapauksessa $n = 1$ paravektorit muodostavat kaksiulotteisen avaruuden ja siis yllä on kyse tapauksesta $n = 2$. Siis, kun Cliffordin algebra on Cl_n, niin paravektorit muodostavat $n + 1$-ulotteisen avaruuden.

[24]Distribuutioiden teoria yleistyy suoraan Cliffordin arvoisille distribuutioille. Huolellinen tarkastelu on kirjassa [7].

6 Cauchyn integraalikaava ja sen seuraukset

Osoitamme nyt keskeisen integraaleja koskevan tuloksen, joka johtaa mm. Moreran ja Cauchyn integraalilauseisiin. Määrittelemme ensin erään Clifford-arvoisen differentiaalimuodon. Olkoon $d\hat{x}_i = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots dx_n$. Määrittelemme $d\sigma = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i e_i d\hat{x}_i$. Jos tarkastellaan kuvauksia $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$, niin summaus alkaa indeksistä $i = 1$ ja kertoimena on $(-1)^{i+1}$. Voidaan osoittaa klassisesti, että, jos $n = \sum_{i=0}^{n} n_i e_i$ on jonkin pinnan ulkonormaali ja dS kyseisen pinnan pintamitta, niin $d\sigma = ndS$. Tämä todistetaan suoraan integroimalla pinnan yli kaikkia reaalisia $f \in C^\infty$ ja toteamalla $n_i dS = (-1)^i d\hat{x}_i$. Stokesin kaavalla voidaan osoittaa seuraava tulos.

Lause 6.1. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on avoin rajoitettu joukko, jolla on sileä reuna $\partial\Omega$. Kaikille Clifford-arvoisille funktioille $f, g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (jatkuvia reunalle asti) pätee*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma g = \int_{\Omega} (fD)g - f(Dg) dV,$$

missä dV on tavallinen tilavuusmitta ja $d\sigma$ on annettu yllä.

Huomautus: Oletamme joukon Ω sileäreunaisuuden. Teemme tämän, koska Stokesin lause usein formuloidaan tällä oletuksella. Tosin tätä sileysoletusta voidaan olennaisesti heikentää. Tulos pätee myös simplekseille, ja näiden muodostamille ketjuille. Voimme toki ottaa myös yhdistyksiä ja diffeomorfismeja alueista, joille teoreema pätee. Ks. Stokesin lauseen todistuksesta esimerkiksi [25].

Todistus: Soveltamalla Stokesin lausetta ja integraalin lineaarisuutta, saamme

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f d\sigma g &= \int_{\partial\Omega} \sum_{i=0}^{n} \sum_{A,B\subset\mathcal{P}} f_A g_B e_A e_i e_B (-1)^i d\hat{x}_i \\
&= \sum_{A,B\subset\mathcal{P}} \int_{\partial\Omega} \sum_{i=0}^{n} f_A g_B e_A e_i e_B (-1)^i d\hat{x}_i \\
&= \sum_{A,B\subset\mathcal{P}} \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} \partial_i (f_A g_B) e_A e_i e_B dV \\
&= \int_{\Omega} \sum_{A,B\subset\mathcal{P}} \sum_{i=0}^{n} \partial_i (f_A) e_A e_i g_B e_B + f_A e_A e_i \partial_i (g_B) e_B dV \\
&= \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} (\partial_i f) e_i g + f e_i (\partial_i g) dV \\
&= \int_{\Omega} (fD)g - f(Dg) dV.
\end{aligned}$$

■

Välittömästi saadaan edellisen teoreeman korollaarina, että vasemmalta tai oikealta monogeenisten funktioiden pinta-integraali on nolla.

Seuraus 6.2. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *rajoitettu, avoin ja sileäreunainen. Olkoon lisäksi* f *vasemmalta monogeeninen joukossa* Ω *ja* $f \in C(\overline{\Omega})$, *niin saamme*

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma f = 0.$$

Vastaavasti, jos f *onkin oikealta monogeeninen, niin*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = 0.$$

Todistus: Todistamme tuloksen vain vasemmalta monogeenisille, koska toinen tapaus on täysin analoginen. Soveltamalla teoreemaa 6.1 funktioille f ja $g = 1$ saamme

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma f = \int_{\Omega} D f dV = 0.$$

■

Kun sovellamme edellisiä tuloksia kvaterniseen tapaukseen, saamme välittömästi korollaarina vastaavan tuloksen operaattorille D_α.

Seuraus 6.3. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *rajoitettu, avoin ja sileäreunainen,* $\alpha \in \mathbb{C}$, *ja* $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$. *Jos* $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *ja* $D_\alpha f = 0$, *niin*

$$\int_{\partial\Omega} f d\sigma = -\alpha \int_{\Omega} f dV.$$

Kuten yllä Helmholzin yhtälön tapauksessa, voimme johtaa Borel-Pompeiun kaavan.

Seuraus 6.4. *(Borel-Pompeiu) Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *rajoitettu, avoin ja sileäreunainen. Olkoon lisäksi* $f \in C^1(\Omega)$ *ja reunalle asti jatkuva Cliffordin arvoinen funktio. Tällöin jokaiselle* $x \in \Omega$ *pätee*

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x) d\sigma f(y) - \int_{\Omega} E(y-x)(Df(y)) dV.$$

Vastaavasti saamme

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} f(y) d\sigma E(y-x) - \int_{\Omega} (f(y)D) E(y-x) dV.$$

Todistus: Todistamme vain ensimmäisen väitteen, koska oikealta monogeenisille todistus menee samalla tavalla. Olkoot $\epsilon > 0$ mielivaltainen riittävän pieni, jotta $B(x,\epsilon) \subset \Omega$. Tällöin soveltamalla teoreemaa 6.1 saadaan

$$\int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma f(y) - \int_{\partial B(x,\epsilon)} E(y-x)d\sigma f(y) = \int_{\Omega/B(x,\epsilon)} E(y-x)(Df(y))dV.$$

Muistamme, että $d\sigma = \mathbf{n}dS$, missä $\mathbf{n}$ on pinnan normaali ja dS pintamitta. Lisäksi $\mathbf{n} = \frac{y-x}{|y-x|}$, jolloin saamme edelleen toiselle integrandille yhtälön vasemmalla puolella

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(x,\epsilon)} E(y-x)d\sigma f(y) &= \int_{\partial B(x,\epsilon)} \frac{\overline{(y-x)}(y-x)f(y)}{n\omega_n |y-x|^{n+2}} dS \\
&= \int_{\partial B(x,\epsilon)} \frac{f(y)}{\omega_n \epsilon^n} dS \to f(x).
\end{aligned}$$

Tämä seuraa funktion f jatkuvuudesta. Lisäksi huomamme, että ytimellä $E(y-x)$ on singulariteetti, jonka aste pisteessä x on n. Siis se on lokaalisti integroituva ja, koska $Df(y)$ on jatkuva ja siten rajoitettu, dominoidun konvergenssin nojalla

$$\int_{\Omega/B(x,\epsilon)} E(y-x)(Df(y))dV \to \int_{\Omega} E(y-x)(Df(y))dV.$$

Siirtämällä termejä yhtälön puolelta toiselle saamme tuloksen.

■

Edelleen täysin samalla todistuksella saamme:

Seuraus 6.5. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ avoin ja sileäreunainen. Olkoon lisäksi $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ reunalle asti jatkuva $\mathbb{H}_c$-arvoinen funktio. Tällöin jokaiselle $x \in \Omega$ pätee*

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} E_\alpha(y-x)d\sigma f(y) - \int_{\Omega} E(y-x)(D_\alpha f(y))dV.$$

Vastaavasti saamme

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\sigma E_\alpha(y-x) - \int_{\Omega} (f(y)D_\alpha)E(y-x)dV.$$

Todistus: Huomaa, että pienille $\epsilon > 0$ pätee, kun $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(x,\epsilon)$, että

$$
\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} E_\alpha(y-x)d\sigma f(y) - \int_{\partial B(x,\epsilon)} E_\alpha(y-x)d\sigma f(y) \\
= &\int_{\Omega_\epsilon} (E_\alpha(y-x)D)f(y) - E_\alpha(y-x)(Df(y))dV \\
= &\int_{\Omega_\epsilon} (E_\alpha(y-x)D_\alpha)f(y) - E_\alpha(y-x)(D_\alpha f(y))dV \\
= &-\int_{\Omega_\epsilon} E_\alpha(y-x)(D_\alpha f(y))dV
\end{aligned}
$$

Otetaan raja-arvo $\epsilon \to 0$ ja tehdään vastaavat arviot kuten yllä ja tulos seuraa.

■

Saamme suoraan Cauchyn integraalikaavan vasemmalta tai oikealta monogeenisille funktioille.

Seuraus 6.6. *(Cauchyn integraalikaava) Jos $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on sileäreunainen, funktio $f : \Omega \mapsto Cl_n$ on vasemmalta monogeeninen joukossa Ω ja $f \in C(\overline{\Omega})$, niin*

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma f(y)$$

kaikille $x \in \Omega$. Samoin oikealta monogeenisille

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} f(y)d\sigma E(y-x).$$

Todistus: Välitön seuraus Borel-Pompeiun kaavasta, koska vasemmalta monogeenisille f on $Df = 0$ ja oikealta monogeenisille $fD = 0$.

■

Seuraus 6.7. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ sileäreunainen rajoitettu avoin joukko. Jos $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, jolle $D_\alpha f = 0$ joukossa Ω ja f on jatkuva reunalle asti, niin*

$$f(x) = \int_{\partial\Omega} E_\alpha(y-x)d\sigma f(y).$$

Huomautus: Cliffordin analyysissä, kuten yhden muuttujan kompleksianalyysissä, pätee siis Cauchyn integraalikaava, jonka integraaliydin on alueesta riippumaton ja jossa integraaliydin on monogeeninen. Useamman muuttujan kompleksianalyysissä tilanne on toinen, koska joko on rajoituttava polykiekkoihin ja niiden erikoiseen reunaan, tai sitten on tyydyttävä ei-holomorfiseen ytimeen, joka riippuu alueesta. [7, §2]

Määrittelemme muutaman operaattorin, joita tulemme tarkastelemaan huolellisemmin.

Määritelmä 6.8. *Olkoot* Ω *sileäreunainen alue avaruudessa ja* $0 < \alpha \leq 1$. *Olkoon* f, g *sopivan integroituvia/sileitä funktioita, esimerkiksi* $g \in C^{(0,\alpha)}(\partial\Omega)$ *tai* $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$. *Tällöin*

- *Théodoresco muunnos:* $Tf(x) = \int_{\Omega} E(y-x)f(y)dV$, $x \in \Omega$
- $Kg(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma g(y)$, $x \notin \partial\Omega$
- $Sg(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma g(y)$, $x \in \partial\Omega$

Kun tarkastelemme kuvauksia $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$, *niin* $T_\alpha, K_\alpha, S_\alpha$ *määritellään vastaavasti korvaamalla* E *ytimellä* E_α.

Huomautus: Operaattorit S ja S_α ovat singulaarisia integraalioperaattoreita, jotka on määritelty pääarvointegroinnin avulla. Operaattori Tf on määritelmän nojalla $-E * f$. Jos korvaamme integrandit $d\sigma g$ ja fdV mitoilla, niin voimme laajentaa määrittelyjoukon kattamaan mittoja. Tosin tällöin integraalien suppenemisen tarkastelu on tehtävä huolellisesti. Alla on muutamia esimerkkejä mittojen käyttämisestä.

Voimme tiivistää yllä esitetyt integraaliesitykset näillä operaattoreilla:

$$f(x) = Kf - TDf, f(x) = K_\alpha f - T_\alpha D_\alpha f.$$

Koska Cauchyn integraaliydin on monogeeninen ja voimme vaihtaa integroinnin ja derivoinnin järjestystä, niin saamme edelliselle korollaarille käänteisen tuloksen. Todistamme ensin yleisemmän tuloksen, josta tulos välittömästi seuraa.

Lause 6.9. *Olkoon* μ *kompaktikantajainen Clifford-arvoinen Borel-mitta avaruudessa* $\mathbb{R}^n$. *Määrittelemme mitan Théodoresco-muunnoksen*

$$T_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(y-x)d\mu.$$

Tällöin T_μ *on määritelty ja vasemmalta monogeeninen mitan* μ *kantajan komplementissa. Sama pätee kuvaukselle*

$$T'_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} d\mu E(y-x),$$

joka on oikealta monogeeninen.

