Pro gradu

Metristen struktuurien Scottin lauseet

Joni Puljujärvi

22. toukokuuta 2019

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta — Fakultet — Faculty	Osasto — Avdelning — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Tekijä — Författare — Author

Joni Puljujärvi

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Metristen struktuurien Scottin lauseet

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Toukokuu 2019	63 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä esitellään kaksi erilaista ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennosta – infinitaarinen logiikka $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ sekä jatkuva-arvoinen logiikka – ja todistetaan näitä yhdistävä tulos, joka on klassisen malliteorian perustuloksen yleistys metrisille struktuureille.

Ensimmäisessä luvussa käydään läpi perusteita infinitaarisesta logiikasta $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$, joka sallii syntaksissaan äärettömän pitkät konjunktiot ja disjunktiot, sekä esitellään pintapuolisesti teoriaa, joka johtaa klassiseen Scottin isomorfialauseeseen. Scottin isomorfialause sanoo, että numeroituvan aakkoston numeroituva struktuuri on karakterisoitavissa isomorfiaa vaille logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ lauseella. Tätä lausetta kutsutaan struktuurin Scottin lauseeksi.

Toisessa luvussa perehdytään metristen struktuurien sekä jatkuva-arvoisen logiikan perusteoriaan. Metrinen struktuuri on metriseen avaruuteen puhtaan joukon sijaan perustuva struktuuri, joka käsitteenä sieppaa paljon klassista struktuuria paremmin esimerkiksi monet analyysissä esiintyvät rakenteet. Näissä struktuureissa predikaatit ovat relaatioiden sijaan tasaisesti jatkuvia ja rajoitettuja funktioita struktuurin n-jonoilta reaaliluvuille. Jatkuva-arvoinen logiikka on metristen struktuurien tutkimiseen soveltuva logiikka, jossa kaavat ovat tasaisesti jatkuvia ja rajoitettuja reaaliarvoisia funktioita. Konnektiiveina toimivat jatkuvat funktiot, kvanttoreina infimum ja supremum, ja atomikaavojen virkaa toimittavat pisteiden välinen etäisyys sekä predikaatit.

Kolmannessa luvussa esitellään jatkuva-arvoinen versio logiikasta $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ sekä metristen struktuurien niin kutsutut edestakaisetäisyydet, jotka ovat jatkuva-arvoinen analogia dynaamisille Ehrenfeuchtin–Fraïssén peleille. Edestakaisetäisyyksien teoriaa kehitetään riittävän pitkälle, jotta voidaan konstruoida metriset versiot struktuurien Scottin lauseista. Lopuksi todistetaan, että nämä lauseet todella karakterisoivat struktuurin isomorfiaa vaille, mikä ei metrisessä tapauksessa ole yhtä ilmeistä perusmääritelmistä kuin klassisessa tapauksessa vaan vaatii lisätyötä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Infinitaarinen logiikka, metrinen malliteoria, Scottin lause, edestakaisetäisyys

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Elektroninen opinnäytearkisto E-thesis

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

0 Johdanto

Monet hyödylliset matemaattiset struktuurit ovat osoittautuneet mahdottomiksi aksiomatisoida ensimmäisen kertaluvun logiikassa, minkä vuoksi erikoisemmat logiikat, jotka yleensä ovat ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennoksia, ovat nostaneet päätään. Joillain näistä logiikoista on jopa takataskussaan useita ensimmäisen kertaluvun logiikan hyödyllisiä pikku jekkuja kuten jokin versio kompaktisuuslauseesta tai jonkinlainen Löwenheimin–Skolemin lause.

Ensimmäisen kertaluvun logiikkaa vahvempien logiikoiden joukossa kelluu aidon luokan kokoinen kasa infinitaarisia kieliä, joista osa on ollut malliteoreetikoiden käytössä jo ennen 60-lukua. Alfred Tarski esitteli vuonna 1958 (muun muassa) logiikan $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ (ks. [Tar58]), joka laajentaa ensimmäisen kertaluvun logiikkaa äärettömän pituisilla konjunktioilla ja disjunktioilla (joiden pituuden yläraja on kardinaali κ). Tällaisista logiikoista kaikista parhaimmin käyttäytyvä on $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, jossa konjunktioiden ja disjunktioiden täytyy pysyä numeroituvina.

Ehkäpä yksi tärkeimmistä infinitaarisen logiikan tuloksista on niin kutsuttu Scottin isomorfialause, jonka Dana Scott esitti artikkelissaan vuonna 1963 (ks. [Sco65]). Lause sanoo, että numeroituvan aakkoston numeroituva struktuuri on äärellisesti aksiomatisoitavissa logiikassa $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, toisin sanoen löytyy logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ lause, joka karakterisoi annetun numeroituvan struktuurin isomorfiaa vaille. Tätä lausetta kutsutaan struktuurin Scottin lauseeksi.

Täysin toiseen suuntaan ensimmäisen kertaluvun logiikkaa laajentaa niin kutsuttu jatkuva-arvoinen logiikka, joka kävi jo 60-luvulla pyörähtämässä koe-esiintymisessä Changin ja Keislerin ohjaamaan näytelmään (ks. [CK66]). Se pyrki mukaan liian yleisessä ja siten vähemmän hyödyllisessä muodossa eikä siksi saanut roolia. Nykymuodossaan jatkuva-arvoista logiikkaa on ruvettu tutkimaan vasta vuosituhannen vaihteessa. I. Ben Yaacov ja C. W. Henson, muiden muassa, ovatkin ottaneet asiakseen todistaa hirmuisen vuoren jatkuva-arvoisia versioita klassisista malliteorian tuloksista (ks. [BBHU08]), minkä onnistuminen puhuu jatkuva-arvoisen logiikan jykevyyden puolesta.

Jatkuva-arvoinen logiikka sopii luonnostaan niin kutsuttujen metristen struktuurien tutkimiseen. Metriset struktuurit ovat rajoitettuja metrisiä avaruuksia, joissa on rakenteena nimettyjä alkioita, funktioita struktuurin universumilta itselleen sekä funktioita struktuurin universumilta reaalilukujen joukkoon. Useat esimerkiksi analyysissä tai geometriassa esiintyvät rakenteet, kuten Hilbertin avaruudet tai äärellisviritteisten ryhmien asymptoottiset kartiot, on luonnollisempi tulkita metrisiksi kuin klassisiksi struktuureiksi. Toisaalta klassiset struktuurit on helppo tulkita diskreeteiksi metrisiksi struktuureiksi.

Jatkuva-arvoisessa logiikassa totuusarvot ovat joukon $\{0, 1\}$ sijaan välillä $[0, 1]$ (tai jollain muulla kompaktilla reaalilukuvälillä). Sen konnektiiveja ovat jatkuvat reaalimuuttujien reaaliarvoiset funktiot ja kvanttoreita infimum ja supremum. Kaavojen tulkinnat metrisissä struktuureissa ovat tasaisesti jatkuvia funktioita struktuurin universumilta totuusarvojen avaruuteen.

Jatkuva-arvoiselle logiikalle on mahdollista määritellä infinitaarisia laajennoksia – jatkuva-arvoisia versioita klassisille logiikoille $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$. Tässä pro gradu -tutkielmassa määrittelemme jatkuva-arvoisen infinitaarisen logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ ja todistamme jatkuva-arvoisen version Scottin isomorfialauseesta. Jatkuva-arvoinen versio sanoo, että numeroituvan aakkoston separoituvat struktuurit voidaan isomorfiaa vaille karakterisoida yhdellä ainoalla jatkuva-arvoisen $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$:n lauseella. Tätä varten joudumme kehittämään klassisessa teoriassa tärkeää roolia näytteleville dynaamisille Ehrenfeuchtin–Fraïssén peleille jatkuva-arvoisen analogian, jota kutsumme edestakaisetäisyyksiksi. Tämä kaikki perustuu Ben Yaacovin, Douchan, Niesin ja Tsankovin tuloksiin artikkelissa [BDNT17].

1 Infinitaarinen logiikka

Annamme tässä luvussa lyhyen esittelyn klassiselle infinitaariselle logiikalle $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ sekä numeroituvien struktuurien Scottin lauseille vertailukohdaksi luvun 3 tuloksille. Todistuksia ei esitetä, mutta ne löytyvät esimerkiksi kirjasta [Vä11].

1.1 Syntaksi ja semantiikka

Olkoon κ säännöllinen kardinaali. Infinitaarinen logiikka $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ on sellainen ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennos, jossa sallitaan äärettömät konjunktiot ja disjunktiot, jotka ovat pituudeltaan lyhyempiä kuin κ. Haluamme, että jokaisessa kaavassa on silti vain äärellisen monta muuttujasymbolia, jotta kaava on aina mahdollista muuttaa lauseeksi kvantifioimalla kaikki vapaat muuttujat.

Määritellään ensin infinitaarisen logiikan syntaksi täsmällisesti. Määritelmät antavat ensimmäisen kertaluvun logiikan syntaksin, jos $\kappa = \omega$.

Määritelmä 1.1. Olkoon L aakkosto. L-termit määritellään seuraavasti:

(i) Jos $i < \omega$, niin muuttujasymboli v_i on L-termi. Termin v_i vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(v_i) = \{v_i\}$.

(ii) Jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin c on L-termi. Termin c vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(c) = \emptyset$.

(iii) Jos $t_0, \dots, t_{n-1}$ ovat L-termejä ja $f \in L$ on n-paikkainen muuttujasymboli, niin $f(t_0, \dots, t_{n-1})$ on L-termi. Termin vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(f(t_0, \dots, t_{n-1})) = \bigcup_{i<n} \mathrm{free}(t_i)$.

Merkitsemme kaikkien muuttujien joukkoa $\mathrm{Var} := \{v_i \mid i < \omega\}$.

Määritelmä 1.2. Olkoon L aakkosto. Logiikan $\mathcal{L}_{\kappa\omega}$ L-kaavat ja niiden vapaat muuttujat määritellään seuraavasti:

(i) Jos $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_0, \dots, t_{n-1}$ L-termejä, niin atomikaavat $R(t_0, \dots, t_{n-1})$ ja $t_0 = t_1$ ovat L-kaavoja, ja

$$\mathrm{free}(R(t_0, \dots, t_{n-1})) = \bigcup_{i<n} \mathrm{free}(t_i),$$

sekä $\mathrm{free}(t_0 = t_1) = \mathrm{free}(t_0) \cup \mathrm{free}(t_1)$.

(ii) Jos ϕ on L-kaava, niin $\neg\phi$ on L-kaava ja $\mathrm{free}(\neg\phi) = \mathrm{free}(\phi)$.

(iii) Jos ϕ on L-kaava ja $i < \omega$, niin $\exists v_i\ \phi$ on L-kaava ja $\mathrm{free}(\exists v_i\ \phi) = \mathrm{free}(\phi) \setminus \{v_i\}$.

(iv) Jos Φ on joukko L-kaavoja, $|\Phi| < \kappa$, ja on olemassa $n < \omega$, jolle pätee $\mathrm{free}(\phi) \subseteq \{v_i \mid i < n\}$ kaikilla $\phi \in \Phi$, niin $\bigwedge \Phi$ on L-kaava ja $\mathrm{free}\left(\bigwedge \Phi\right) = \bigcup_{\phi \in \Phi} \mathrm{free}(\phi)$.

Huomautettakoon, että jokaisella L-kaavalla ϕ joukko $\mathrm{free}(\phi)$ on äärellinen. L-kaava ϕ on *lause*, jos $\mathrm{free}(\phi) = \emptyset$. Kuten malliteoriassa on tapana, jos $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle \in \mathrm{Var}^n$ ja ϕ on L-kaava, kirjoitamme $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ (tai $\phi(\bar{x})$), mikäli $\mathrm{free}(\phi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, ja vastaavasti L-termille t kirjoitamme $t(x_0, \ldots, x_{n-1})$, jos $\mathrm{free}(t) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$.

Mikäli $\Phi = \{\phi_i \mid i \in I\}$ jollekin indeksijoukolle I, merkitsemme konjunktiota $\bigwedge \Phi$ usein $\bigwedge_{i \in I} \phi_i$. L-kaavojen määritelmässä otimme virallisiksi konnektiiveiksi negaation ja ($< \kappa$-)konjunktion sekä kvanttoriksi eksistenssikvanttorin, mutta määrittelemme tavalliseen tapaan lyhennysmerkinnöiksi

$$\begin{aligned}
\forall v_i\ \phi &:= \neg \exists v_i \neg \phi, \\
\bigvee \Phi &:= \neg \bigwedge_{\phi \in \Phi} \neg \phi, \\
\phi \wedge \psi &:= \bigwedge \{\phi, \psi\}, \\
\phi \vee \psi &:= \bigvee \{\phi, \psi\}, \\
\phi \rightarrow \psi &:= \neg(\phi \wedge \neg \psi) \text{ sekä} \\
\phi \leftrightarrow \psi &:= (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi).
\end{aligned}$$

Määritelmä 1.3. Olkoon ϕ L-kaava. Kaavan ϕ *kvanttoriaste* on sellainen ordinaali $\mathrm{qr}(\phi)$, että

(i) jos ϕ on atomikaava, niin $\mathrm{qr}(\phi) = 0$,

(ii) jos $\phi = \neg \psi$, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \mathrm{qr}(\psi)$,

(iii) jos $\phi = \bigwedge \Psi$ kaavajoukolle Ψ, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \sup_{\psi \in \Psi} \mathrm{qr}(\psi)$, ja

(iv) jos $\phi = \exists_{v_k} \psi$, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Sanomme, että ϕ on kvanttorivapaa, jos $\mathrm{qr}(\phi) = 0$. Suoraviivainen induktio paljastaa, että kaavan kvanttoriaste on aina pienempi kuin κ: atomikaavojen kvanttoriaste on $0 < \kappa$, ja jos kaavan ϕ kvanttoriaste on $\alpha < \kappa$, niin kaavan $\exists v_i \phi$ kvanttoriaste on $\alpha + 1 < \kappa$, ja jos Φ on kardinaalia κ

pienempi joukko kaavoja, joista kunkin kvanttoriaste on pienempi kuin κ, niin $\mathrm{qr}(\bigwedge \Phi) = \sup_{\phi \in \Phi} \mathrm{qr}(\phi) < \kappa$, sillä κ on säännöllinen.

Määritellään sitten semantiikka täsmällisesti. Jos $\kappa = \omega$, saadaan ensimmäisen kertaluvun logiikan semantiikka. L-termien tulkinta eri riipu kardinaalista κ, ja se on täysin sama kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa.

Määritelmä 1.4. Olkoon $t(\bar{x})$ L-termi, $\bar{x} = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle \in \mathrm{Var}^n$, ja olkoon $\mathfrak{A}$ L-struktuuri. Termin t tulkinta struktuurissa $\mathfrak{A}$ on funktio $t^{\mathfrak{A}} \colon \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n \to \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$, joka määritellään seuraavasti:

(i) Jos $t = x_i$ jollekin $i < n$, niin $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = a_i$ kaikilla $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$.

(ii) Jos $t = c$ jollekin vakiosymbolille $c \in L$, niin $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = c^{\mathfrak{A}}$ kaikilla $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$.

(iii) Jos $t = f(t_0(\bar{x}), \dots, t_{m-1}(\bar{x}))$ jollekin funktiosymbolille $f \in L$ ja termien $t_0, \dots, t_{m-1}$ tulkinnat on jo määritelty, niin

$$t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = f^{\mathfrak{A}}\left(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right)$$

kaikilla $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$.

Määritelmä 1.5. Olkoon $\mathfrak{A}$ L-struktuuri, $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$ ja $\phi(\bar{x})$ L-kaava, missä $\bar{x} = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathrm{Var}^n$.

(i) Jos ϕ on $t_0(\bar{x}) = t_1(\bar{x})$ L-termeille t_0 ja t_1, niin $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, jos ja vain jos $t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$.

(ii) Jos $\phi = R(t_0(\bar{x}), \dots, t_{n-1}(\bar{x}))$ L-termeille $t_0, \dots, t_{n-1}$, niin $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, jos ja vain jos $(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \dots, t_{n-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \in R^{\mathfrak{A}}$.

(iii) Jos $\phi = \neg\psi(\bar{x})$, niin $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \not\models \psi(\bar{a})$.

(iv) Jos $\phi = \exists v_i\, \psi(\bar{x}, v_i)$, niin $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, jos ja vain jos löytyy $b \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{A}$, jolle $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}, b)$.

(v) Jos $\phi = \bigwedge_{i \in I} \psi_i(\bar{x})$, $|I| < \kappa$, niin $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \psi_i(\bar{a})$ jokaisella $i \in I$.

Määritelmä 1.6. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ L-struktuureja. Sanomme, että $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat elementaarisesti ekvivalentit kvanttoriasteeseen α saakka, mikäli kaikilla L-lauseilla ϕ, joilla $\mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha$, pätee

$$\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{B} \models \phi.$$

Tällöin kirjoitamme $\mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}$.

1.2 Edestakaisekvivalenssit

Struktuurien samankaltaisuutta voidaan tutkia Ehrenfeuchtin–Fraïssén pelin erilaisilla muunnelmilla. Perinteinen EF-peli, jonka pituus on ω, karakterisoi struktuurien elementaarisen ekvivalenssin logiikassa $\mathcal{L}_{\infty\omega}$, jossa sallitaan mielivaltaisen kardinaalin pituiset konjunktiot. Dynaamisella versiolla perinteisestä EF-pelistä voidaan karakterisoida elementaarinen ekvivalenssi kvanttoriasteeseen α asti.

Kaikkien aakkoston L struktuurien luokkaan voidaan määritellä ekvivalenssirelaatioita, jotka mittaavat näiden dynaamisten pelien karakterisoimaa samankaltaisuutta. Menemättä peliteoreettisiin aspekteihin on helpointa määritellä nämä ekvivalenssirelaatiot edestakaisjonojen avulla.

Jos $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat struktuureja, merkitsemme kaikkien osittaisten isomorfismien $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ joukkoa $\mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Merkitsemme myös kaikkien ordinaalien luokkaa On.

Määritelmä 1.7. Olkoon $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$. Määrittelemme ekvivalenssirelaation $E_{\alpha,n}$ kaikkien parien $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle$ luokkaan, missä $\mathfrak{A}$ on L-struktuuri ja $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$, seuraavasti: $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \; E_{\alpha,n} \; \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle$, jos ja vain jos on olemassa jono $\langle P_\beta \rangle_{\beta \leq \alpha}$, jolle pätee

(i) $\emptyset \neq P_\alpha \subseteq \cdots \subseteq P_0 \subseteq \mathrm{Part}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$,

(ii) $a_i \in \mathrm{dom}(f)$ ja $f(a_i) = b_i$ kaikilla $i < n$ ja $f \in P_\alpha$,

(iii) kaikilla $\beta < \alpha$ jokainen $f \in P_{\beta+1}$ laajenee eteenpäin joukkoon P_β eli jokaiselle $a \in \mathfrak{A}$ on olemassa $b \in \mathfrak{B}$, joille löytyy sellainen $g \in P_\beta$, että $g \supseteq f$ ja $\langle a, b \rangle \in g$, ja

(iv) kaikilla $\beta < \alpha$ jokainen $f \in P_{\beta+1}$ laajenee taaksepäin joukkoon P_β eli jokaiselle $b \in \mathfrak{B}$ on olemassa $a \in \mathfrak{A}$, joille löytyy sellainen $g \in P_\beta$, että $g \supseteq f$ ja $\langle a, b \rangle \in g$.

Jos $\langle \mathfrak{A}, \emptyset \rangle \; E_{\alpha,0} \; \langle \mathfrak{B}, \emptyset \rangle$, kirjoitamme $\mathfrak{A} \; E_\alpha \; \mathfrak{B}$. Mikäli $\mathfrak{A} \; E_\alpha \; \mathfrak{B}$ kaikilla $\alpha \in \mathrm{On}$, kirjoitamme $\mathfrak{A} \; E_\infty \; \mathfrak{B}$.

Lause 1.8. Kaikilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ pätee

$$\mathfrak{A} \; E_\alpha \; \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_\alpha \mathfrak{B}.$$

Todistus. Ks. [Vä11], Theorem 7.47. □

Määritelmä 1.9. Struktuurin $\mathfrak{A}$ *Scottin korkeus*, $\mathrm{SH}(\mathfrak{A})$, on pienin sellainen ordinaali α, että kaikilla $n < \omega$ ja $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$ pätee

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \; E_{\alpha,n} \; \langle \mathfrak{A}, \bar{b} \rangle \implies \langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \; E_{\alpha+1,n} \; \langle \mathfrak{A}, \bar{b} \rangle .$$

Lemma 1.10. Jos $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ovat numeroituvia, niin

$$\mathfrak{A} \; E_\infty \; \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Todistus. Ks. [Vä11], Theorem 7.24. $\square$

1.3 Scottin lauseet

Tunnetusti minkä tahansa äärellisen aakkoston äärellisen struktuurin voi karakterisoida yhdellä ainoalla ensimmäisen kertaluvun logiikan lauseella vain eksistenssikvantifioimalla struktuurin alkioiden määrän verran muuttujia, ilmaisemalla, että jokainen struktuurin alkio on yksi näistä ja luettelemalla kunkin relaation sisällön, kunkin funktion arvot ja kunkin vakion identiteetin. Sama onnistuu numeroituvan aakkoston numeroituville struktuureille logiikassa $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Tällaista lausetta kutsutaan Scottin lauseeksi.

Infinitaaristen kielten semantiikasta on oleellista huomata, että äärettömillä junktioilla voidaan sanoa samanlaisia asioita kuin kvanttoreiden avulla. Huomautettakoon, että alla määriteltävät kaavat todella ovat $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-kaavoja, sillä kaikkien junktioiden indeksijoukot ovat numeroituvia.

Määritelmä 1.11. Olkoon L numeroituva aakkosto, $\mathfrak{A}$ numeroituva L-struktuuri, $n < \omega$, $\bar{x} = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle$, $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$ ja $\alpha < \omega_1$. Määritellään kaava $\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{x})$ rekursiolla ordinaalin α suhteen.

Jos $\alpha = 0$, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \bigwedge \{\phi(\bar{x}) \mid \phi \text{ on atomikaava tai sellaisen negaatio ja } \mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})\},$$

toisin sanoen $\sigma^{0,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ on konjunktio jonon $\bar{a}$ atomityypistä tyhjällä parametrijoukolla.

Jos $\alpha = \beta + 1$ jollekin ordinaalille β, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \left(\bigwedge_{b \in \mathfrak{A}} \exists v_n \, \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}b} \right) \wedge \left(\forall v_n \bigvee_{b \in \mathfrak{A}} \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}b} \right).$$

Jos α on rajaordinaali, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \bigwedge_{\beta < \alpha} \sigma^{\beta,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}.$$

Yllä määritellyt kaavat määrittelevät struktuurin $\mathfrak{A}$ n-jonojen sekä minkä tahansa muun struktuurin $\mathfrak{B}$ n-jonojen välille eräänlaisia ekvivalensseja. Jos $\mathfrak{B} \models \sigma^{0,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{b})$, niin jonot $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ toteuttavat täsmälleen samat atomikaavat, toisin sanoen kaava vastaa osittaista isomorfismia $a_i \mapsto b_i$.

