Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu -tutkielma

Affiini geometria

Emilia Hirvi

Ohjaaja: Erik Elfving 1.6.2019

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Laitos – Institution – Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä – Författare – Author

Emilia Hirvi

Työn nimi – Arbetets titel – Title

Affiini geometria

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Kesäkuu 2019	42 s.

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tämän tutkielman aiheena on affiini geometria, jota esitellään ensimmäisessä luvussa. Aihetta lähestytään lineaarialgebran näkökulmasta. Luodakseen hyvän pohjan affiinin geometrian tarkastelulle toinen luku keskittyy lineaarialgebran perusmääritelmiin.

Kolmannessa luvussa tutustutaan affiinin avaruuden käsitteeseen, jossa määritellään pisteiden ja vektoreiden välinen toiminta. Affiinissa avaruudessa suorien ja vektoreiden yhdensuuntaisuus on keskeinen asia. Toisaalta vektorin lähtöpisteellä ei ole merkitystä.

Neljännessä luvussa esitellään lineaarikombinaation tapainen käsite: affiini kombinaatio eli painopiste. Affiini kombinaatio määritellään painoilla varustetulle pisteperheelle. Lisäksi painojen eli skalaarien summan on oltava yksi.

Seuraavassa luvussa käsitellään affiineja aliavaruuksia. Kuten vektoriavaruuden aliavaruus sisältää kaikki virittäjävektorinsa lineaarikombinaatiot, affiini aliavaruus sisältää kaikki painoilla varustettujen pisteperheidensä affiinit kombinaatiot. Affiini aliavaruus on origosta pois siirretty aliavaruus.

Kuudes luku keskittyy affiiniin riippumattomuuteen ja affiiniin kehykseen. Affiini riippumattomuus määritellään lineaarisen riippumattomuuden avulla ja affiini kehys vektoriavaruuden kannan avulla.

Seitsemännessä luvussa määritellään affiini kuvaus, joka on lineaarikuvauksen ja siirtovektorin yhdistelmä. Affiinissa kuvauksessa ensin lineaarikuvaus kiertää tai venyttää pistejoukkoa ja sen jälkeen siirtovektori siirtää pistejoukon paikkaa. Affiinissa kuvauksessa yhdensuuntaiset suorat kuitenkin kuvautuvat yhdensuuntaisiksi suoriksi.

Lopuksi tarkastellaan joitakin affiinin geometrian esimerkkejä.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Affiini geometria, lineaarialgebra

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän työn aiheena on affiini geometria. Se on geometriaa, jonka tärkein ominaisuus on säilyttää suorien ja vektoreiden yhdensuuntaisuus. Toisaalta pituutta ja kulmien suuruutta ei oteta huomioon. Vaikka geometrisia ongelmia, joissa yhdensuuntaisuus on keskeinen asia, on pohdittu kautta aikojen, Leonhard Euler oli ensimmäinen matemaatikko, joka tutki affiinia geometriaa omana ilmiönä. Hän toi esiin myös termin "affinis", joka latinaksi tarkoittaa "samankaltaista", kirjassaan *Introductio in analysin infinitorum*, joka ilmestyi vuonna 1748. Eulerin tutkimusta jatkoi August Ferdinand Möbius vuonna 1827. Möbiuksen työn tulokset julkaistiin kirjan *Gesammelte Werke* ensimmäisessä osassa vuonna 1885. Monet muut matemaatikot tutkivat aihetta myöhemmin.

Affinia geometriaa voi lähestyä kahdella tavalla − synteettisen eli euklidisen geometrian näkökulmasta tai lineaarialgebran näkökulmasta. Tässä työssä affiinia geometriaa esitetään lineaarialgebran avulla, mistä syystä toinen luku on kokonaan omistettu lineaarialgebran määritelmille ja lauseille.

Lineaarialgebran tuella määritellään sellaiset käsitteet kuin affiini avaruus, affiini kombinaatio, affiini aliavaruus, affiini riippumattomuus ja affiini kuvaus, jotka varsin paljon muistuttavat lineaarialgebran vektoriavaruuden, lineaarikombinaation, aliavaruuden, lineaarisen riippumattomuuden ja lineaarikuvauksen käsitteitä. Affiinin geometrian ja lineaarialgebran välillä on kuitenkin merkittävä ero siinä, että affiinissa geometriassa origolla ei ole merkitystä ja siitä syystä vektorin lähtöpisteellä ei ole niin tärkeää roolia. Affiinit kuvaukset koostuvat lineaarikuvauksista, jotka venyttävät, kääntävät tai peilaavat pistejoukon, sekä siirtovektorista, joka siirtää pistejoukon kokonaisuudessaan toiseen paikkaan. Tällaista siirtoa kutsutaan translaatioksi.

Affiinin geometrian tulokset ovat hyödyllisiä joidenkin geometristen ongelmien ratkaisemisessa, erityisesti sellaisissa, joissa kyse on yhdensuuntaisista suorista. Tässä tapauksessa erittäin toimivana työkaluna voi pitää homotetiakuvauksia, jotka ovat bijektiivisiä affineja kuvauksia. Tämän työn lopussa todistetaan kolme lausetta affiinin geometrian avulla.

Luku 2

Apumääritelmät

Tässä työssä affiinia geometriaa lähestytään lineaarialgebran kautta, jolloin on tärkeää tuoda esiin lineaarialgebran perusmääritelmät ja lauseet. Tässä luvussa esitetyt tulokset löytyvät J. Häsän, L. Oinosen ja J. Rämön lineaarialgebran kurssimateriaalista *Johdatus lineaarialgebraan, osat I ja II* (2015).

Määritelmä 2.1. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$. Oletetaan, että $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$. *Vektoriavaruuden* $\mathbb{R}^n$ alkiot eli vektorit ovat reaaliluvuista koostuvia n-jonoja. Toisin sanoen

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Määritelmä 2.2. Vektoreiden laskutoimitukset. Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin *vektoreiden yhteenlasku ja skalaarikertolasku* ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n) \text{ ja} \\ c\bar{v} &= (cv_1, cv_2, \dots, cv_n). \end{aligned}$$

Määritelmä 2.3. Vasta- ja nollavektori. Vektorin $\bar{v}$ *vastavektori* on skalaarimonikerta $(-1)\bar{v}$. Sitä merkitään $-\bar{v}$. Vektoreiden $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ erotus on summa $\bar{v} + (-\bar{w})$. Sitä merkitään $\bar{v} - \bar{w}$. Vektoria $(0, 0, \dots, 0) = \bar{0}$ kutsutaan *nollavektoriksi.*

Lause 2.4. Vektoreiden laskusäännöt. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ vektoreille pätevät tietyt laskusäännöt. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin pätee:

1. $\bar{v} + \bar{w} = \bar{w} + \bar{v}$ (vaihdannaisuus)

2. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$ (liitännäisyys)

3. $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$

4. $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$

5. $a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$ (osittelulaki)

6. $(a + b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$ (osittelulaki)

7. $a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

8. $1\bar{v} = \bar{v}$.