Todistus: Derivoidaan integraalimerkin alla. Integraaliytimen derivaatan integraalit suppenevat hyvin mitan μ kantajan komplementissa, koska erotus $y - x$ voidaan rajoittaa alta.

■

Cauchyn integraalikaavan käänteinen tulos saadaan nyt. Olkoon nimittäin Ω sileäreunainen ja $f \in L^1$ Cliffordin arvoinen funktio reunalla $\partial\Omega$. Funktio f indusoi Borelmitan $\mu = f dS$ alueen Ω reunalle, jossa dS on joukon Ω reunan pintamitta. Tämä mitta laajenee triviaalisti koko avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ mitaksi $\mu(E) = \mu(E \cap \Omega)$. Selvästi tämä Borel-mitta on kompaktikantajainen ja T_μ on sama kuin Cauchyn integraali funktiosta f. Huomaa tosin, että T_μ ei ole määritelty reunalla. Sille voidaan tosin laskea tietyin oletuksin reuna-arvoja, jotka riippuvat funktiosta f. Tästä lisää esimerkiksi [14, §3.7 & 3.8][8].

Keskeinen klassisen kompleksianalyysin tulos on Moreran teoreema. Tulos yleistyy korkeampiin ulottuvuuksiin. Yhdessä ulottuvuudessa teoreema todistetaan usein käyttäen analyyttisen funktion primitiiviä, mutta useammassa ulottuvuudessa primitiiville ei ole yksinkertaista yleistystä. Tässä esitämme todistuksen kirjasta [14, §3.7]. Brackxilla on tulokselle huomattavasti monimutkaisempi todistus [7, §2].

Lause 6.10. *(Moreran teoreema) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin ja f jatkuvasti derivoituva joukossa Ω*[25]*. Jos kaikille r-säteisten kuulien pinnoille $S(x,r) \subset \Omega$, joille avoin kuula $B(x,r) \subset \Omega$, pätee*

$$\int_{S(x,r)} d\sigma f(y) = 0,$$

niin f on vasemmalta monogeeninen.

Todistus: Stokesin lauseesta seuraa välittömästi, että

$$0 = \int_{S(x,r)} d\sigma f(y) = \int_{B(x,r)} Df dV.$$

Jos $r \to 0$, niin $0 = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} Df dV \to Df$, koska Df on jatkuva. Tässä $|B(x,r)|$ on kuulan $B(x,r)$ tilavuus.

■

[25] Huomaa, että kompleksianalyysissä riittää pelkkä jatkuvuus.

Huomautus: Suuretta $\int_{S(x,r)} d\sigma f dV$ voidaan käyttää määrittelemään mitta $\mu(B(x,r))$. Todistuksemme sanoo, että mitan μ Radon-Nikodym-derivaatta on $Df = 0$. Tätä Radon-Nikodym-derivaattaa on käytetty mittaamaan kuinka analyyttinen/monogeeninen funktio f on. Sitä kutsutaan myös *areoliseksi derivaataksi* [14, §2.7] [8]. Lisää Radon-Nikodym-derivaatasta esimerkiksi [6, 24]. Huomaa, että tässä areolinen derivaatta ei *a priori* riipu funktion f derivoituvuudesta ja toisaalta on koordinaattiriippumaton. Emme tässä perehdy areoliseen derivaattaan sen enempää.

Cauchyn integraalikaava johtaa myös välittömästi seuraaviin tuloksiin.

Lause 6.11. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin joukko. Olkoot lisäksi $f, f_k : \Omega \mapsto Cl_n$ funktioita, $k \in \mathbb{N}$. Seuraavat ominaisuudet ovat tosia:*

1. *Keskiarvoperiaate: Jos f on vasemmalta monogeeninen kuulan $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ ympäristössä, niin*
$$f(x) = \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B(x,r)} f(y) dS.$$

2. *Maksimiperiaate: Jos f on vasemmalta monogeeninen ja funktiolla $|f|$ on lokaali maksimi yhtenäisessä joukossa Ω, niin se on vakio.*

3. *Weierstrassin lause: Jos funktiot f_k ovat vasemmalta monogeenisia ja $f_k \to f$ tasaisesti kompakteilla osajoukoilla, niin f on vasemmalta monogeeninen.*

4. *Analyyttisyys: Vasemmalta monogeeninen f on analyyttinen, eli se voidaan kehittää potenssisarjaksi jokaisen pisteen ympäristössä. Lisäksi funktio f voidaan kehittää homogeenisten polynomien sarjaksi, joka suppenee maksimaalisessa kuulassa.*

5. *Liuvillen teoreema: Kaikki vasemmalta (tai oikealta) kokonaiset funktiot f, jotka ovat rajoitettuja eli $|f| < M$ jollekin $M > 0$, ovat vakioita.*

6. *Yksikäsitteisyyslause: Olkoot f, g vasemmalta monogeenisia avoimessa yhtenäisessä joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jos $f = g$ jossain epätyhjässä avoimessa joukon Ω osajoukossa, niin $f = g$ koko joukossa Ω.*

Vastaavat tulokset pätevät oikealta monogeenisille täysin analogisin todistuksin.

Todistus: Huomaa, että keskiarvoperiaatteessa integraali voidaan ajatella funktion f keskiarvona yksikköpallon yli, koska integraalin skaalaustekijä on vain $B(x,r)$-kuulan pinnan pinta-ala. Käyttämällä Cauchyn integraalikaavaa saamme

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\partial B(x,r)} E(y-x) d\sigma f(y) \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\overline{y-x}}{|y-x|^{n+1}} \frac{(y-x)}{r} f(y) dS \\ &= \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{\partial B(x,r)} f(y) dS. \end{aligned}$$

Ottamalla itseisarvo (eli normi Cliffordin luvusta) keskiarvoperiaatteesta ja soveltamalla kolmioepäyhtälöä, joka triviaalisti yleistyy integraaleille.

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} |f(y)| dS.$$

Jos funktiolla $|f(x)|$ on lokaali maksimi, niin riittävän pienelle $r' > 0$, pätee $|f(y)| \leq |f(x)|$ kaikille $x \in B(y,r')$. Siten $\frac{1}{\omega_n |r|^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} |f(y)| = |f(x)|$ ja $|f(y)| = |f(x)|$ kaikille $y \in B(x,r')$. Osoitamme nyt, että funktion f komponentit f_A ovat vakioita kuulassa $B(x,r')$.

Jos $|f(x)| = 0$, niin väite on selvä. Muuten $a^2 = |f(x)|^2 = \sum_{A \subset \{1 \dots n\}} f_A^2$. Derivoimalla kaksi kertaa suunnassa x_i saadaan $0 = \sum_A 2 f_A \partial_i^2 f_A + 2(\partial_i f_A)^2$. Summaamme yli kaikkien $i = 1, \dots, n$. Tällöin vasemmanpuoleisesta termistä tulee $\triangle(f_A) = 0$. Siis jäljelle jää $0 = \sum_{A,i} 2(\partial_i f_A)^2$, mistä seuraa $f_A \partial_i f_A = 0$ kaikille i, A ja siten funktiot f_A ovat vakioita kuulassa $B(x,r')$.

Koska funktiot f_A ovat harmonisia, ne ovat analyyttisiä. Siis f_A on vakio koko alueessa Ω, koska Ω on yhtenäinen. Siispä f on vakio joukossa Ω ja maksimiperiaate on todistettu.

Weierstrassin lause seuraa suoraan teoreemasta 6.9. Nimittäin kunkin suljetun kuulan $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ reunalla f_k suppenee tasaisesti ja siten funktiolle f pätee Cauchyn integraalikaava ja siten se on vasemmalta/oikealta monogeeninen.

Funktio f voidaan esittää Cauchyn integraalina

$$f(x) = \int_{\partial B(x,r)} E(y-x) d\sigma f(y).$$

Olkoon $x_0 \in \Omega$. Koska integraaliydin on analyyttinen, mikä on helppo nähdä Taylorin kaavasta, voimme kehittää sen komponentit klassisessa mielessä potenssisarjaksi pisteen x_0 ympäristössä. Kertoimet ovat hyvin rajoitettuja, kuten myös f, joten saamme funktiolle f hyvin suppenevan potenssisarjan ja tämä potenssisarja suppenee tavallisessa mielessä pisteen x_0 ympäristössä.

Huomaa, että hyödynsimme vasta integraaliytimen analyyttisyyttä. Koska integraaliytimen komponentit ovat jopa harmonisia, niin voimme kehittää funktion $E(y-x)$ (reaali-) homogeenisten polynomien summaksi pisteen x_0 ympäristössä, jotka suppenee maksimaalisessa joukossa pisteen x_0 ympäristössä. Nämä homogeeniset polynomit ovat siis funktioita muuttujasta $(x - x_0)$. Toisin sanoen, saamme homogeenisten polynomien summan, joka suppenee maksimaalisessa kuulaympäristössä $B(x,r) \subset \Omega$.

Olkoon $r' > 0$ mielivaltainen. Kerromme keskiarvoperiaatten puolittain vakiolla $\omega_n r^{n-1}$ ja integroimme säteen $0 < r < r'$ yli. Tällöin saame

$$\int_0^{r'} \omega_n r^n dr f(x) \quad = \quad \int_{B(x,r)} f(y) dV.$$

Vasemman puolen kerroin on yksinkertaisesti kuulan $B(x,r)$ tilavuus polaarikordinaateilla laskettuna. Jakamalla puolittain tilavuudella saamme

$$f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dV.$$

Olkoot nyt funktio f rajoitettu ja $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ ja $R > 0$ mielivaltainen. Tällöin pätee

$$|f(x) - f(0)| \leq \frac{1}{|B(0,R)|} \left| \int_{B(x,R)} f(y) dV_y - \int_{B(0,R)} f(y) dV_y \right|.$$

Olkoon $R > |x|$. Soveltamalla kolmioepäyhtälöä saamme

$$
\begin{aligned}
|f(0)-f(y)| &\leq \frac{1}{R^{n+1}|B(0,1)|}\int_{(B(0,R)\setminus B(x,R))\cup(B(x,R)\setminus B(0,R))} |f(y)|dV \\
&\leq \frac{M}{R^{n+1}|B(0,1)|}\int_{B(0,R+|x|)\setminus B(0,R-|x|)} 1dV \\
&= \frac{M((R+|x|)^{n+1}-(R-|x|)^{n+1})}{R^{n+1}} = \frac{O(R^n)}{R^{n+1}} \to 0,
\end{aligned}
$$

kun $R \to \infty$. Tämä osoittaa, että funktio f on vakio.

Olkoot nyt f ja g kuten todistuksen viimeisessä väitteessä. Funktio $f-g$ on reaalianalyyttinen ja nolla jossain avoimessa joukossa. Siten se on nolla reaalianalyyttisten funktioiden yksikäsitteisyyden nojalla ja joukon Ω yhtenäisyyden nojalla myös koko alueessa Ω.

■

Huomaa, että kaikki edeltävät tulokset pätevät myös klassisessa kompleksianalyysissä, usean kompleksimuuttujan teoriassa ja harmonisessa analyysissä. Todistukset ovat myös täysin analogisia sovelluksia kulloinkin pätevästä integraalikaavasta ja integraaliytimen ominaisuuksista.