Jos $\sigma^{\beta,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ on määritellyt "β-ekvivalenssin" ja $\mathfrak{B} \models \sigma^{\beta+1,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{b})$, niin jonot $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat β-ekvivalentit ja niitä voi lisäksi pidentää vielä yhdellä alkiolla ja ne pysyvät yhä β-ekvivalentteina. Ensimmäinen konjunkti ilmaisee sen, että jos jonoa $\bar{a}$ pidennetään, löytyy pidennys myös muuttujajonolle $\bar{x}$, jolloin myös tämän tulkinnalle $\bar{b}$ löytyy jatke. Toinen konjunkti sanoo, että jokaiselle muuttujajonon $\bar{x}$ pidennykselle (eli jokaiselle jonon $\bar{b}$ pidennykselle) löytyy jokin jonon $\bar{a}$ pidennys. $\beta + 1$-ekvivalenssi siis kuvailee edestakaista β-ekvivalenssin laajennusta n-jonoilta $n + 1$-jonoille.

Kun nämä kaksi seikkaa laittaa yhteen, näkee, että $\beta + 1$-ekvivalenssi on itse asiassa osittaisten isomorfismien edestakaislaajenemisominaisuus pituudesta β pituuteen $\beta + 1$, mistä saadaankin seuraava lemma.

Lemma 1.12. Kaikilla numeroituvilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, ja jokaisella $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$ sekä $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ pätee

$$\mathfrak{B} \models \sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}(\bar{b}) \iff \langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \, E_{\alpha,n} \left\langle \mathfrak{B}, \bar{b} \right\rangle .$$

Todistus. Ks. [Vä11], Proposition 7.52. □

Määritelmä 1.13. Numeroituvan aakkoston L numeroituvan struktuurin $\mathfrak{A}$ *Scottin lause* $\sigma_{\mathfrak{A}}$ on $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-lause

$$\sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0}_{\mathfrak{A},\emptyset} \wedge \bigwedge_{n<\omega} \bigwedge_{\bar{a}\in\mathfrak{A}^n} \forall x_0 \ldots \forall x_{n-1} \left(\sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \rightarrow \sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \right).$$

Lause 1.14. Olkoon L numeroituva aakkosto ja $\mathfrak{A}$ numeroituva L-struktuuri. Tällöin kaikilla numeroituvilla L-struktuureilla $\mathfrak{B}$ pätee

$$\mathfrak{B} \models \sigma_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \, E_\infty \, \mathfrak{A}.$$

Todistus. Ks. [Vä11], Proposition 7.54. □

Korollaari 1.15 (Scottin isomorfialause)**.** Olkoon L numeroituva aakkosto ja $\mathfrak{A}$ numeroituva L-struktuuri. Tällöin kaikilla numeroituvilla L-struktuureilla $\mathfrak{B}$ pätee

$$\mathfrak{B} \models \sigma_{\mathfrak{A}} \iff \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Todistus. Scottin isomorfialause saadaan laittamalla yhteen tulokset 1.14 ja 1.10. □

2 Metriset struktuurit ja jatkuva-arvoinen logiikka

Tässä luvussa esittelemme metriset aakkostot ja struktuurit sekä niiden tutkimiseen käytetyn jatkuva-arvoisen logiikan perusteet siinä määrin, missä tarvitsemme niitä luvussa 3. Hyvin perusteellisen käsittelyn aiheesta antaa [BBHU08], johon tämän luvun materiaali suurimmaksi osaksi perustuu.

2.1 Jatkuvuus, tasainen jatkuvuus ja jatkuvuusmodulit

Tässä alaluvussa kertaamme ja esittelemme jatkuvuuteen ja tasaiseen jatkuvuuteen liittyviä määritelmiä ja tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin. Osa määritelmistä perustuu artikkeliin [BDNT17].

Määritelmä 2.1. Olkoot $\langle M, d\rangle$ ja $\langle M', d'\rangle$ metrisiä avaruuksia ja f funktio $M \to M'$. Funktio $\Delta\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ on funktion f *jatkuvuusmoduli*, jos kaikilla $x, y \in M$ pätee

$$d'(f(x), f(y)) \leq \Delta(d(x,y)), \tag{2.1.1}$$

$\Delta(0) = 0$ ja Δ on jatkuva nollassa.

Jatkuvuusmoduli on funktio, joka jollain tapaa mittaa funktion f tasaista jatkuvuutta. Funktio f on tasaisesti jatkuva, jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$, jolle kaikilla $x, y \in M$ pätee

$$d(x,y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon. \tag{2.1.2}$$

Näyttäisi siltä, että jatkuvuusmodulin olemassaolo on paljon vahvempi väite kuin tasainen jatkuvuus, mutta osoittautuu, että ne ovat yhtäpitävät.

Lemma 2.2. Metristen avaruuksien välinen funktio on tasaisesti jatkuva, jos ja vain jos sillä on jatkuvuusmoduli.

Todistus. Olkoon f kuten edellä. Oletetaan ensin, että funktiolla f on jatkuvuusmoduli Δ. Olkoon $\varepsilon > 0$. Haluamme osoittaa, että on olemassa $\delta > 0$, jolla (2.1.2) pätee kaikilla $x, y \in M$. Koska Δ on jatkuva nollassa, löytyy sellainen $\delta > 0$, että millä tahansa $r > 0$, jolla $r < \delta$, pätee $\Delta(r) \leq \varepsilon$. Siten jos $d(x,y) < \delta$, pätee $d'(f(x), f(y)) \leq \Delta(d(x,y)) \leq \varepsilon$.

Oletetaan sitten, että f on tasaisesti jatkuva. Määritellään Δ ehdolla

$$\Delta(t) = \sup \left\{ d'(f(x), f(y)) \mid x, y \in M,\ d(x,y) \leq t \right\}.$$

Jos $x, y \in M$, niin

$$\begin{aligned}\Delta(d(x,y)) &= \sup\left\{d'(f(x'), f(y') \mid x', y' \in M,\ d(x', y') \leq d(x,y)\right\} \\ &\geq d'(f(x), f(y)),\end{aligned}$$

joten (2.1.1) pätee. Lisäksi

$$\begin{aligned}\Delta(0) &= \sup\left\{d'(f(x), f(y)) \mid x, y \in M,\ d(x,y) \leq 0\right\} \\ &= \sup\left\{d'(f(x), f(x)) \mid x \in M\right\} \\ &= \sup\{0\} = 0.\end{aligned}$$

Täytyy vielä osoittaa, että Δ on jatkuva nollassa. Oletetaan sitä vastoin, että funktion Δ raja-arvo nollassa ei ole nolla. Koska selvästikin Δ on kasvava funktio, jonka raja-arvo nollassa ei ole nolla, täytyy olla olemassa $\varepsilon > 0$, jolle $\Delta(r) > \varepsilon$ kaikilla $r > 0$. Koska f on oletuksen mukaan tasaisesti jatkuva, löytyy kuitenkin $\delta > 0$, jolle kaikilla $x, y \in M$, joilla $d(x,y) < \delta$, pätee $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Olkoon $r \in (0, \delta)$. Tällöin kaikilla niillä $x, y \in M$, joilla $d(x,y) \leq r$, pätee myös $d(x,y) < \delta$ ja siten $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Siten

$$\Delta(r) = \sup\left\{d'(f(x), f(y)) \mid x, y \in M,\ d(x,y) \leq r\right\} \leq \varepsilon,$$

mikä on ristiriita. Siis funktion Δ täytyy olla jatkuva nollassa. $\square$

Jos Δ on funktion f jatkuvuusmoduli, sanomme myös, että f noudattaa modulia Δ. Jos maaliavaruus M' on rajoitettu, modulin arvot voidaan rajoittaa jollekin äärellismittaiselle välille, sillä $d'(f(x), f(y)) \leq d'(M')$ kaikilla $x, y \in M$. Lisäksi osoittautuu, että jatkuvuusmodulista voidaan yleisyyttä menettämättä olettaa monenlaisia pieniä yksityiskohtia, kuten seuraava lemma osoittaa.

Lemma 2.3. Olkoot M ja M' rajoitettuja metrisiä avaruuksia ja $f\colon M \to M'$ tasaisesti jatkuva. Tällöin funktiolla f on jatkuvuusmoduli, joka on

- kasvava,
- jatkuva ja
- subadditiivinen.[1]

Todistus. Olkoon Δ funktion f jokin jatkuvuusmoduli. Koska avaruus M' ja siten myös funktio f on rajoitettu, voidaan olettaa, että myös Δ on rajoitettu. Määrittelemme nyt uuden modulin Δ', jolla on kaikki halutut ominaisuudet. Asetetaan

$$\Delta'(t) = \inf\left\{at + b \mid a, b \in [0, \infty)\,,\ \Delta(s) \leq as + b \text{ kaikilla } s \in [0, \infty]\right\}.$$

[1] Funktio g on subadditiivinen, jos $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ kaikilla x ja y.

Osoitamme, että Δ' on funktion f jatkuvuusmoduli. Määritelmänsä perusteella se on aina modulin Δ yläpuolella ja siten toteuttaa ehdon (2.1.1).

Todistaaksemme, että $\Delta'(0) = 0$, riittää näyttää, että jokaiselle $b \geq 0$ löytyy $a \geq 0$, jolle $\Delta(s) \leq as + b$ kaikilla $s \in [0, \infty)$, sillä tällöin pätee $\Delta'(0) \leq a \cdot 0 + b = b$ kaikilla $b \geq 0$, joten $\Delta'(0) = 0$. Huomataan, että voidaan valita $a = \sup_{t>0}(\Delta(t) - b)/t$, sillä

$$as + b = s \cdot \sup_{t>0} \frac{\Delta(t) - b}{t} + b \geq s \cdot \frac{\Delta(s) - b}{s} + b = \Delta(s)$$

kaikilla $s \in [0, \infty)$.

On vielä näytettävä, että Δ' on jatkuva nollassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska Δ on rajoitettu, löytyy $K > 0$, jolle $\Delta(t) \leq K$ kaikilla t. Voidaan olettaa, että $\varepsilon < 2K$. Koska Δ on jatkuva nollassa, löytyy $\delta > 0$, jolle kaikilla $t < \delta$ pätee $\Delta(t) \leq \varepsilon/2$. Olkoon $b = \varepsilon/2$ ja $a = (K - \varepsilon/2)/\delta$. Nyt kaikilla $t \in [0, \infty)$ pätee $\Delta(t) \leq at + b$: mikäli $t < \delta$, niin $at + b = at + \varepsilon/2 \geq \varepsilon/2 \geq \Delta(t)$, ja jos $t \geq \delta$, pätee

$$\begin{aligned} at + b &= \frac{K - \varepsilon/2}{\delta} t + \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{K - \varepsilon/2}{\delta} \delta + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= K - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = K \geq \Delta(t). \end{aligned}$$

Siten a ja b ovat sellaiset, että $\Delta'(t) \leq at + b$ kaikilla t.

Olkoon $\delta' = \delta\varepsilon/(2K - \varepsilon)$. Nyt δ' on sellainen, että kaikilla $t < \delta'$ pätee

$$\begin{aligned} \Delta'(t) \leq at + b &= \frac{K - \varepsilon/2}{\delta} t + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{K - \varepsilon/2}{\delta} \delta' + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{2K - \varepsilon}{2\delta} \cdot \frac{\delta\varepsilon}{2K - \varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

mikä osoittaa jatkuvuuden nollassa.

Osoitamme sitten, että Δ' on kasvava. Oletetaan, että $s \leq t$. Osoitamme epäyhtälön $\Delta'(s) \leq \Delta'(t)$ käyttämällä seuraavaa hyödyllistä faktaa, joka on totta kaikissa tiheissä lineaarijärjestyksissä: $x \leq y$, jos ja vain jos kaikilla z pätee

$$y < z \implies x \leq z.$$

Käytämme tätä yhtäpitävyyttä epäyhtälöiden todistamiseen useaan kertaan myös myöhemmissä todistuksissa. Oletetaan siis, että $\Delta'(t) < \varepsilon$, ja pyritään osoittamaan, että $\Delta'(s) \leq \varepsilon$. Nyt funktion Δ' määritelmän nojalla löytyy a ja b, joilla $at + b < \varepsilon$ ja $\Delta(r) \leq ar + b$ kaikilla $r \in [0, \infty]$. Siten, koska funktio $x \mapsto ax + b$ on kasvava, pätee $as + b < \varepsilon$, jolloin myös $\Delta'(s) \leq as + b < \varepsilon$.

Osoitamme seuraavaksi, että funktio Δ' on *konkaavi*, toisin sanoen kaikilla $t \in [0, 1]$ ja $s, r \in [0, \infty)$ pätee $\Delta'((1-t)s + tr) \geq (1-t)\Delta'(s) + t\Delta'(r)$.

Käytämme jälleen samaa epäyhtälöntodistustekniikkaa. Olkoon siis $0 \leq t \leq 1$, ja oletetaan, että $\Delta'((1-t)s + tr) < \varepsilon$. Nyt löytyy jälleen sopivat a ja b, joilla $a((1-t)s + tr) + b < \varepsilon$. Nyt

$$\begin{aligned} a((1-t)s + tr) + b &= a(1-t)s + atr + b \\ &= a(1-t)s + atr + (1 + t - t)b \\ &= a(1-t)s + atr + (1-t)b + tb \\ &= (1-t)(as + b) + t(ar + b). \end{aligned}$$

Siten $(1-t)(as + b) + t(ar + b) < \varepsilon$, joten näiden infimumina yli sopivien a ja b myös $(1-t)\Delta'(s) + t\Delta'(r) \leq \varepsilon$.

Konkaaviudesta seuraa funktion Δ' subadditiivisuus: huomataan aluksi, että jos $0 \leq t \leq 1$, niin

$$\Delta'(ts) = \Delta'((1-t) \cdot 0 + ts) \geq (1-t)\Delta'(0) + t\Delta'(s) = t\Delta'(s).$$

Siten kaikilla $s, t \in [0, \infty)$ (olettaen, että ainakin toinen on nollasta poikkeava) pätee

$$\begin{aligned} \Delta'(s+t) &= \frac{s+t}{s+t}\Delta'(s+t) = \frac{s}{s+t}\Delta'(s+t) + \frac{t}{s+t}\Delta'(s+t) \\ &\leq \Delta'\left(\frac{s(s+t)}{s+t}\right) + \Delta'\left(\frac{t(s+t)}{s+t}\right) \\ &= \Delta'(s) + \Delta'(t), \end{aligned}$$

siis Δ' on subadditiivinen.

Jatkuvuus seuraa siitä, että Δ' on itse asiassa tasaisesti jatkuva, sillä se on oma jatkuvuusmodulinsa: subadditiivisuuden ja kasvavuuden nojalla kaikilla $s < t$ pätee

$$\begin{aligned} \left|\Delta'(t) - \Delta'(s)\right| &= \Delta'(t) - \Delta'(s) \\ &= \Delta'(t - s + s) - \Delta'(s) \\ &\leq \Delta'(t - s) + \Delta'(s) - \Delta'(s) \\ &= \Delta'(t - s) \\ &= \Delta'(|t - s|). \end{aligned}$$

Tämä viimeistelee todistuksen. $\square$

Lemma 2.4. Jos rajoitettu funktio $f\colon M \times M' \to \mathbb{R}$ noudattaa jatkuvuusmodulia Δ, niin funktiot $g, h\colon M \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sup_{y \in M'} f(x,y)$ ja $h(x) = \inf_{y \in M'} f(x,y)$, ovat rajoitettuja ja noudattavat modulia Δ.

Todistus. Käytämme avaruuden $M \times M'$ metriikkana kuvausta $e_1(\langle x,y\rangle, \langle x',y'\rangle) = d(x,x') + d(y,y')$.

Olkoot $x, x' \in M$. Nyt $d(g(x), g(x')) = |g(x) - g(x')|$. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että $g(x) \geq g(x')$. Tällöin supremumin ominaisuuksien perusteella jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $y \in M'$, jolle

$$
\begin{aligned}
d(g(x), g(x')) &= g(x) - g(x') = \sup_{y' \in M'} f(x,y') - \sup_{y' \in M'} f(x',y') \\
&\leq \varepsilon + f(x,y) - \sup_{y' \in M'} f(x',y') \\
&\leq \varepsilon + f(x,y) - f(x',y) \\
&\leq \varepsilon + \left| f(x,y) - f(x',y) \right| \\
&= \varepsilon + d(f(x,y), f(x',y)) \\
&\leq \varepsilon + \Delta(e_1(\langle x,y\rangle, \langle x',y\rangle)) \\
&= \varepsilon + \Delta(d(x,x') + d(y,y)) \\
&= \varepsilon + \Delta(d(x,x')).
\end{aligned}
$$

Tällöin $d(g(x), g(x')) \leq \Delta(d(x,x'))$, mikä oli todistettava.

Funktio h käsitellään samalla tavalla. □

Myöhemmin, kun tutkimme jatkuva-arvoisen logiikan kaavoja, on hyödyllistä ottaa käyttöön hieman erilainen jatkuvuusmodulin käsite. Avaruuden $\prod_{i<n} M_i$ funktioille voidaan moduli määritellä kuvaukseksi, joka katsoo komponenteittaisia etäisyyksiä $d(m_i, m_i')$ sen sijaan, että se katsoisi jonojen etäisyyttä $d(\langle m_0, \ldots, m_{n-1}\rangle, \langle m_0', \ldots, m_{n-1}'\rangle)$. Paikkaluvun kasvattaminen ei merkittävästi muuta yllä olevia todistuksia, joten voimme vaatia n-paikkaisilta moduleilta kasvavuutta, jatkuvuutta ja subadditiivisuutta.

Sanomme, että funktio $f\colon M \to [-\infty, \infty]$ on alaspäin puolijatkuva, jos jokaiselle pisteelle $a \in M$ pätee $\liminf_{x \to a} f(x) \geq f(a)$. Funktio f on ylöspäin puolijatkuva, jos jokaiselle $a \in M$ pätee $\limsup_{x \to a} f(x) \leq f(a)$.

Määritelmä 2.5. Olkoon $n < \omega$. Funktio $\Delta\colon [0,\infty)^n \to [0,\infty)$ on n-paikkainen moduli, jos se on

(i) kasvava,

(ii) subadditiivinen,

(iii) nolla argumentilla $\langle 0 \rangle_{i<n}$ ja

(iv) jatkuva.

Funktio $\Omega\colon [0,\infty)^\omega \to [0,\infty]$ on *heikko moduli*, jos se toteuttaa yllä olevat ehdot (i)–(iii), sekä on

(v) alaspäin puolijatkuva ja

(vi) jatkuva jokaisessa komponentissa erikseen.

Sanomme, että avaruuden M n-paikkainen funktio f noudattaa n-paikkaista modulia Δ, jos

$$d(f(x_0,\dots,x_{n-1}), f(y_0,\dots,y_{n-1})) \leq \Delta(d(x_0,y_0),\dots,d(x_{n-1},y_{n-1}))$$

kaikilla $x_0,\dots,x_{n-1},y_0,\dots,y_{n-1} \in M$.

Heikko moduli on työkalu, jonka avulla voimme määritellä erään sopivan palasen infinitaarisesta jatkuva-arvoisesta logiikasta. Heikon modulin Ω *typistys* pituuteen n on funktio $\Omega|_n\colon [0,\infty)^n \to [0,\infty]$, jolle

$$\Omega|_n(\delta_0,\dots,\delta_{n-1}) = \Omega(\delta_0,\dots,\delta_{n-1},0,0,\dots).$$

Heikkoja moduleita ei käytetä suoraan vaan pelkästään typistysten muodossa. Oikeastaan heikko moduli on siis vain uniformi tapa kerätä yhteen n-paikkainen moduli jokaista $n < \omega$ kohti: jokainen typistys on moduli, ja toisaalta typistykset määräävät heikon modulin täysin, mikä onkin lemman 2.7 sisältö. Kyseisen lemman todistus hoituu helpoiten käyttämällä toisenlaista alas- ja ylöspäin puolijatkuvuuden karakterisointia.

Lemma 2.6. Funktio $f\colon M \to [-\infty,\infty]$ on alaspäin puolijatkuva, jos ja vain jos $\{a \in M \mid f(a) > t\}$ on avoin joukko kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Funktio f on ylöspäin puolijatkuva, jos ja vain jos $\{a \in M \mid f(a) < t\}$ on avoin joukko kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

Todistus. Osoitamme väitteen alaspäin puolijatkuvuudelle. Ylöspäin puolijatkuvuus hoituu samalla tavalla.

Oletetaan ensin, että $\{x \in M \mid f(x) > t\}$ on avoin kaikilla $t \in \mathbb{R}$, ja kiinnitetään $a \in M$. Osoittaaksemme, että

$$\liminf_{x\to a} f(x) := \sup_{r>0} \inf_{0<d(x,a)<r} f(x) \geq f(a),$$

riittää näyttää, että kaikilla $t \in \mathbb{R}$ löytyy $r > 0$, jolle

$$f(a) > t \implies \inf_{0<d(x,a)<r} f(x) \geq t.$$

Olkoon siis $t \in \mathbb{R}$ ja $f(a) > t$. Nyt, koska $U := \{x \in M \mid f(x) > t\}$ on avoin ja $a \in U$, löytyy $r > 0$, jolle $B(a,r) \subseteq U$. Siten kaikilla $x \in B(a,r)$ pätee $f(x) > t$, joten $\inf_{0<d(x,a)<r} f(x) \geq t$. Tämä todistaa väitteen.

Oletetaan sitten, että $\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a)$ kaikilla $a \in M$, ja kiinnitetään $t \in \mathbb{R}$. Olkoon $a \in U := \{x \in M \mid f(x) > t\}$. Koska nyt $f(a) > t$ ja $\liminf_{x\to a} f(x) \geq f(a)$, löytyy $r > 0$, jolle $\inf_{0<d(x,a)<r} f(x) > t$. Tämä tarkoittaa, että kaikilla $x \in M$, joilla $d(x,a) < r$, pätee $f(x) > t$. Siispä $B(a,r) \subseteq U$. Täten U on avoin, mikä todistaa väitteen. □

Lemma 2.7. Olkoon Ω heikko moduli. Tällöin $\Omega|_n$ on n-paikkainen moduli, ja

$$\Omega(\delta) = \sup_{n<\omega} \Omega|_n(\delta(0),\dots,\delta(n-1))$$

kaikilla $\delta \in [0,\infty)^\omega$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\Omega|_n$ on n-paikkainen moduli. Koska määritelmän 2.5 kohdat (i)–(iii) sekä alaspäin puolijatkuvuus ovat selvästi typistyksille periytyviä ominaisuuksia, riittää näyttää, että $\Omega|_n$ on ylöspäin puolijatkuva, koska tällöin

$$\limsup_{\bar{x}\to\bar{\delta}} \Omega|_n(\bar{x}) \leq \Omega|_n(\bar{\delta}) \leq \liminf_{\bar{x}\to\bar{\delta}} \Omega|_n(\bar{x}),$$

eli $\lim_{\bar{x}\to\bar{\delta}} \Omega|_n(\bar{x}) = \Omega|_n(\bar{\delta})$, kaikilla $\bar{\delta} \in (0,\infty]^n$, joten $\Omega|_n$ on jatkuva. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $\bar{\delta}$ sellainen, että $\Omega|_n(\bar{\delta}) < t$. Koska $\Omega|_n$ on jatkuva jokaisessa koordinaatissa edelleen, löytyy luvulle δ_0 kuulaympäristö $B(\delta_0, r_0)$, jolle $\Omega|_n(x, \delta_1, \dots, \delta_{n-1}) < t$ kaikilla $x \in B(\delta_0, r_0)$. Edelleen löytyy r_1 niin, että kaikilla $x \in B(\delta_1, r_1)$ pätee $\Omega|_n(\delta_0 + r_0/2, x, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}) < t$. Näin jatkamalla löydämme luvut $r_0, \dots, r_{n-1}$, joille $\Omega|_n(\delta_0 + r_0/2, \dots, \delta_{n-1} + r_{n-1}/2) < t$. Koska $\Omega|_n$ on kasvava, voimme päätellä, että avoin joukko $U = \prod_{i<n} B(\delta_i, r_i/2)$ on pisteen $\bar{\delta}$ ympäristö, jolle kaikilla $\bar{x} \in U$ pätee $\Omega|_n(\bar{x}) < t$, joten $\bar{\delta} \in U \subseteq \{\bar{x} \in (0,\infty]^n \mid \Omega|_n(\bar{x}) < t\}$. Siis $\{\bar{x} \in (0,\infty]^n \mid \Omega|_n(\bar{x}) < t\}$ on avoin.