Määritelmä 2.5. Vektoreiden lineaarikombinaatio. Vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ *lineaarikombinaatio*, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, \ldots, a_k$, että

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k.$$

Esimerkki 2.6. Olkoon $\bar{v}_1 = (\frac{1}{2}, -1), \bar{v}_2 = (\frac{3}{2}, 2), \bar{v}_3 = (\frac{3}{2}, -1)$ ja $\bar{w} = (-1, -1)$. Huomataan, että

$$\begin{aligned} -2\bar{v}_1 - \bar{v}_2 + \bar{v}_3 &= -2(\frac{1}{2}, -1) - (\frac{3}{2}, 2) + (\frac{3}{2}, -1) \\ &= (-1, 2) + (-\frac{3}{2}, -2) + (\frac{3}{2}, -1) = (-1, -1) = \bar{w}. \end{aligned}$$

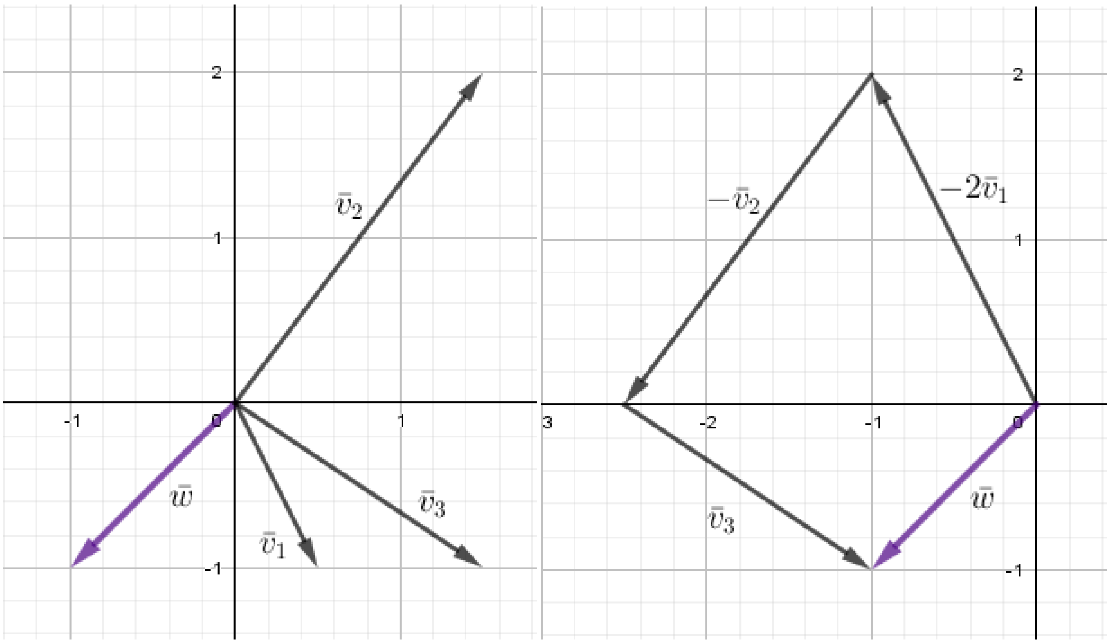
Siis vektori $\bar{w}$ on vektoreiden $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio. Lineaarikombinaation geometrinen tulkinta näkyy kuvassa 2.1.

Määritelmä 2.7. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruudet. Vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittämä *aliavaruus* on joukko

$$\{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Toisin sanoen vektoreiden virittämä *aliavaruus* koostuu kaikista kyseisten vektoreiden lineaarikombinaatioista.

Tarkastellaan seuraavaksi aliavaruuden ominaisuuksia.



Kuva 2.1: Lineaarikombinaation havainnollistaminen

Lause 2.8. Oletetaan, että vektorit $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$ virittävät aliavaruuden W. Tällöin seuraavat kohdat pitävät paikkansa:

1. Jos $\bar{u}, \bar{v} \in W$, niin $\bar{u} + \bar{v} \in W$.
2. Jos $\bar{v} \in W$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin $c\bar{v} \in W$.
3. $\bar{0} \in W$.

Määritelmä 2.9. Vapaus eli lineaarinen riippumattomuus. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k)$ on *vapaa* eli *lineaarisesti riippumaton*, jos seuraava ehto pätee:

$$\text{jos} \quad c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + \cdots + c_k\bar{v}_k = \bar{0} \quad \text{joillakin} \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R},$$

niin $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0$.

Jos on olemassa vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatio, joka on nollavektori ja vähintään yksi kertoimista eroaa nollasta, vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

Lause 2.10 Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa, jos ja vain jos jokainen aliavaruuden $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ alkio voidaan kirjoittaa täsmälleen yhdellä tavalla vektoreiden $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaationa.

Määritelmä 2.11. Kanta. Olkoot $\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k \in W$. Vektorijono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on aliavaruuden W kanta, jos

(1) $W = \text{span}(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$,

(2) jono $(\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k)$ on lineaarisesti riippumaton.

Määritelmä 2.12. Lineaarikuvaus. Olkoot V ja U vektoriavaruuksia. Kuvaus $L : V \to U$ on *lineaarikuvaus*, jos seuraavat ehdot täyttyvät:

1. $L(\bar{v} + \bar{w}) = L(\bar{v}) + L(\bar{w})$ kaikilla $\bar{v}, \bar{w} \in V$
2. $L(c\bar{v}) = cL(\bar{v})$ kaikilla $c \in \mathbb{R}$ ja $\bar{v} \in V$.

Esimerkki 2.13. Osoitetaan, että kuvaus

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x_1, x_2) = (x_1, -2x_2, 3x_1 + 4x_2)$$

on lineaarikuvaus.

Oletetaan, että $\bar{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\bar{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} L(\bar{v} + \bar{w}) &= L(v_1 + w_1, v_2 + w_2) \\ &= (v_1 + w_1, -2(v_2 + w_2), 3(v_1 + w_1) + 4(v_2 + w_2)) \\ &= (v_1 + w_1, -2v_2 - 2w_2, 3v_1 + 3w_1 + 4v_2 + 4w_2) \\ &= (v_1, -2v_2, 3v_1 + 4v_2) + (w_1, -2w_2, 3w_1 + 4w_2) = L(\bar{v}) + L(\bar{w}) \end{aligned}$$

ja

$$L(c\bar{v}) = L(cv_1, cv_2) = (cv_1, -2cv_2, 3cv_1 + 4cv_2) = c(v_1, -2v_2, 3v_1 + 4v_2) = cL(\bar{v}).$$

Siis kuvaus L on lineaarikuvaus.

Esimerkki 2.14. Osoitetaan, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$ ei ole lineaarikuvaus.