Seuraavaksi tarkastelemme hieman tarkemmin, minkälaisen esityksen vasemmalta monogeeninen f saa potenssisarjana. Jos tarkastelemme funktiota f sen Taylorin sarjan avulla, niin tiedämme, että

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f|_{x_0} (x-x_0)^{\alpha}.$$

Tässä α on multi-indeksi ja $D^{\alpha} = D_1^{\alpha(1)} \ldots D_n^{\alpha(n)}$. Toisaalta ryhmittelemällä termejä saamme homogeenisen kehitelmän, joka suppenee maksimaalisessa alueessa:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f|_{x_0} (x-x_0)^{\alpha} \right).$$

Jälkimmäisen suppenemisalue on yleisesti ottaen suurempi kuin ensimmäisen potenssisarjan. Huomaa, että x ei ole vasemmalta tai oikealta monogeeninen funktio, joten yllä olevat kehitelmät eivät anna suoraan funktion f hajotelmaa vasemmalta monogeenisiin polynomeihin. Tosin, jos merkitää funktion f potenssisarjan i-homogeenista termiä $f^{(i)}$, niin $0 = Df = D\sum f^{(i)} = \sum Df^{(i)}$. Df^i on selvästi $i-1$-homogeeninen, joten $Df^{(i)} = 0$ kaikille $i \geq 0$. Eli hajotelma homogeenisiin polynomeihin antaa myös funktion f hajotelman vasemmalta monogeenisiin homogeenisiin polynomeihin. Jotta potenssisarjakehitelmästä saataisiin enemmän irti, selvitämme nyt vasemmalta monogeenisten polynomien muodon. Sama voidaan tehdä tietysti oikealta monogeenisillekin.

Ennen kuin tarkastelemme monogeenisia polynomeja tarkemmin käsittelemme vielä Bergman-avaruuksien teorian kannalta olennaisen tuloksen. Todistamme aputuloksena erään normiepäyhtälön.

Apulause 6.12. *Olkoot $a, b \in Cl_n$. Tällöin pätee*

$$|ab| \leq 2^{n/2}|a||b|,$$

missä $|\cdot|$ on klassinen euklidinen normi.

Todistus: Laskemalla normi saamme

$$|ab|^2 = \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} (\sum_{B \subset \mathcal{P}_n} \pm a_B b_{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)})^2.$$

Sovellamme Cauchyn epäyhtälöä summaan, jolloin saamme

$$|ab|^2 \leq \sum_{A \subset \mathcal{P}_n} |a|^2 |b|^2.$$

Tästä lause seuraa välittömästi ottamalla neliöjuuri.

■

Lause 6.13. *Olkoot $p \geq 1$, Ω avoin rajoitettu joukko, $f \in L^p(\Omega)$ ja f vasemmalta monogeeninen*[26]*. Tällöin jokaiselle $x \in \Omega$ pisteittäinen evaluaatio on L^p-normin suhteen jatkuva lineaarinen kuvaus:*

$$|f(x)| \leq C_{x,\Omega,p,n} ||f||_p.$$

Todistus: Olkoon $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ ja $\phi(y) = 1$ jossain avoimessa pisteen x ympäristössä V. Tällöin Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$f(x) = (\phi \cdot f)(x) = \int_\Omega E(y - x)(D\phi) f dV.$$

[26] Tarkemmin sanottuna f on ekvivalenssiluokka ja se sisältää (välttämättä yksikäsitteisen) monogeenisen edustajan.

Sovellamme kolmioepäyhtälöä, lausetta 6.12 ja Hölderin epäyhtälöä ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq 2^{n/2} \int_\Omega |E(y-x)D\phi||f|dV \\ &\leq 2^{n/2}||E(y-x)D\phi(y)||_q||f||_p. \end{aligned}$$

Huomaa, että $D\phi = 0$, kun y on lähellä pistettä x, joten L^q-normi on hyvin rajoitettu.

■

Määrittelemme nyt Bergmanin avaruudet.

Määritelmä 6.14. *Olkoot $p \geq 1$ ja Ω avoin joukko. Bergmanin avaruus on*

$$A_p(\Omega) = L^p(\Omega) \cap \{f | f \text{ vasemmalta monogeeninen joukossa } \Omega\}.$$

Voimme osoittaa myös suoraan tarkentamalla edellisen lauseen funktion ϕ valintaa, että kompakteilla joukoilla $K \subset \Omega$ pätee

$$\sup_{x \in K} |f| \leq C_{K,p,n,\Omega}||f||_p.$$

Siis, jos $f_k \to f$ suppenee L_p-normissa ja funktiot f_k vasemmalta monogeenisia[27], niin ne suppenevat myös tasaisesti kompakteissa joukoissa. Siten myös f on vasemmalta monogeeninen, tai siis ekvivalenssiluokkana sisältää vasemmalta monogeenisen edustajan. Siten saamme korollaarin.

Seuraus 6.15. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin. Avaruuden $L^p(\Omega)$ aliavaruus $A_p(\Omega)$ on suljettu L^p-topologian suhteen.*

Näitä avaruuksia kutsutaan yleisesti ottaen Bergmanin avaruuksiksi. Jos tarkastelemme tapausta L^2, niin A_2 on suljettu aliavaruus ja siten sille on olemassa rajoitettu Hilbert-avaruuksien ortogonaalinen projektio $P : L^2 \mapsto A_2$. Tämä kuvaus on niin kutsuttu Bergmanin projektio. Emme tässä tarkastele tarkemmin sen ominaisuuksia. Bergmanin projektiosta ja avaruuksista on hieman teoriaa mm. kirjassa [7]. Onmahdollista myös määritellä Hardyn avaruudet H^p, kun $p > \frac{n-2}{n-1}$, mikä eroaa kompleksianalyysistä, jossa kaikki $p \geq 0$ ovat mahdollisia. Lisää Hardyn avaruuksista ja harmonisesta analyysistä mm. [13].

[27] Tarkemmin sanottuna tämä tarkoittaa, että ekvivalenssiluokkana funktiota ne sisältävät analyyttisen edustajan, joka on välttämättä yksikäsitteinen.

6.1 Monogeeniset polynomit ja Cauchy-Kowalevski-tulo

Monogeenisten polynomien esitys voidaan johtaa monella eri tavalla. Esimerkkejä eri lähestymistavoista on esitetty julkaisuissa [18, 14, 29, 21, 7]. Osa johtaa polynomit suoraan laskemalla ja käyttäen algebrallisia tarkasteluja. Tässä käytämme erilaista lähestymistapaa, joka perustuu Cauchyn-Kowalevskin (CK) teoreemaan. Edellä esitetyt tulokset pätevät kaikilla tarkastelemillamme Diracin operaattoreilla. Alla oleva tarkastelu on tosin vain tapauksessa $\mathbb{R}^{n+1} \mapsto Cl_n$, vaikka kompleksikertoiminen tapaus on suoraviivainen. Kvaterni-monogeenisten polynomien tapausta ei tässä tutkielmassa tarkastella, vaikka sen voisi tehdä samoin työkaluin. Fueterin historiallisessa artikkelissa tehdään tämä tarkastelu [12]. Olemme kehittäneet esityksen, mutta vastaava esitys löytyy esimerkiksi artikkelista [8].

Selkeyden kannalta esitämme CK-teoreeman vain ensimmäisen asteen tapauksessa, vaikka tulos pätee paljon yleisemminkin. Tulemme rajoittautumaan vasemmalta monogeeniseen tapaukseen, vaikka oikealta monogeenisille tulokset ovat täysin analogiset, ks. esimerkiksi [11].

Lause 6.16. *(CK-teoreema) Olkoot annettu $n, m \geq 1$ ja $U \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko. Olkoot lisäksi $\phi : U \mapsto \mathbb{R}^m$ ja*

$$G(t, x, u_1, \dots, u_m, \partial_1 u_1, \partial_1 u_2, \dots \partial_n u_n) : \mathbb{R}^{(1+n)(1+m)} \mapsto \mathbb{R}^m$$

reaalianalyyttisiä. Lyhennämme $(u_1, \dots, u_m) = U$ ja $(\partial_1 u_1, \partial_1 u_2, \dots \partial_n u_n) = JU$. Tällöin on olemassa avoin joukko $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$, jolle $\{(0, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | x \in U\} \subset V$, ja yksikäsitteinen reaalianalyyttinen $U = (u_1 \dots u_m) : V \mapsto \mathbb{R}^m$, joka ratkaisee Cauchyn ongelman

$$\begin{cases} \partial_t U = G(t, x, u, JU) \\ U(0, x) = \phi(x) \end{cases}.$$

Olkoot nyt $\phi : \mathbb{R}^n \mapsto Cl_n$ mielivaltainen Cliffordin arvoinen reaalianalyyttinen funktio. Ratkaisemalla $\partial_0 f$-termi Diracin yhtälöstä $Df = 0$ saamme $\partial_0 f = -\sum_{i=1}^n e_i \partial_i f$. Tulkitsemalla f vektoriarvoisena funktiona voimme nyt ratkaista ongelman $f(0+x) = \phi(x)$ ja f vasemmalta monogeeninen (tai oikealta). Tässä $x \in \mathbb{R}^n$ on samaistettu vektorin $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ kanssa. Kyseinen f on määritelty jossain aliavaruuden $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ympäristössä. Jotta saamme yksikäsitteisyyden, määrittelemme funktion ϕ CK-laajennuksen maksimaalisessa aliavarudessa $\mathbb{R}^n$ ympäristössä määritellyksi vasemmalta monogeeniseksi funktioksi f ja merkitsemme $f = \phi^*$. Yksinkertaiset esimerkit kompleksianalyysistä, kuten vaikka $\frac{1}{1+x^2}$ näyttävät, ettei laajennoksen tarvitse olla kokonainen.

Mainitsemme muutaman CK-laajennuksen ominaisuuden.

Apulause 6.17. *Olkoot $a \in Cl_n$ Cliffordin luku, $\phi, \psi : \mathbb{R}^n \mapsto Cl_n$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi. Oletamme lisäksi, että ϕ, ψ ovat (reaali-) analyyttisiä. Tällöin pätee:*

1. $(\phi a)^* = \phi^* a$
2. $(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*$
3. $D^\alpha \phi^* = (D^\alpha \phi)^*$.

Annetut yhtälöt pätevät kussakin niistä alueissa, joissa molemmat puolet ovat määriteltyjä. Monogeenisten funktioiden yksikäsitteisyyden nojalla yhtälön molemmat puolet voidaan aina laajentaa maksimaaliseen alueeseen, jossa jompikumpi puoli on määritelty.

Todistus: Kaikki tulokset seuraavat siitä, että yhtälöt pätevät, kun funktiot rajoitetaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ muodostamalle aliavaruudelle ja siitä että molemmat puolet ovat vasemmalta monogeenisia. Erityisesti molemmat ovat yksikäsitteisiä avaruuden $\mathbb{R}^n$ rajoittuman CK-laajennoksia.

■

Olkoot nyt f ja g vasemmalta kokonaisia. Tiedämme, että pisteittäinen tulo fg ei ole yleisesti ottaen vasemmalta kokonainen. Määrittelemme nyt bilineaarisen tulon, joka on vasemmalta monogeeninen.

Määritelmä 6.18. *Olkoot f, g vasemmalta kokonaisia funktioita. Määrittelemme Cauchy-Kowalevski-tulon (CK-tulon)*

$$f \odot g = (f|_{\mathbb{R}^n} \cdot g|_{\mathbb{R}^n})^*.$$

Siis CK-tulo on funktioiden pisteittäisen tulon CK-laajennos.

Huomautus: Määritelmä on annettu vasemmalta kokonaisille funktioille. Vastaava määritelmä on mahdollinen oikealta monogeenisille. Tällöin voimme tehdä eron näin määriteltyjen kahden tulon välillä määrittelemällä $\odot_L$ ja $\odot_R$ vasemmalta ja oikealta monogeenisten funktioiden CK-tuloiksi, vastaavasti. Molempien tulojen ominaisuudet ovat samat ja tarkastelemme vain tuloa $\odot_L = \odot$.

Tälle tulolle pätevät analogiset ominaisuudet kuin pisteittäiselle tulolle.

Apulause 6.19. *Olkoot f, g, h vasemmalta kokonaisia. Tällöin CK-tulolle pätee seuraavat ominaisuudet.*

1. *Assosiatiivisuus:* $(f \odot g) \odot h = f \odot (g \odot h)$
2. *Kommutatiivisuus, jos* $f|_{\mathbb{R}^n}, g|_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$: $f \odot g = g \odot f$
3. *Distributiivisuus:* $(f + h) \odot g = f \odot g + h \odot g$
4. *Identiteetti: Olkoon* $1 : \mathbb{R}^n \mapsto Cl_n$ *vakiokuvaus* $x \mapsto 1$. *Tällöin* $f \odot 1 = 1 \odot f = f$.
5. *Cliffordin luvulla* $a \in Cl_n$ *kertominen:* $f \odot (ga) = (f \odot g)a$.
6. *Leibnizin sääntö:* $\partial_{x_i}(f \odot g)(x_0 + x) = (\partial_{x_i} f) \odot g + (f \odot \partial_{x_i} g)$, *kun* $i = 1, \ldots, n$

Todistus: Kuten edellisessä apulauseessa, riittää osoittaa, että yhtälöt pätevät rajoitettaessa yhtälön puolet aliavaruuteen $\mathbb{R}^n$. Tämä puolestaan on kaavojen muotoilusta käytännössä selvä.