Osoitamme sitten, että $\Omega(\delta) = \sup_{n<\omega} \Omega|_n(\delta(0),\dots,\delta(n-1))$ kaikilla $\delta \in [0,\infty)^\omega$. Koska Ω on kasvava, pätee

$$\begin{aligned}\Omega(\delta) &= \Omega(\delta(0), \delta(1), \dots) \\ &\geq \Omega(\delta(0), \dots, \delta(n-1), 0, 0, \dots) \\ &= \Omega|_n(\delta(0), \dots, \delta(n-1))\end{aligned}$$

kaikilla $n < \omega$. Siten myös

$$\Omega(\delta) \geq \sup_{n<\omega} \Omega|_n(\delta(0),\dots,\delta(n-1)).$$

Toisaalta, koska Ω on alaspäin puolijatkuva, pätee

$$\Omega(\delta) \leq \liminf_{x \to \delta} \Omega(x) = \sup_{r>0} \inf_{0<d(x,\delta)<r} \Omega(x).$$

Nyt jokaiselle $r > 0$ löytyy $n_r < \omega$ niin, että

$$0 < d(\delta, \langle \delta(0), \ldots, \delta(n_r - 1), 0, 0, \ldots \rangle) < r,$$

sillä avaruuden $[0, \infty)^\omega$ topologialla on kanta, joka muodostuu joukoista $\prod_{i<\omega} U_i$, joissa vain äärellisen monella i pätee $U_i \neq (0, \infty]$. Siten

$$\begin{aligned}
\sup_{r>0} \inf_{0<d(x,\delta)<r} \Omega(x) &\leq \sup_{r>0} \Omega(\delta(0), \ldots, \delta(n_r - 1), 0, 0, \ldots) \\
&= \sup_{r>0} \Omega|_{n_r}(\delta(0), \ldots, \delta(n_r - 1)) \\
&\leq \sup_{n<\omega} \Omega|_n(\delta(0), \ldots, \delta(n-1)).
\end{aligned}$$

Siispä

$$\Omega(\delta) \leq \sup_{n<\omega} \Omega|_n(\delta(0), \ldots, \delta(n-1)).$$

□

Määritelmä 2.8. Sanomme, että heikko moduli Ω on kasvava siirtojen suhteen, jos jokaisella kasvavalla jonolla $\langle i_j \rangle_{j<\omega} \in \omega^\omega$ pätee $\Omega(\delta) \leq \Omega(\delta')$ kaikilla $\delta \in [0, \infty)^\omega$, missä $\delta'(i_j) = \delta(j)$, ja $\delta'(k) = 0$, jos $k \notin \{i_j \mid j < \omega\}$.

Kasvavuus siirtojen suhteen on ominaisuus, jota heikolta modulilta vaaditaan vain yhdessä todistuksessa, nimittäin lauseen 3.12. Onneksemme luvussa 3.4 määriteltävä universaali heikko moduli täyttää tämänkin vaatimuksen.

Toteamme tämän alaluvun lopuksi vielä tärkeän huomion jatkuvista funktioista, nimittäin sen, että jatkuvien funktioiden $K \to \mathbb{R}$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakti, avaruus on separoituva.

Lause 2.9 (Weierstrass)**.** Olkoon $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakti. Tällöin on olemassa numeroituva joukko $\mathcal{F}$ jatkuvia funktioita $K \to \mathbb{R}$, joille pätee seuraava: kaikilla jatkuvilla funktioilla $f\colon K \to \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $g \in \mathcal{F}$, jolle $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ kaikilla $x \in K$.

Todistus. Ks. [Rud76], Theorem 7.26 ja sitä seuraavat tulokset. □

2.2 Metriset struktuurit ja aakkostot

Haluamme määritellä metrisen struktuurin käsitteen samaan tapaan kuin tavallinen struktuuri määritellään klassisessa logiikassa mutta ottamalla struktuurin universumiksi metrisen avaruuden pelkän puhtaan joukon sijaan. Tätä varten tarvitsemme klassisia predikaatteja ja funktioita vastaavat metriset käsitteet. Olkoon $\langle M, d\rangle$ täydellinen, rajoitettu metrinen avaruus. Avaruuden M n-paikkainen predikaatti on mikä tahansa tasaisesti jatkuva funktio $M^n \to I$, missä I on jokin kompakti reaalilukuväli. Avaruuden M n-paikkainen funktio on mikä tahansa tasaisesti jatkuva funktio $M^n \to M$. Metrinen struktuuri on mikä tahansa tällainen täydellinen rajoitettu metrinen avaruus varustettuna predikaateilla, funktioilla ja nimetyillä alkioilla (vakioilla).

Metrinen aakkosto, kuten klassinen aakkostokin, on joukko predikaatti-, funktio- ja vakiosymboleita. Koska metristen struktuurien predikaatit ja funktiot ovat tasaisesti jatkuvia, aakkoston täytyy myös mainita, mitä jatkuvuusmodulia kunkin symbolin tulkinnan kuuluu noudattaa. Predikaattisymboleista tulee lisäksi eritellä, minkä reaalilukuvälin sisällä predikaatin arvot pysyvät. Aakkoston täytyy myös spesifioida maksimiläpimitta struktuureilleen.

Määritelmä 2.10. Metrinen aakkosto L on joukko predikaatti-, funktio- ja vakiosymboleita. Jokaiseen aakkostoon liittyvät funktiot

- $\#\colon L \to \omega \setminus \{0\}$, joka kuvaa jokaisen predikaatti- ja funktiosymbolin s sen paikkaluvulle $\#(s)$,
- $P \mapsto I_P$, joka kuvaa jokaisen predikaattisymbolin P jollekin kompaktille välille $I_P \subseteq \mathbb{R}$, ja
- $s \mapsto \Delta_s$, joka kuvaa jokaisen predikaatti- ja funktiosymbolin s jollekin $\#(s)$-paikkaiselle modulille $\Delta_s\colon\ [0,\infty)^{\#(s)} \to [0,\infty)$,

sekä positiivinen reaaliluku D_L, joka toimii ylärajana aakkoston struktuurien läpimitalle.

Huomautettakoon, että aakkoston määritelmän mukaan tyhjä aakkosto – aakkosto, jossa ei ole yhtään symbolia – määrää tyhjyydestään huolimatta silti struktuuriensa maksimiläpimitan D_L. Tässä mielessä tyhjä aakkosto ei ole yksikäsitteinen.

Määritelmä 2.11. Olkoon L metrinen aakkosto. L-struktuuri $\mathfrak{A}$ on jono $\langle A, d, \mathrm{Tul}\rangle$, missä $\langle A, d\rangle$ on rajoitettu, täydellinen metrinen avaruus, $d(A) \leq D_L$, ja Tul on funktio, jolle pätee $\mathrm{dom}(\mathrm{Tul}) = L$ sekä

- jos $P \in L$ on predikaattisymboli, niin $P^{\mathfrak{A}} := \mathrm{Tul}(P)$ on tasaisesti jatkuva funktio $A^{\#(P)} \to I_P$, joka noudattaa jatkuvuusmodulia Δ_P,
- jos $f \in L$ on funktiosymboli, niin $f^{\mathfrak{A}} := \mathrm{Tul}(f)$ on tasaisesti jatkuva funktio $A^{\#(f)} \to A$, joka noudattaa jatkuvuusmodulia Δ_f, ja
- jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin $c^{\mathfrak{A}} := \mathrm{Tul}(c) \in A$.

Joukko A on struktuurin $\mathfrak{A}$ *universumi*, ja merkitsemme sitä $\mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

Jos a on struktuurin $\mathfrak{A}$ alkio, kirjoitamme usein vain yksinkertaisesti $a \in \mathfrak{A}$ sen sijaan, että kirjoittaisimme $a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$. Vastaavasti jos f on funktio $\mathrm{dom}(\mathfrak{A}) \to \mathrm{dom}(\mathfrak{B})$, kirjoitamme $f\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$.

Esimerkki. Seuraavat ovat esimerkkejä metrisistä struktuureista.

(i) Jokainen rajoitettu täydellinen metrinen avaruus on (erään) tyhjän aakkoston struktuuri. Metriset avaruudet vastaavat puhtaita joukkoja klassisessa ensimmäisen kertaluvun logiikassa.

(ii) Normaali ensimmäisen kertaluvun struktuuri voidaan ajatella myös diskreettinä metrisenä struktuurina. Ks. luku 2.3.3.

(iii) Rajoittamattomat metriset avaruudet voidaan koodata monisorttisina struktuureina, missä sortit ovat kuulia $\bar{B}(a, n)$, $0 < n < \omega$, jollekin kiinnitetylle pisteelle a. Tällöin aakkostossa on jokaiselle sortille oma metriikka, nimittäin predikaatit d_n, jotka tulkitaan struktuurissa olemaan $d_n(x, y) = \min\{n, d(x, y)\}$. Viralliseksi metriikaksi voidaan ottaa d_1.

(iv) Kun osaamme koodata rajoittamattomia avaruuksia, voimme käsitellä esimerkiksi Banachin avaruuksia metrisinä struktuureina: normi $\|\cdot\|$ voidaan lisätä predikaattina (kullekin sortille erikseen), ja jokaista skalaaria c kohti funktio $x \mapsto cx$. Nollavektori voidaan lisätä vakioksi aakkostoon, ja mukavuussyistä sortit voidaan keskittää nollan ympärille.

(v) Hilbertin avaruudet voidaan käsitellä samoin kuin Banachin avaruudet. Sisätulon voi ottaa kaksipaikkaiseksi predikaatiksi aakkostoon.

(vi) Rajoitettu mitta-avaruus $\langle \Omega, \mathcal{F}, \mu \rangle$, missä $\mathcal{F}$ on joukon Ω sigma-algebra ja μ tämän mitta, voidaan ajatella metrisenä struktuurina seuraavasti: struktuurin universumiksi otetaan joukko $\mathcal{F}$, josta nollamittaiset joukot on samastettu keskenään, ja määritellään

$d(A, B) = \mu(A \Delta B)$, missä Δ on symmetrinen erotus. Struktuuriin lisätään funktioina operaatiot $\cup$, $\cap$ ja $A \mapsto A^c$, ja mitta μ lisätään predikaattina. Tyhjä joukko ja koko avaruus voidaan lisätä vakioiksi.

Moni struktuureihin liittyvä käsite yleistyy luonnollisella tavalla metriseen kontekstiin. Esimerkiksi isomorfismin määritelmä on muutoin käytännössä sama kuin klassisessa tapauksessa, mutta yhtälöiden säilyttämisen sijaan isomorfismin vaaditaan säilyttävän etäisyydet.

Määritelmä 2.12. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ L-struktuureja. Funktio $\pi \colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ on isomorfismi, jos

(i) se on bijektio,

(ii) se on isometria eli kaikilla $a, a' \in \mathfrak{A}$ pätee $d(\pi(a), \pi(a')) = d(a, a')$,

(iii) jos $c \in L$ on vakiosymboli, niin $\pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$,

(iv) jos $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{A}$, niin $\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_0), \ldots, \pi(a_{n-1}))$, sekä

(v) jos $P \in L$ on n-paikkainen predikaattisymboli ja $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{A}$, niin $P^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = P^{\mathfrak{B}}(\pi(a_0), \ldots, \pi(a_{n-1}))$.

Jos struktuurien $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ välille löytyy isomorfismi, sanomme, että struktuurit ovat isomorfisia ja kirjoitamme $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

2.3 Jatkuva-arvoinen logiikka

Tarvitsemme nyt uudenlaisen logiikan, jolla voimme puhua metrisistä struktuureista, sillä klassinen ensimmäisen kertaluvun logiikka sopii metristen struktuurien kuvailuun hieman huonosti. Tähän tarkoitukseen sopii kuitenkin niin kutsuttu jatkuva-arvoinen (ensimmäisen kertaluvun) logiikka. Esimerkiksi Hilbertin avaruudet eivät ole klassisessa ensimmäisen kertaluvun logiikassa aksiomatisoitavissa ja niiden teorialla on hyvin huonosti käyttäytyviä malleja, kun taas jatkuva-arvoisessa logiikassa Hilbertin avaruudet voidaan aksiomatisoida (ks. [BBHU08], luku 15).

2.3.1 Syntaksi

Jatkuva-arvoisen logiikan loogiset symbolit ovat

- muuttujasymbolit: kiinnitetään ääretön (yleensä numeroituva), joukko muuttujasymboleita $\mathrm{Var} = \{v_i \mid i < \omega\}$;

- metriikkasymboli d;
- jokaista jatkuvaa funktiota $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kohti n-paikkainen konnektiivisymboli; sekä
- kvanttorit sup ja inf.

Kuten klassisessa logiikassa yleensä käytetään symbolia $=$ tarkoittamaan sekä syntaksin identiteettisymbolia että semantiikan todellista identiteettirelaatiota, viittaamme symbolilla d sekä metrisen struktuurin metriikkaan että logiikan symboliin – vaikkakin saatamme joskus kirjoittaa selkeyden vuoksi $d^{\mathfrak{A}}$ viitatessamme struktuurin $\mathfrak{A}$ metriikkaan. Käytämme myös samaa symbolia konnektiivista sekä sen tulkinnasta. Samoin sup ja inf voivat tarkoittaa sekä syntaksin kvanttoreita että semantiikan supremumeja ja infimumeja. Sekaannuksen vaaraa ei ole.

Yleisiä konnektiiveja ovat esimerkiksi kaksipaikkaiset hilaoperaatiot infimum $\wedge$ (engl. *meet*) ja supremum $\vee$ (engl. *join*), joille

$$\begin{aligned} x \wedge y &:= \wedge(x,y) = \min\{x,y\} \text{ ja} \\ x \vee y &:= \vee(x,y) = \max\{x,y\}. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Jokainen reaaliluku $r \in \mathbb{R}$ voidaan ajatella vakiofunktiona ja siten n-paikkaisena konnektiivina mille tahansa $n < \omega$. Toisaalta r voidaan ajatella myös yksipaikkaisena konnektiivina $x \mapsto rx$. Muita yleisiä konnektiiveja ovat $+$ ja $-$, tai, mikäli totuusarvojen joukko on rajoitettu esimerkiksi välille $[0,1]$, "pistemiinus"

$$x \dot{-} y := \max\{0, x-y\},$$

sekä itseisarvo $x \mapsto |x|$.

Määritelmä 2.13. Olkoon L metrinen aakkosto. L-termien joukko määritellään seuraavasti:

(i) Jokainen muuttujasymboli v_i on L-termi.

(ii) Jokainen vakiosymboli $c \in L$ on L-termi.

(iii) Jos $t_0, \dots, t_{n-1}$ ovat L-termejä ja $f \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli, niin $f(t_0, \dots, t_{n-1})$ on L-termi.

Termit ovat siis syntaktisesti täysin samat kuin klassisessa logiikassa.

Määritelmä 2.14. Olkoon L metrinen aakkosto. L-atomikaavat määritellään seuraavasti:

(i) Jos t_0 ja t_1 ovat L-termejä, niin $d(t_0, t_1)$ on L-atomikaava.

(ii) Jos $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli ja $t_0, \ldots, t_{n-1}$ ovat L-termejä, niin $R(t_0, \ldots, t_{n-1})$ on L-atomikaava.

Määritelmä 2.15. Olkoon L metrinen aakkosto. L-kaavat määritellään seuraavasti:

(i) L-atomikaavat ovat L-kaavoja.

(ii) Jos $\phi_0, \ldots, \phi_{n-1}$ ovat L-kaavoja ja u on jatkuva funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, niin $u(\phi_0, \ldots, \phi_{n-1})$ on L-kaava.

(iii) Jos ϕ on L-kaava ja $v_i \in \mathrm{Var}$, niin $\sup_{v_i} \phi$ ja $\inf_{v_i} \phi$ ovat L-kaavoja.

Peruskäsitteet, kuten kaavan vapaat muuttujat ja lauseet, määritellään täysin samoin kuin ensimmäisen kertaluvun logiikassa (kvanttoreina toimivat inf ja sup).

2.3.2 Semantiikka

Koska termit jatkuva-arvoisessa logiikassa ovat täysin samat kuin klassisessakin logiikassa, myös termin tulkinta struktuureissa määritellään samoin kuin klassisessa tapauksessa (ks. määritelmä 1.4). Ainoa ero klassisten ja metristen termien välillä on se, että metrinen aakkosto antaa funktiosymboleille jatkuvuusmodulit, joita näiden tulkintojen vaaditaan noudattavan, jolloin jokaiselle termille määräytyy jokin jatkuvuusmoduli (ks. lemma 2.17), kun taas klassinen aakkosto ei tee moisia vaatimuksia.

Määritellään nyt jatkuva-arvoisen logiikan kaavojen tulkinta metrisissä struktuureissa.

Määritelmä 2.16. Olkoon L metrinen aakkosto, $\mathfrak{A}$ L-struktuuri ja $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ L-kaava. Kaavan ϕ tulkinta struktuurissa $\mathfrak{A}$ on funktio $\phi^{\mathfrak{A}} \colon M^n \to \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti:

(i) Jos $\phi = d(t_0, t_1)$ L-termeille $t_0(x_0, \ldots, x_{n-1})$ ja $t_1(x_0, \ldots, x_{n-1})$, niin

$$\phi^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = d\left(t_0^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}), t_1^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\right)$$

kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

(ii) Jos $\phi = P(t_0, \ldots, t_{m-1})$ jollekin m-paikkaiselle predikaattisymbolille $P \in L$ ja termeille $t_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, t_{m-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$, niin

$$\phi^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = P^{\mathfrak{A}}\left(t_0^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\right)$$

kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

(iii) Jos $\phi = u(\psi_0, \ldots, \psi_{m-1})$ jollekin funktiolle $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ja L-kaavoille $\psi_0(x_0, \ldots, x_{n-1}), \ldots, \psi_{m-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})$, niin

$$\phi^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = u\left(\psi_0^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, \psi_{m-1}^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})\right)$$

kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

(iv) Jos $\phi = \sup_{v_i} \psi(v_i, x_0, \ldots, x_{n-1})$ jollekin L-kaavalle ψ ja muuttujalle v_i, niin

$$\phi^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sup\left\{\psi^{\mathfrak{A}}(b, a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})\right\}$$

kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

(v) Jos $\phi = \inf_{v_i} \psi(v_i, x_0, \ldots, x_{n-1})$ jollekin L-kaavalle ψ ja muuttujalle v_i, niin

$$\phi^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \inf\left\{\psi^{\mathfrak{A}}(b, a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})\right\}$$

kaikilla $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$.

Funktion $\phi^{\mathfrak{A}}$ arvoja kutsutaan kaavan ϕ totuusarvoiksi (tai lyhyesti kaavan arvoiksi).

Määritelmän kahdesta viimeisestä kohdasta huomautettakoon, että täytyy vielä todistaa, että kvanttoreita sisältävän kaavan totuus on hyvin määritelty (eli supremumit ja infimumit ovat todella olemassa).

Myös ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavojen tulkinnan struktuurissa M voisi määritellä funktioina $M^n \to \{0, 1\}$ totuuden käsitteen muuttumatta. Tärkeää jatkuva-arvoisen logiikan kannalta on, että kaavojen tulkinnat ovat itse asiassa tasaisesti jatkuvia ja rajoitettuja.

Lemma 2.17. Olkoon $t(\bar{x})$ L-termi, $\bar{x} = \langle x_0, \ldots, x_{n-1}\rangle \in \mathrm{Var}^n$. Tällöin on olemassa n-paikkainen moduli Δ_t, jota $t^{\mathfrak{A}}$ noudattaa kaikilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$.

Todistus. Todistus etenee induktiolla termin rakenteen suhteen.

Jos $t = x_i$ jollekin $i < n$, niin $t^{\mathfrak{A}}$ noudattaa modulia pr_i, sillä

$$d(t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), t^{\mathfrak{A}}(\bar{b})) = d(a_i, b_i) = \mathrm{pr}_i\left(\langle d(a_i, b_i)\rangle_{i<n}\right).$$

Jos $t = c$ jollekin vakiosymbolille $c \in L$, niin selvästi $t^{\mathfrak{A}}$ noudattaa vakiofunktiota 0.

Jos $t = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ m-paikkaiselle funktiosymbolille $f \in L$ sekä termeille $t_0, \ldots, t_{m-1}$, jotka noudattavat moduleita Δ_{t_i}, niin t noudattaa modulia $\bar{\delta} \mapsto \Delta_f(\Delta_{t_0}(\bar{\delta}), \ldots, \Delta_{t_{m-1}}(\bar{\delta}))$. Nimittäin jos $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$, niin

$$\begin{aligned} d(t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), t^{\mathfrak{A}}(\bar{b})) &= d(f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})), f^{\mathfrak{A}}(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{b}), \ldots, t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{b}))) \\ &\leq \Delta_f(d(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{b})), \ldots, d(t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), t_{m-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{b}))) \\ &\leq \Delta_f(\Delta_{t_0}(\langle d(a_i, b_i)\rangle_{i<n}), \ldots, \Delta_{t_{m-1}}(\langle d(a_i, b_i)\rangle_{i<n})), \end{aligned}$$

sillä Δ_f on modulina kasvava. □

Lemma 2.18. Olkoon $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ L-atomikaava. Tällöin on olemassa sellainen kompakti reaalilukuväli I_ϕ sekä n-paikkainen jatkuvuusmoduli Δ_ϕ, että $\phi^{\mathfrak{A}}$ noudattaa modulia Δ_ϕ ja $\mathrm{ran}(\phi^{\mathfrak{A}}) \subseteq I_\phi$ kaikilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$.

Todistus.

(i) Jos $\phi = P(t_0, \ldots, t_{n-1})$ predikaattisymbolille $P \in L$ ja termeille $t_0(\bar{x}), \ldots, t_{n-1}(\bar{x})$, niin koska predikaatin $P^{\mathfrak{A}}$ arvot ovat jokaisessa struktuurissa $\mathfrak{A}$ kompaktilla välillä I_P, voidaan valita $I_\phi = I_P$. Koska $P^{\mathfrak{A}}$ noudattaa modulia Δ_P ja lemman 2.17 nojalla termit t_i moduleita Δ_{t_i}, noudattaa kaava ϕ modulia $\bar{\delta} \mapsto \Delta_P(\Delta_{t_0}(\bar{\delta}), \ldots, \Delta_{t_{n-1}}(\bar{\delta}))$ (tämän voi perustella täsmälleen samalla argumentilla kuin Lemman 2.17 funktiosymbolitodistuksessa).

(ii) Jos $\phi = d(t_0, t_1)$ termeille t_0 ja t_1, niin koska $d(\mathfrak{A}) \leq D_L$ jokaisella L-struktuurilla $\mathfrak{A}$, voidaan valita $I_\phi = [0, D_L]$. Koska metriikka d, olipa $\mathfrak{A}$ mikä tahansa L-struktuuri, on 1-Lipschitz avaruudessa $\langle \mathfrak{A}^2, e_1 \rangle$, missä $e_1(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = d(x, x') + d(y, y')$, niin d noudattaa modulia $\langle x, y\rangle \mapsto x + y$. Siten funktioksi Δ_ϕ voidaan valita $\bar{\delta} \mapsto \Delta_{t_0}(\bar{\delta}) + \Delta_{t_1}(\bar{\delta})$.