Valitaan $v = 1$ ja $w = 0$. Tällöin

$$f(v + w) = f(1) = 1 - 2 = -1.$$

Toisaalta

$$f(v) + f(w) = f(1) + f(0) = -1 + 1 = 0 \neq f(v + w).$$

Näin ollen kuvaus f ei ole lineaarikuvaus.

Luku 3

Affiini avaruus

Tässä luvussa esitellään affiinin avaruuden määritelmä, johon muut affiinin geometrian määritelmät perustuvat. Esimerkkien avulla havainnollistetaan, mitä affiini avaruus käytännössä on.

Määritelmä 3.1. Affiini avaruus. *Affiini avaruus* on kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$, jossa E on epätyhjä joukko, jonka alkioita kutsutaan pisteiksi, $\overrightarrow{E}$ on vektoriavaruus, ja $+$ on toiminta $+ : E \times \overrightarrow{E} \to E$, joka täyttää seuraavat ehdot:

(A1) $A + \bar{0} = A$ kaikilla $A \in E$

(A2) $(A + \bar{u}) + \bar{v} = A + (\bar{u} + \bar{v})$ kaikilla $A \in E$ ja $\bar{u}, \bar{v} \in \overrightarrow{E}$

(A3) Kahta pistettä $A, B \in E$ kohti on olemassa täsmälleen yksi sellainen vektori $\bar{u} \in \overrightarrow{E}$ siten, että $A + \bar{u} = B$.

Tarkastellaan seuraavaksi määritelmän kohdat tarkemmin.

Kohdat (A1) ja (A2) pitävät huolen siitä, että joukkojen E ja $\overrightarrow{E}$ alkiot toimivat keskenään sopusoinnussa, mikä on välttämätön ehto toiminnalle $+$.

Kohdan (A3) mukaan tietystä pisteestä alkava ja tiettyyn pisteeseen päättyvä vektori on yksikäsitteinen. Kohdan (A3) vektorin $\bar{u}$ voi merkitä myös sen lähtö- ja päätepisteen mukaan vektorina $\overrightarrow{AB}$. Siis $A + \overrightarrow{AB} = B$. Jos pisteen A lisäksi otetaan vielä kaksi joukon V pistettä B ja C, kohdan (A3) mukaan $C = A + \overrightarrow{AC}$ ja $C = B + \overrightarrow{BC}$. Nyt kohdan (A2) avulla saadaan

$$C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = A + \overrightarrow{AC},$$

jolloin täytyy päteä, että $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Tämä yhtälö on nimeltään Chaslesin identiteetti.

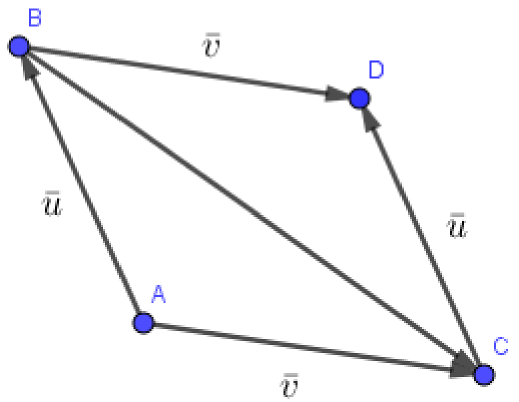
Seuraavaksi tarkastellaan vektoreiden ominaisuuksia affiinissa avaruudessa Chaslesin identiteetin avulla. Oletetaan, että $A, B, C, D \in E$.

1. Tiedetään, että $A = A + \overrightarrow{AA}$. Lisäksi kohta (A1) sanoo, että $A = A + \bar{0}$, mistä seuraa, että $\overrightarrow{AA} = \bar{0}$.

2. Yhtälöstä $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \bar{0}$ saadaan $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

3. Chaslesin indentiteetin mukaan $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Tällöin saadaan suunnikassääntö, jonka mukaan $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ jos ja vain jos $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$.

Jos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sanotaan, että vektori $\overrightarrow{AB}$ on samanpituinen ja samansuuntainen kuin vektori $\overrightarrow{CD}$. Se ei siis tarkoita sitä, että $A = C$ tai $B = D$. Affiinissa avaruudessa vektorin lähtöpiste on vapaasti valittavissa, mikä on affiinin avaruuden yksi tärkeimmistä ominaisuuksista. Tällä tavoin affiinissa avaruudessa vektoreiden yhdensuuntaisuus säilyy. Kuva 3.1 havainnollistaa tilannetta erittäin hyvin.



Kuva 3.1: Affiinin avaruuden havainnollistaminen

Affiinin avaruuden $(E, \overrightarrow{E}, +)$ dimensio on sama kuin on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ dimensio.

Seuraavaksi käydään läpi joitakin esimerkkejä affiinista avaruudesta.

Esimerkki 3.2. Jokaista vektoriavaruutta voi esittää affiinina avaruutena, jos valitaan, että $E = \overrightarrow{E}$ ja toiminta $+$ on tavallinen yhteenlasku vektoriavaruudessa. Selkeyden vuoksi joukon E pistettä merkitään

$A = (a_1, \ldots, a_n)$, missä $a_i \in \mathbb{R}$, ja vektoria $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, missä $u_i \in \mathbb{R}$, jolloin toiminta $+$ saa seuraavan muodon:

$$A + \bar{u} = (a_1, \ldots, a_n) + \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = (a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n).$$

Esimerkki 3.3. Oletetaan, että joukko $U \subset \mathbb{R}^2$ koostuu kaikista niistä pisteistä, jotka ovat yhtälön

$$2x - y + 1 = 0$$

ratkaisuja. Joukon kuvaaja on tällöin nouseva suora, joka leikkaa akselit pisteissä $(-\frac{1}{2}, 0)$ ja $(0, 1)$.

Suoraa U pystyy esittämään affiinina avaruutena määrittämällä toiminta $+ : U \times V \to U$ siten, että joukon U kahta pistettä $A = (a, 1 + 2a)$ ja $B = (b, 1 + 2b)$ kohti on olemassa vektori $\bar{u} \in V \subset \mathbb{R}^2$. Vektoriavaruus V koostuu kaikista niistä vektoreista, jotka ovat muotoa $\bar{u} = (b - a, 2b - 2a)$, missä $a, b \in \mathbb{R}$.