■

Määritellään $\phi_i(x) = x_i$. Funktio $z_i(x_0 + x) = x_i - x_0 e_i$ on vasemmalta monogeeninen ja $z_i|_{R^n} = \phi_i$, joten $\phi_i^* = z_i$, joka on jopa kokonainen funktio. Välittömästi saamme, että funktiot $P_{l_1,\ldots l_m}(x_0 + x) = z_{l_1} \odot \cdots \odot z_{l_m}$, missä $l_i = 1, \ldots n$, ovat vasemmalta monogeenisia jossain aliavaruuden $\mathbb{R}^n$ ympäristössä. Osoitamme nyt, että P on oikeastaan vasemmalta kokonainen funktio ja homogeeninen polynomi, jonka aste on m, ja että kaikki homogeeniset vasemmalta monogeeniset polynomit voidaan esittää näiden lineaarikombinaationa.

Käytämme multi-indeksinotaatiota alkioiden z_i potensseille

$$z^{\odot\alpha} = z_1^{\odot\alpha(1)} \ldots z_n^{\odot\alpha(n)}.$$

Tässä $z_i^{\odot m}$ on m-kertainen CK-tulo funktiosta z_i itsensä kanssa. Huomaa, että kommutatiivisuuden ja assosiatiivisuuden nojalla nämä määritelmät ovat mielekkäitä. Kommutatiivisuus ei päde yleisesti CK-tulolle, mutta koska funktiot z_i ovat reaalisia rajoitettuna aliavaruudelle $\mathbb{R}^n$ ja siten kommutoivat keskenään.

Lause 6.20. *Funktiot* $P_{l_1,\ldots l_m}(x_0+x) = z_{l_1} \odot \cdots \odot z_{l_m}$ *ovat kokonaisia vasemmalta monogeenisia (reaali) m-homogeenisia polynomeja ja kaikki vasemmalta monogeeniset homogeeniset polynomit voidaan esittää näiden polynomien ja vakioiden lineaarikombinaationa. Lisäksi* $\{z^{\odot\alpha} | \alpha \in \mathbb{N}^m\}$ *on m-homogeenisten monogeenisten polynomien lineaarisesti riippumaton kanta.*

Todistus: Merkitsemme $(l_1, \ldots l_m) = L$ ja tarkastelemaamme polynomia P_L. Voimme monogeenisuuden nojalla kehittää polynomin P_L jossain origon ympäristössä sarjaksi homogeenisia polynomeja: $\sum_{i=0}^{n} P_L^{(i)} = P_L$. Tässä, *a priori*, sarja suppenee vain jossain maksimaalisessa kuulassa, joka sisältyy polynomin P_L määrittelyalueeseen. Otetaan jokin kuula $\overline{B(0,r)} \subset \Omega$, missä Ω on polynomin P_L määrittelyalue, ja valitaan mielivaltainen piste $x \in \partial B(x,r)$. Homogeenisuuden nojalla kaikille reaalisille l,$|l| < 1$, $\sum_{i=0}^{n} l^i P_L^{(i)}(x) = P_L(lx) = l^m P_L(x)$. Kun tarkastelemme tätä potenssisarjana muuttujan l suhteen, niin huomaamme, että kaikille $i \neq m$, $P_L^{(i)}(x) = 0$ potenssisarjan yksikäsitteisyyden nojalla. Koska $x \in \partial B(x,r)$ oli mielivaltainen,$P_L = P_L^{(m)}$, mistä väitteen alkuosa seuraa. Nimittäin $P_L^{(m)}$ on kokonainen monogeeninen polynomi.

Olkoon F_m nyt mielivaltainen vasemmalta monogeeninen polynomi. Rajoitamme funktion F aliavaruudelle $\mathbb{R}^n$: $F_m|_{\mathbb{R}^n} = \sum_{|\alpha|=m} x^\alpha c_\alpha$. Nyt voimme soveltaa CK-laajennusta, CK-tulon määrielmää ja lemmoja 6.19 ja 6.17, mistä saamme

$$F_m = (\sum_{|\alpha|=m} x^\alpha c_\alpha)^* = \sum_{|\alpha|=m} (x^\alpha)^* c_\alpha = \sum_{|\alpha|=m} z^{\odot\alpha} c_\alpha.$$

Näin ollen väitteen jälkiosa on selvä, koska $P_L = z^{\odot\alpha}$, kun $\alpha(i)$ on indeksin i lukumäärä järjestetyssä joukossa L. Saamme siis, että $z^{\odot\alpha}$ muodostaa kannan, kunhan ne ovat lineaarisesti riippumattomia. Tämä taas seuraa rajoittamalla funktiot avaruuteen $\mathbb{R}^n$ ja käyttäen potenssien x^α lineaarisesti riippumattomuutta. Nimittäin olkoon

$$\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha = 0.$$

Derivoimalla operaattorilla D^α puolittain saamme $c\alpha = 0$, mistä lineaarisesti riippumattomuus seuraa.

■

Näille polynomeille on mahdollista antaa varsin yksinkertainen kaava. Monomien z_i, tai toiselta nimeltään hyperkompleksisten muuttujien, CK-tulot ovat oikeastaan vain pisteittäisten tulojen symmetrisaatiot. Määrittelemme tämän symmetrisaation, eli symmetrisen tulon.

Määritelmä 6.21. *Olkoot $a_1, \dots a_n \in Cl_n$. Alkioiden a_i symmetrinen tulo, tai tulon symmetrisaatio, on*

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} a_{\pi(1)} \cdots a_{\pi(n)}.$$

Selvästi symmetrinen tulo on vaihdannainen ja distributiivinen. Tulo ei tosin ole, yleisesti ottaen, assosiatiivinen ja siksi on oltava tarkka sulkeiden kanssa. Sille pätee tosin heikompi assosiatiivisuuden muoto: potenssiassosiatiivisuus. Otamme käyttöön merkinnän $a^{\otimes\alpha} = a_1^{\otimes\alpha(1)} \otimes \cdots a_n^{\otimes\alpha(n)}$, missä $a_1^{\otimes\alpha(1)}$ on lyhennys $a_1 \otimes \cdots \otimes a_1$, ja kertojia on $\alpha(1)$ kappaletta. Huomaa, että suoraan määritelmästä $a^{\otimes n} = a^n$. Huomaa myös, että merkinnässä on huomioitava epäassosiatiivisuus: $a_1^{\otimes\alpha(1)} \otimes \cdots \otimes a_n^{\otimes\alpha(n)} \neq (a_1^{\otimes\alpha(1)}) \otimes \cdots \otimes (a_n^{\otimes\alpha(n)})$. Sallimme eksponentiksi myös nollan: $a^{\otimes 0} = 1$.

Apulause 6.22. *Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Tällöin*

$$z^{\odot\alpha} = z^{\otimes\alpha}$$

ja lisäksi $z^{\otimes\alpha}$ on paravektoriarvoinen.

Todistus: Osoitamme väitteen induktiolla. Kun $|\alpha| = 1$, väite on selvä. Oletetaan, että väite on todistettu, kun $|\alpha| = m$ ja osoitamme väitteen, kun $|\alpha| = m + 1$. Osoitetaan ensin paravektoriarvoisuus. Merkitään yhtälön oikeaa puolta $F_\alpha(x)$. Suora, mutta hieman tekninen, lasku osoittaa, että

$$|\alpha| F_\alpha(x) = \sum_{i=1, \alpha(i) \neq 0}^{n} \alpha(i) F_{\alpha - \iota_i}(x) z_i = \sum_{i=1, \alpha(i) \neq 0}^{n} \alpha(i) z_i F_{\alpha - \iota_i}(x).$$

Induktio-oletuksen nojalla $F_\alpha(x) \in A + C_2$, eli sillä on paravektorikomponentin lisäksi enintään toisen asteen termejä. Toisaalta, $F_\alpha^* = F_\alpha$, eli $F_\alpha(x)$ on reversion kiintopiste. Näin ollen toisen asteen termit $C_2(F_\alpha) = \frac{1}{2}(F_\alpha - F_\alpha^*) = 0$. Siis olemme saaneet paravektoriarvoisuuden. Osoitamme seuraavaksi monogeenisuuden.

Huomaa, että $F_{\alpha - \iota_i}$ on sama kuin $z^{\odot(\alpha - \iota_i)}$ induktio-oletuksen nojalla ja tämä on monogeeninen. Siten derivoimalla saamne

$$
\begin{aligned}
DF_\alpha &= \frac{1}{m}\sum_{i=1,\alpha(i)\neq 0}^{n} D(F_{\alpha-\iota_i}(x)z_i) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1,\alpha(i)\neq 0}^{n} (DF_{\alpha-\iota_i}(x))z_i + \sum_{j=0}^{n} e_j F_{\alpha-\iota_i}(x)\partial_j z_i \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1,\alpha(i)\neq 0}^{n} F_{\alpha-\iota_i}(x)(-e_i) + e_i F_{\alpha-\iota_i}(x).
\end{aligned}
$$

Rajoittamalla yhtälö aliavaruuteen $x_0 = 0$ saamme $DF_\alpha|_{\mathbb{R}^n} = 0$, koska $F_\alpha|_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}$, kaikille α. Derivoidaan funktio DF_α muuttujan x_0 suhteen ja käytetään funktion $F_{\alpha-\iota_i}$ monogeenisuutta vasemmalta ja oikealta (funktio on paravektoriarvoinen, joten nämä ovat ekvivalentteja). Derivoimme edellisen yhtälön ja saamme

$$
\begin{aligned}
\partial_{x_0} DF_\alpha &= \frac{1}{m}\sum_{i=1,\alpha(i)\neq 0}^{n} \partial_{x_0} F_{\alpha-\iota_i}(x)(-e_i) + e_i \partial_{x_0} F_{\alpha-\iota_i}(x) \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=1,\alpha(i)\neq 0}^{n}\ \sum_{j=1,\alpha(j)\neq 0}^{n} e_j \partial_{x_j} F_{\alpha-\iota_i}(x) e_i - e_i \partial_{x_j} F_{\alpha-\iota_i}(x) e_j = 0.
\end{aligned}
$$

Voimme rajoittaa viimeisen yhtälön summauksen kaikille j, joille $\alpha(j) \neq 0$, koska muuten $\partial_{x_j} F_{\alpha-\iota_i}(x) = 0$. Näin ollen differentiaaliyhälöiden olemassaolo- ja yksikäsiteisyyslauseesta seuraa $DF_\alpha = 0$ koko avaruudessa $\mathbb{R}^n$, mikä osoittaa väitteen.

■

Näin saatuja polynomeja ja niiden lausekkeita kutsutaan Fueterin polynomeiksi. Fueter löysi kyseiset polynomit ensimmäisen kerran kvaternien analyysin yhteydessä. [12, 21, 8]

Voimme nyt uudelleen tarkastella potenssisarjakehitelmiä. Olkoot f vasemmalta monogeeninen kuulassa $B(0, r)$. Tällöin saamme potenssisarjakehitelmän

$$
f(x) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{|\alpha|=i} z^{\odot\alpha} c_\alpha,
$$

joka suppenee normaalisti kuulassa $B(0, r)$. Derivoimalla operaattorin ∂^α suhteen ja evaluoimalla pisteessä $x = 0$ saamme $\partial^\alpha f(0) = \alpha! c_\alpha$. Siis $c_\alpha = \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(0)$. Näin ollen saamme analogisen potenssisarjankehitelmän kuin yhden ja useamman kompleksimuuttujan tapauksessa.