□

Lause 2.19. Olkoon $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ L-kaava. Tällöin on olemassa sellainen kompakti reaalilukuväli I_ϕ sekä n-paikkainen jatkuvuusmoduli Δ_ϕ, että $\phi^{\mathfrak{A}}$ noudattaa modulia Δ_ϕ ja $\mathrm{ran}(\phi^{\mathfrak{A}}) \subseteq I_\phi$ kaikilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$.

Todistus. Todistus etenee induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen.

(i) Jos ϕ on atomikaava, niin väite seuraa lemmasta 2.18.

(ii) Jos $\phi = u(\psi_0, \ldots, \psi_{m-1})$ joillekin kaavoille $\psi_0, \ldots, \psi_{m-1}$ ja jatkuvalle funktiolle $u\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, niin koska induktio-oletuksen nojalla kaavat ψ_i saavat arvonsa kompakteilla väleillä I_{ψ_i} ja kompaktin yhtenäisen joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti ja yhtenäinen, voidaan valita $I_\phi = u[I_{\psi_0} \times \cdots \times I_{\psi_{m-1}}]$ (joka on kompaktina ja yhtenäisenä reaalilukujen osajoukkona kompakti väli). Koska induktio-oletuksen nojalla kaavat ψ_i noudattavat moduleita Δ_{ψ_i} ja u on jatkuvana funktiona tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa $I_{\psi_0} \times \cdots \times I_{\psi_{m-1}}$ eli noudattaa siellä jotakin modulia Δ_u, niin ϕ noudattaa modulia $\bar{\delta} \mapsto \Delta_u(\Delta_{\psi_0}(\bar{\delta}), \ldots, \Delta_{\psi_{m-1}}(\bar{\delta}))$.

(iii) Jos $\phi = \sup_{v_i} \psi(v_i, \bar{x})$, niin koska induktio-oletuksen nojalla funktion $\psi^{\mathfrak{A}}$ arvot ovat kompaktilla välillä I_ψ, myös $\sup\left\{\psi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) \mid b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})\right\} \in I_\psi$ kaikilla $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$. Koska ψ noudattaa $n+1$-paikkaista modulia Δ_ψ, voimme huomata, että ϕ noudattaa modulia $\bar{\delta} \mapsto \Delta_\psi(0, \bar{\delta})$: olkoot $\bar{a}, \bar{b} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$. Etäisyys $d(\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b}))$ on kaavojen arvojen erotus jomminkummin päin. Tapaukset ovat symmetriset, joten voidaan olettaa, että

$$d(\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b})) = \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b}).$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt supremumin ominaisuuksien perusteella löytyy $c \in \mathfrak{A}$, jolle

$$\begin{aligned}
\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) &= \sup_{c' \in \mathfrak{A}} \psi^{\mathfrak{A}}(c', \bar{a}) - \sup_{c' \in \mathfrak{A}} \psi^{\mathfrak{A}}(c', \bar{b}) \\
&\leq \varepsilon + \psi^{\mathfrak{A}}(c, \bar{a}) - \sup_{c' \in \mathfrak{A}} \psi^{\mathfrak{A}}(c', \bar{b}) \\
&\leq \varepsilon + \psi^{\mathfrak{A}}(c, \bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(c, \bar{b}) \\
&\leq \varepsilon + \left|\psi^{\mathfrak{A}}(c, \bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(c, \bar{b})\right| \\
&\leq \varepsilon + \Delta_\psi(d(c, c), d(a_0, b_0), \ldots, d(a_{n-1}, b_{n-1})) \\
&= \varepsilon + \Delta_\psi(0, \langle d(a_i, b_i)\rangle_{i<n}).
\end{aligned}$$

Koska ε oli mielivaltainen, pätee

$$\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \leq \Delta_\psi(0, \langle d(a_i, b_i)\rangle_{i<n}),$$

mikä oli todistettava.

(iv) Jos $\phi = \inf_{v_i} \psi(v_i, \bar{x})$, sen arvot ovat jälleen välillä I_ψ ja se noudattaa modulia $\delta \mapsto \Delta_\psi(0, \delta)$. Todistus on samanlainen kuin supremumin tapauksessa.

□

Lauseesta 2.19 seuraa, että jatkuva-arvoisen logiikan semantiikka on hyvin määritelty.

Katsellessa L-kaavan määritelmää, saattaa helposti herätä huoli kaavojen lukumäärästä – jatkuvia funktioita $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kun on kontinuumin verran ja jokainen niistä sallitaan konnektiiviksi. Osoittautuu kuitenkin, että numeroituva määrä[2] konnektiiveja riittää muodostamaan sellaisen fragmentin jatkuva-arvoisesta logiikasta, jonka kaavoilla pystyy approksimoimaan mielivaltaista kaavaa mielivaltaisen tarkasti.

Lause 2.20. Olkoon L aakkosto, κ ääretön kardinaali ja $|L| \leq \kappa$. Tällöin on olemassa joukko $\mathcal{F}$ L-kaavoja, $|\mathcal{F}| \leq \kappa$, jolle seuraava väite pätee: jokaiselle L-kaavalle $\phi(\bar{x})$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $\psi(\bar{x}) \in \mathcal{F}$, joille jokaisessa L-struktuurissa $\mathfrak{A}$ pätee

$$\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right| < \varepsilon$$

kaikilla $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$.

Todistus. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että predikaattien arvoväli on $[0,1]$.[3] Olkoon $\{u_i^n \mid i < \omega\}$ tiheä joukko jatkuvia funktioita $[0,1]^n \to [0,1]$ kullakin n; toisin sanoen jokaiselle $u\colon [0,1]^n \to [0,1]$ ja $\varepsilon > 0$ löytyy $i < \omega$, jolle $\left|u(t_0,\dots,t_{n-1}) - u_i^n(t_0,\dots,t_{n-1})\right| < \varepsilon$ kaikilla $t_0,\dots,t_{n-1} \in [0,1]$. Nämä ovat olemassa lauseen 2.9 nojalla. Määrittelemme kaavajoukon $\mathcal{F}$ seuraavasti:

(i) Jos ϕ on atomikaava, niin $\phi \in \mathcal{F}$.

(ii) Jos $\phi_0,\dots,\phi_{n-1} \in \mathcal{F}$ ja $i < \omega$, niin $u_i^n(\phi_0,\dots,\phi_{n-1}) \in \mathcal{F}$.

(iii) Jos $\phi \in \mathcal{F}$, niin $\sup_{v_k} \phi, \inf_{v_k} \phi \in \mathcal{F}$.

Selvästi $|\mathcal{F}| = \aleph_0 \cdot |L| \leq \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$.

Osoitamme, että joukolla $\mathcal{F}$ on haluttu approksimointiominaisuus. Olkoon $\phi(\bar{x})$ L-kaava. Todistamme induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen, että jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $\psi(\bar{x}) \in \mathcal{F}$, jolle $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right| < \varepsilon$ kaikissa struktuureissa kaikilla jonoilla $\bar{a}$.

Jos ϕ on atominen, väite on selvä. Jos $\phi = \inf_{v_k} \theta(v_k, \bar{x})$ ja $\varepsilon > 0$, niin induktio-oletuksen nojalla löytyy $\theta'(v_k, \bar{x}) \in \mathcal{F}$, jolle

[2] Itse asiassa jopa äärellinen määrä riittäisi, mutta emme paneudu tähän enempää, sillä kaavajoukoista tulee joka tapauksessa äärettömiä.

[3] Jos näin ei ole, voimme tehdä vastaavan konstruktion jokaiselle L:n äärelliselle osajoukolle erikseen ja ottaa näistä yhdisteen. Koska $\kappa^{<\omega} = \kappa$, hajauttaminen ei riko vaatimusta fragmentin koolle.

$\left|\theta^{\mathfrak{A}}(b,\bar{a}) - (\theta')^{\mathfrak{A}}(b,\bar{a})\right| < \varepsilon/2$ kaikissa struktuureissa kaikilla jonoilla. Valitaan $\psi(\bar{x}) = \inf_{v_k} \theta'$. Kiinnitetään struktuuri $\mathfrak{A}$ ja jono $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$. Symmetrian nojalla voimme olettaa, että $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \geq \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Nyt infimumin ominaisuuksien perusteella löytyy $c \in \mathfrak{A}$, jolle

$$\begin{aligned}
\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right| &= \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \inf_{b\in\mathfrak{A}} \theta^{\mathfrak{A}}(b,\bar{a}) - \inf_{b\in\mathfrak{A}} (\theta')^{\mathfrak{A}}(b,\bar{a}) \\
&\leq \inf_{b\in\mathfrak{A}} \theta^{\mathfrak{A}}(b,\bar{a}) + \frac{\varepsilon}{2} - (\theta')^{\mathfrak{A}}(c,\bar{a}) \\
&\leq \theta^{\mathfrak{A}}(c,\bar{a}) + \frac{\varepsilon}{2} - (\theta')^{\mathfrak{A}}(c,\bar{a}) \\
&\leq \left|\theta^{\mathfrak{A}}(c,\bar{a}) - (\theta')^{\mathfrak{A}}(c,\bar{a})\right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tapaus $\phi = \sup_{v_k} \theta(v_k, \bar{x})$ on samanlainen.

Jos $\phi = u(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})$ ja $\varepsilon > 0$, niin olkoon $i < \omega$ sellainen, että $\left|u - u_i^n\right| < \varepsilon/2$. Tästä seuraa, että kaikilla $t_0, \ldots, t_{n-1} \in [0,1]$ pätee $u(t_0, \ldots, t_{n-1}) < u_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1}) + \varepsilon/2$. Koska u_i^n on tasaisesti jatkuva, niin löytyy $\delta > 0$, jolle kaikilla $t_0, \ldots, t_{n-1}, t'_0, \ldots, t'_{n-1} \in [0,1]$ pätee

$$\left|t_j - t'_j\right| < \delta \text{ kaikilla } j < m \implies \left|u_i^n(t_0, \ldots, t_{n-1}) - u_i^n(t'_0, \ldots, t'_{n-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Induktio-oletuksen perusteella löytyy kaavat $\theta'_j \in \mathcal{F}$, $j < n$, joille pätee $\left|\theta_i^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - (\theta'_i)^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right| < \delta$ kaikissa struktuureissa kaikilla jonoilla. Valitsemme nyt $\psi = u_i^n(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1})$. Kiinnitetään struktuuri $\mathfrak{A}$ ja jono $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$. Jälleen voidaan olettaa, että $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \geq \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Nyt

$$\begin{aligned}
\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})\right| &= \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \\
&= u(\theta_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, \theta_{n-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) - u_i^n((\theta'_0)^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, (\theta'_{n-1})^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \\
&< u_i^n(\theta_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, \theta_{n-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\quad - u_i^n((\theta'_0)^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, (\theta'_{n-1})^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \\
&\leq \Big|u_i^n(\theta_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, \theta_{n-1}^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) \\
&\quad - u_i^n((\theta'_0)^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), \ldots, (\theta'_{n-1})^{\mathfrak{A}}(\bar{a}))\Big| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Jos X on topologinen avaruus, niin sen tiheysluku on

$$\mathrm{density}(X) := \min \{|A| : A \text{ on tiheä avaruudessa } X\},$$

toisin sanoen pienin tiheän joukon mahtavuus avaruudessa X. Lause 2.20 kertoo, että jos varustamme L-kaavojen joukon *kaavojen loogisella etäisyydellä*

$$d(\phi, \psi) = \sup_{\mathfrak{A}, \bar{a}} \left| \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \right|,$$

joka on selvästi pseudometriikka, saadun topologisen avaruuden tiheysluku on $|L| + \aleph_0$. Erityisesti, jos L on numeroituva, kaavojen avaruus on separoituva.

2.3.3 Totuusarvot ja L-ehdot

Klassisessa propositiologiikassa on usein tapana merkitä totuusarvoa luvuilla 0 ja 1. Tosien lauseiden totuusarvo on 1 ja epätosien 0. Tämän voi yleistää ensimmäisen kertaluvun logiikkaan (sekä sen laajennoksiin) määrittelemällä kaavan arvo funktioksi, joka kuvaa annetun jonon struktuurin alkioita totuusarvojoukolle $\{0, 1\}$. Siis jos $\phi(\bar{x})$ on kaava ja $\mathfrak{A}$ struktuuri, niin kaavan ϕ totuusfunktio struktuurissa $\mathfrak{A}$ on funktio $\phi^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}^n \to \{0, 1\}$, jolle $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = 1$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$ Tarskin totuusmääritelmän mielessä.

Yleistämällä totuusarvojen joukko kaksiosta $\{0, 1\}$ väliksi $[0, 1]$ saadaan jatkuva-arvoinen vastine kaavan tulkinnalle. Nopeasti kuitenkin huomataan seuraava seikka. Metriikan on tarkoitus olla jatkuva-arvoinen vastine klassisen logiikan yhtäsuuruudelle. Kuitenkin kaksi alkiota a ja b ovat samat, jos $d(a, b) = 0$ eli jos $(d(v_0, v_1))^{\mathfrak{A}}(a, b) = 0$. Jos taas $(d(v_0, v_1))^{\mathfrak{A}}(a, b) = 1$, alkiot a ja b ovat mitä suurimmassa määrin eri otuksia. Totuusarvot 0 ja 1 näyttävät siis metriikan tapauksessa vaihtavan paikkaa niin, että 0 on "tosi". Helpompaa kuin yrittää jollain keinotekoisella tavalla kääntää totuusarvot oikein päin on hyväksyä se, että kaava on niin totta kuin se mitenkään voi silloin, kun sen arvo on nolla. Tästä syystä sup toimittaa universaali- ja inf eksistenssikvanttorin virkaa – vaikka todellisuudessa inf on pikemminkin "melkein on olemassa" -kvanttori, kuten pian nähdään.

Toinen muutos, joka seuraa siitä, että nolla on täysin tosi totuusarvo, on se, että disjunktion roolia toimittava funktio sekä konjunktion roolia toimittava funktio vaihtavat roolejaan. Klassisessa propositiologiikassa voidaan määritellä konjunktion totuusfunktioksi minimi ja disjunktion totuusfunktioksi maksimi, jolloin nämä vastaavat täysin hilanotaatiota (2.3.1): jos v on totuusjakauma, niin

$$v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\} =: v(p) \wedge v(q)$$

(molemmat totuusarvot ovat ykkösiä täsmälleen silloin, kun niistä pienempi on) ja

$$v(p \vee q) = \max\{v(p), v(q)\} =: v(p) \vee v(q)$$

(molemmat totuusarvot ovat nollia täsmälleen silloin, kun suurempi niistä on). Jos totuusarvot 0 ja 1 vaihtavat roolejaan, luonnollisesti myös funktio $\wedge$ muuttuu disjunktioksi ja funktio $\vee$ konjunktioksi.

Määritelmä 2.21. Olkoon L sellainen aakkosto, että jokaisen predikaattisymbolin arvoväli on $[0,1]$ ja $D_L = 1$. Jos $\phi(\bar{x})$ on L-kaava, kutsumme muodollista yhtälöä $\phi = 0$ L-ehdoksi. Sanomme, että struktuuri $\mathfrak{A}$ toteuttaa L-ehdon $\phi = 0$ jonolla $\bar{a}$, mikäli $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = 0$, ja merkitsemme $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) = 0)$. Mikäli ϕ on lause, kirjoitamme $\mathfrak{A} \models (\phi = 0)$ ja sanomme tällöin, että $\mathfrak{A}$ on lauseen ϕ malli.

Käytämme ilmausta $\phi = \psi$ lyhennysmerkintänä L-ehdolle $|\phi - \psi| = 0$. Määritelmä on semanttisesti järkevä, toisin sanoen $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) = \psi(\bar{a}))$, jos ja vain jos $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Lisäksi koska jokainen reaaliluku r (ajateltuna vakiofunktiona) on konnektiivi, voimme ajatella ilmausta $\phi = r$ L-ehtona.

Lemma 2.22. Jos $\mathfrak{A}$ on L-struktuuri $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$, niin

(i) $\mathfrak{A} \models (\sup_{v_k} \phi(v_k, \bar{a}) = 0)$, jos ja vain jos $\mathfrak{A} \models (\phi(b, \bar{a}) = 0)$ kaikilla $b \in \mathfrak{A}$,

(ii) $\mathfrak{A} \models (\inf_{v_k} \phi(v_k, \bar{a}) = 0)$, jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $b \in \mathfrak{A}$, jolle $\phi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) < \varepsilon$.

(iii) $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) \wedge \psi(\bar{a}) = 0)$, jos ja vain jos joko $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) = 0)$ tai $\mathfrak{A} \models (\psi(\bar{a}) = 0)$, sekä

(iv) $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) \vee \psi(\bar{a}) = 0)$, jos ja vain jos sekä $\mathfrak{A} \models (\phi(\bar{a}) = 0)$ että $\mathfrak{A} \models (\psi(\bar{a}) = 0)$.

Todistus. (i) Mikäli $\sup_{b \in \mathfrak{A}} \phi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) = 0$, niin jokaisella $b' \in \mathfrak{A}$ pätee

$$0 \leq \phi^{\mathfrak{A}}(b', \bar{a}) \leq \sup_{b \in \mathfrak{A}} \phi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) = 0.$$

Toisaalta mikäli jokaisella $b \in \mathfrak{A}$ pätee $\phi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) = 0$, niin 0 on joukon $\{\phi^{\mathfrak{A}}(b, \bar{a}) \mid b \in \mathfrak{A}\}$ yläraja, jolloin myös joukon supremum on 0.

(ii) Infimumin perusominaisuus on, että luku $I \in \mathbb{R}$ on reaalilukujoukon A infimum, jos ja vain jos jokaiselle $\varepsilon > 0$ löytyy $a \in A$, jolle $a < I + \varepsilon$. Tämä on täsmälleen todistettava väite.

(iii) Jos kahden luvun minimi on nolla, pienempi luvuista on nolla, ja toisaalta jos jompikumpi on nolla, niin koska nolla on pienin mahdollinen arvo kaavalle, sen on oltava minimi näistä kahdesta.

(iv) Duaalinen argumentti edellisen kohdan argumentille.

□

Lemman 2.22 valossa voisimme yksinkertaisesti määritellä notaatiomme uudestaan niin, että symbolit $\wedge$ ja $\vee$ vastaisivat tavalliseen tapaan konjunktiota ja disjunktiota, mutta kirjallisuudessa hilanotaatio vaikuttaisi olevan yleisempi tulkinta näille symboleille.

Lopuksi osoitamme, että klassiset struktuurit voidaan tulkita diskreeteiksi metrisiksi struktuureiksi ilman, että klassisen ensimmäisen kertaluvun logiikan totuuskäsite muuttuu. Olkoon L klassinen aakkosto, ja olkoon L^* metrinen aakkosto, jonka symbolit ovat L:n symbolit, predikaattisymboleiden arvovälit ovat $[0,1]$, $D_{L^*} = 1$ ja n-paikkaisten funktio- ja predikaattisymboleiden jatkuvuusmodulit ovat mikä tahansa n-paikkainen moduli Δ, jolle $\Delta(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}) \geq 1$ aina, jos $\delta_i = 1$ jollain $i < n$. Koska metriset funktio- ja vakiosymbolit käyttäytyvät syntaktisesti kuin klassisessa logiikassa, klassiset termit ovat metrisiä termejä ja päinvastoin. Määrittelemme klassisen ensimmäisen kertaluvun logiikan kaavalle ϕ jatkuva-arvoisen käännöksen ϕ^* seuraavasti:

(i) jos ϕ on $t_0 = t_1$, niin ϕ^* on $d(t_0, t_1)$,

(ii) jos $\phi = P(t_0, \dots, t_{n-1})$, niin $\phi^* = \phi$,

(iii) jos $\phi = \psi \wedge \theta$, niin $\phi^* = \psi^* \vee \theta^*$,

(iv) jos $\phi = \neg\psi$, niin $\phi^* = 1 \dot{-} \psi^*$, ja

(v) jos $\phi = \exists v_i \psi$, niin $\phi^* = \inf_{v_i} \psi^*$.

Määrittelemme sitten klassiselle L-struktuurille $\mathfrak{A}$ metrisen L^*-struktuurin $\mathfrak{A}^*$ seuraavasti:

(i) $\mathrm{dom}(\mathfrak{A}^*) = \mathrm{dom}(\mathfrak{A})$ ja $d^{\mathfrak{A}^*}$ on diskreetti metriikka,

(ii) jokaisella predikaattisymbolilla $P \in L$, $P^{\mathfrak{A}^*}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 0$, jos $\mathfrak{A} \models P(a_0, \dots, a_{n-1})$, ja $P^{\mathfrak{A}^*}(a_0, \dots, a_{n-1}) = 1$ muulloin,

(iii) jokaisella funktiosymbolilla $f \in L$,

$$f^{\mathfrak{A}^*}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f^{\mathfrak{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1}),$$

ja

(iv) jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$, $c^{\mathfrak{A}^*} = c^{\mathfrak{A}}$.

Määritelmästä on selvää, että $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a})$ kaikilla termeillä $t(\bar{x})$ ja $\bar{a} \in \mathrm{dom}(\mathfrak{A})^n$, joten metristen ja klassisten termien välille ei ole tarpeen tehdä mitään eroa myöskään semanttisesti.

Lause 2.23. Kaikilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$, L-kaavoilla $\phi(\bar{x})$ ja $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ pätee

$$(\phi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathfrak{A} \models \phi(\bar{a}), \\ 1 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Erityisesti

$$\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a}) \iff \mathfrak{A}^* \models (\phi^*(\bar{a}) = 0).$$

Todistus. Osoitamme väitteen induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen.

(i) Oletetaan ensin, että ϕ on $t_0 = t_1$. Jos $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, niin $t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$, jolloin $d^{\mathfrak{A}^*}(t_0^{\mathfrak{A}}(\bar{a}), t_1^{\mathfrak{A}}(\bar{a})) = 0$. Koska termien tulkinnat ovat kummassakin logiikassa samat, $d(t_0^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}), t_1^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a})) = 0$. Siis $\mathfrak{A}^* \models (\phi^*(\bar{a}) = 0)$. Vastaavasti, jos $\mathfrak{A} \not\models \phi(\bar{a})$, niin $d^{\mathfrak{A}^*}(t_0^{\mathfrak{A}}, t_1^{\mathfrak{A}}) \neq 0$, jolloin etäisyys on diskreettiyden perusteella 1 ja siten $\mathfrak{A}^* \models (\phi^*(\bar{a}) = 1)$.

(ii) Jos $\phi = P(t_0, \ldots, t_{n-1})$, väite seuraa suoraan määritelmästä.

(iii) Jos $\phi = \psi \wedge \theta$, niin väite seuraa induktio-oletuksesta ja lemmasta 2.22.

(iv) Jos $\phi = \neg\psi$ ja $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, niin induktio-oletuksen perusteella $(\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = 1$ ja siten $(\phi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = 1 - (\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = 0$. Vastaavasti jos $\mathfrak{A} \not\models \phi(\bar{a})$, niin $(\phi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = 1$.

(v) Jos $\phi = \exists v_i \psi(v_i, \bar{x})$ ja $\mathfrak{A} \models \phi(\bar{a})$, niin on olemassa $b \in \mathfrak{A}$, jolle pätee $\mathfrak{A} \models \psi(b, \bar{a})$. Siten induktio-oletuksen perusteella $(\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(b, \bar{a}) = 0$, jolloin $(\phi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = \inf_{c \in \mathfrak{A}^*}(\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(c, \bar{a}) \leq (\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(b, \bar{a}) = 0$.