Tässä kohtaa osoitetaan, että V on vektoriavaruus, jolloin lauseen 2.8 kaikkien kohtien pitää olla voimassa. Oletetaan, että $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Olkoon $\bar{u}_1 = (b_1 - a_1, 2b_1 - 2a_1)$ ja $\bar{u}_2 = (b_2 - a_2, 2b_2 - 2a_2)$, missä $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tällöin

1.
$$\begin{aligned} \bar{u}_1 + \bar{u}_2 &= (b_1 - a_1, 2b_1 - 2a_1) + (b_2 - a_2, 2b_2 - 2a_2) \\ &= ((b_1 + b_2) - (a_1 + a_2), 2(b_1 + b_2) - 2(a_1 + a_2)) \in V \end{aligned}$$

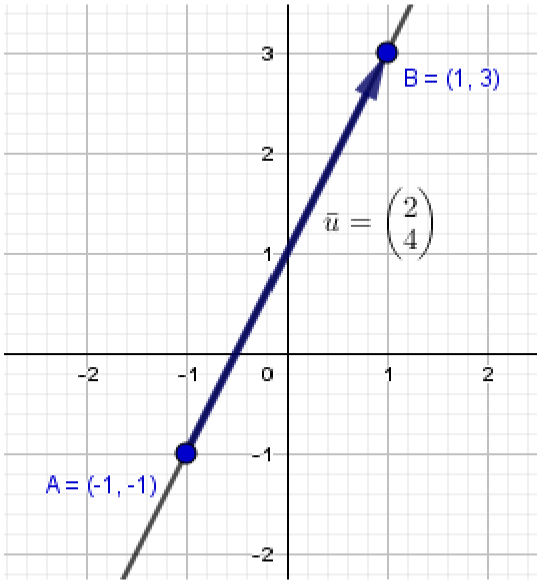
2. $c\bar{u}_1 = c(b_1 - a_1, 2b_1 - 2a_1) = (cb_1 - ca_1, 2cb_1 - 2ca_1) \in V$

3. Jos $a_1 = b_1$, niin $(b_1 - a_1, 2b_1 - 2a_1) = (0, 0) = \bar{0} \in V$.

Joukko V on siis vektoriavaruus. Tällöin pätee

$$(a, 1 + 2a) + \bar{u} = (b, 1 + 2b).$$

Jos otetaan pisteet $A = (-1, -1)$ ja $B = (1, 3)$, nähdään, että tällöin $\bar{u} = (1 - (-1), 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = (2, 4)$. Suora U ja vektori $\bar{u}$ näkyvät kuvassa 3.2.



Kuva 3.2: Suora $2x - y + 1 = 0$ ja vektori $\bar{u}$

Esimerkki 3.4. Oletetaan, että joukko $U \subset \mathbb{R}^3$ koostuu kaikista niistä pisteistä, jotka toteuttavat yhtälön

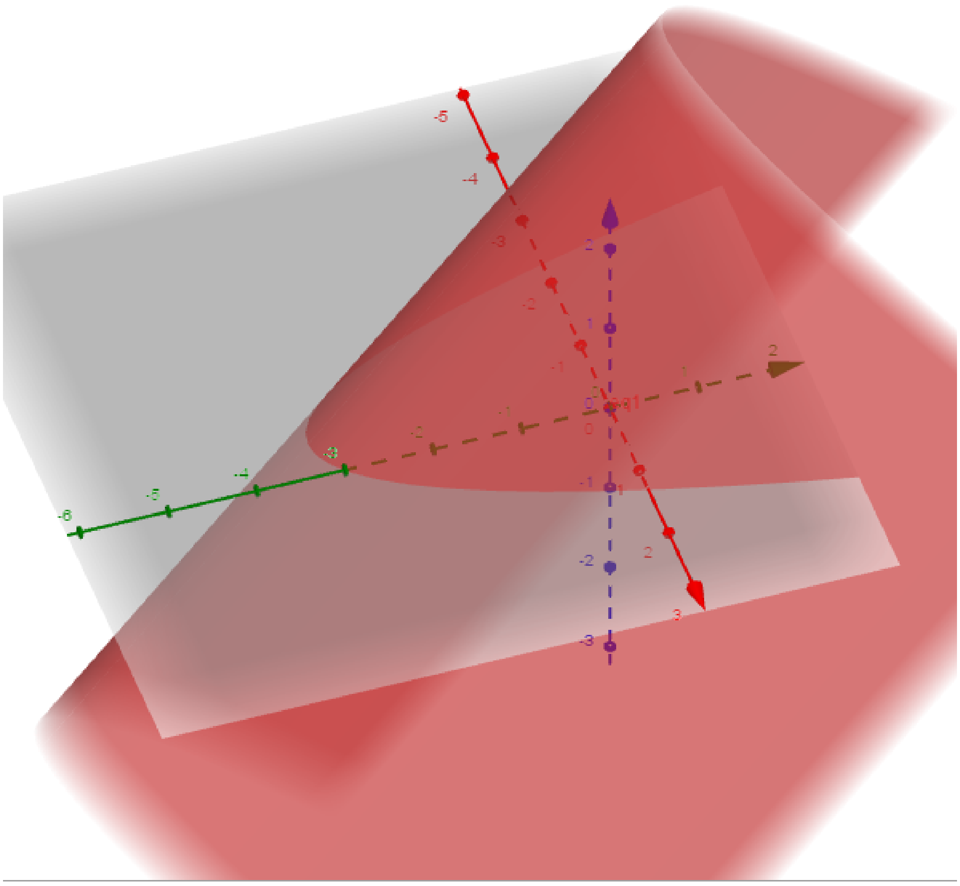
$$x^2 + x - y + z - 3 = 0.$$

Joukon kuvaaja on parabolinen sylinteri, jota voi myös pitää affiinina avaruutena määrittämällä toiminta $+ : U \times \mathbb{R}^2 \to U$ siten, että jokaiselle pisteelle $(x, y, 3 - x^2 - x + y) \in U$ ja vektorille $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ pätee, että

$$(x, y, 3 - x^2 - x + y) + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = (x + u, y + v, 3 - (x + u)^2 - x - u + y + v).$$

Joukko U näkyy kuvassa 3.3.

Näistä esimerkeistä voi ymmärtää, että erilaiset pinnat, mukaan lukien suorat ja tasot, ovat affiineja avaruuksia.



Kuva 3.3: Parabolinen sylinteri $x^2 + x - y + z - 3 = 0$

Luku 4

Affiini kombinaatio, painopiste

Lineaarialgebrassa lineaarikombinaatiolla on tärkeä rooli. Affiinissa geometriassa vastaavanlaisessa asemassa on affiini kombinaatio, jota kutsutaan myös painopisteeksi. Tästä eteenpäin tässä luvussa kaikissa määritelmissä ja esimerkeissä automaattisesti oletetaan, että kaikki toiminnat tapahtuvat affiinissa avaruudessa.

Määritelmä 4.1. Affiini kombinaatio. Mille tahansa joukkoon E kuuluville pisteille $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ja skalaareille $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, jotka ovat määritelty siten, että $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = 1$, sekä mille tahansa pisteelle $A \in E$ piste

$$R = A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AP_i}$$

on painopiste eli *affiini kombinaatio*. Skalaareja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ kutsutaan myös pisteiden $P_1, P_2, \ldots, P_k$ painoiksi. Vaihtoehtoisesti painopisteen R voi esittää seuraavalla tavalla: $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$. Lisäksi tiedetään, että $R = A + \overrightarrow{AR}$, jolloin on oltava $\overrightarrow{AR} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AP_i}$.