Erityisesti kyseistä kaavaa voidaan soveltaa Cauchyn ytimeen

$$E(y-x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (z_x)^{(\odot\alpha)} \frac{(-1)^i}{\alpha!} \partial^\alpha E(y).$$

Tässä $(z_x)_i = x_i - x_0 e_i$. Termit $(z_y - z_x)^{(\odot\alpha)}$ ovat nyt potenssien z^n yleistyksiä, kun $n \geq 0$. Toisaalta termit $W_\alpha(y) = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha E(x)$ ovat negatiivisten potenssien z^{-n} yleistyksiä. Saamme myös välittömästi yleistetyn Cauchyn integraalikaavan.

Merkitään seuraavassa lauseessa multi-indeksille α operaattoria $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha(1)} \ldots\ \partial_{x_n}^{\alpha(n)}$.

Lause 6.23. *Olkoot f vasemmalta monogeeninen suljetun kuulan $\overline{B(x,r)}$ ympäristössä ja $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indeksi. Tällöin pätee Cauchyn kaava*

$$\partial^\alpha f(x) = \alpha! \int_{\partial B(x,r)} W_\alpha(w-x) d\sigma_y f(w).$$

Todistus: Sovellamme Cauchyn integraalikavaa ja saamme

$$f(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!}(z_y - z_x)^{\odot\alpha} \partial^\alpha f(x) = \int_{\partial B(x,r)} E(w-y) d\sigma_w f(w).$$

Voimme kehittää ytimen $E(w-y)$ normaalisti pisteen y suhteen pisteen x ympäristössä suppenevaksi potenssisarjaksi $E(w-y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (z_y - z_x)^\alpha W(w-x)$. Tämä suppenee tasaisesti, kun $y - x \leq r - \delta$ ja $w \in \partial B(x,r)$ mielivaltaiselle $\delta > 0$. Sijoittamalla tämä integraaliin ja vaihtamalla integroinnin ja summauksen järjestystä (suppenevuuden nojalla mahdollista) saamme

$$\int_{\partial B(x,r)} E(w-y) d\sigma_w f(w) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (z_y - z_x)^\alpha \int_{\partial B(x,r)} W_\alpha(w-x) d\sigma_w f(w).$$

Koska potenssisarjan kertoimet ovat yksikäsitteisiä, tulos seuraa.

■

Totesimme luvun aluksi, että Cliffordin derivoituvat funktiot eivät muodosta merkittävää funktioluokkaa. Tosin voimme määritellä nyt toisenlaisen derivoituvuuden käsitteen käyttäen hyperkompleksisia muuttujia z_i.

Lause 6.24. *Olkoon f Cliffordin arvoinen funktio. Merkitään $(h_z)_i = h_i - h_0 e_i$ ja $|h|^* = \sqrt{\sum_i |(h_z)_i|^2}$. Tällöin seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

1. *Funktio f on vasemmalta monogeeninen avoimessa joukossa Ω.*

2. *Funktio $f \in C^1$ ja jokaisessa pisteessä $p \in \Omega$ on f hyperkompleksisten muuttujien z_i suhteen derivoituva. Toisin sanoen on olemassa $a_i \in Cl_n$, $i = 1 \ldots n$, joille*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(p+h) - f(p) - \sum_{i=1}^{n} (h_z)_i a_i|}{|h|^*} = 0.$$

3. *Funktion $f \in C^2$ derivaatta on muuttujien z_i suhteen lineaarinen. Kaikille $p \in \Omega$ ja paravektoreille $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ pätee*

$$Jf(p)(h) = \sum_{i=1}^{n} (h_z)_i a_i,$$

missä $a_i \in Cl_n$ ja Jf on funktion f Jakobiaani.

Todistus: $1 \Leftrightarrow 3$: f on vasemmalta monogeeninen, joten se voidaan kehittää potenssisarjaksi ja erityisesti Taylorin kaavalla $f(p+x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_z)_i a_i + o(r)$. Ottamalla raja-arvo ja käyttäen derivaatan määritelmää väite on selvä. Toisaalta, jos oletamme derivaatan kaavan, niin $\partial_i f(p) = Jf(p)(e_i) = a_i$ ja $\partial_0 f(p) = Jf(p)(e_0) = \sum_{i=1}^{n} -e_i a_i$, joten yhtälö $Df = 0$, eli vasemmalta monogeenisuus seuraa.

$3 \Leftrightarrow 2$: Kolmas ehto on ekvivalenttia kaavan

$$f(p+x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_z)_i a_i + o(r)$$

kanssa, joka on ekvivalenttia kohdan kaksi kanssa.

$\blacksquare$

Toisaalta voimme käyttää myös Weierstrassin lähestymistapaa, kunhan käytämme oikeita polynomeja kantana.

Lause 6.25. *Olkoon f Cliffordin algebra -arvoinen funktio ja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin joukko. Seuraavat ehdot ovat ekvivalentteja:*

1. *Funktio f on vasemmalta monogeeninen alueessa Ω*

2. *Funktiolla f on kehitelmä vasemmalta monogeenisten homogeenisten polynomien kehitelmänä jokaisen pisteen $p \in \Omega$ ympäristössä. Toisin sanoen $\forall p \in \Omega$ ja $x \in B(0,r)$, kun $B(p,r) \subset \Omega$, pätee*

$$f(p+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} z^{\odot\alpha}(x) c_\alpha,$$

missä summa suppenee normaalisti, kun $x \in B(0,r)$.

Todistus: Ensimmäinen implikoi toisen, koska voimme kehittää funktion f potenssisarjaksi. Toisaalta, jos f on vasemmalta monogeenisten polynomien normaalisti suppeneva summa, niin f on itsessään Weierstrassin lauseen 6.11 nojalla vasemmalta monogeeninen.

■

Huomautus: Kaksi edellistä tulosta yleistävät Cliffordin analyysiin kompleksianalyysin lähestymistavat potenssisarjojen ja derivoituvuuden kautta. Näin ollen voimme todeta, että myös Cliffordin analyysissä C-R yhtälöiden (Diracin operaattorin), Weierstrassin (potenssisarjojen) ja Cauchyn (dervioituvuuden) lähestymistavat, kun ne määritellään oikein, ovat keskenään ekvivalentteja.

7 Meromorfifunktioista

Kompleksianalyysissä tiedämme, että analyyttisellä funktiolla voi olla enintään eristettyjä nollakohtia ja napoja. Näin meromorfifunktioita on helppo analysoida ja navat sekä nollakohdat voidaan helposti karakterisoida. Cliffordin analyysissä tilanne ei ole niin yksinkertainen. Tarkastellaan esimerkiksi funktiota $f(x) = z_1$. Funktio f on vasemmalta monogeeninen, mutta sen nolla-avaruus on jopa $n-1$-ulotteinen aliavaruus avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Toisaalta funktiolla $f(x) = z_1 + z_2 e_1 + z_3 e_1 e_2 + \cdots + z_n(e_1 \cdots e_{n-1})$ on ainoastaan origossa nollakohta.

Voimme tosin osoittaa, että $n-1$ on suurin mahdollinen nolla-avaruuden dimensio. Tätä tulosta ei kirjoittaja ole nähnyt kirjallisuudessa ja todistus käyttää yleistettyä CK-laajennusta.

Lause 7.1. *Olkoon f vasemmalta monogeeninen jossain avoimessa yhtenäisessä joukossa $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Jos on olemassa n-ulotteinen analyyttinen sileä joukon Ω alimonisto M[28], jolla $f|M = 0$, niin $f = 0$ koko joukossa Ω.*

[28] Eli karttakuvaukset voidaan valita analyyttisiksi.

Todistus: Valitaan mielivaltainen piste $p \in M$. Määritellään sileä analyyttinen diffeomorfismi $\psi : U \mapsto \Omega$, missä $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ on avoin yhtenäinen origon ympäristö, jolle $\psi(0,t) \in M$, kun $(0,t) \in U$ ja $t \in \mathbb{R}^n$. Oletamme myös, että $\partial_s \psi(s,t)|_{(0,t)} = \nu(\psi(0,t))$, missä $\nu(\psi(0,t))$ on normaali monistolle M pisteessä $\psi(0,t)$.

Määritellään μ_{ix} pisteen $x \in \psi(U)$ tangenttiavaruuden (moniston Ω suhteen) kanta. Olkoon $h \in C^\infty(\Omega)$ mielivaltainen. Tällöin $\mu_{0\psi(s,t)}(h) = \partial_s h \circ \psi(s,t)|_{(s,t)}$ ja $\mu_{i\psi(s,t)}(h) = \partial_{t_i} h \circ \psi(s,t)|_{(s,t)}$. Näin saamme lokaalisti määritellyt sileät vektorikentät μ_i. Esitetään ∂_{x_i} näiden vektoreiden lineaarikombinaationa: $\partial_{x_i} = \sum_{j=0}^n a_{ij}\mu_j$. Olkoon g mielivaltainen vasemmalta monogeeninen funktio, jolle $g|M = 0$. Tällöin saammeuuden kantamme suhteen

$$0 = Dg = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} e_i a_{ij}\mu_j(g).$$

Siirrämme μ_0-termit yhtälön vasemmalle puolelle ja jaamme tämän yhtälön kertoimella, joka $\neq 0$, koska ei ole, että $a_{i0} = 0$ kaikille i. Tämä olisi ristiriidassa sen kanssa, että ϕ on diffeomorfismi. Näin ollen saamme yhtälön muotoon: $\mu_0 g = H_t g$, missä H_t on differentiaalioperaattori, joka riippuu vain derivaatioista μ_i, kun $i = 1 \ldots n$. Toisin sanoen $\partial_s g \circ \psi = \psi^{-1*} H_t g \circ \psi$, missä ψ^{-1*} on käänteiskuvauksen takaisinveto. Selvästi $\psi^{-1*}H_t$ riippuu vain derivaatioista ∂_{t_i}. Näin ollen voimme todeta, että $g \circ \psi$ on yksikäsitteinen analyyttinen osittaisdifferentiaaliyhtälön $\partial_s g \circ \psi = \psi^{-1*} H_t g \circ \psi$ ratkaisu reunaehdolla $g \circ \psi(0,t) = 0$. Tällöin $g = 0$, koska se on analyyttinen ratkaisu. Koska myös f toteuttaa ehdot, niin $f = 0$.

■

Huomautus: Todistuksen yksityiskohtia hiomalla voimme todistaa yleisemmän CK-laajennuksen olemassaolon, kun funktio on rajoitettu n-ulotteiselle analyyttiselle alimonistolle.

Toinen eroavaisuus on, että kaikki Cliffordin luvut eivät ole kääntyviä, eikä monogeeniselle funktiolle f kuvaus $g(x) = 1/f(x)$, vaikka olisikin olemassa, ole välttämättä monogeeninen. Siis emme voi määritellä meromorfifunktioita monogeenisten funktioiden osamäärinä. Sen lisäksi funktio $x \mapsto \frac{1}{z_1}$, kun se on määritelty, on vasemmalta monogeeninen. Mutta tällä funktiolla on singulariteeteista koostuva hypertaso. Määrittelemme meromorfifunktiot siten, että näitä ongelmia ei tapahdu ja singulariteetit ovat eristettyjä.

Tarkastelemme nyt vasemmalta monogeenisia funktioita jossain joukossa $\Omega \setminus \{a\}$, missä $a \in \Omega$. Tällainen funktio voidaan kehittää Laurentin sarjaksi positiivisten potenssien $z^{\odot\alpha}$ ja negatiivisten "potenssien" W_α summaksi, joka suppenee normaalisti annulaarisessa alueessa.

Lause 7.2. *Olkoot Ω avoin joukko, $a \in \Omega$ ja f vasemmalta monogeeninen joukossa $\Omega \setminus \{a\}$. Olkoot lisäksi $S = B(a, R) \setminus B(a, r)$, kun $R > r > 0$. Tällöin kaikille $x \in S$, pätee*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (x_z - a_z)^{\odot\alpha} c_\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} W_\alpha(x - a) d_\alpha$$

ja kyseinen sarja suppenee normaalisti joukossa S.