Jos taas $\mathfrak{A} \not\models \phi(\bar{a})$, niin jokaiselle $b \in \mathfrak{B}$ pätee $\mathfrak{A} \not\models \psi(b, \bar{a})$. Induktiooletuksen nojalla siten kaikilla $b \in \mathfrak{A}^*$ pätee $(\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(b, \bar{a}) = 1$. Siis $(\phi^*)^{\mathfrak{A}^*}(\bar{a}) = \inf_{b \in \mathfrak{A}^*}(\psi^*)^{\mathfrak{A}^*}(b, \bar{a}) = 1$.

□

Yllä oleva lause osoittaa, että jatkuva-arvoisen logiikan voi ajatella olevan klassisen ensimmäisen kertaluvun logiikan laajennos.

3 Metrinen Scott-analyysi

Tässä luvussa tarkoitamme $\mathcal{L}_{\omega\omega}$:lla ensimmäisen kertaluvun jatkuva-arvoista logiikkaa, joka määriteltiin luvussa 2.3. Määrittelemme jatkuva-arvoisen infinitaarisen logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ hyvin samaan tapaan kuin vastaavan klassisen infinitaarisen logiikan ja todistamme sille metrisen version Scottin isomorfialauseesta 1.15.

Luvun materiaali perustuu artikkeliin [BDNT17].

3.1 Jatkuva-arvoinen infinitaarinen logiikka

Logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ termit määritellään kuten logiikan $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ termit, ja logiikan $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ atomikaavat ovat myös logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ atomikaavat. Seuraavassa määritelmässä notaatio $f \circ \langle g_0, \dots, g_{n-1} \rangle$ tarkoittaa funktiota

$$\bar{x} \mapsto f(g_0(\bar{x}), \dots, g_{n-1}(\bar{x})).$$

Määritelmä 3.1. Olkoon L metrinen aakkosto, ja olkoon jokaista jatkuvaa funktiota $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kohti kiinnitetty n-paikkainen jatkuvuusmoduli Δ_u. Logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ L-kaavat, niiden vapaat muuttujat sekä niiden moduli-arvoväliparit $\langle \Delta, I \rangle$, missä Δ on n-paikkainen moduli ja I kompakti väli, määritellään seuraavasti:

(i) L-atomikaavat ovat L-kaavoja. Atomikaavan ϕ vapaiden muuttujien joukko $\mathrm{free}(\phi)$ on kaavan ϕ kaikkien muuttujien joukko.

Jos $P \in L$ on n-paikkainen predikaattisymboli, atomikaavan $P(t_0, \dots, t_{n-1})$ moduli-arvovälipareja ovat ne $\langle \Delta, I \rangle$, joille pätee $\Delta \geq \Delta_P \circ \left\langle \Delta_{t_0}, \dots, \Delta_{t_{n-1}} \right\rangle$ ja $I \supseteq I_P$, missä funktiot Δ_{t_i} ovat kuten lemman 2.17 todistuksessa.

Atomikaavan $d(t_0, t_1)$ moduli-arvovälipareja ovat ne $\langle \Delta, I \rangle$, joille $\Delta \geq \Delta_d \circ \langle \Delta_{t_0}, \Delta_{t_1} \rangle$ ja $I \supseteq [0, D_L]$, missä $\Delta_d(x, y) = x + y$.

(ii) Jos $\phi_0, \dots, \phi_{n-1}$ ovat L-kaavoja, joilla on moduli-arvoväliparit $\left\langle \Delta_{\phi_i}, I_{\phi_i} \right\rangle$, $i < n$, ja u on jatkuva funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, niin

$$u(\phi_0, \dots, \phi_{n-1})$$

on L-kaava, jonka moduli-arvovälipareja ovat ne $\langle \Delta, I \rangle$, joille pätee $\Delta \geq \Delta_u \circ \left\langle \Delta_{\phi_0}, \dots, \Delta_{\phi_{n-1}} \right\rangle$ sekä $I \supseteq u[I_{\phi_0} \times \cdots \times I_{\phi_{n-1}}]$, ja sen vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(u(\phi_0, \dots, \phi_{n-1})) = \bigcup_{i<n} \mathrm{free}(\phi_i)$.

(iii) Jos ϕ on L-kaava, jolla on moduli-arvovälipari $\langle \Delta_\phi, I_\phi \rangle$, ja $i < \omega$, niin

$$\sup_{v_i} \phi \quad \text{ja} \quad \inf_{v_i} \phi$$

ovat L-kaavoja, joiden moduli-arvovälipareja ovat ne $\langle \Delta, I \rangle$, joille $\Delta \geq \tilde{\Delta}_\phi$ ja $I \supseteq I_\phi$, missä $\tilde{\Delta}_\phi(\delta) = \Delta_\phi(0, \delta)$, ja näiden vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(\sup_{v_i} \phi) = \mathrm{free}(\inf_{v_i} \phi) = \mathrm{free}(\phi) \setminus \{v_i\}$.

(iv) Jos Φ on numeroituva joukko L-kaavoja, joille löytyy $n < \omega$ sekä n-paikkainen moduli Δ_Φ ja kompakti väli I_Φ niin, että $\langle \Delta_\Phi, I_\Phi \rangle$ on kaavan ϕ moduli-arvovälipari sekä $\mathrm{free}(\phi) \subseteq \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ jokaisella $\phi \in \Phi$, niin

$$\bigwedge \Phi \quad \text{ja} \quad \bigvee \Phi$$

ovat L-kaavoja, joiden moduli-arvovälipareja ovat ne $\langle \Delta, I \rangle$, joille $\Delta \geq \Delta_\Phi$ ja $I \supseteq I_\Phi$, ja näiden vapaiden muuttujien joukko on $\mathrm{free}(\bigwedge \Phi) = \mathrm{free}(\bigvee \Phi) = \bigcup_{\phi \in \Phi} \mathrm{free}(\phi)$.

Määrittelemme kaavan kvanttoriasteen samoin kuin klassisessakin tapauksessa.

Määritelmä 3.2. Olkoon ϕ L-kaava. Kaavan ϕ *kvanttoriaste* on sellainen ordinaali $\mathrm{qr}(\phi)$, että

(i) jos ϕ on atomikaava, niin $\mathrm{qr}(\phi) = 0$,

(ii) jos $\phi = u(\psi_0, \dots, \psi_{n-1})$, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \max_{i<n} \mathrm{qr}(\psi_i)$,

(iii) jos $\phi \in \{\bigwedge \Psi, \bigvee \Psi\}$ kaavajoukolle Ψ, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \sup_{\psi \in \Psi} \mathrm{qr}(\psi)$, ja

(iv) jos $\phi \in \left\{\sup_{v_k} \psi, \inf_{v_k} \psi\right\}$, niin $\mathrm{qr}(\phi) = \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Kaavan moduli-arvovälivparit ovat teknisistä syistä syntaktisesti kaavaan assosioituja otuksia, mutta ei liene yllätys, että semantiikan määriteltyämme osoittautuu, että kaavan tulkinta noudattaa moduli-arvoväliapariensa moduleita ja että sen arvot ovat moduli-arvovälivparien kompakteilla väleillä.

Määritelmä 3.3. Olkoon L metrinen aakkosto, $\mathfrak{A}$ L-struktuuri ja $\phi(x_0, \dots, x_{n-1})$ L-kaava. Kaavan ϕ tulkinta struktuurissa $\mathfrak{A}$ on funktio $\phi^{\mathfrak{A}} \colon M^n \to \mathbb{R}$, joka määritellään seuraavasti:

(i) Jos ϕ on atomikaava tai $u(\psi_0, \dots, \psi_{m-1})$ tai $\sup_{v_i} \psi(v_i, x_0, \dots, x_{n-1})$ tai $\inf_{v_i} \psi(v_i, x_0, \dots, x_{n-1})$, $\phi^{\mathfrak{A}}$ määritellään kuten ensimmäisen kertaluvun semantiikassa.

(ii) Jos $\phi = \bigvee \Psi$, niin $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \sup_{\psi \in \Psi} \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$.

(iii) Jos $\phi = \bigwedge \Psi$, niin $\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = \inf_{\psi \in \Psi} \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$.

Lause 3.4. Olkoon $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ L-kaava. Jos Δ on sellainen n-paikkainen moduli ja I sellainen kompakti väli, että kaavan ϕ moduli-arvovälipari on $\langle \Delta, I \rangle$, niin missä tahansa struktuurissa $\mathfrak{A}$ tulkinta $\phi^{\mathfrak{A}}$ noudattaa modulia Δ ja sen arvot ovat välillä I.

Todistus. Jos ϕ on atomikaava tai $u(\psi_0, \ldots, \psi_{m-1})$ tai $\sup_{v_i} \psi(v_i, \bar{x})$ tai $\inf_{v_i} \psi(v_i, \bar{x})$, niin väite seuraa lauseen 2.19 todistuksesta. Jos ϕ on $\bigwedge \Psi$ tai $\bigvee \Psi$, väite seuraa lemmasta 2.4 valitsemalla avaruudeksi $M \times M'$ joukon $\mathfrak{A}^n \times \Psi$, missä joukon Ψ metriikka on diskreetti, ja funktioksi f kuvauksen $\langle \bar{a}, \psi \rangle \mapsto \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. □

Määrittelemme seuraavaksi logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1 \omega}$ fragmentin, jota hyödynnämme konstruoidessamme Scottin lauseet separoituville struktuureille.

Sanomme, että kaava ϕ on *yksinkertainen*, jos se on atomikaava tai muotoa $u(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, missä u on n-paikkainen konnektiivi (eli jatkuva funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) ja kaavat ψ_i ovat atomikaavoja.

Määritelmä 3.5. Olkoon Ω heikko moduli ja I kompakti väli. Aakkoston L n-paikkaiset $\langle \Omega, I \rangle$-kaavat määritellään seuraavasti:

(i) Yksinkertaiset kaavat $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$, joissa suurin esiintyvä muuttujan indeksi on $n-1$ ja jotka noudattavat paria $\langle \Omega|_n, I \rangle$, ovat n-paikkaisia $\langle \Omega, I \rangle$-kaavoja.

(ii) Jos $\phi_0, \ldots, \phi_{m-1}$ ovat n-paikkaisia $\langle \Omega, I \rangle$-kaavoja ja u on m-paikkainen 1-Lipschitz-konnektiivi (avaruuden $\mathbb{R}^m$ max-metriikassa), niin $u(\phi_0, \ldots, \phi_{m-1})$ on n-paikkainen $\langle \Omega, u[I^m] \rangle$-kaava.

(iii) Jos $\phi(v_0, \ldots, v_n)$ on $n+1$-paikkainen $\langle \Omega, I \rangle$-kaava, niin $\sup_{v_n} \phi$ ja $\inf_{v_n} \phi$ ovat n-paikkaisia $\langle \Omega, I \rangle$-kaavoja.

(iv) Jos Φ on numeroituva joukko n-paikkaisia $\langle \Omega, I \rangle$-kaavoja, niin $\bigvee \Phi$ ja $\bigwedge \Phi$ ovat n-paikkaisia $\langle \Omega, I \rangle$-kaavoja.

Huomautettakoon, että n-paikkaisten $\langle \Omega, I \rangle$-kaavojen yhteinen moduli-arvovälipari on $\langle \Omega|_n, I \rangle$ ja ne ovat siten yhtäjatkuvia sekä uniformisesti rajoitettuja.

Merkitsemme kaikkien n-paikkaisten $\langle \Omega, I \rangle$-kaavojen joukkoa $\mathrm{Fr}(n, \Omega, I)$. Kutsumme n-paikkaiseksi Ω-kaavaksi sellaista kaavaa, joka on n-paikkainen $\langle \Omega, I \rangle$-kaava jollekin välille I, ja merkitsemme näiden joukkoa $\mathrm{Fr}(n, \Omega)$. Pelkkä Ω-kaava on n-paikkainen Ω-kaava jollekin n, ja näiden joukkoa merkitään $\mathrm{Fr}(\Omega)$. Ω-lause on 0-paikkainen Ω-kaava.

3.2 Edestakaisetäisyydet ja Scottin korkeus

Koko tässä alaluvussa oletamme, että L on numeroituva aakkosto ja Ω heikko moduli. Määrittelemme metriset vastineet luvussa 1.2 esitellyille edestakaisekvivalensseille (määritelmä 1.7) ja Scottin korkeudelle (määritelmä 1.9).

Määritelmä 3.6. Olkoon $\alpha \in \mathrm{On}$, $n < \omega$ ja $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ L-struktuureja. Määrittelemme edestakaispseudometriikan $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n} : \mathfrak{A}^n \times \mathfrak{B}^n \to [0,\infty]$ seuraavasti kaikilla $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$:

(i) Jos $\alpha = 0$, niin

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = \sup\left\{ \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| : \phi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega) \text{ yksinkertainen}\right\}.$$

(ii) Jos $\alpha = \beta + 1$, niin

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = \sup_{c\in\mathfrak{A}}\sup_{d\in\mathfrak{B}}\inf_{c'\in\mathfrak{A}}\inf_{d'\in\mathfrak{B}}\left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d') \vee r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\beta,n+1}(\bar{a}c',\bar{b}d)\right).$$

(iii) Jos α on rajaordinaali, niin

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}).$$

Lisäksi $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\infty,n}(\bar{a},\bar{b}) = \sup_{\alpha\in\mathrm{On}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b})$.

Jos Ω on asiayhteydestä selvä, se voidaan jättää merkitsemättä. Asettamalla $r_{\alpha,n}(\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle,\langle\mathfrak{B},\bar{b}\rangle) = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b})$ määrittelemme pseudometriikan luokkaan $\{\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle \mid \mathfrak{A}\ L\text{-struktuuri}, \bar{a} \in \mathfrak{A}^n\}$. Notaatiota yksinkertaistaaksemme kirjoitamme $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{B}\bar{b}) := r_{\alpha,n}(\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle,\langle\mathfrak{B},\bar{b}\rangle)$.

Lemma 3.7. Luokkafunktio $r_{\alpha,n}$ on pseudometriikka luokassa

$$\{\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle \mid \mathfrak{A}\ L\text{-struktuuri}, \bar{a} \in \mathfrak{A}^n\}$$

kaikilla $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$.

Todistus. On näytettävä, että $r_{\alpha,n}$ on symmetrinen, toteuttaa kolmioepäyhtälön ja $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{A}\bar{a}) = 0$ kaikilla pareilla $\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle$. Todistamme väitteet induktiolla ordinaalin α suhteen.

Jos $\alpha = 0$, niin $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b})$ on supremum etäisyyksistä $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|$, missä ϕ on yksinkertainen n-paikkainen Ω-kaava. Selvästi etäisyys on symmetrinen, ja kunkin parin etäisyys itsestään on nolla. Kolmioepäyhtälökin seuraa helposti: kaikilla kaavoilla ψ pätee

$$\begin{aligned}
\left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| &= \left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{C}}(\bar{c}) + \psi^{\mathfrak{C}}(\bar{c}) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \\
&\leq \left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{C}}(\bar{c})\right| + \left|\psi^{\mathfrak{C}}(\bar{c}) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \\
&\leq \sup_{\phi} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{C}}(\bar{c})\right| + \sup_{\phi} \left|\phi^{\mathfrak{C}}(\bar{c}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|,
\end{aligned}$$

jolloin myös

$$\sup_{\phi} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \leq \sup_{\phi} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{C}}(\bar{c})\right| + \sup_{\phi} \left|\phi^{\mathfrak{C}}(\bar{c}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|.$$

Oletetaan sitten, että $\alpha = \beta + 1$, ja funktio $r_{\beta,n}$ on todistettu pseudometriikaksi kaikilla $n < \omega$. Kolmioepäyhtälöä lukuun ottamatta pseudometriikan ominaisuudet seuraavat suoraan induktio-oletuksesta, joten osoitetaan, että $r_{\alpha,n}$ toteuttaa kolmioepäyhtälön. Tätä varten riittää näyttää, että jos $s, t \in [0, \infty]$ ovat sellaiset, että $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{C}\bar{c}) < s$ ja $r_{\alpha,n}(\mathfrak{C}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{b}) < t$, niin $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) \leq s + t$. Olkoon $d \in \mathfrak{A}$ mielivaltainen. Koska $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{C}\bar{c}) < s$, funktion $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\alpha,n}$ määritelmän perusteella

$$\sup_{d' \in \mathfrak{A}} \inf_{e \in \mathfrak{C}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d', \bar{c}e) < s$$

ja siten on olemassa $e \in \mathfrak{C}$, jolle $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d, \bar{c}e) < s$. Täysin vastaavasti koska $r_{\alpha,n}(\mathfrak{C}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{b}) < t$, funktion $r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ määritelmän perusteella löytyy $f \in \mathfrak{B}$, jolle $r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{c}e, \bar{b}f) < t$. Siten induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}
r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d, \bar{b}f) &\leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d, \bar{c}e) + r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{c}e, \bar{b}f) \\
&< s + t,
\end{aligned}$$

joten koska d oli mielivaltainen, $\sup_{d \in \mathfrak{A}} \inf_{f \in \mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d, \bar{b}f) \leq s + t$. Täysin vastaavasti saadaan, että $\sup_{f \in \mathfrak{B}} \inf_{d \in \mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}d, \bar{b}f) \leq s + t$, jolloin $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) \leq s + t$.

Mikäli α on rajaordinaali, niin induktio-oletuksen perusteella kaikilla $\gamma < \alpha$ pätee

$$\begin{aligned}
r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n}(\bar{a}, \bar{b}) &\leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\gamma,n}(\bar{a}, \bar{c}) + r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\gamma,n}(\bar{c}, \bar{b}) \\
&\leq \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\beta,n}(\bar{a}, \bar{c}) + \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{c}, \bar{b}),
\end{aligned}$$

jolloin myös

$$\sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}) \leq \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{c}) + \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{C},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{c},\bar{b}).$$

Muut ominaisuudet seuraavat jälleen suoraan induktio-oletuksesta. □

Seuraavissa lemmoissa todistamme muutaman teknisen joskin tulevissa todistuksissa erittäin hyödyllisen yksityiskohdan edestakaisetäisyyksistä.

Lemma 3.8.

(i) Kaikilla $n < \omega$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\alpha \in \mathrm{On}$ pätee

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \leq \Omega|_n(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1})).$$

(ii) Jokaisella $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$ funktio $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ on tasaisesti jatkuva. Erityisesti, jos $r_{\alpha,n}(\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B},\bar{b}\rangle) < \infty$ joillain $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$, niin $r_{\alpha,n}(\langle\mathfrak{A},\bar{a}\rangle, \langle\mathfrak{B},\bar{b}\rangle) < \infty$ kaikilla $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$.

Todistus. (i) Osoitamme väitteen induktiolla ordinaalin α suhteen.

Jos $\alpha = 0$, niin koska jokainen n-paikkainen yksinkertainen Ω-kaava ϕ, joiden yli $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}$ on supremum, noudattaa modulia $\Omega|_n$, pätee

$$\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{b})\right| \leq \Omega|_n(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1})),$$

joten myös supremum noudattaa samaa modulia.

Jos $\alpha = \beta + 1$, niin induktio-oletuksen nojalla

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) \leq \Omega|_{n+1}(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1}),d(c,d))$$

kaikilla $c, d \in \mathfrak{A}$. Erityisesti tämä pätee, jos $c = d$, jolloin $d(c,d) = 0$. Modulin $\Omega|_k$ määritelmän perusteella

$$\Omega|_k(t_0,\ldots,t_{k-1}) = \Omega(t_0,\ldots,t_{k-1},0,0,0,\ldots),$$

jolloin $\Omega|_{n+1}(t_0,\ldots,t_{n-1},0) = \Omega|_n(t_0,\ldots,t_{n-1})$. Siten kaikilla $c \in \mathfrak{A}$ pätee

$$\begin{aligned}
\inf_{d\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) &\leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}c) \\
&\leq \Omega|_{n+1}(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1}),d(c,c)) \\
&= \Omega|_{n+1}(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1}),0) \\
&= \Omega|_n(d(a_0,b_0),\ldots,d(a_{n-1},b_{n-1})),
\end{aligned}$$

jolloin myös

$$\sup_{c \in \mathfrak{A}} \inf_{d \in \mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \leq \Omega|_n(d(a_0, b_0), \ldots, d(a_{n-1}, b_{n-1})),$$

eli etäisyyden "eteenpäin"-osa noudattaa modulia $\Omega|_n$. Sama argumentti näyttää myös, että etäisyyden "taaksepäin"-osa noudattaa modulia $\Omega|_n$, jolloin näiden maksimi eli etäisyys $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ noudattaa sitä.

Jos α on rajaordinaali, niin koska induktio-oletuksen nojalla jokainen $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\beta,n}$, $\beta < \alpha$, noudattaa modulia $\Omega|_n$, myös näiden supremum noudattaa sitä.

(ii) Olkoot $\bar{a}, \bar{c} \in \mathfrak{A}^n$, $\bar{b}, \bar{d} \in \mathfrak{B}^n$. Nyt kolmioepäyhtälöiden perusteella

$$\begin{aligned}
&r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{b}) \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{A}\bar{c}),\\
&r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{a}) \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{A}\bar{c}),\\
&r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{d}, \mathfrak{A}\bar{c}) \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{B}\bar{d}) \text{ ja}\\
&r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{d}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{b}) \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{B}\bar{d}),
\end{aligned}$$

joten symmetriaa hyödyntäen saadaan

$$\begin{aligned}
&\left| r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{c}) \right| \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{A}\bar{c}) \text{ ja}\\
&\left| r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{c}, \mathfrak{B}\bar{d}) \right| \leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{B}\bar{d}).
\end{aligned}$$

Näitä havaintoja käyttämällä saamme arvion

$$\begin{aligned}
&\left| r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) - r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{c}, \bar{d}) \right|\\
&\qquad = \left| r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) - r^{\mathfrak{B},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}(\bar{b}, \bar{c}) + r^{\mathfrak{B},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}(\bar{b}, \bar{c}) - r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{c}, \bar{d}) \right|\\
&\qquad \leq \left| r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) - r^{\mathfrak{B},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}(\bar{b}, \bar{c}) \right| + \left| r^{\mathfrak{B},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}(\bar{b}, \bar{c}) - r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{c}, \bar{d}) \right|\\
&\qquad \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{A}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{c}) + r^{\mathfrak{B},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{b}, \bar{d})\\
&\qquad \leq \Omega|_n(d(a_0, c_0), \ldots, d(a_{n-1}, c_{n-1}))\\
&\qquad\quad + \Omega|_n(d(b_0, d_0), \ldots, d(b_{n-1}, d_{n-1})),
\end{aligned}$$

mikä osoittaa, että funktio $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ noudattaa jatkuvuusmodulia $\langle t_0, \ldots, t_{2n-1} \rangle \mapsto \Omega|_n(t_0, \ldots, t_{n-1}) + \Omega|_n(t_n, \ldots, t_{2n-1})$ ja on siten tasaisesti jatkuva.

□

Lemma 3.9.

(i) Jos $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}(\bar{a},\bar{b}) < \varepsilon$, niin jokaiselle $c \in \mathfrak{A}$ löytyy $d \in \mathfrak{B}$, joille $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) < \varepsilon$, ja päinvastoin.

(ii) Jos $r_{\infty,0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) < \varepsilon$, $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$, niin kaikille $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ löytyy $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$, joille $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) < \varepsilon$, ja päinvastoin.