Painoilla varustettujen pisteiden painopiste on yksikäsitteinen ja näin ollen ei ole riippuvainen pisteestä A. Seuraavaksi todistetaan tämä tulos.

Lemma 4.2. Oletetaan, että $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ovat joukkoon E kuuluvia pisteitä ja vastaavasti skalaarit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ niiden painoja. Tällöin mille tahansa kahdelle pisteelle $A, B \in E$ pätee:

$$\text{Jos } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \text{ niin}$$
$$A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AP_i} = B + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{BP_i}.$$

Todistus. Chaslesin identiteetin mukaan

$$\begin{aligned} A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AP_i} &= A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP_i}) \\ &= A + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \right) \overrightarrow{AB} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{BP_i} \\ &= A + \overrightarrow{AB} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{BP_i} \\ &= B + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{BP_i}. \ \square \end{aligned}$$

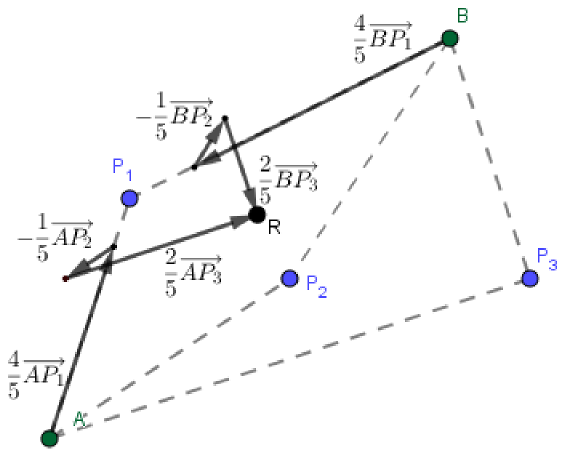
Esimerkki 4.3. Olkoot painolla varustetut pisteet seuraavat: $(P_1, \frac{4}{5})$, $(P_2, -\frac{1}{5})$ ja $(P_3, \frac{2}{5})$. Kuvassa 4.1 näkyvät näiden pisteiden lisäksi myös alkupisteet A ja B, sekä painopiste R. Tämä esimerkki havainnollistaa sitä, että painopisteen määrittelyssä alkupisteellä ei ole väliä.

Affiinin kombinaation määrittelyehto, jonka mukaan skalaarien summan pitää olla yksi, on välttämätön. Jos tämä ehto ei toteudu, painopisteestä ei tule yksikäsitteistä. Seuraava esimerkki havainnollistaa tätä tilannetta.

Esimerkki 4.4. Oletetaan, että pisteiden $P_1, P_2 \in E$ painot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, jolloin $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 1$. Oletetaan lisäksi, että $A, B \in E$. Tällöin huomataan, että saadaan kaksi eri painopistettä R ja R'. Näin ollen tässä tapauksessa painopiste ei ole yksikäsitteinen. Kuvio näkyy kuvassa 4.2.

Yksi tärkeä huomio on se, että kun skalaarien summa on yksi, toteutuu seuraava ehto:

$$\lambda_1 \overrightarrow{RP_1} + \lambda_2 \overrightarrow{RP_2} + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{RP_k} = \bar{0}.$$



Kuva 4.1: Yksikäsitteinen painopiste

On helppo osoittaa, että se pitää paikkansa. Jos yhtälössä $\overrightarrow{AR} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AP_i}$ pisteen A paikalle laitetaan painopiste R, saadaan $\overrightarrow{RR} = \bar{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{RP_i}$. Kuva 4.3 havainnollistaa tilanteen.

Erikoistapauksessa, kun pisteiden $P_1, P_2, \ldots, P_k$ kaikki painot ovat samat ja suuruudeltaan $\frac{1}{k}$, painopistettä kutsutaan keskipisteeksi.

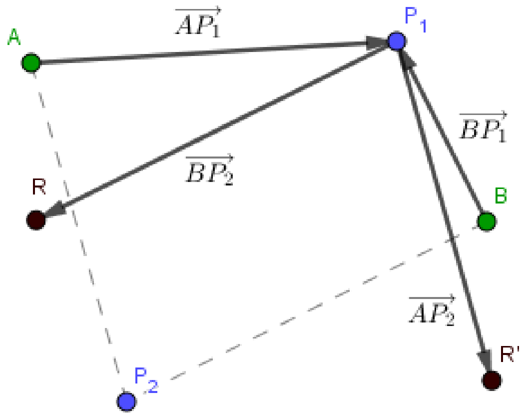
Esimerkki 4.5. Oletetaan, että pisteiden $P_1, P_2, P_3, P_4 \in E$ painot ovat $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{4}$. Oletetaan, että $A \in E$. Tällöin painopiste R on keskipiste. Se näkyy kuvassa 4.4.

Esimerkki 4.6. Bézier-käyrä. Otetaan mikä tahansa lukumäärä pisteitä ja rajataan niiden affiinien kombinaatioiden joukkoa niin, että pisteiden painot määräytyvät laajentamalla yhtälön $(t + (1-t))^{k-1} = 1$ vasenta puolta binomikaavalla, missä k on pisteiden lukumäärä ja $0 \leq t \leq 1$. Tällöin affiinien kombinaatioiden joukko muodostaa polynomikäyrän. Esimerkiksi jos pisteitä on neljä, P_1, P_2, P_3 ja P_4, affiini kombinaatio

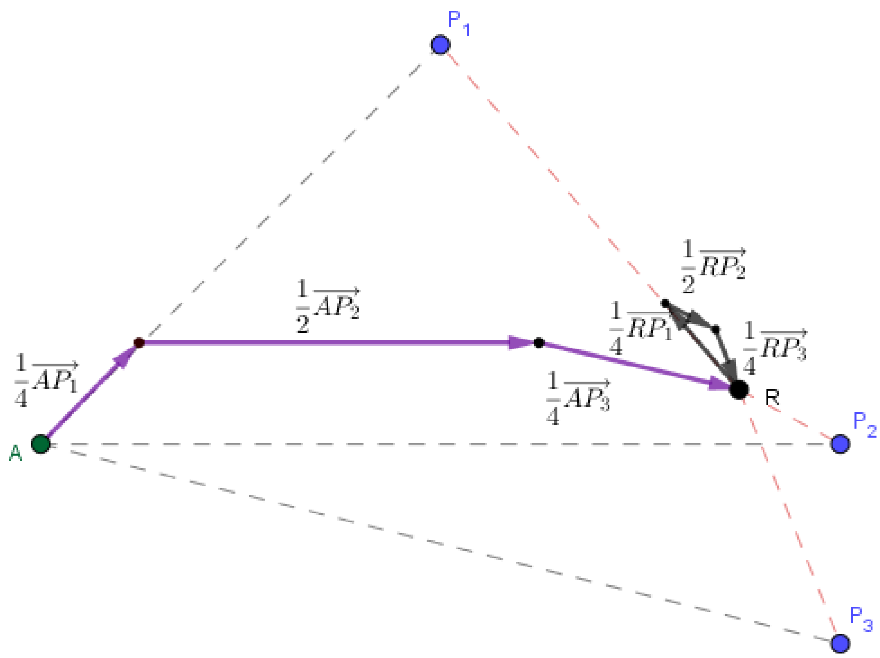
$$(1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4,$$

missä $0 \leq t \leq 1$, on hyvin määritelty, sillä pisteiden painojen summa $(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3$ tulee yhtälöstä $(t + (1-t))^3 = 1$.