Todistus: Muistutamme mieleen, että Cauchyn ydin voidaan kehittää potenssisarjaksi

$$E(y - x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (x_z - a_z)^{\odot\alpha} W(y - a),$$

jos $|x - a| < |y - a|$. Samoin, jos $|x - a| > |y - a|$, saamme

$$E(y - x) = -E(x - y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (y_z - a_z)^{\odot\alpha} W(x - a).$$

Cauchyn integraalikaavasta ja Cauchyn integraaliytimen potenssisarjasta seuraa

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\partial B(a,R)} E(y-x)d\sigma f(y) - \int_{\partial B(a,r)} E(y-x)d\sigma_y f(y) \\
&= \int_{\partial B(a,R)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (x_z - a_z)^{\odot\alpha} W(y-a)d\sigma_y f(y) \\
&\quad - \int_{\partial B(a,r)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} W(x-a)(y_z - a_z)^{\odot\alpha} d\sigma_y f(y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} (x_z - a_z)^{\odot\alpha} \int_{\partial B(a,R)} W(y-a)d\sigma_y f(y) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} W_\alpha(x-a) \int_{\partial B(a,r)} (y_z - a)^{\odot\alpha} d\sigma f(y).
\end{aligned}
$$

■

Tässä sarjakehitelmässä W_α-termien sarja on funktion f niin kutsuttu *pääosa*.

Jos f on vasemmalta monogeeninen jossain $\Omega \setminus \{a\}$, kun $a \in \Omega$ ja Ω on avoin joukko, niin pisteittä a sanotaan funktion f singulariteetiksi. Voimme luokitella singulariteetit kolmenlaisiksi.

Määritelmä 7.3. *Olkoot f vasemmalta monogeeninen jossain avoimessa joukossa Ω ja a sen singulariteetti. Eli on olemassa jokin avoin Ω_a, jolla $a \in \Omega_a$ ja $\Omega_a \setminus \{a\} \subset \Omega$. Sanomme*

1. *Singulariteetti a on poistettavissa, jos f voidaan jatkaa monogeenisesti koko joukkoon $\Omega \cup \{a\}$. Yhtäpitävää väitteen kanssa on, että funktion f sarjakehitelmän pääosa häviää.*

2. *Singulariteetin a aste on pienin N, jolle $d_\alpha = 0$ kaikilla $|\alpha| \geq N$, missä d_α on Laurentin sarjan pääosan α-termi. Sanomme, että singulariteetin a aste on ääretön, jos tällaista N ei ole olemassa.*

3. *Singulariteetti a on olennainen, jos sen aste on ääretön.*

4. *Singulariteetti a on napa, jos sen aste on äärellinen.*

Voimme puhua myös nollakohdan asteesta, joka määritellään kuten navan aste, paitsi että käytetään potenssisarjan termejä Laurentin sarjan pääosan sijaan. Olemme nyt valmiita määrittelemään meromorfiset funktiot.

Määritelmä 7.4. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ avoin joukko ja $D \subset \Omega$ osajoukko ilman kasautumispisteitä (ja siten väistämättä numeroituva). Joukossa $\Omega \setminus D$ vasemmalta monogeenista funktiota f sanotaan meromorfiseksi, jos kaikki $d \in D$ ovat funktion f napoja.*

Tulemme palaamaan meromorfifunktioihin vielä osoittamalla Mittag-Lefflerin lauseen yleistyksen. Ensin tosin tarvitsemme eräänlaisia approksimaatiotuloksia.

8 Rungen lause

Kompleksianalyysissä kolme tulosta on läheisessä suhteessa toistensa kanssa: Rungen lause, Mittag-Lefflerin lause ja yhtälön $Df = g$ ratkaisu. Tämä suhde on selvä yhden kompleksimuuttujan tapauksessa, jossa Rungen lause implikoi Mittag-Lefflerin lauseen ja yhtälön $Df = g$ ratkaisun. Useamman kompleksimuuttujan tapauksessa tilanne on huomattavasti monimutkaisempi, emmekä puutu siihen tässä. Cliffordin analyysin tapauksessa tilanne on tosin hyvin analoginen.

Lause 8.1. *Olkoot $\phi \in C_0^1$ eli jatkuvasi derivoituva ja kompaktikantajainen Cliffordin arvoinen funktio. Olkoon*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} E(y-x)\phi(y)dV = T\phi,$$

missä T oli Théodoresco-muunnos.

Tällöin $\phi = Du$

Huomautus: Huomaa, että integraali on $-E * \phi$.

Todistus: Lemman 5.8 johdosta ja distribuutioiden laskusääntöjen takia:

$$Du = DE * \phi = \delta * \phi = \phi.$$

Koska $\phi \in C^\infty$, niin $-E * \phi = u \in C^\infty$, joten derivointi on mielekästä.

■

Vastaavasti yhtälön $D_\alpha u = \phi$ ratkaisu on $T_\alpha \phi$. Edelleen riittää, että ϕ on jatkuvasti derivoituva ja kompaktikantajainen.
Olemme siis ratkaisseet nk. D-ongelman kompaktikantajaisille funktioille. Huomaa, että meidän piti olettaa kompaktikantajaisuus, koska muuten integraali ei välttämättä suppenisi. Voimme nyt osoittaa Rungen lauseen. Ennen sitä tosin toteamme yksinkertaisen asian funktionaalianalyysistä, joka on seuraus Hahn-Banachin lauseesta.

Merkitsemme joukossa Ω vasemmalta monogeenisia funktioita $A(\Omega)$. Jos K on kompakti joukko, niin $A(K)$ on joukon K ympäristössä vasemmalta monogeenisten funktioiden joukko. Määrittelemme myös avaruuden $C(K)$ jatkuvien funktioiden avaruudeksi, joiden määrittelyalue on K. Tämä avaruus varustetaan $||\cdot||_\infty$-normin määräämällä topologialla (tasaisen suppenemisen topologia), jolloin avaruudesta $C(K)$ tulee Banachin avaruus.

Olkoot $K \subset \Omega$ ja $f \in C(K)$ Cliffordin arvoinen funktio ja $H \subset C(K)$ lineaarinen aliavaruus. Hahn-Banachin lauseesta seuraa, että funktio $f \in \overline{H}$, missä sulkeuma on avaruudessa $C(K)$, jos ja vain jos kaikille avaruuden $C(K)$ Clifford-arvoisille reaalilineaarisille funktionaaleille Λ, joille $\Lambda(H) = 0$, eli $\Lambda \perp H$, myös $\Lambda(f) = 0$. Huomaa, että tässä on kyse Cliffordin arvoisista funktioista ja funkionaaleista, mutta Hahn-Banachin lauseen yleistys on selvä, koska väite pätee komponenteittain. Emme esitä tämän tuloksen yleistystä tässä. Tarkempi analyysi on esimerkiksi [7, §1]. Kaikki avaruuden $C(K)$ lineaariset funktionaalit saadaan jollain Cliffordin arvoisella mitalla $\mu = \sum_{A \subset \mathcal{P}} \mu_A e_A$, mikä on seurausta Rieszin esityslauseesta.

Lause 8.2. *(Rungen lause) Olkoot Ω avoin joukko ja $K \subset \Omega$ kompakti osajoukko. Oletetaan, että joukolla $\Omega \setminus K$ ei ole relatiivisesti kompakteja osajoukkoja joukon Ω relatiivitopologian suhteen. Tällöin avaruuden $A(K)$ funktioita voidaan approksimoida joukossa K tasaisesti avaruuden $A(\Omega)$ funktioilla mielivaltaisen hyvin, eli $A(\Omega)$ on tiheä avaruudessa $A(K)$ (avaruuden $C(K)$ topologiassa).*

Todistus: Todistusta edeltäneiden havaintojen perusteella riittää osoittaa, että jokaiselle Cliffordin arvoiselle mitalle μ, joka on joukossa K kannatettu ja jolle $\mu \perp A(\Omega)$, niin $\mu \perp A(K)$. Määrittelemme kuvauksen $\phi(x) = \int E(y-x) d\mu_y$. Funktio ϕ on hyvin määritelty joukossa $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$. Jos $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega$, niin $E(y-x)$ on vasemmalta monogeeninen joukossa Ω ja $\phi(x) = 0$ on siellä, koska $\mu \perp A(\Omega)$. Toisaalta, jos $|x| > \max_{k \in K} |k|$, niin voimme kehittää ytimen $E(y-x)$ potenssisarjaksi: $E(y-x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} W(x)(y_z)^{\odot \alpha}$. Näin ollen $\phi(x) = 0$ tässäkin tapauksessa, koska

$(y_z)^{\odot\alpha}$ on vasemmalta monogeeninen. Siis $\phi = 0$ koko joukon K komplementissa oletuksien (erityisesti, joukon K^c komponentit sisältyvät joukon Ω komponentteihin tai ovat rajoittamattomia) ja monogeenisten funktioiden yksikäsitteisyyden nojalla.

Jos nyt $f \in A(K)$, niin voimme valita $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, jolle $\psi = 1$ jossain joukon K ympäristössä. Sovellamme Borel-Pompeiun kaavaa funktiolle ψf ja Fubinin lausetta, joka on sallittua, koska integraalit suppenevat itseisesti. Siispä saamme

$$\begin{aligned}\int f(x)d\mu_x &= \int\int_{\mathbb{R}^{n+1}} (D\psi)f(y)dV_y E(y-x)d\mu_x \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (D\psi)(y)f(y)dV_y \int E(y-x)d\mu_x = 0.\end{aligned}$$

■

Voimme nyt osoittaa Mittag-Lefflerin lauseen. Kyseisellä lauseen on eri muotoiluja, mutta esitämme tarkoitusperiemme kannalta havainnollisimman.

Lause 8.3. *(Mittag-Lefflerin lause) Olkoot Ω avoin joukko ja $D \subset \Omega$ joukko ilman kasautumispisteitä. Voimme numeroida joukon D alkiot $d_i \in D$, missä $i \in \mathbb{N}$ tai, jos D äärellinen, $i = 1 \dots card(D)$. Olkoon jokaista d_i kohden määritelty $f_{d_i} = \sum_{i=1}^{M_i} \sum_{|\alpha|=i} W_\alpha(x-a)h_{i\alpha}$, missä $h_{i\alpha}$ Cliffordin lukuja ja $M_i \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa vasemmalta meromorfinen f joukossa Ω, jonka navat ovat joukossa D ja jolle $f_{d_i} - f$ on vasemmalta monogeeninen pisteen d_i ympäristössä. Toisin sanoen funktion f pääosa pisteen d_i ympäristössä on f_{d_i}.*

Todistus: Haluaisimme määritellä $f = \sum_i f_{d_i}$, mutta kyseinen summa voi hajaantua. Muokkaamme summaa niin, että sarja suppenee. Olkoot K_i joukon Ω kompakti tyhjennys ja $d_i \notin K_i$. Siis $\cup K_i = \Omega$ ja $K_i \subset \text{int}(K_j)$, kun $i > j$. Lisäksi jokainen kompakti joukko $K \subset \Omega$ sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon K_i ja voimme olettaa, että K_i toteuttaa Rungen lauseen ehdot.

Funktio f_{d_i} on vasemmalta monogeeninen joukon K_i ympäristössä. Sitä voidaan siis approksimoida tasaisesti monogeenisilla funktioilla joukossa K_i. Olkoot u_i vasemmalta monogeeninen, jolle $|u_i - f_{d_i}| \leq \frac{1}{2^i}$ joukossa K_i. Määrittelemme nyt summan $f = \sum_i (f_{d_i} - u_i)$. Ehdoista seuraa, että sarja on dominoitu jokaisella kompaktilla osajoukolla (asymptoottisesti) geometrisella sarjalla ja siten f on vasemmalta meromorfinen joukossa Ω. Lisäksi funktion f navat ovat joukossa D ja niillä on annetut pääosat.

■

Voimme samanlaisilla tekniikoilla osoittaa, että mielivaltaisella Ω ja joukossa Ω jatkuvasti derivoituvalla ja Cliffordin arvoisella g voimme ratkaista yhtälön $Df = g$.

Lause 8.4. *Olkoot Ω avoin joukko ja $g \in C^1(\Omega)$ ja Cliffordin arvoinen funktio. Tällöin on olemassa C^1 funktio f, jolla $Df = g$.*

Todistus: Olkoot K_i joukon Ω kompakti tyhjennys ja $d_i \notin K_i$. Siis $\cup K_i = \Omega$, $K_i \subset \mathrm{int}(K_j)$, kun $i > j$. Lisäksi jokainen kompakti joukko $K \subset \Omega$ sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon K_i ja K toteuttaa Rungen lauseen ehdot. Tällainen on selvästi olemassa. Määritellään avoimet joukot $\Omega_0 = \mathrm{Int}(K_1)$ ja $\Omega_i = K_{i+1} \setminus K_{i-1}$. Selvästi Ω_i, $i \in \mathbb{N}$, muodostaa joukon Ω avoimen peitteen.