Todistus. (i) Etäisyyden $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ määritelmän mukaan

$$\sup_{c\in\mathfrak{A}} \inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) < \varepsilon,$$

joten jokaisella $c \in \mathfrak{A}$ pätee

$$\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) < \varepsilon.$$

Siis jokaiselle $c \in \mathfrak{A}$ löytyy $d \in \mathfrak{B}$, jolle

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) < \varepsilon.$$

Käyttämällä etäisyyden $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ "takaisinpäin"-osaa saadaan väite myös toisin päin.

(ii) Olkoon $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in \mathfrak{A}^n$. Koska $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,0} = \sup_{\beta\in\mathrm{On}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,0} < \varepsilon$, niin erityisesti $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+n,0} < \varepsilon$. Nyt edellisen kohdan nojalla löytyy sellainen $b_0 \in \mathfrak{B}$, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+n-1,1}(a_0,b_0) < \varepsilon$. Edelleen edellisen kohdan nojalla löytyy $b_1 \in \mathfrak{B}$, jolle $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+n-2,2}(a_0,a_1,b_0,b_1) < \varepsilon$. Näin jatkamalla löydämme alkiot $b_1, \ldots, b_{n-1}$, joille $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) < \varepsilon$.

□

Seuraavan lemman todistuksessa osoitamme, että funktiojono $\langle r_\alpha\rangle_{\alpha\in\mathrm{On}}$ on kasvava sekä stabiloituu jossain vaiheessa. Tälle stabiloitumiskohdalle löydetään jopa miellyttävän matala yläraja.

Lemma 3.10. (i) Jos $\beta < \alpha \in \mathrm{On}$, niin $r_{\beta,n} \leq r_{\alpha,n}$.

(ii) Jos κ on ääretön kardinaali ja $\mathrm{density}(\mathfrak{A}), \mathrm{density}(\mathfrak{B}) \leq \kappa$, niin on olemassa $\alpha < \kappa^+$, jolle $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$.

(iii) Jos $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$, niin jokaisella $\beta > \alpha$, $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}$ kaikilla $n < \omega$.

Todistus. (i) Osoitamme induktiolla ordinaalin α suhteen, että kaikilla $\beta < \alpha$ pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ kaikilla $n < \omega$. Jos $\alpha = 0$, mitään todistettavaa ei ole, ja jos α on rajaordinaali, $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ on edeltäjiensä supremumina vähintään kukin näistä. Oletetaan siis, että $\alpha = \beta + 1$ jollekin $\beta \in \mathrm{On}$ ja tehdään induktio-oletus, että kaikilla $\gamma < \beta$ pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}$ kaikilla $n < \omega$. Olkoon $n < \omega$ kiinnitetty. Haluamme osoittaa, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ kaikilla $\gamma < \alpha$, mutta induktio-oletuksen perusteella riittää näyttää, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$.

Jos $\beta = 0$, niin $\alpha = 1$ ja on näytettävä, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{1,n}$. Olkoot tätä varten $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$. Jokainen n:n muuttujan kaava $\phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ voidaan ajatella $n+1$:n muuttujan kaavana $\phi(v_0, \ldots, v_n)$, jossa v_n ei todellisuudessa esiinny. Lisäksi tällainen kaava noudattaa modulia $\Omega|_{n+1}$, jos se noudattaa modulia $\Omega|_n$, joten $\mathrm{Fr}(n, \Omega, I) \subseteq \mathrm{Fr}(n+1, \Omega, I)$, mistä seuraa, että kaikilla $c \in \mathfrak{A}$ ja $d \in \mathfrak{B}$ pätee

$$\begin{aligned}
&r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n}(\bar{a}, \bar{b}) \\
&\quad = \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| : \phi(v_0, \ldots, v_{n-1}) \in \mathrm{Fr}(n, \Omega) \text{ yksink.}\right\} \\
&\quad = \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}c) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}d)\right| : \phi(v_0, \ldots, v_n) \in \mathrm{Fr}(n, \Omega) \text{ yksink.}\right\} \\
&\quad \leq \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}c) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}d)\right| : \phi \in \mathrm{Fr}(n+1, \Omega) \text{ yksink.}\right\} \\
&\quad = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d).
\end{aligned}$$

Siis $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n}(\bar{a}, \bar{b})$ on joukon $\left\{r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \mid d \in \mathfrak{B}\right\}$ alaraja jokaisella $c \in \mathfrak{A}$, joten

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n}(\bar{a}, \bar{b}) \leq \inf_{d \in \mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \leq \sup_{c \in \mathfrak{A}} \inf_{d \in \mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{1,n}(\bar{a}, \bar{b}).$$

Jos $\beta > 0$, niin osoitamme, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,n}$ kaikilla $\gamma < \beta$. Tällöin jos β on seuraajaordinaali, se on $\gamma + 1$ jollekin $\gamma < \beta$, jolloin pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$. Jos taas β sattuu olemaan rajaordinaali, se on supremum ordinaaleista $\gamma + 1$, $\gamma < \beta$, ja koska $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ kaikilla $\gamma < \beta$, myös $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n} = \sup_{\gamma<\beta} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n} = \sup_{\gamma+1<\beta} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$.

Tehdään siis vastaoletus, että on olemassa $\gamma < \beta$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$, joille $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n}(\bar{a}, \bar{b}) > r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,n}(\bar{a}, \bar{b})$. Edestakaisetäisyyden määritelmän nojalla nyt

$$\max\left\{\sup_{c\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d), \sup_{d\in\mathfrak{B}}\inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d)\right\}$$
$$> \max\left\{\sup_{c\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d), \sup_{d\in\mathfrak{B}}\inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d)\right\},$$

joten erityisesti joko

$$\sup_{c\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) > \sup_{c\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) \text{ tai}$$
$$\sup_{d\in\mathfrak{B}}\inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) > \sup_{d\in\mathfrak{B}}\inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d).$$

Tapaukset ovat symmetriset, joten voidaan olettaa, että ylempi epäyhtälöistä pätee. Nyt löytyy $c \in \mathfrak{A}$, jolle

$$\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) > \sup_{c'\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c',\bar{b}d).$$

Siten

$$\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) > \inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d).$$

Edelleen löytyy $d \in \mathfrak{B}$, jolle

$$\inf_{d'\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d') > r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d),$$

ja siten

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d) > r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c,\bar{b}d),$$

mutta tämä on ristiriidassa induktio-oletuksen $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}$ kanssa. Siispä $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma+1,n} \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,n}$. Tämä todistaa väitteen.

(ii) Määritellään jokaiselle $\beta < \kappa^+$, $q \in \mathbb{Q}$ sekä $n < \omega$ joukko

$$U_{\beta,q,n} = \left\{\langle\bar{a},\bar{b}\rangle \in \mathfrak{A}^n \times \mathfrak{B}^n \mid r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}) > q\right\}.$$

Jokainen $U_{\beta,q,n}$ on avoimen[4] joukon $(q,\infty]$ alkukuvana jatkuvassa funktiossa $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}$ avoin. Lisäksi kiinnitetyillä q ja n, jono $\langle U_{\beta,q,n}\rangle_{\beta<\kappa^+}$

[4]Laajennettu lukusuora on homeomorfinen avaruuden $[0,1]$ kanssa, ja tässä avaruudessa pisteen 1 kuulaympäristöt ovat muotoa $(r,1]$, $r \in \mathbb{R}$.

on kasvava jono avoimia joukkoja, sillä $\left\langle r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n} \right\rangle_{\beta<\kappa^+}$ on kasvava jono funktioita. Nyt jos jokaiselle $q \in \mathbb{Q}$ ja $n < \omega$ löytyy $\beta_{q,n} < \kappa^+$, joilla $U_{\beta_{q,n},q,n} = U_{\gamma,q,n}$ kaikilla $\gamma > \beta_{q,n}$, niin löydämme haluamamme ordinaalin α, jolla $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$, asettamalla $\alpha = \sup \left\{ \beta_{q,n} \mid q \in \mathbb{Q}, n < \omega \right\}$: tällöin $U_{\alpha,q,n} = U_{\alpha+1,q,n}$ kaikilla q ja n, joten jos $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ ja $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = t$, niin

$$
\begin{aligned}
\left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}[\{t\}] &= \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}[[0,t] \cap [t,\infty]] \\
&= \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}\left[\bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>t}} [0,q] \cap \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} (q,\infty]\right] \\
&= \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}\left[\bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>t}} (q,\infty]^c \cap \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} (q,\infty]\right] \\
&= \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>t}} \left(\left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}[(q,\infty]]\right)^c \cap \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}[(q,\infty]] \\
&= \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>t}} U^c_{\alpha,q,n} \cap \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} U_{\alpha,q,n} \\
&= \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>t}} U^c_{\alpha+1,q,n} \cap \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} U_{\alpha+1,q,n} \\
&= \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}\right)^{-1}[\{t\}],
\end{aligned}
$$

missä komplementti otetaan suhteessa joukkoon $[0,\infty]$, joten koska $\langle \bar{a},\bar{b} \rangle \in \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}\right)^{-1}[\{t\}]$, niin $\langle \bar{a},\bar{b} \rangle \in \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}\right)^{-1}[\{t\}]$ ja siten $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}(\bar{a},\bar{b}) = t = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b})$. Lisäksi $\alpha < \kappa^+$, sillä se on supremum numeroituvasta joukosta kardinaalia κ^+ pienempiä ordinaaleja, ja κ^+ on ylinumeroituva säännöllinen kardinaali.

Perustellaan vielä, miksi jokaiselle q ja n ordinaali $\beta_{q,n}$ on olemassa. Jos kyseistä ordinaalia ei olisi olemassa eli avoimien joukkojen $U_{\gamma,q,n}$ jono ei stabiloituisi missään vaiheessa, löytyisi siltä aidosti kasvava kardinaalin κ^+ pituinen osajono. Näin pitkää aidosti kasvavaa jonoa avoimia joukkoja ei kuitenkaan voi olla olemassa, mikä nähdään seuraavasti.

Ensinnäkin, avaruuden $\mathfrak{A}^n \times \mathfrak{B}^n$ topologialla on kanta, jonka koko on enintään κ. Koska density$(\mathfrak{A}^n \times \mathfrak{B}^n) \leq \kappa$, avaruudella $\mathfrak{A}^n \times \mathfrak{B}^n$ on tiheä joukko $\{x_i \mid i < \kappa\}$. Haluttu kanta on kokoelma $\{B(x_i, 1/n) \mid i < \kappa, n < \omega\}$: olkoon U avoin joukko, ja $y \in U$; nyt jollain $n < \omega$ pätee $B(y, 1/n) \subseteq U$, ja löytyy $i < \kappa$, jolla $x_i \in B(y, 1/2n)$, jolloin $y \in B(x_i, 1/2n) \subseteq B(y, 1/n) \subseteq U$.

Numeroikoot U_i, $i < \kappa$, edellä mainitun kannan. Osoittaaksemme, ettei pitkiä aidosti kasvavia jonoja avoimia joukkoja ole olemassa, tehdään vastaoletus, että $\langle V_i \rangle_{i<\kappa^+}$ on sellainen, ja kiinnitetään jokaiselle $i < \kappa^+$ piste $x_i \in V_i \setminus \bigcup_{j<i} V_j$. Olkoon nyt $f\colon \kappa^+ \to \kappa$ funktio, jolle $f(i) = \min\{j < \kappa \mid x_i \in U_j \subseteq V_i\}$. Nyt f on injektio, sillä muutoin löytyisi $i, j < \kappa$, joille $i < j$ ja $f(i) = f(j)$, mikä tarkoittaisi, että $x_j \in U_{f(j)} = U_{f(i)} \subseteq V_i$, vaikka x_j valittiin niin, että $x_j \notin V_i$. Mutta nyt funktion f olemassaolo osoittaa, että $\kappa^+ \leq \kappa$, mikä on ristiriita.

(iii) Todistetaan väite induktiolla ordinaalin $\beta > \alpha$ suhteen. Jos $\beta = \gamma + 1$ ja $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ kaikilla $n < \omega$, niin

$$\begin{aligned}
r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}) &= \sup_{c\in\mathfrak{A}} \sup_{d\in\mathfrak{B}} \inf_{c'\in\mathfrak{A}} \inf_{d'\in\mathfrak{B}} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d') \vee r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n+1}(\bar{a}c', \bar{b}d) \right) \\
&= \sup_{c\in\mathfrak{A}} \sup_{d\in\mathfrak{B}} \inf_{c'\in\mathfrak{A}} \inf_{d'\in\mathfrak{B}} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d') \vee r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n+1}(\bar{a}c', \bar{b}d) \right) \\
&= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}(\bar{a},\bar{b}) \\
&= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}).
\end{aligned}$$

Jos β on rajaordinaali, ja kaikilla $\gamma > \alpha$, $\gamma < \beta$, pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$, niin

$$\begin{aligned}
r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}) &= \sup_{\gamma<\beta} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n}(\bar{a},\bar{b}) \\
&= \sup_{\alpha<\gamma<\beta} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\gamma,n}(\bar{a},\bar{b}) \\
&= \sup\left\{ r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \right\} \\
&= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}).
\end{aligned}$$

□

Nyt voidaan luonnollisella tavalla määritellä jokaista $\alpha \in \mathrm{On}$ kohti ekvivalenssirelaatio $E_{\alpha,n}$ ehdolla

$$\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \; E_{\alpha,n} \; \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle \iff r_{\alpha,n}(\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle, \langle \mathfrak{B}, \bar{b} \rangle) = 0.$$

Lemmasta 3.10 seuraa, että jos α on sellainen ordinaali, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$, niin tällöin $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$, ja lisäksi tällainen ordinaali löytyy. Siten ekvivalenssirelaatioilla $E_{\alpha,n}$ on seuraavat ominaisuudet: $E_{\alpha,n} \subseteq E_{\beta,n}$, jos $\beta < \alpha$, ja löytyy α, jolle $E_{\infty,n} := \bigcap_{\beta \in \mathrm{On}} E_{\beta,n} = E_{\alpha,n}$. Jos $\langle \mathfrak{A}, \emptyset \rangle \; E_{\infty,0} \; \langle \mathfrak{B}, \emptyset \rangle$, merkitsemme $\mathfrak{A} \; E_\infty \; \mathfrak{B}$.

Ei ole vaikeaa arvata, että isomorfisuus on riittävä ehto E_∞-ekvivalenssiin. Myöhemmin (luvussa 3.4) osoitamme, että jos heikko moduli Ω oikein valitaan, isomorfisuus on myös välttämätön ehto.

Lemma 3.11. Jos π on isomorfismi $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, niin kaikilla $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ pätee $\langle \mathfrak{A}, \bar{a} \rangle \; E_{\infty,n} \; \langle \mathfrak{B}, \pi(\bar{a}) \rangle$.

Todistus. Olkoon $\alpha \in \mathrm{On}$. Osoitamme induktiolla ordinaalin α suhteen, että kaikilla $n < \omega$ ja $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ pätee $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\pi(\bar{a})) = 0$.

Jos $\alpha = 0$, niin $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\pi(\bar{a}))$ on supremum yli etäisyyksien $|\phi(\bar{a}) - \phi(\pi(\bar{a}))|$, missä ϕ on yksinkertainen Ω-kaava. Koska π on isomorfismi, kaavojen arvojen etäisyys on nolla kaikilla kaavoilla ϕ ja siten myös näiden supremum on nolla.

Jos $\alpha = \beta + 1$, niin induktio-oletuksen nojalla

$$r_{\beta,n+1}(\mathfrak{A}\bar{a}c, \mathfrak{B}\pi(\bar{a}c)) = 0$$

kaikilla $c \in \mathfrak{A}$. Siten myös

$$\inf_{d \in \mathfrak{B}} r_{\beta,n+1}(\mathfrak{A}\bar{a}c, \mathfrak{B}\pi(\bar{a})d) = 0$$

ja siten

$$\sup_{c \in \mathfrak{A}} \inf_{d \in \mathfrak{B}} r_{\beta,n+1}(\mathfrak{A}\bar{a}c, \mathfrak{B}\pi(\bar{a})d) = 0.$$

Toisaalta myös

$$\inf_{c \in \mathfrak{A}} r_{\beta,n+1}(\mathfrak{A}\bar{a}c, \mathfrak{B}\pi(\bar{a}c')) = 0,$$

kaikilla $c' \in \mathfrak{A}$, mutta koska π on bijektio, jokainen $d \in \mathfrak{B}$ on jokin $\pi(c')$. Siten myös

$$\sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{c \in \mathfrak{A}} r_{\beta,n+1}(\mathfrak{A}\bar{a}c, \mathfrak{B}\pi(\bar{a})d) = 0,$$

mistä seuraa, että $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\pi(\bar{a})) = 0$.

Jos α on raja-ordinaali, niin $r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\pi(\bar{a}))$ on induktio-oletuksen perusteella supremum joukosta $\{0\}$ eli nolla itsekin. □

Sanomme, että metrisen avaruuden M jono $f \in M^\omega$ on *tiheähäntäinen*, jos jokaisella $k < \omega$ joukko $\{f(i) \mid i > k\}$ on tiheä avaruudessa M. Tiheähäntäisyys on hyödyllinen käsite siksi, että tiheähäntäinen jono vierailee jokaisessa erakkopisteessä äärettömän usein (sillä jokainen tiheä joukko sisältää kaikki erakkopisteet). Erityisesti siis tiheähäntäinen jono vierailee jokaisen pisteen jokaisessa ympäristössä äärettömän usein, mikä on varsin hyödyllistä raja-arvotarkasteluissa.

Lause 3.12. Oletetaan, että Ω on siirtojen suhteen kasvava. Tällöin separoituville struktuureille $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ seuraavat ovat yhtäpitävät kaikilla $n < \omega$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ ja $\varepsilon > 0$:

(i) $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,n}(\bar{a},\bar{b}) < \varepsilon$,

(ii) on olemassa tiheähäntäiset $a \in \mathfrak{A}^\omega$ ja $b \in \mathfrak{B}^\omega$, joille $a \restriction n = \bar{a}$, $b \restriction n = \bar{b}$ ja

$$\sup_{k<\omega} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,k}(a \restriction k, b \restriction k) < \varepsilon.$$

Todistus. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Olkoon $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ numeroituva kanta struktuurin $\mathfrak{A}$ topologialle ja $\langle U^{\mathfrak{A}}_i \rangle_{i<\omega}$ sellainen jono avoimia joukkoja, jossa jokainen kannan $\mathcal{B}_{\mathfrak{A}}$ alkio esiintyy äärettömän usein. Olkoon $\langle U^{\mathfrak{B}}_i \rangle_{i<\omega}$ vastaava jono struktuurille $\mathfrak{B}$.

Oletetaan, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,n}(\bar{a},\bar{b}) < \varepsilon' < \varepsilon$. Rakennamme rekursiivisesti jonot a ja b siten, että

(1) $a \restriction n = \bar{a}$ ja $b \restriction n = \bar{b}$,

(2) $a(2k) \in U^{\mathfrak{A}}_k$ ja $b(2k+1) \in U^{\mathfrak{B}}_k$ kaikilla $k \geq n$ ja

(3) $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,k}(a \restriction k, b \restriction k) < \varepsilon'$ kaikilla $k < \omega$.

Jonon jäseniksi $a(0), \dots, a(n-1)$ valitsemme jonon $\bar{a}$ alkiot, ja vastaavasti jonolle b.

Jos jonon jäsenet $a(0), \dots, a(k-1)$ on on valittu (ja k on parillinen), olkoon a_k mielivaltainen joukon $U^{\mathfrak{A}}_{k/2}$ alkio, jolloin ehto (2) toteutuu. Induktio-oletuksen nojalla pätee

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,k}(a(0), \dots, a(k-1), b(0), \dots, b(k-1)) < \varepsilon'.$$

Lemman 3.10 nojalla löytyy $\alpha \in \mathrm{On}$, jolle $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,k} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,k} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,k}$. Siten, koska

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,k}(a(0), \dots, a(k-1), b(0), \dots, b(k-1)) < \varepsilon',$$

lemman 3.9 kohdan (i) nojalla löytyy $d \in \mathfrak{B}$, jolle

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,k+1}(a(0),\ldots,a(k-1),a(k),b(0),\ldots,b(k-1),d) < \varepsilon'.$$

Valitsemalla $b(k) = d$ toteutamme ehdon (3).

Vastaavasti, kun k on pariton, valitsemme $b(k) \in U^{\mathfrak{B}}_{(k-1)/2}$ ja löydämme sopivan alkion $a(k) \in \mathfrak{A}$. Kun jono on rakennettu loppuun asti, ehdon (3) nojalla

$$\sup_{k<\omega} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,k}(a \restriction k, b \restriction k) \leq \sup_{k<\omega} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,k}(a \restriction k, b \restriction k) \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

mikä oli todistettava.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Oletetaan, että löytyy tiheähäntäiset jonot a ja b, joille

$$\sup_{k<\omega} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,k}(a \restriction k, b \restriction k) \leq \varepsilon' < \varepsilon.$$

Näytämme induktiolla, että kaikilla $\alpha \in \mathrm{On}$, $k < \omega$ ja $i_0 < \cdots < i_{k-1}$ pätee

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,k}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1})) \leq \varepsilon'.$$

Tällöin erityisesti $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,k}(a \restriction n, b \restriction n) \leq \varepsilon'$ kaikilla $\alpha \in \mathrm{On}$, joten pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\infty,n}(a \restriction n, b \restriction n) < \varepsilon$, mikä pitikin todistaa.

Oletetaan ensin, että $\alpha = 0$. Kiinnitetään indeksit $i_0 < \cdots < i_{k-1}$. Koska Ω on siirtojen suhteen kasvava, pätee

$$\begin{aligned}
&r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,k}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}))\\
&\quad\leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,i_{k-1}+1}(a(0),a(1),\ldots,a(i_{k-1}),b(0),b(1),\ldots,b(i_{k-1}))\\
&\quad= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0,i_{k-1}+1}(a \restriction (i_{k-1}+1), b \restriction (i_{k-1}+1))\\
&\quad\leq \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Oletetaan sitten, että $\alpha = \beta + 1$. Kiinnitetään jälleen $i_0 < \cdots < i_{k-1}$. Näytämme, että

$$\begin{aligned}
&r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,k}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1})) \qquad (3.2.1)\\
&\quad\leq \limsup_{m\to\infty} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),b(m))\\
&\quad\leq \varepsilon'.
\end{aligned}$$

Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa suoraan induktio-oletuksesta. Ensimmäistä epäyhtälöä (3.2.1) varten oletetaan, että

$$\limsup_{m\to\infty} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),b(m)) < t.$$

Olkoon $\delta > 0$. Kiinnitetään $c \in \mathfrak{A}$ ja rajatta kasvava jono indeksejä $\langle m_j \rangle_{j<\omega}$, jolle $a(m_j) \to c$ ja

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m_j),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),b(m_j)) < t + \frac{\delta}{2}$$

kaikilla j. Tällainen indeksijono löytyy, sillä tiheähäntäisenä jono a vierailee pisteen c jokaisessa ympäristössä äärettömän usein ja siten c on jonon a kasautumisarvo.

Nyt

$$\begin{aligned}
&\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m_j),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d)\\
&\quad\le r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m_j),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),b(m_j))\\
&\quad< t + \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

kaikilla $j < \omega$, joten

$$\begin{aligned}
&\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),c,b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d)\\
&\quad= \lim_{j\to\infty} \inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),a(m_j),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d)\\
&\quad\le t + \frac{\delta}{2} < t + \delta.
\end{aligned}$$

Siten

$$\sup_{c\in\mathfrak{A}} \inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),c,b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d) \le t + \delta.$$

Koska δ oli mielivaltainen, pätee

$$\sup_{c\in\mathfrak{A}} \inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),c,b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d) \le t.$$

Samalla tavalla saamme osoitettua, että

$$\sup_{d\in\mathfrak{A}} \inf_{c\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,k+1}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),c,b(i_0),\ldots,b(i_{k-1}),d) \le t,$$

mistä seuraa, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta+1,k}(a(i_0),\ldots,a(i_{k-1}),b(i_0),\ldots,b(i_{k-1})) \leq t$, mikä osoittaa, että epäyhtälö (3.2.1) pätee.