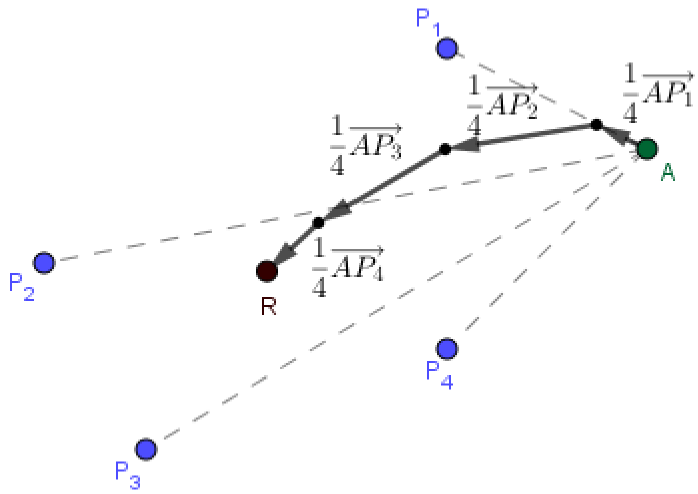
Tämäntyyppisiä käyriä kutsutaan Bézier-käyriksi. Niitä käytetään piirtotekniikkana vektorigrafiikassa ja 3D-mallinnuksessa. Kuvassa 4.5 on esimerkki Bézier-käyrästä, joka on määritelty neljän pisteen avulla.



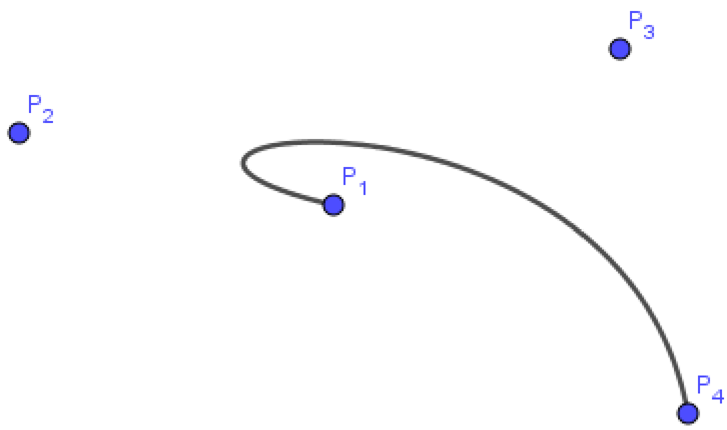
Kuva 4.2: Kaksi painopistettä



Kuva 4.3: Painopiste



Kuva 4.4: Painopiste on keskipiste



Kuva 4.5: Bézier-käyrä

Luku 5

Affiini aliavaruus

Lineaarialgebran aliavaruuden käsitettä vastaa affiini aliavaruus. Käytännössä affiini aliavaruus on origosta pois siirretty aliavaruus, jolloin sitä ei voi enää kutsua aliavaruudeksi. Osoitamme, että tämä pitää paikkansa määritelmän ja esimerkkien kautta.

Määritelmä 5.1. Affiini alivaruus. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. Tällöin joukon E osajoukko V on affiinin avaruuden $(E, \overrightarrow{E}, +)$ *affiini aliavaruus*, jos kaikkien painoilla varustettujen joukkoon V kuuluvien pisteperheiden $((a_i, \lambda_i))_{i\in I}$ painopisteet $\sum_{i\in I} \lambda_i a_i$ kuuluvat joukkoon V. Lisäksi ehdon $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ pitää olla voimassa.

Tutkitaan esimerkin avulla, mitä tämä määritelmä tarkoittaa .

Esimerkki 5.2. Oletetaan, että $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\}$, missä $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Oletetaan lisäksi, että pisteitä $(x_i, y_i) \in U$ sekä skalaareja λ_i on m kappaletta, ja yhtälö $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$ toteutuu.

Nyt näytetään, että tällöin kaikki painopisteet kuuluvat joukkoon U, toisin sanoen $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x_i, y_i) \in U$.

Ehdosta $(x_i, y_i) \in U$ seuraa, että

$$ax_i + by_i = c.$$

Jos tämä yhtälö kerrotaan skalaarilla λ_i ja summataan tulokset kaikille pisteille ja skalaareille, saadaan uusi yhtälö

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i ax_i + \lambda_i by_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c,$$

jonka saa muotoon

$$a\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)+b\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i\right)=\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)c=1\cdot c=c$$

summan laskusääntöjä käyttämällä. Tästä näkee, että

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x_i,y_i)\in U.$$

Tästä seuraa, että U on affiini aliavaruus.

Tarkastellaan seuraavaksi joukkoa $\overrightarrow{U}\subset\mathbb{R}^2$, joka on

$$\overrightarrow{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}.$$

Joukko $\overrightarrow{U}$ eroaa joukosta U vain siinä, että yhtälön oikealla puolella on nolla eli $c=0$. Samalla tavalla kuin joukon U tapauksessa voi osoittaa, että jos pisteitä ja skalaareja on m kappaletta, pätee, että

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x_i,y_i)\in\overrightarrow{U}.$$

Tässä tapauksessa ehto $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$ ei ole välttämätön, sillä yhtälön oikea puoli aina pysyy nollana.

Joukkojen U ja $\overrightarrow{U}$ kuvaajat joukossa $\mathbb{R}^2$ ovat yhdensuuntaisia suoria. Joukko $\overrightarrow{U}$ on tällöin origon kautta kulkeva suora. Joukot näkyvät kuvassa 5.1.