Määritellään funkiot $\phi_i \in C_0^\infty(\Omega)$ niin, että muodostuu yksikön ositus, jossa $\mathrm{supp}(\phi_i) \subset \Omega_i$. Erityisesti $\sum_i \phi_i = 1$. Oletamme lisäksi, että yksikön ositus ϕ_i on lokaalisti äärellinen, eli jokaiselle $p \in \Omega$ on olemassa ympäristö, jossa vain äärellinen määrä funktioista ϕ_i on erisuuria kuin nolla.

Voimme teoreeman 8.1 perusteella ratkaista D-yhtälön funktioille $g\phi_i = g_i$. Saamme funktiot $Df_i = g_i$. Jälleen haluaisimme määritellä $f = \sum_i f_i$, mutta ongelmana on, että summa ei yleisesti suppene. Tehdään samalla lailla kuin Mittag-Lefflerin lauseessa. Huomaa, että $\phi_i = 0$ joukossa K_{i-2}, kun $i \geq 2$. Siten voimme löytää Rungen lauseen nojalla funktiot u_i, $i \geq 2$ siten, että $|f_i - u_i| \leq 2^{-i}$ joukossa K_{i-2}, kun $i \geq 2$. Määritellään funktio $f = f_0 + f_1 + \sum_{i=2}^\infty (f_i - u_i)$. Selvästi tämä sarja suppenee hyvin ja koska muutimme summaa vain monogeenisilla termeillä: $Df = Df_0 + Df_1 + \sum_{i=2}^\infty Df_i = g$.

■

9 Reuna-arvo-ongelmista

Tarkastelemme lyhyesti sitä, miten Cliffordin analyysiä voi käyttää reuna-arvo-ongelmien tarkasteluun. Keskeisessä asemassa on Plemelj–Sokhotski-teoreema. Tämä koskee potentiaaleja ja nk. hyppyrelaatioita.

Lause 9.1. *(Plemelj-Sokholtski) Olkoot* Ω *sileäreunainen ja* $f \in C^{(0,\alpha)}(\partial\Omega)$*, eli Hölder-jatkuva. Tällöin*

$$Kf(x) = \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma f(y)$$

on vasemmalta monogeeninen alueessa Ω *ja sen komplementin sisäosassa. Jos* $x \in \partial\Omega$*,* $y_n \in \Omega$ *ja* $y_n \to x$ *ei-tangentiaalisesti, niin*

$$\lim_{y_n \to x} Kf(y) = \frac{1}{2}f(x) + Sf(x).$$

Jos taas $y_n \notin \Omega \cup \partial\Omega$*, niin*

$$\lim_{y_n \to x} Kf(y) = -\frac{1}{2}f(x) + Sf(x).$$

Huomautus: Jos $\nu(x)$ on pinnan (yksikkö-) normaali pisteessä x. Jos $y_n \to x$ ei-tangentiaalisesti, niin se tarkoittaa, että on olemassa $C > 0$, jolle $|(y_n - x) \cdot \nu(x)|/|y_n - x| > C$.

Todistamme ensin keskeisen apulauseen.

Apulause 9.2. *Olkoon* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *sileäreunainen rajoitettu avoin joukko. Tällöin*

$$\int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma_y = \begin{cases} 0, & x \notin \Omega \cup \partial\Omega \\ 1, & x \in \Omega \\ \frac{1}{2}, & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

missä viimeisessä tapauksessa integraali on pääarvointegraali.

Todistus: Ensimmäiset kaksi tapausta ovat selviä. Ensimmäisessä ydin on monogeeninen joukossa Ω ja toisessa kyse on Cauchyn integraalikaavasta funktiolle $f(x) = 1$. Todistamme siis viimeisen tapauksen. Emme tosin mene yksityiskohtiin tässä todistuksessa. Valitaan mielivaltainen piste $x \in \partial\Omega$. Valitaan jokin pieni $\epsilon > 0$. Määritellään edelleen $\Gamma = \partial\Omega \setminus B(x,\epsilon)$. Olkoon $\Gamma_\epsilon = \partial B(x,\epsilon) \cap \Omega$. Cauchyn integraalikaavan nojalla, sovellettuna joukkoon $\Omega \setminus B(x,\epsilon)$, saamme

$$\int_\Gamma E(y-x)d\sigma - \int_{\Gamma_\epsilon} E(y-x)d\sigma = 0.$$

Toisaalta

$$\int_{\Gamma_\epsilon} E(y-x)d\sigma = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{1}{\omega_n|y-x|^n}dA = |\Gamma_\epsilon|\frac{1}{|\partial B(x,\epsilon)|},$$

missä $|\cdot|$ on pinta-alamitta. Koska Ω oli sileäreunainen, viimeinen raja-arvo lähestyy lukua $\frac{1}{2}$, kun $\epsilon \to 0$, koska Γ_ϵ lähenee puoliympyrää. Huomaa, että sileä reuna on lokaalisti taso. Tarkempi analyysi on kovin tekninen eikä lisää tuloksen ymmärrystä.

$\blacksquare$

Todistetaan Plemelj-Sokholtski teoreema.

Todistus: Olkoon $x \in \partial\Omega$. Todistamme lauseen pelkästään sisäosan tapauksessa, koska ulkopuolen tapauksessa todistus on täysin sama. Siis olkoon $x_n \to x$ mielivaltainen jono, ja oletetaan, että suppeneminen tapahtuu ei-tangentiaali sesti. Edellisen apulauseen nojalla

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma f(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} E(y-x)d\sigma(f(y)-f(x)) + \frac{1}{2}f(x). \end{aligned}$$

Koska $|f(y)-f(x)| \leq C|y-x|^\alpha$, integraali on olemassa klassisessa mielessä. Tulos seuraa, jos voimme osoittaa, että

$$\begin{aligned} Kf(x_n) - Sf(x) - \frac{1}{2}f(x) &= \int_{\partial\Omega} (E(y-x) - E(y-x_n))d\sigma(f(y)-f(x)) \\ &= \int_{\partial\Omega} (E(y-x) - E(y-x_n))\nu(x)(f(y)-f(x))dS \end{aligned}$$

suppenee nollaan. Integraaliydin suppenee pisteittäin nollaan, joten väite seuraa Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta, jos voimme osoittaa, että integrandi on tasaisesti rajoitettu jollain L^1-funktiolla (on tasaisesti integroituva).

Osoitamme tämän, mistä väite seuraa. Ensinnäkin on olemassa $M > 0$, jolle

$$|E(y-x_k))\nu(x)(f(y)-f(x))| \leq \frac{M|y-x|^\alpha}{\omega_n|y-x_k|^n} \leq \frac{M}{\omega_n|y-x|^{n-\alpha}} \frac{|y-x|^n}{|y-x_k|^n}.$$

Soveltamalla sinilausetta saamme, että

$$\frac{|y-x|^n}{|y-x_k|^n} = \frac{\sin(\angle(y-x_k, x-x_k))^n}{\sin(\angle(y-x, x-x_k))^n}.$$

Riittää arvioida alaspäin kulmaa $\angle(y-x, x-x_k)$, kun $|y-x|$ on pieni ja $|x-x_k|$ on pieni. Yksinkertainen geometrinen tarkastelu osoittaa, että $\angle(y-x, x-x_k) + \angle(x-x_k, -\nu(x)) \geq \angle(y-x, -\nu(x))$. Kun valitaan y lähelle pistettä x, niin on olemassa (ei-tangentiaalisuuden nojalla) θ_1, jolle $0 \leq \theta_1 < \pi/2$, jolle $\angle(x-x_k, -\nu(x)) < \theta_1$. Valitsemme θ_2, niin että $\theta_1 < \theta_2 \leq \pi/2$ ja, kun $|y-x|$ on riittävän pieni, $\angle(y-x, -\nu(x)) \geq \theta_2$. Tämä on mahdollista reunan sileyden nojalla. Nyt

$$\angle(y-x, x-x_k) > \theta_2 - \theta_1 > 0.$$

Tämä estimaatti pätee, kun $|y-x| < \epsilon$ ja $k > N$ valituille $\epsilon > 0$ ja $N \in \mathbb{N}$. Siispä on olemassa vakio $C > 0$ ja $k \in \mathbb{N}$, jolle

$$|E(y-x_k))\nu(x)(f(y)-f(x))| \leq \frac{C}{|y-x|^{n-\alpha}},$$

mikä on L^1-integroituva, ja siten väite seuraa.

■

Edellinen tulos pätee täysin samalla todistuksella, kun E korvataan ytimellä E_α. Tarkastelemme nyt operaattorien D ja D_α reuna-arvo-ongelmia. Koska aikaharmoniset Maxwellin yhtälöt muotoiltiin operaattorin D_α avulla, niin tämä ratkaisee täysin myös aikaharmonisen Maxwellin yhtälön reuna-arvo-ongelmat. Yleisesti tarkastellaan kahdenlaisia ongelmia: Dirichlet- ja Neumann-ongelmia. Me tarkastelemme Dirichlet-ongelmia. Määrittelemme ongelmat.

Ongelma 9.3. *Olkoon Ω sileäreunainen alue, $0 < \alpha < 1$ ja $f \in C^{(0,\alpha)}(\partial\Omega)$ ja $g \in C^1(\Omega)$. Etsi funktio u, jolla on ei-tangentiaaliset reuna-arvot u_+ jokaisessa reunapisteessä ja jolle*

$$\begin{cases} Du(x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_+(x) = f \end{cases}.$$

Toisaalta voimme tapauksessa $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{H}_c$ tarkastella seuraavaa Dirichlet-ongelmaa.

Ongelma 9.4. *Olkoon Ω sileäreunainen alue, $0 < \alpha \leq 1$, $f \in C^{(0,\alpha)}(\partial\Omega)$ ja $g \in C(\Omega)$. Etsi funktio u, jolla on ei-tangentiaaliset reuna-arvot u_+ jokaisessa reunapisteessä ja jolle*

$$\begin{cases} D_\alpha u(x) = g(x), & x \in \Omega \\ u_+(x) = f \end{cases}.$$

Vähennämme puolittain yhtälöistä funktion Tg. Koska $DT = \delta$, saamme ekvivalentin homogeenisen Dirichlet-ongelman

$$\begin{cases} Du(x) = 0 & x \in \Omega \\ u_+(x) = f - Tg & \end{cases}.$$

Huomaa, että Tg on oletettava Hölder-jatkuvaksi reunalla. Tämän pystyy saamaan siten, että $g \in L^p(\Omega)$, kun $p > n + 1$. Tämä on kohtuullisen yksinkertainen estimaatti, jonka sivuutamme tässä, ks. esimerkiksi [14]. Karakterisoimme nyt homogeenisen Dirichlet ongelman ratkaistavuuden ehdon.

Lause 9.5. *Olkoot Ω sileäreunainen rajoitettu alue ja g Hölder-jatkuva funktio alueen reunalla. Tällöin on olemassa u, joka on jatkuva reunalle asti, $u|_{\partial\Omega} = g$ ja $Du = 0$ alueessa Ω, jos ja vain jos $(\frac{1}{2}I + S)g = g$*

Todistus: Oletetaan, että tällainen ratkaisu on olemassa. Tällöin $u = Kg$, eli funktion g Cauchyn integraali. Tällöin soveltamalla Plemelj-Sokholtskin teoreemaa funktioon g, niin $g = \frac{1}{2}g + Sg$, mikä osoittaa ekvivalenssin yhden suunnan. Toisaalta, jos määrittelemme funktion $u = Kg$, niin sillä on ei-tangentiaalisesti annetut reuna-arvot saman teoreeman mukaan. Toisaalta reuna-arvot ovat jatkuvia ja funktion u komponentit ovat harmonisia. Lisäksi $u_A|_{\partial\Omega} = g_A$, mistä seuraa, että u_A on funktion g_A yksikäsitteinen (harmoninen) laajennus alueen sisälle ja siten suppeneminen pätee myös ilman ei-tangentiaalisuutta,ks. ' yksityiskohtia esim. [11].