Jos α on rajaordinaali, väite seuraa suoraan induktio-oletuksesta. Tämä viimeistelee todistuksen. □

Seuraava lause kertoo kvanttoriasteen ja edestakaisetäisyyksien välisen yhteyden. Lause ei näyttele tärkeää roolia myöhemmin, mutta se on luonnollinen vastine klassiselle tulokselle (lause 1.8).

Lause 3.13. Olkoon $\alpha \in \mathrm{On}$. Tällöin kaikilla struktuureilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ ja kaikilla $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ pätee

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| : \phi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega), \mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha\right\}.$$

Erityisesti $r_{\alpha,0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$, jos ja vain jos $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ toteuttavat samat kvanttoriastetta $\leq \alpha$ olevat L-ehdot.

Todistus. Osoitamme induktiolla ordinaalin α suhteen, että kaikille kompakteille väleille I pätee

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \wedge \ell(I) = \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| : \phi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,I), \mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha\right\},$$

missä $\ell(I)$ on välin I pituus. Jos $\alpha = 0$, niin väite seuraa suoraan määritelmästä, ja jos α on rajaordinaali, väite seuraa suoraan induktio-oletuksesta. Oletetaan siis, että $\alpha = \beta + 1$. Tällöin induktio-oletuksen mukaan pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a},\bar{b}) \wedge \ell(I) = \sup_{\mathrm{qr}(\phi)\leq\beta}\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|$. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että $\min I = 0$.

Osoitetaan ensin, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \wedge \ell(I) \leq \sup_{\mathrm{qr}(\phi)\leq\beta}\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|$. Jos $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) = 0$, väite on selvä, joten riittää näyttää, että jokaiselle $t > 0$ löytyy $\psi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,I)$, $\mathrm{qr}(\psi) \leq \alpha$, jolle

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) > t \implies \left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \geq t.$$

Olkoon tätä varten $t > 0$ sellainen, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) > t$. Nyt etäisyyden $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}$ joko eteenpäin- tai takaisinpäinosa on suurempi kuin t. Symmetrian nojalla voidaan olettaa, että eteenpäinosa, siis $\sup_{c\in\mathfrak{A}}\inf_{d\in\mathfrak{B}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a}c,\bar{b}d) > t$. Siten löytyy $c \in \mathfrak{A}$, jolle kaikilla $d \in \mathfrak{B}$ pätee $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a}c,\bar{b}d) > t$. Induktio-oletuksen valossa tämä c on sellainen, että supremum yli etäisyyksien $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d)\right|$, missä ϕ käy läpi kvanttoriastetta $\leq \beta$ olevat $n+1$-paikkaiset $\langle\Omega, I\rangle$-kaavat, on suurempi kuin t jokaisella $d \in \mathfrak{B}$. Siten jokaiselle $d \in \mathfrak{B}$ löytyy kaava $\phi_d \in \mathrm{Fr}(n+1,\Omega,I)$, $\mathrm{qr}(\phi_d) \leq \beta$, jolle $\left|\phi^{\mathfrak{A}}_d(\bar{a},c) - \phi^{\mathfrak{B}}_d(\bar{b},d)\right| > t$.

Mikäli epäyhtälö $\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) > \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d)$ ei pidä paikkaansa, voimme korvata kaavan ϕ_d kaavalla $\ell(I) - \phi_d$, mikä heittää epäyhtälön toisin päin muuttamatta etäisyyttä; voimme siis olettaa, että $\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) > \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d)$ pätee kaikilla d. Tästä seuraa, että $\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) - \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) = \left|\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) - \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d)\right| > t$ eli $\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) > \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) + t$ kaikilla d. Sellaisille d, joille $\phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) \neq 0$, voimme vaihtaa kaavan ϕ_d kaavaan $\phi_d \dot{-} \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d)$.[5] Siis voimme olettaa, että kaikilla d pätee $\phi_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) > t > \phi_d^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) = 0$. Tällöin

$$\inf_{d' \in \mathfrak{B}} \phi_{d'}^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) \geq t > \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \phi_{d'}^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) = 0$$

kaikilla d ja edelleen

$$\sup_{c \in \mathfrak{A}} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \phi_{d'}^{\mathfrak{A}}(\bar{a},c) \geq t > \sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \phi_{d'}^{\mathfrak{B}}(\bar{b},d) = 0.$$

Siis kaavalle $\psi = \sup_{v_n} \bigwedge_{d \in \mathfrak{B}} \phi_d$ pätee $\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \geq t > \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = 0$ ja siten $\left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \geq t$. Lisäksi $\mathrm{qr}(\psi) \leq \sup_d \mathrm{qr}(\phi_d) + 1 \leq \beta + 1 = \alpha$, mikä oli todistettava.

Osoitetaan sitten, että $r_{\alpha,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}(\bar{a},\bar{b}) \wedge \ell(I) \geq \sup_{\mathrm{qr}(\phi) \leq \beta} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|$. Nyt riittää, että jokaiselle $t > 0$ pätee

$$\sup_{\mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| > t \implies r_{\alpha,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}(\bar{a},\bar{b}) \geq t.$$

Oletetaan siis, että $\sup_{\mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| > t$. Tällöin löytyy kaava $\phi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,I)$, jolle $\mathrm{qr}(\phi) \leq \alpha$ ja $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| > t$. Jos $\mathrm{qr}(\phi) \leq \beta$, väite seuraa induktio-oletuksesta ja lemman 3.10 kohdasta (i), joten oletetaan, että $\mathrm{qr}(\phi) = \alpha$. Mikäli $\phi = u(\psi_0, \ldots, \psi_m)$ joillekin $\psi_i \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,I)$ ja 1-Lipschitz-konnektiiville u, konnektiivin poistaminen ei tee etäisyydestä $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right|$ pienempää ja siten voimme korvata kaavan ϕ jollain kaavoista ψ_i. Jos taas $\phi = \bigwedge \Phi$, voimme yhä korvata kaavan ϕ jollain joukon Φ alkiolla etäisyyden pienentymättä. Jos $\phi = \bigvee \Phi$, etäisyys ei ehkä pysy samana mutta korvaamalla kaavan ϕ jollain joukon Φ alkiolla pidämme etäisyyden silti suurempana kuin t (sillä muutoin t olisi joukon $\left\{\theta^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \theta^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) \mid \theta \in \Phi\right\}$ yläraja, vastoin oletusta). Voimme jatkaa näin, kunnes vastaan tulee muotoa $\inf_{v_k} \psi$ (tai $\sup_{v_k} \psi$) oleva kaava. Oletamme siis, että $\phi = \inf_{v_k} \psi$ (supremum-tapaus käsitellään duaalisesti).

[5] Konnektiivi $x \mapsto x \dot{-} r$ on 1-Lipschitz avaruudessa $[0,\infty)$ ja siten sallittu: mikäli pätee $x, y \geq r$, niin $d(x \dot{-} r, y \dot{-} r) = |x \dot{-} r - (y \dot{-} r)| = |x - r - (y - r)| = |x - y| = d(x,y)$. Jos taas $x, y < r$, niin $d(x \dot{-} r, y \dot{-} r) = d(0,0) = 0 \leq d(x,y)$. Jos $y < r$ ja $x \geq r$, pätee $d(x \dot{-} r, y \dot{-} r) = |x \dot{-} r - 0| = x - r = x - y + y - r \leq |x - y| + y - r \leq |x - y| = d(x,y)$.

Koska $\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| > t$, pätee joko

$$\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) > \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) + t \quad \text{tai} \quad \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) > \phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) + t.$$

Tapaukset ovat symmetriset, joten oletetaan, että ensimmäinen epäyhtälö pätee. Tällöin $\inf_{c\in\mathfrak{A}} \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) > \inf_{d\in\mathfrak{B}} \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}, d) + t$. Siis jollain $d \in \mathfrak{B}$ pätee $\inf_{c\in\mathfrak{A}} \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) > \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}, d) + t$. Edelleen tällä kyseisellä d ja kaikilla $c \in \mathfrak{A}$ pätee $\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) > \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}, d) + t$, jolloin $\left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}, c) - \psi^{\mathfrak{B}}(\bar{b}, d)\right| > t$. Koska $\mathrm{qr}(\psi) = \beta$, induktio-oletuksen nojalla $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) > t$ tällä kyseisellä d ja jokaisella c, ja siten $\inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \geq t$ ja edelleen $\sup_{d\in\mathfrak{B}} \inf_{c\in\mathfrak{A}} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d) \geq t$. Siis myös $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) \geq t$, mikä viimeistelee todistuksen. □

Määritelmä 3.14. Struktuuriparin $\langle\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\rangle$ Scottin korkeus modulin Ω suhteen, $\mathrm{SH}_\Omega(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, on pienin sellainen ordinaali α, että $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$. Jos $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, kutsumme sitä struktuurin $\mathfrak{A}$ Scottin korkeudeksi ja merkitsemme $\mathrm{SH}_\Omega(\mathfrak{A})$.

Jos Ω on asiyhteydestä selvä, jätämme sen merkitsemättä. Lemman 3.10 kohdan (ii) nojalla $\mathrm{SH}(\mathfrak{A}) < \mathrm{density}(\mathfrak{A})^+$ (kunhan $\mathfrak{A}$ on ääretön). Erityisesti, jos $\mathfrak{A}$ on separoituva, niin $\mathrm{SH}(\mathfrak{A}) < \omega_1$.

Lemma 3.15. Jos $\mathfrak{A} \, E_\infty \, \mathfrak{B}$, niin mille tahansa struktuurille $\mathfrak{C}$ pätee $\mathrm{SH}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) = \mathrm{SH}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$, ja erityisesti $\mathrm{SH}(\mathfrak{A}) = \mathrm{SH}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathrm{SH}(\mathfrak{B})$.

Todistus. Merkitään $\alpha = \mathrm{SH}(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})$ ja $\beta = \mathrm{SH}(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$. Symmetrian nojalla riittää näyttää, että $\beta \leq \alpha$. Halutaan osoittaa, että $r^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$. Olkoot tätä varten $n < \omega$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ ja $\bar{c} \in \mathfrak{C}^n$, sekä olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Oletuksesta $\mathfrak{A} \, E_\infty \, \mathfrak{B}$ seuraa, että $r_{\infty,0}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$. Lemman 3.9 (ii) nojalla löytyy jokin sellainen $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$, että

$$r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha+1,n}(\bar{a}, \bar{b}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Koska funktiot $r_{\gamma,n}$ ovat pseudometriikoita, kolmioepäyhtälöitä käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned} r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{C}\bar{c}) &\leq r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{A}\bar{a}) + r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{C}\bar{c}) \text{ sekä} \\ -r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b}, \mathfrak{C}\bar{c}) &\leq r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{C}\bar{c}), \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\left|r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c})\right| &= r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c}) \\
&\leq r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{A}\bar{a}) + r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c}) \\
&\quad + r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{B}\bar{b}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c}) \\
&= (r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c})) \\
&\quad + r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{B}\bar{b}) + r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{B}\bar{b}) \\
&< |r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a},\mathfrak{C}\bar{c})| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

sillä koska $\alpha = \mathrm{SH}(\mathfrak{A},\mathfrak{C})$, niin $r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{C}}_{\alpha+1,n}$. Koska ε oli mielivaltainen, $\left|r_{\alpha+1,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c}) - r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\bar{b},\mathfrak{C}\bar{c})\right| = 0$, joten $r^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha,n} = r^{\mathfrak{B},\mathfrak{C}}_{\alpha+1,n}$ kaikilla $n < \omega$. Koska $\beta = \mathrm{SH}(\mathfrak{B},\mathfrak{C})$ on pienin tällainen ordinaali, täytyy päteä $\beta \leq \alpha$. $\square$

3.3 Scottin lauseet

Määritelmä 3.16. Olkoon $\mathfrak{A}$ separoituva L-struktuuri, $D \subseteq \mathfrak{A}$ tiheä ja numeroituva, $n < \omega$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\alpha < \omega_1$. Määritellään kaava $\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}(v_0,\dots,v_{n-1}) \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,[0,1])$ rekursiivisesti.

Jos $\alpha = 0$, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \bigvee_{\psi\in\mathcal{F}} \left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi(v_0,\dots,v_{n-1})\right|$$

missä $\mathcal{F}$ on tiheä numeroituva joukko yksinkertaisia n-paikkaisia $(\Omega,[0,1])$-kaavoja.

Jos $\alpha = \beta+1$ jollekin $\beta \in \mathrm{On}$, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \left(\bigvee_{c\in D} \inf_{v_n} \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c}(v_0,\dots,v_n)\right) \vee \left(\sup_{v_n} \bigwedge_{c\in D} \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c}(v_0,\dots,v_n)\right).$$

Jos α on rajaordinaali, niin

$$\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} = \bigvee_{\beta<\alpha} \sigma^{\beta,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}.$$

Kaavat $\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ ovat täysin analogisia klassisen logiikan vastaavien kaavojen kanssa: ainoat muutokset ovat, että symbolit $\bigwedge$ ja $\bigvee$ vaihtuvat päittäin luvussa 2.3.3 käsiteltyjen notaatioerojen takia. Lisäksi tapauksessa $\alpha = 0$

käydään läpi atomikaavojen ja niiden negaatioiden sijaan yksinkertaisia kaavoja. Klassisessa tapauksessa otetaan konjunktio jonon $\bar{a}$ atomityypistä. Metrisessä malliteoriassa tyypit ovat L-ehtojoukkoja eivätkä varsinaisesti kaavajoukkoja, mutta jatkuva-arvoisessakin tapauksessakin kaavan $\sigma^{0,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}$ voidaan ajatella tulevan tyypistä $\{\psi(v_0,\ldots,v_{n-1}) = \psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \mid \psi \in \mathcal{F}\}$, joka on melko hyvä jatkuva-arvoinen vastine jonon $\bar{a}$ kvanttorivapaalle tyypille.

Huomautettakoon, että struktuurin $\mathfrak{A}$ tiheän numeroituvan joukon D valinta vaikuttaa siihen, mikä kaavasta tulee. Kahdella eri joukolla saadaan kuitenkin loogisesti ekvivalentit kaavat, mikä seuraa esimerkiksi seuraavasta lemmasta, joka kytkee yhteen nämä Scottin lauseiden rakennuspalikat sekä edestakaisetäisyydet.

Lemma 3.17. Kaikilla separoituvilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$, ja jokaisella $\alpha \in \mathrm{On}$ ja $n < \omega$ sekä $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$, $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$ pätee

$$\left(\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \wedge 1.$$

Todistus. Merkitään $\bar{x} = \langle v_0,\ldots,v_{n-1}\rangle$. Todistamme väitteen induktiolla ordinaalin α suhteen. Jos $\alpha = 0$, niin

$$\begin{aligned}
\left(\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) &= \left(\bigvee_{\psi\in\mathcal{F}} \left|\psi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \psi(\bar{x})\right|\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) \\
&= \sup_{\phi\in\mathcal{F}} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| \\
&\overset{(*)}{=} \sup\left\{\left|\phi^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) - \phi^{\mathfrak{B}}(\bar{b})\right| : \phi \in \mathrm{Fr}(n,\Omega,[0,1]) \text{ yksinkertainen}\right\} \\
&= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a},\bar{b}) \wedge 1.
\end{aligned}$$

Yhtälö $(*)$ pätee, koska $\mathcal{F}$ on tiheä kaikkien yksinkertaisten n-paikkaisten $\langle\Omega,[0,1]\rangle$-kaavojen joukossa.

Jos $\alpha = \beta + 1$, niin

$$\left(\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = \left(\left(\bigvee_{c\in D} \inf_{v_n} \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c}(\bar{x},v_n)\right) \vee \left(\sup_{v_n} \bigwedge_{c'\in D} \sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c'}(\bar{x},v_n)\right)\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b})$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sup_{c \in D} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \left(\sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c} \right)^{\mathfrak{B}} (\bar{b}, d') \right) \vee \left(\sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{c' \in D} \left(\sigma^{\beta,n+1}_{\mathfrak{A},\bar{a}c'} \right)^{\mathfrak{B}} (\bar{b}, d) \right) \\
&\overset{\text{i.o.}}{=} \left(\sup_{c \in D} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d') \wedge 1 \right) \right) \vee \left(\sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{c' \in D} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c', \bar{b}d) \wedge 1 \right) \right) \\
&= \sup_{c \in D} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{c' \in D} \left(\left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d') \vee r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c', \bar{b}d) \right) \wedge 1 \right) \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{c \in \mathfrak{A}} \sup_{d \in \mathfrak{B}} \inf_{c' \in \mathfrak{A}} \inf_{d' \in \mathfrak{B}} \left(r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n+1}(\bar{a}c, \bar{b}d') \vee r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B},\Omega}_{\beta,n+1}(\bar{a}c', \bar{b}d) \right) \wedge 1 \\
&= r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) \wedge 1
\end{aligned}
$$

Yhtälö $(*)$ pätee, koska D on tiheä struktuurissa $\mathfrak{A}$.

Jos α on rajaordinaali, niin

$$
\begin{aligned}
\left(\sigma^{\alpha,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \right)^{\mathfrak{B}} (\bar{b}) &= \left(\bigvee_{\beta<\alpha} \sigma^{\beta,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \right)^{\mathfrak{B}} (\bar{b}) = \sup_{\beta<\alpha} \left(\sigma^{\beta,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \right)^{\mathfrak{B}} (\bar{b}) \\
&\overset{\text{i.o.}}{=} \sup_{\beta<\alpha} r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\beta,n}(\bar{a}, \bar{b}) \wedge 1 = r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{\alpha,n}(\bar{a}, \bar{b}) \wedge 1.
\end{aligned}
$$

□

Määritelmä 3.18. Separoituvan struktuurin $\mathfrak{A}$ Scottin lause $\sigma_{\mathfrak{A}}$ on Ω-lause

$$
\sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0}_{\mathfrak{A},\emptyset} \vee \bigvee_{n<\omega} \bigvee_{\bar{a} \in D^n} \sup_{v_0} \ldots \sup_{v_{n-1}} \frac{1}{2} \left| \sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} - \sigma^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}_{\mathfrak{A},\bar{a}} \right|,
$$

missä $D \subseteq \mathfrak{A}$ on kuten määritelmässä 3.16.

Scottin lause on jälleen täysin analoginen klassisen logiikan vastineensa kanssa. Tällä kertaa symboleiden $\bigwedge$ ja $\bigvee$ päittäin vaihtamisen lisäksi on implikaatio korvattu erotuksen itseisarvolla, joka jollain tavalla muistuttaa implikaatiota. Kerroin $1/2$ ei toimita muuta roolia kuin varmistaa, että konnektiivi $\langle x, y \rangle \mapsto \frac{1}{2} |x - y|$ on 1-Lipschitz, kuten $\langle \Omega, [0,1] \rangle$-kaavojen määritelmä vaatii.

Nyt voimme todistaa luvun päätuloksen.

Lause 3.19. Olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ separoituvia L-struktuureja. Tällöin

$$
\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A}} = 0) \iff \mathfrak{A} \, E_\infty \, \mathfrak{B}.
$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A}} = 0)$. Koska nyt

$$\mathfrak{B} \models \left(\bigvee_{n<\omega} \bigvee_{\bar{a}\in D^n} \sup_{v_0} \ldots \sup_{v_{n-1}} \frac{1}{2} \left| \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n} - \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n} \right| = 0 \right),$$

niin $\mathfrak{B} \models \left(\left| \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n} - \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n} \right| = 0 \right)$ kaikilla $n < \omega$, ja siten lemman 3.17 nojalla

$$r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}(\bar{a},\bar{b}) = \left(\sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = \left(\sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}(\bar{a},\bar{b})$$

kaikilla $n < \omega$ ja $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ eli $r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} = r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$. Tällöin $r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} = r_{\infty,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$. Koska $\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A},\emptyset}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0} = 0)$, lemman 3.17 nojalla $r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$ ja siten siis $r_{\infty,0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$. Siis $\mathfrak{A}\, E_\infty\, \mathfrak{B}$.

Oletetaan sitten, että $\mathfrak{A}\, E_\infty\, \mathfrak{B}$ eli $r_{\infty,0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$. Tällöin lemman 3.15 nojalla $\mathrm{SH}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = \mathrm{SH}(\mathfrak{A})$, joten $r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} = r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ kaikilla $n < \omega$, mikä lemman 3.17 valossa tarkoittaa, että

$$\left(\sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = \left(\sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n}\right)^{\mathfrak{B}}(\bar{b})$$

kaikilla $n < \omega$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$. Siis

$$\mathfrak{B} \models \left(\bigvee_{n<\omega} \bigvee_{\bar{a}\in D^n} \sup_{v_0} \ldots \sup_{v_{n-1}} \frac{1}{2} \left| \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),n} - \sigma_{\mathfrak{A},\bar{a}}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A})+1,n} \right| = 0 \right).$$

Toisaalta koska $r_{\infty,0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$, niin erityisesti $r_{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0}(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$, joten jälleen lemman 3.17 nojalla $\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A},\emptyset}^{\mathrm{SH}(\mathfrak{A}),0} = 0)$. Siispä $\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A}} = 0)$. □

3.4 Universaali heikko moduli

Osoitamme vielä lopuksi, että jokaiselle numeroituvalle aakkostolle L on olemassa sellainen heikko moduli $\Omega_{\mathrm{U}}(L)$, että ekvivalenssirelaatio E_∞ on hienoin mahdollinen, toisin sanoen kaikilla struktuureilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ pätee

$$\mathfrak{A}\, E_\infty\, \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Lisäksi tämä moduli on nimensä mukaan universaali, eli jokainen logiikan $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ L-kaava on ekvivalentti jonkin $\Omega_{\mathrm{U}}(L)$-kaavan kanssa. Tämän todistaminen tosin vaatii jonkin verran puolalaisten avaruuksien sekä näiden Borel-funktioiden teoriaa sekä jatkuva-arvoisen version López-Escobarin lauseesta, jota emme tässä todista. Todistus löytyy artikkelista [BDNT17].

Määritelmä 3.20. Olkoon L numeroituva aakkosto. Sanomme, että heikko moduli Ω on universaali aakkostolle L, jos

(i) jokaiselle atomikaavalle $\phi(v_0, \ldots, v_{k-1})$ on olemassa $n \geq k$, jolle

$$\Delta_\phi(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}) \leq \Omega|_n(0, \ldots, 0, \delta_0, \ldots, \delta_{k-1}),$$

missä Δ_ϕ on kaavan atomikaavan ϕ pienin moduli (eli kuten lemmassa 2.18),

(ii) jokaiselle $k < \omega$ ja $M > 0$ on olemassa $n \geq k$, jolle

$$M \cdot \Omega|_k(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}) \leq \Omega|_n(0, \ldots, 0, \delta_0, \ldots, \delta_{k-1}),$$

(iii) kaikille $k, n < \omega$ pätee

$$\Omega|_k(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}) + \Omega|_n(\delta'_0, \ldots, \delta'_{n-1}) \leq \Omega|_{k+n}(\delta_0, \ldots, \delta_{k-1}, \delta'_0, \ldots, \delta'_{n-1}),$$

sekä

(iv) Ω on kasvava siirtojen suhteen.

Universaalin heikon modulin määritelmä on siinä mielessä keinotekoinen, että määritelmän ehdoiksi on otettu täsmälleen ne ominaisuudet, jotka modulilta vaaditaan, jotta lauseen 3.23 todistus menee läpi. Tämä ei tietenkään haittaa, koska yllä oleva määritelmä riittää eikä ole liian vaativa: jokaisella aakkostolla nimittäin on universaali heikko moduli, kuten seuraavaksi osoitamme.