Seuraavaksi todistetaan väite, että jos $(x_0,y_0)\in U$, niin $U=(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}$, missä

$$(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}=\{(x_0+u_1,y_0+u_2)\mid(u_1,u_2)\in\overrightarrow{U}\}.$$

Todistus. Näytetään ensin, että $U\subset(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}$. Oletetaan, että $(x,y)\in U$ ja $ax+yb=c$, jolloin myös $ax_0+by_0=c$. Tällöin saadaan

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=ax+by-(ax_0+by_0)=c-c=0,$$

jolloin $(x-x_0,y-y_0)\in\overrightarrow{U}$ ja tällä tavoin

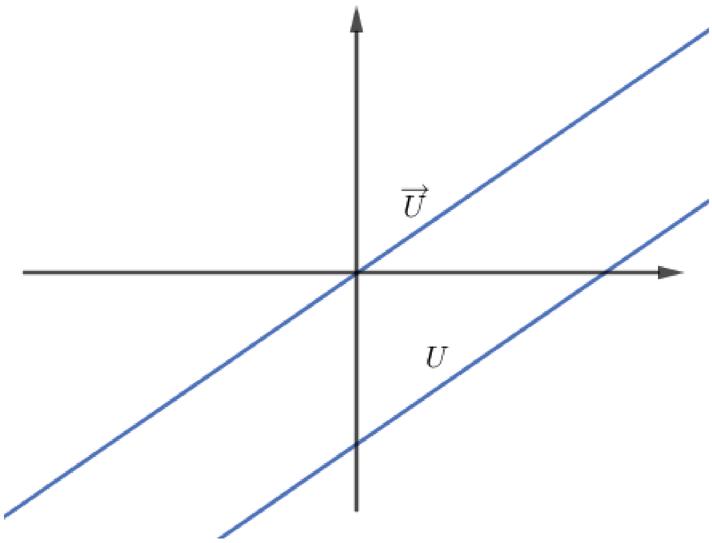
$$(x,y)=(x_0,y_0)+(x-x_0,y-y_0)\in(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}.$$

Nyt näytetään, että $(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}\subset U$. Olkoon $(u_1,u_2)\in\overrightarrow{U}$. Oletuksen mukaan $ax_0+by_0=c$ ja $au_1+bu_2=0$. Tällöin

$$a(x_0+u_1)+b(y_0+u_2)=ax_0+by_0+au_1+bu_2=c+0=c,$$

josta seuraa, että $(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}\subset U$. Näin ollen $U=(x_0,y_0)+\overrightarrow{U}$. □

Edellä mainittu tulos toimii myös matriiseilla.



Kuva 5.1: Joukkojen kuvaajat avaruudessa $\mathbb{R}^2$

Esimerkki 5.3. Tässä esimerkissä pystyvektoreita merkitään tummennetulla kirjaimella, kuten $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}$. Olkoon A $m \times n$ matriisi ja $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$ eräs vektori. Tällöin joukko $U \subset \mathbb{R}^n$ on määritelty seuraavalla tavalla:

$$U = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \bar{b}\}.$$

Tässä joukko U on affiini aliavaruus.

Kuten edellisessä tapauksessa, tarkastellaan yhtälöä $A\mathbf{x} = \bar{b}$ vastaavan homogeenisen yhtälön $A\mathbf{x} = \bar{0}$ ratkaisujoukkoa

$$\overrightarrow{U} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \bar{0}\},$$

joka on joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukko. Nyt saadaan määriteltyä affiini aliavaruus U aliavaruuden $\overrightarrow{U}$ avulla. Kaikilla $x_0 \in U$ pätee, että

$$U = x_0 + \overrightarrow{U}.$$

Ennen kuin todistetaan saatu tulos virallisesti, esitetään tuttu painopisteen käsite osajoukkoja hyödyntäen. Olkoon V epätyhjä joukon E osajoukko. Tällöin jokaiselle pisteperheelle $(A_1, \ldots, A_k) \in V$, sitä vastaavalle skalaariperheelle $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ sekä jokaiselle pisteelle $A \in V$ pätee, että jokainen piste

$R \in E$, missä

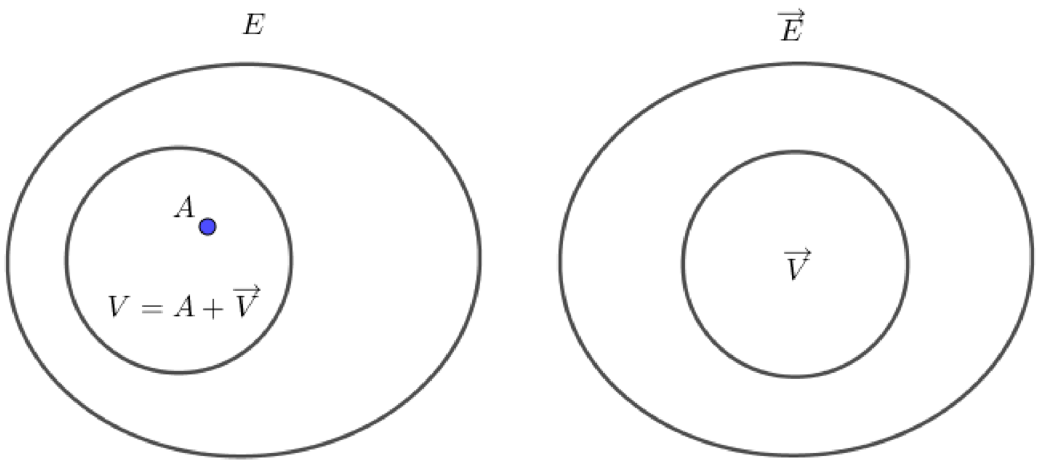
$$R = A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AA_i},$$

on painoilla varustetun pisteperheen $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n), (A, 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i))$ painopiste, sillä $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) = 1$.

Seuraavan lemman ymmärtämistä varten sovitaan vielä merkinnöistä. Olkoon $A \in E$ ja $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{E}$. Tällöin joukon E osajoukko $A + \overrightarrow{V}$ määritellään seuraavasti:

$$A + \overrightarrow{V} = \{A + \bar{v} \mid \bar{v} \in \overrightarrow{V}\}.$$

Kuva 5.2 auttaa hahmottamaan tilannetta.



Kuva 5.2: Affiini aliavaruuden E märittely

Nyt siirrytään tärkeään lemmaan, jonka pohja luotiin edellisissa esimerkeissä.

Lemma 5.4. Oletetaan, että $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus.

(1) Joukon E epätyhjä osajoukko V on affiini aliavaruus, jos ja vain jos jokaiselle pisteelle $A \in V$ joukko

$$\overrightarrow{V} = \{\overrightarrow{AX} \mid X \in V\}$$

on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ aliavaruus, jolloin $V = A + \overrightarrow{V}$.

(2) Mille tahansa vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ aliavaruudelle $\overrightarrow{V}$ ja mille tahansa pisteelle $A \in E$ pätee, että joukko $V = A + \overrightarrow{V}$ on affiini aliavaruus.

Todistus.

(1) Osoitetaan ensin, että $\overrightarrow{V}$ on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ aliavaruus. Ensinnäkin $\overrightarrow{XX} = \overrightarrow{0} \in \overrightarrow{V}$. Lisäksi jokainen painoilla varustetun pisteperheen $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n), (A, 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i))$ affiini kombinaatio

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_1 + (1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) A$$

kuuluu joukkoon V. Tällöin jokaisella $X \in V$ kaikki lineaarikombinaatiot

$$\overrightarrow{AX} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AA_i},$$

kuuluvat joukkoon $\overrightarrow{V}$, mikä toteuttaa aliavaruuden määritelmään liittyvän lauseen 2.8 ehdot 1 ja 2. Siis $\overrightarrow{V}$ on aliavaruus.