■

Vastaava tulos pätee operaattorin D_α tapauksessa, käytännössä samalla todistuksella.

Lause 9.6. *Olkoot Ω sileäreunainen rajoitettu alue ja g Hölder-jatkuva funktio alueen reunalla. Tällöin on olemassa u, joka on jatkuva reunalle asti, $u|_{\partial\Omega} = g$ ja $D_\alpha u = 0$ alueessa Ω, jos ja vain jos $(\frac{1}{2}I + S_\alpha)g = g$.*

Jätämme lukijalle suoraviivaiset sovellukset Maxwellin yhtälöiden tapaukseen. Nämä löytyvät myös Päivärinnan luentomonisteista [23]. Näiden avulla voidaan ratkaisu esittää Cauchyn integraalin avulla. Osa edellä olevasta tarkastelusta on mahdollinen alueilla, joiden pinta sisältää kulmia. Toisaalta usein oletukset sileydestä voidaan heikentää C^2-sileyteen, mutta sivuutamme nämä yksityiskohdat. Tavoitteemme ei ole ollut esittää yleisimpiä mahdollisia teoreemoja, vaan pikemminkin esittää teoreemat ymmärrettävässä ja sovellettavassa muodossa.

10 Yhteyksiä harmoniseen analyysiin

Olemme käyttäneet paljon harmonisten funktioiden ja monogeenisten funktioiden yhteyttä. Tiedämme, että monogeenisten funktioiden komponentit, erityisesti reaaliosat, ovat harmonisia. Osoitamme nyt tälle tulokselle käänteisen tuloksen: jokainen harmoninen funktio on jonkin vasemmalta monogeenisen funktion skalaariosa.

Lause 10.1. *Olkoot $B(0,r)$ mielivaltainen kuula, $r > 0$, ja u reaaliarvoinen ja harmoninen kuulassa B. Tällöin funktio*

$$f = u + \int_0^1 t^{n-1}\overline{D}u(tx)xdt - [\int_0^1 t^{n-1}\overline{D}u(tx)xdt]_0$$

on vasemmalta monogeeninen kuulassa B ja $u = [f]_0$.

Todistus: Selvästi $u = [f]_0$, joten riittää tarkastella vasemmalta monogeenisuutta. Nimittäin integraalistä vähennetään sen skalaariosa, joten se on vektoriarvoinen. Derivoidaan integraalimerkin alla:

$$\begin{aligned}
Df(x) &= Du(x) + \int_0^1 t^{n-1}D(\overline{D}u(tx)x - [\overline{D}u(tx)x]_0)dt \\
&= Du(x) + \int_0^1 t^{n-1}(\sum_{i=0}^n e_i\overline{D}u(tx)\partial_i x - D(\int_{i=0}^n \partial_i u(tx)x_i))dt \\
&= Du(x) + \int_0^1 t^{n-1}(\sum_{i=0}^n e_i\overline{D}u(tx)e_i \\
&\quad -\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n e_j\partial_j\partial_i u(tx)tx_i - \sum_{i=0}^n e_i\partial_i u(tx))dt.
\end{aligned}$$

Käyttäen antikommutatiivisuutta saadaan

$$\sum_{i=0}^n e_i\overline{D}u(tx)e_i = (1-n)Du(tx).$$

Lisäksi voidaan vaihtaa derivoinnin järjestystä, jolloin

$$\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n e_j\partial_j\partial_i u(tx)tx_i = \partial_t Du(tx).$$

Siispä osittaisintegrointia käyttäen saamme

$$
\begin{aligned}
Df(x) &= Du(x) + \int_0^1 t^{n-1}(-nDu(tx) - t\partial_t Du(tx))dt \\
&= Du(x) + \int_0^1 t^{n-1}(-n)Du(tx)dt \\
&\quad -Du(x) + \int_0^1 (n)t^{n-1}Du(tx)) = 0.
\end{aligned}
$$

■

Toisin kuin kompleksianalyysissä emme kuitenkaan voi olettaa, että reaaliosa määräisi vasemmalta monogeenisen funktion yksikäsitteisesti. Nimittäin, jos esimerkiksi $z_i = x_i - x_0 e_i$ ja $u(x) = -e^{x_1}\sin(x_0)$. Selvästi voimme määritellä $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{z_i^n}{n!} \equiv e^{z_i}$, joka suppenee hyvin ja on vasemmalta kokonainen funktio. Toisaalta kompleksianalyysiä ja Eulerin kaavaa käyttämällä $u(x) = \mathrm{Re} e^{z_1}$. Kuitenkin esimerkiksi $u = \mathrm{Re}(e^{z_1} + e^{z_2}e_2e_1)$, koska kuvajoukko $\mathrm{Im}(e^{z_i}) \subset \mathrm{span}\{e_0, e_i\}$. Näin ollen harmonisten funktioiden ja vasemmalta monogeenisten funktioiden välinen suhde ei ole niin yksinkertainen kuin kompleksianalyysissä. Tämä heijastelee osaltaan tapauksen $n \geq 3$ erilaisuutta harmonisessa analyysissä verrattuna tapaukseen $n = 1$. Silti monet tulokset harmonisesta analyysistä ovat paralleelisia vasemmalta monogeenisten funktioiden tuloksien kanssa.

11 Loppusanat

Tässä tutkielmassa on esitetty Cliffordin algebrojen ja niiden analyysin sekä eräiden sovellusalueiden perusteoria. Ensin esittelimme Cliffordin algebrat yleiselle neliömuodolliselle avaruudelle sekä sovelsimme niitä erilaisten geometristen kuvausten esittämiseen. Hyödyllisiksi työkaluiksi osoittautuivat Cliffordin analyysin perusoperaatiot. Kirjoittajan mielestä keskeisin tulos tässä luvussa on, että Cliffordin algebrojen tulo ”koodaa” monia geometrisia operaatioita. Siis strukturaalisesti algebra sisältää paljon geometrista informaatiota.

Tutkielman loppuosa koskee analyysiä Cliffordin algebra -arvoisille funktioille. Määrittelimme Diracin operaattorin ja näytimme, miten sen avulla voidaan ilmaista monia fysiikassa sovellettuja differentiaalioperaattoreita. Erityisesti tarkastelimme Laplacen yhtälöä, Helmholzin yhtälöä ja Maxwellin yhtälöä. Pystyimme tiivistämään Maxwellin yhtälöt yhteen yhtälöön ja aikaharmonisen Maxwellin yhtälön yhtälöpariin.

Tarkempi analyysi Diracin operaattorista osoitti, että Diracin operaattori yleistää Cauchy-Riemannin operaattorin. Keskeisenä osana analyysissä oli Cauchyn integraalikaava ja tämän integraalin ydin: Cauchyn ydin. Saimme osoitettua keskeisimmät kompleksianalyysin tulokset melko pienellä vaivalla. Saimme myös CK-tuloa käyttämällä potenssisarjat esitettyä elegantisti.

Lopuksi tarkastelimme vielä Cauchyn ytimen indusoimaa potentiaalia ja sen reuna-arvo-ominaisuuksia sekä harmonisten funktioiden suhdetta Cliffordin analyysiin. Karakterisoimme Dirichlet-ongelman ratkaistavuuden Diracin operaattorille ja näytimme, miten samat menetelmät toimivat aikaharmonisen Maxwellin yhtälön ratkaisemiseksi.

Kirjoittaja myöntää, että tämä tutkielma antaa vain perustiedot laajasta Cliffordin analyysin teoriasta. Kirjoittajan näkemys on kuitenkin, että tutkielma kattaa suurimman osan Cliffordin analyysin klassisista tuloksista ja antaa pohjan tutkia teoriaa syvällisemmin. Mainittakoon kuitenkin lopuksi suuntia, joihin opiskelua ja tutkimusta voisi suunnata. Esimerkiksi monet harmonisen analyysin kysymykset, kuten eri funktioavaruudet, Fourier muunnokset yms. ovat jätetty tarkastelematta. Toisaalta sovellukset esitysteoriaan, indeksiteoriaan ja differentiaaligeometriaan ovat nekin jääneet sivummalle. Erityisesti kuuluisa Atiyah-Singerin teoreema liittyy Cliffordin analyysiin.

Viitteet

[1] Ahlfors, L. V. *Möbius Transformations in Several Dimensions.* Ordway Professorship Lectures in Mathematics, 1981.

[2] Ahlfors, L. V. *Möbius Transformations in* $\mathbb{R}^n$ *Expressed through* 2×2 *Matrices of Clifford Numbers.* Complex Variables and Elliptic Equations, 5:215–224, 1986.

[3] Ahlfors, L. V. ja P. Lounesto. *Some Remarks on Clifford Algebras.* Complex Variables and Elliptic Equations, 12:201–209, 1989.

[4] Artin, E. *The Gamma Function.* Athena Series. Holt, Rinehart and Winston, 1964. Käännös saksasta.

[5] Axler, S, P. Bourdon ja W. Ramey. *Harmonic Function Theory.* Springer-Verlag, 2000.

[6] Bauer, H. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.* Walter de Gruyter & Co., 2. painos, 1974.

[7] Brackx, F, R. Delanghe ja F. Sommen. *Clifford Analysis.* Pitman Books, 1982.

[8] Delanghe, R. *Clifford Analysis: History and Perspective.* Computational Methods and Funcion Theory, 1(1):107–153, 2001.

[9] Eriksson, S.–L. *Hyperholomorphic Functions in* $\mathbb{R}^3$. Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Algebras and Potential Theory*, sivut 227–260. University of Joensuu, 2004.

[10] Etingof, P. *Introduction to Representation Theory.* arxhiv.org, 2009. http://arxiv.org/abs/0901.0827v4.

[11] Folland, G. B. *Introduction to Partial Differential Equations.* Princeton University Press, 2. painos, 1995.

[12] Fueter, R. *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\triangle u = 0$ *und* $\triangle\triangle u = 0$ *mit vier Variablen.* Comment. Math. Helv., 7:307–330, 1935.

[13] Gilbert, J. E. ja M. A. M. Murray. *Clifford algebras and Dirac operators in harmonic analysis.* Cambridge studies in advanced mathematics, 1991.

[14] Gürlebeck, K., K. Habetha ja W. Spröß ig. *Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space.* Birkhäuser, 2000.

[15] Hörmander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, nide 7. North Holland Publishing Company, 1973.

[16] Hungerford, T. W. *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1980.

[17] Leutwiler, H. *Introduction to Generalized Function Theory.* Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Algebras and Potential Theory*, sivut 65–109. University of Joensuu, 2004.

[18] Leutwiler, H. *Generalized Function Theory.* Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Analysis and Applications*, sivut 1–23. Tampere University of Technology, 2006.

[19] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors.* Cambridge Univeristy Press, 1997.

[20] Maaß, H. *Automorphe Funktionen von mehreren Verändlichen und Dirichletsche Reihen.* Abh. Sem. Univ. Hamburg, 1949.

[21] Malonek, H. *Selected Topics in Hypercomplex Function Theory.* Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Algebras and Potential Theory*, sivut 111–150. University of Joensuu, 2004.

[22] Meyer, C. D. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM, 2004.

[23] Päivärinta, L. *Analyysi kvaternioilla ja Cliffordin algebroissa.* Luentomoniste kurssille. Ladattu internetistä 8.3.2011.

[24] Rudin, W. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1974.

[25] Rudin, W. *Principles of Real Analysis.* McGraw-Hill, 1976.

[26] Rudin, W. *Functional Analysis.* McGraw Hill, 2. painos, 1991.

[27] Sudbery, A. *Quaternionic Analysis.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., sivut 175–211. 1979.

[28] Sudbery, T. *Introduction to Quaternions.* Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Algebras and Potential Theory*, sivut 175–211. University of Joensuu, 2002.

[29] Sudbery, T. *Lectures on Quaternionic Analysis.* Teoksessa Eriksson, S.–L. (toimittaja): *Clifford Analysis and Applications*, sivut 155–171. Tampere University of Technology, 2006.

[30] Sylvester, J. J. *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares.* Philosophical Magazine, 1852.

[31] Vahlen, K. Th. *Über Bewegungen und komplexe Zahlen.* Mathematische Annalen, 1902.