Lause 3.21. Jokaisella aakkostolla L on universaali heikko moduli $\Omega_{\mathrm{U}}(L)$.

Todistus. Numeroikoon ϕ_i, $i < \omega$, kaikki L-atomikaavat. Osoitamme, että kuvaus

$$\Omega(\delta_0, \delta_1, \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \sup_{k \leq i} \Delta_{\phi_k}(\delta_i, \ldots, \delta_i)$$

on heikko moduli ja lisäksi universaali. Osoitetaan ensin, että Ω toteuttaa määritelmän 3.20 ehdot.

(i) Olkoon $\phi_m(v_0, \ldots, v_{k-1})$ atomikaava. Nyt subadditiivisuuden ja kasvavuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\Delta_{\phi_m}(\delta_0,\dots,\delta_{k-1}) &\le \Delta_{\phi_m}(\delta_0,0,\dots,0)+\dots+\Delta_{\phi_m}(0,\dots,0,\delta_{k-1})\\
&\le \Delta_{\phi_m}(\delta_0,\dots,\delta_0)+\dots+\Delta_{\phi_m}(\delta_{k-1},\dots,\delta_{k-1})\\
&\le m\sup_{j\le m}\Delta_{\phi_j}(\delta_0,\dots,\delta_0)+\dots\\
&\qquad+(m+k-1)\sup_{j\le m+k-1}\Delta_{\phi_j}(\delta_{k-1},\dots,\delta_{k-1})\\
&=\Omega|_{m+k}(0,\dots,0,\delta_0,\dots,\delta_{k-1}).
\end{aligned}$$

Siis voimme valita luvuksi $n=m+k$.

(ii) Olkoon $k<\omega$ ja $M>0$. Nyt

$$\begin{aligned}
M\cdot\Omega|_k(\delta_0,\dots,\delta_{k-1}) &= M\sum_{i=0}^{k-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1} Mi\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)\\
&\le\sum_{i=0}^{k-1}(\lceil M\rceil k+i)\sup_{j\le\lceil M\rceil k+i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)\\
&=\Omega|_{(\lceil M\rceil+1)k}(0,\dots,0,\delta_0,\dots,\delta_{k-1}),
\end{aligned}$$

missä $\lceil\cdot\rceil$ on kattofunktio. Siis voimme valita $n=(\lceil M\rceil+1)k$.

(iii) Olkoot $k,n<\omega$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\Omega|_k(\delta_0,\dots,\delta_{k-1})+\Omega|_n(\delta'_0,\dots,\delta'_{n-1})\\
&\quad=\sum_{i=0}^{k-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)+\sum_{i=0}^{n-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta'_i,\dots,\delta'_i)\\
&\quad=\sum_{i=0}^{k-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)+\sum_{i=k}^{k+n-1}(i-k)\sup_{j\le i-k}\Delta_{\phi_j}(\delta'_{i-k},\dots,\delta'_{i-k})\\
&\quad\le\sum_{i=0}^{k-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta_i,\dots,\delta_i)+\sum_{i=k}^{k+n-1} i\cdot\sup_{j\le i}\Delta_{\phi_j}(\delta'_{i-k},\dots,\delta'_{i-k})\\
&\quad=\Omega|_{n+k}(\delta_0,\dots,\delta_{k-1},\delta'_0,\dots,\delta'_{n-1}).
\end{aligned}$$

(iv) Osoittaaksemme, että Ω on siirtojen suhteen kasvava, olkoon $\langle i_j\rangle_{j<\omega}$

aidosti kasvava jono indeksejä. Tällöin

$$\begin{aligned}\Omega(\delta_0, \delta_1, \dots) &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \sup_{k \le i} \Delta_{\phi_k}(\delta_i, \dots, \delta_i)\\ &\le \sum_{j=0}^{\infty} i_j \cdot \sup_{k \le i_j} \Delta_{\phi_k}(\delta_j, \dots, \delta_j)\\ &= \Omega(\eta),\end{aligned}$$

missä $\eta(i_j) = \delta_j$ ja $\eta(j) = 0$ muulloin, mikä oli todistettava

Osoitetaan lopuksi, että Ω todella on heikko moduli. Selvästi Ω on kasvava, subadditiivinen ja jatkuva jokaisessa komponentissa erikseen sekä saa nollassa arvon nolla. Alaspäin puolijatkuvuutta varten olkoon $t > 0$. Osoitamme, että $V := \{x \in (0, \infty]^{\omega} \mid \Omega(x) > t\}$ on avoin. Olkoot siis δ_i, $i < \omega$, sellaiset, että $\Omega(\delta_0, \delta_1, \dots) > t$. Koska $\Omega(\delta_0, \delta_1, \dots)$ on kasvavan jonon raja-arvo, joka on suurempi kuin luku t, jonon on oltava jostain alkaen suurempi kuin t, toisin sanoen löytyy indeksi n, jolle $\Omega|_m(\delta_0, \dots, \delta_{m-1}) > t$ kaikilla $m \ge n$. Nyt

$$t < \Omega|_n(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}) \le \Omega(\delta_0, \dots, \delta_{n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots)$$

kaikilla $\gamma_j \in (0, \infty]$, $j < \omega$. Koska Ω on jatkuva jokaisessa komponentissa erikseen, jokaiselle δ_i, $i < n$, löytyy ympäristö B_i, jolle kaikilla $\delta'_i \in B_i$ pätee yhä

$$\Omega(\delta'_0, \dots, \delta'_{n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \dots) > t.$$

Tämä osoittaa, että $\langle \delta_i \rangle_{i<\omega} \in U := \prod_{i<n} B_i \times \prod_{j<\omega} [0, \infty) \subseteq V$. Nyt U on tulo avoimista joukoista, joista vain äärellisen moni poikkeaa koko avaruudesta $[0, \infty)$. Siis se on avoin avaruudessa $[0, \infty)^{\omega}$, mikä osoittaa, että V on avoin. Tämä viimeistelee todistuksen. $\square$

Jos $\mathfrak{A}$ on L-struktuuri, määrittelemme funktion $d_n^{\Omega} \colon \mathfrak{A}^n \times \mathfrak{A}^n \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$d_n^{\Omega}(\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle, \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle) = \Omega|_n(d(a_0, b_0), \dots, d(a_{n-1}, b_{n-1})).$$

Koska $\Omega|_n$ on jatkuva funktio $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on $d_n^{\Omega}(x_0, \dots, x_{2n-1})$ yksinkertainen L-kaava kaikilla $n < \omega$ ja $x_0, \dots, x_{2n-1} \in \mathrm{Var}$. On myös helppo nähdä, että d_n^{Ω} on pseudometriikka: symmetria periytyy avaruuden $\mathfrak{A}$ metriikalta, jonon etäisyys itsestään on nolla, koska $\Omega|_n$ antaa nollajonolle arvoksi nolla, ja kolmioepäyhtälö seuraa modulin $\Omega|_n$ kasvavuudesta ja subadditiivisuudesta.

Lemma 3.22. Jos Ω on universaali heikko moduli aakkostolle L, niin

(i) jokaiselle atomikaavalle $\phi(v_0,\ldots,v_{k-1})$ on olemassa $n \geq k$, jolle $\phi(v_n,\ldots,v_{n+k-1})$ on Ω-kaava,

(ii) jokaiselle k-paikkaiselle Ω-kaavalle $\phi(v_0,\ldots,v_{k-1})$ ja $M > 0$ on olemassa $n \geq k$, jolle $M \cdot \phi(v_n,\ldots,v_{n+k-1})$ on Ω-kaava, sekä

(iii) kaikille $i_0 < \cdots < i_{n-1} < j_0 < \cdots < j_{n-1}$,

$$d_n^{\Omega}(\langle v_{i_0},\ldots,v_{i_{n-1}}\rangle, \langle v_{j_0},\ldots,v_{j_{n-1}}\rangle)$$

on yksinkertainen Ω-kaava.

Todistus. (i) Seuraa välittömästi määritelmän 3.20 kohdasta (i).

(ii) Seuraa välittömästi määritelmän 3.20 kohdasta (ii).

(iii) Olkoon $\mathfrak{A}$ struktuuri. Halutaan näyttää, että

$$d_n^{\Omega}(\langle v_{i_0},\ldots,v_{i_{n-1}}\rangle, \langle v_{j_0},\ldots,v_{j_{n-1}}\rangle)^{\mathfrak{A}}$$

noudattaa modulia $\Omega|_{j_{n-1}}$. Olkoot tätä varten $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d} \in \mathfrak{A}^n$. Notaation helpottamiseksi merkitään $\delta_i = d(a_i,c_i)$ ja $\gamma_i = d(b_i,d_i)$. Nyt määritelmän 3.20 kohdan (iii) sekä pseudometriikan d_n^{Ω} kolmioepäyhtälön[6] nojalla

$$\begin{aligned}
\left|d_n^{\Omega}(\bar{a},\bar{b}) - d_n^{\Omega}(\bar{c},\bar{d})\right| &= \left|d_n^{\Omega}(\bar{a},\bar{b}) - d_n^{\Omega}(\bar{b},\bar{c}) + d_n^{\Omega}(\bar{b},\bar{c}) - d_n^{\Omega}(\bar{c},\bar{d})\right| \\
&\leq \left|d_n^{\Omega}(\bar{a},\bar{b}) - d_n^{\Omega}(\bar{b},\bar{c})\right| + \left|d_n^{\Omega}(\bar{b},\bar{c}) - d_n^{\Omega}(\bar{c},\bar{d})\right| \\
&\leq d_n^{\Omega}(\bar{a},\bar{c}) + d_n^{\Omega}(\bar{b},\bar{d}) \\
&= \Omega|_n(\delta_0,\ldots,\delta_{n-1}) + \Omega|_n(\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1}) \\
&\leq \Omega|_{2n}(\delta_0,\ldots,\delta_{n-1},\gamma_0,\ldots,\gamma_{n-1}).
\end{aligned}$$

Koska Ω on siirtojen suhteen kasvava,

$$\Omega|_{2n}(d(a_0,c_0),\ldots,d(b_{n-1},d_{n-1})) \leq \Omega(\eta),$$

missä $\eta(i_k) = \delta_k$ ja $\eta(j_k) = \gamma_k$ ja $\eta(k) = 0$ muulloin. Tästä seuraa, että

$$\left|d_n^{\Omega}(\bar{a},\bar{b}) - d_n^{\Omega}(\bar{c},\bar{d})\right| \leq \Omega|_{j_{n-1}+1}(\eta \upharpoonright (j_{n-1}+1)),$$

mikä oli todistettava.

□

[6]Argumentti, jota tässä hyödynnetään, on täysin sama kuin lemman 3.8 kohdan (ii) todistuksessa.

Seuraavassa lauseessa osoitamme, että universaali heikko moduli on se työkalu, jota olemme lähteneet etsimään.

Lause 3.23. Olkoon L numeroituva aakkosto, ja olkoot $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ separoituvia L-struktuureja sekä $\bar{a} \in \mathfrak{A}^n$ ja $\bar{b} \in \mathfrak{B}^n$. Tällöin

$$r_{\infty,n}^{\Omega_{\mathrm{U}}(L)}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) = \inf\left\{ d_n^{\Omega_{\mathrm{U}}(L)}(\vartheta(\bar{a}), \bar{b}) \mid \vartheta \text{ on isomorfismi } \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \right\}.$$

Erityisesti

$$r_{\infty,0}^{\Omega_{\mathrm{U}}(L)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \begin{cases} 0, & \text{jos } \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}, \\ \infty & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Todistus. Merkitään $\Omega = \Omega_{\mathrm{U}}(L)$ ja

$$S = \left\{ d_n^{\Omega_{\mathrm{U}}(L)}(f(\bar{a}), \bar{b}) \mid f \text{ on isomorfismi } \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \right\}.$$

Osoitetaan ensin, että $r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) \le \inf S$. Jos $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ eivät ole isomorfiset, niin $S = \emptyset$, jolloin $\inf S = \infty$ (sillä jokainen reaaliluku on tyhjän joukon alaraja), jolloin selvästi $r_{\infty,n}^{\Omega}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) \le \inf S$. Jos taas ϑ on isomorfismi $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, niin kolmioepäyhtälön sekä lemmojen 3.8 ja 3.11 nojalla

$$\begin{aligned} r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) &\le r_{\alpha,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\vartheta(\bar{a})) + r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\vartheta(\bar{a}), \mathfrak{B}\bar{b}) \\ &= 0 + r_{\alpha,n}(\mathfrak{B}\vartheta(\bar{a}), \mathfrak{B}\bar{b}) \\ &\le \Omega|_n(d(\vartheta(a_0), b_0), \ldots, d(\vartheta(a_{n-1}), b_{n-1}) \\ &= d_n^{\Omega}(\vartheta(\bar{a}), \bar{b}) \end{aligned}$$

kaikilla $\alpha \in \mathrm{On}$. Siispä myös $r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) \le d_n^{\Omega}(\vartheta(\bar{a}), \bar{b})$. Koska ϑ oli mielivaltainen isomorfismi, tämä pätee kaikilla isomorfismeilla, ja siten myös $\inf S \ge r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b})$.

Osoitetaan sitten, että $r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) \ge \inf S$. Tätä varten riittää löytää jokaista $t > 0$ kohti isomorfismi ϑ, jolle pätee

$$r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) < t \implies d_n^{\Omega}(\vartheta(\bar{a}), \bar{b}) \le t.$$

Olkoon siis t sellainen, että $r_{\infty,n}(\mathfrak{A}\bar{a}, \mathfrak{B}\bar{b}) < t$. Nyt lauseen 3.12 nojalla löytyy tiheähäntäiset $a \in \mathfrak{A}^{\omega}$ ja $b \in \mathfrak{B}^{\omega}$, joille $a \restriction n = \bar{a}$, $b \restriction n = \bar{b}$ ja $r_{0,m}(\mathfrak{A}a \restriction m, \mathfrak{B}b \restriction m) < t$ kaikilla $m < \omega$.

Huomautettakoon, että koska Ω on siirtojen suhteen kasvava, niin jos $\phi(v_0, \ldots, v_{k-1})$ on Ω-kaava ja $\bar{x} \in \mathrm{Var}^k$, myös $\phi(\bar{x})$ on Ω-kaava. Täten lemmasta 3.22 seuraa, että jokaiselle atomikaavalle $\phi(v_0, \ldots, v_{k-1})$ ja $M > 0$

löytyy $n_{M,\phi} < \omega$ niin, että $M \cdot \phi(v_{i_0}, \ldots, v_{i_{k-1}})$ on yksinkertainen Ω-kaava aina, kun $i_j > n_{M,\phi}$ kaikilla $j < k$. Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} &\left| M \cdot \phi^{\mathfrak{A}}(a(i_0), \ldots, a(i_{k-1}) - M \cdot \phi^{\mathfrak{B}}(b(i_0) \ldots, b(i_{k-1}) \right| \\ &\quad \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0, \max_{j<k} i_j + 1}(a \restriction (\max_{j<k} i_j + 1), b \restriction (\max_{j<k} i_j + 1)) \\ &\quad < t \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

eli

$$\left| \phi^{\mathfrak{A}}(a(i_0), \ldots, a(i_{k-1}) - \phi^{\mathfrak{B}}(b(i_0) \ldots, b(i_{k-1}) \right| < t/M$$

silloin, jos $i_j > n_{M,\phi}$ kaikilla $j < k$. Raja-arvon määritelmän perusteella tästä seuraa, että

$$\left| \phi^{\mathfrak{A}}(a(i_0), \ldots, a(i_{k-1}) - \phi^{\mathfrak{B}}(b(i_0) \ldots, b(i_{k-1}) \right| \to 0, \tag{3.4.2}$$

kun $\min_{j<k} i_j \to \infty$.

Kun raja-arvoa (3.4.2) soveltaa kaavaan $d(v_0, v_1)$, nähdään, että jokaisella aidosti kasvavalla jonolla $\langle i_j \rangle_{j<\omega} \in \omega^\omega$, jos jompikumpi jonoista $\langle a(i_j) \rangle_{j<\omega}$ ja $\langle b(i_j) \rangle_{j<\omega}$ on Cauchy, myös toinen on: jos tehdään vastaoletus, että $\langle a(i_j) \rangle_{j<\omega}$ on Cauchy mutta $\langle b(i_j) \rangle_{j<\omega}$ ei, löytyy $\varepsilon > 0$, jolle mistään indeksistä alkaen ei päde aina $d(b(i_j), b(i_k)) < \varepsilon$. Siten löytyy jonon $\langle i_j \rangle_{j<\omega}$ osajono $\langle i'_j \rangle_{j<\omega}$, jolle $d(b(i'_j), b(i'_k)) \geq \varepsilon$ kaikilla $j, k < \omega$. Kuitenkin $\langle a(i'_j) \rangle_{j<\omega}$ on Cauchy ja

$$\left| d(a(i'_j), a(i'_k)) - d(b(i'_j), b(i'_k)) \right| \to 0,$$

mikä on ristiriita.

Nyt jos $\langle i_j \rangle_{j<\omega}$ ja $\langle i'_j \rangle_{j<\omega}$ ovat aidosti kasvavia jonoja ja pätee $\lim_{j\to\infty} a(i_j) = \lim_{j\to\infty} a(i'_j)$, niin tällöin jono $\langle a(i_j), a(i'_j) \rangle_{j<\omega}$ on Cauchy, jolloin myös $\langle b(i_j), b(i'_j) \rangle_{j<\omega}$ on Cauchy, joten $\lim_{j\to\infty} b(i_j) = \lim_{j\to\infty} b(i'_j)$, sekä päinvastoin. Täten kuvaus ϑ, jolle

$$\vartheta\left(\lim_{j\to\infty} a(i_j) \right) = \lim_{j\to\infty} b(i_j),$$

on hyvin määritelty bijektio jonon a kasautumisarvoilta jonon b kasautumisarvoille. Itse asiassa ϑ on bijektio $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$: jonot a ja b ovat tiheähäntäisiä, joten ne vierailevat jokaisen pisteen jokaisessa ympäristössä äärettömän usein. Siten kussakin struktuurissa jokainen piste on vastaavan jonon kasautumisarvo.

Arvatenkin ϑ on kaiken lisäksi isomorfismi, mikä on vielä todistettava. Mutta tämä seuraa jälleen raja-arvosta (3.4.2): jos $c_0, \dots, c_{k-1} \in \mathfrak{A}$ ja $d_0, \dots, d_{k-1} \in \mathfrak{B}$ ja $\vartheta(c_i) = d_i$, niin löytyy osajonot $\langle j_l^i \rangle_{l<\omega}$, $i < k$, joille $a(j_l^i) \to c_i$ ja $b(j_l^i) \to d_i$, ja lisäksi jokaiselle k-paikkaiselle atomikaavalle ϕ

$$\begin{aligned}
&\left|\phi^{\mathfrak{A}}(c_0, \dots, c_{k-1}) - \phi^{\mathfrak{B}}(d_0, \dots, d_{k-1})\right| \\
&\qquad = \lim_{l\to\infty} \left|\phi^{\mathfrak{A}}(a(j_l^0), \dots, a(j_l^{k-1})) - \phi^{\mathfrak{B}}(b(j_l^0), \dots, b(j_l^{k-1}))\right| \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

joten $\phi(c_0, \dots, c_{k-1}) = \phi(d_0, \dots, d_{k-1})$.

Näytettäväksi jää vielä, että ϑ toteuttaa kriittisen ehdon

$$d_n^{\Omega}(\vartheta(\bar{a}), \bar{b}) \leq t.$$

Olkoot $\langle j_k^i \rangle_{k<\omega}$, $i < n$, aidosti kasvavia jonoja, joille kaikilla $i < n$ pätee $a(j_k^i) \to a(i)$, kun $k \to \infty$, sekä $n < j_k^0 < \cdots < j_k^{n-1}$ kaikilla $k < \omega$. Nyt lemman 3.22 kohdan (iii) nojalla d_n^{Ω} millä tahansa indekseiltään kasvavalla muuttujajonoargumentilla on yksinkertainen Ω-kaava, joten

$$\begin{aligned}
&\left| d_n^{\Omega}\left(a \restriction n, \left\langle a(j_k^0), \dots, a(j_k^{n-1}) \right\rangle\right) - d_n^{\Omega}\left(b \restriction n, \left\langle b(j_k^0), \dots, b(j_k^{n-1}) \right\rangle\right)\right| \\
&\quad \leq r^{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}_{0, j_k^{n-1}+1}(a \restriction (j_k^{n-1}+1), b \restriction (j_k^{n-1}+1)) < t
\end{aligned}$$

kaikilla $k < \omega$, jolloin raja-arvo, kun $k \to \infty$, ei ole aidosti suurempi kuin t. Koska jonon $\langle a(i_k^0), \dots, a(i_k^{n-1}) \rangle$ raja-arvo on $a \restriction n$, etäisyys $d_n^{\Omega}(a \restriction n, \langle a(i_k^0), \dots, a(i_k^{n-1}) \rangle)$ katoaa, kun k kasvaa rajatta, ja toisaalta koska $\vartheta(a(i)) = \vartheta(\lim_{k\to\infty} a(j_k^i)) = \lim_{k\to\infty} b(j_k^i)$, tiedämme, että etäisyys $d_n^{\Omega}(b \restriction n, \langle b(i_k^0), \dots, b(i_k^{n-1}) \rangle) = d_n^{\Omega}(b \restriction n, \langle \vartheta(a(i_k^0)), \dots, \vartheta(a(i_k^{n-1})) \rangle)$ lähestyy etäisyyttä $d_n^{\Omega}(b \restriction n, \vartheta(a \restriction n))$. Kun otetaan vielä huomioon, että $\bar{a} = a \restriction n$ ja $\bar{b} = b \restriction n$, saadaan tästä

$$d_n^{\Omega}(\bar{b}, \vartheta(\bar{a})) \leq t,$$

mikä oli todistettava. □

Korollaari 3.24. Jos L on numeroituva aakkosto, niin kaikilla separoituvilla L-struktuureilla $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{B}$ pätee

$$\mathfrak{A} \; E_\infty \; \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Korollaari 3.24 osoittaa, että jos rakennamme Scottin lauseen $\sigma_{\mathfrak{A}}$ aloittamalla yksinkertaisista $\Omega_{\mathrm{U}}(L)$-kaavoista, saamme tuloksen

$$\mathfrak{B} \models (\sigma_{\mathfrak{A}} = 0) \iff \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B},$$

joka vastaa täysin klassista Scottin isomorfialausetta (lause 1.15).

Viitteet

[BBHU08] Itaï Ben Yaacov, Alexander Berenstein, C. Ward Henson, and Alexander Usvyatsov. *Model theory for metric structures*, volume 2 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, page 315–427. Cambridge University Press, 2008.

[BDNT17] Itaï Ben Yaacov, Michal Doucha, André Nies, and Todor Tsankov. Metric Scott analysis. *Adv. Math.*, 318:46–87, 2017.

[CK66] Chen-chung Chang and H. Jerome Keisler. *Continuous model theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 58. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1966.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[Sco65] Dana Scott. Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers. In *Theory of Models (Proc. 1963 Internat. Sympos. Berkeley)*, pages 329–341. North-Holland, Amsterdam, 1965.

[Tar58] Alfred Tarski. Remarks on predicate logic with infinitely long expressions. *Colloq. Math.*, 6:171–176, 1958.

[Vä11] Jouko Väänänen. *Models and Games*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 132. Cambridge University Press, 1 edition, 2011.