Nyt osoitetaan toinen suunta. Oletetaan, että $\overrightarrow{V}$ on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ aliavaruus. Tällöin kaikki lineaarikombinaatiot

$$\overrightarrow{AX} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$$

kuuluvat aliavaruuteen $\overrightarrow{V}$, erityisesti sellaiset, jotka toteuttavat ehdon $\sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) = 1$. Tällöin painoilla varustetun pisteperheen $((A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n), (A, 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i))$ kaikki painopisteet

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_1 + (1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) A$$

kuuluvat joukkoon V. Siis joukko V on affiini aliavaruus.

(2) Jos $V = A + \overrightarrow{V}$, missä $\overrightarrow{V} \subset \overrightarrow{E}$, silloin painoilla varustetun pisteperheen $((A + \bar{v}_i, \lambda_i))_{1 \le i \le k}$, missä $\bar{v}_i \in \overrightarrow{V}$ ja $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$, painopiste R, joka on määritelty seuraavasti:

$$R = A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{A(A + \bar{v}_i)} = A + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{v}_i,$$

kuuluu joukkoon V, sillä avaruus $\overrightarrow{V}$ on oletettu olevan avaruuden $\overrightarrow{E}$ aliavaruus. Näin ollen määritelmän mukaan joukko $V = A + \overrightarrow{V}$ on affiini aliavaruus. $\square$

Lemma 5.4 osoittaa sen, että jokainen affiini aliavaruus V on "siirretty" aliavaruus $\overrightarrow{V}$. Toisaalta jokainen aliavaruus $\overrightarrow{V}$ on myös affiini aliavaruus V, joka kulkee nollapisteen kautta.

Kun affiini aliavaruus V on määritelty aliavaruuden $\overrightarrow{V}$ avulla, aliavaruutta $\overrightarrow{V}$ kutsutaan sen affiinin aliavaruuden suunnaksi. Tällöin kuvaus $+ : V \times \overrightarrow{V} \to V$ on affiini kuvaus.

Affiinissa geometriassa yhdensuuntaisuus on tärkeä käsite. Kaksi affiinia aliavaruutta U ja V ovat yhdensuuntaiset, jos niiden suunta on sama, toisin sanoen $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$. Tällä tavoin $U = A + \overrightarrow{U}$ ja $V = B + \overrightarrow{U}$, missä $A \in U$ ja $B \in V$. Lisäksi joukko V saadaan joukosta U vektorin $\overrightarrow{AB}$ avulla.

Affiinin aliavaruuden V dimensio määräytyy aliavaruuden $\overrightarrow{V}$ dimension mukaan. Jos affiinin aliavaruuden dimensio on 1, sitä kutsutaan suoraksi, jos 2, tasoksi.

Lemmasta 5.4 seuraa, että suora on joukko, jonka alkiot täyttävät määrittelyehdon $A + \lambda\bar{v}$, missä $A \in E$, $\bar{v} \in \overrightarrow{E}$ ja $\bar{v} \neq \bar{0}$, sekä $\lambda \in \mathbb{R}$. Taso määräytyy pisteistä, jotka täyttävät määrittelyehdon $A + \lambda\bar{u} + \mu\bar{v}$, missä $A \in E$ ja $\bar{u}, \bar{v} \in \overrightarrow{E}$ ovat lineaarisesti riippumattomat vektorit ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Kolme pistettä A, B ja C sijaitsevat samalla suoralla, jos vektorit $\overrightarrow{AB}$ ja $\overrightarrow{AC}$ ovat lineaarisesti riippuvia. Jos vähintään kaksi kolmesta pisteestä ovat eri pisteitä, lineaarisesta riippuvuudesta johtuen $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$. Neljä pistettä A, B, C ja D sijaitsevat samalla tasolla, jos vektorit $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ja $\overrightarrow{AD}$ ovat lineaarisesti riippuvia.

Luku 6

Affiini riippumattomuus ja affiini kehys

Affiini riippumattomuus määritellään lineaarisen riippumattomuuden avulla, joka on vastaavanlainen käsite lineaarialgebrassa. Käytännössä joukon E pisteperheen affiini riippumattomuus määräytyy vektoriperheiden $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ lineaarisesta riippumattomuudesta. Tässä A_i on lähtöpiste. Seuraavaksi tarkastellaan lemmaa, jonka ansiosta riittää tarkastella vain yhtä vektoriperhettä.

Lemma 6.1. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. Olkoon $(A_i)_{i\in I}$ joukon E pisteperhe. Jos vektoriperhe $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ on lineaarisesti riippumaton jollakin $i \in I$, silloin $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ on lineaarisesti riippumaton kaikilla $i \in I$.

Todistus. Oletetaan, että vektoriperhe $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ on lineaarisesti riippumaton jollakin $i \in I$. Nyt on tarkoitus osoittaa, että jollakin $k \in I$, ehdolla $k \neq i$, vektoriperhe on myös lineaarisesti riippumaton. Kuten lineaarisen riippumattomuuden määritelmä vaatii, oletetaan, että joillakin skalaareilla $(\lambda_j)_{j\in I\setminus\{k\}}$ pätee, että

$$\sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_kA_j} = \bar{0}.$$

Vektoreiden laskusääntöjen mukaan

$$\overrightarrow{A_kA_j} = \overrightarrow{A_kA_i} + \overrightarrow{A_iA_j},$$

jolloin

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_kA_j} &= \sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_kA_i} + \sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} \\
&= \sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_kA_i} + \sum_{j\in I\setminus\{i,k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} \\
&= \sum_{j\in I\setminus\{i,k\}} \lambda_j \overrightarrow{A_iA_j} - \left(\sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j \right) \overrightarrow{A_iA_k} = \bar{0}.
\end{aligned}$$

Koska vektoriperhe $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ on oletuksen mukaan lineaarisesti riippumaton, määritelmän mukaan täytyy olla, että $\lambda_j = 0$ kaikilla $j \in I \setminus \{i,k\}$ ja $\sum_{j\in I\setminus\{k\}} \lambda_j = 0$. Tästä johtuu, että $\lambda_j = 0$ kaikilla $j \in I \setminus \{k\}$, mikä osoittaa väitteen todeksi. □

Määritelmä 6.2. Affiini riippumattomuus. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. Joukon E pisteperhe $(A_i)_{i\in I}$ on *affiinisti riippumaton*, jos vektoriperhe $(\overrightarrow{A_iA_j})_{j\in I\setminus\{i\}}$ on lineaarisesti riippumaton jollakin $i \in I$.

Lineaarialgebrassa yksi tärkeä asia, joka liittyy lineaarisesti riippumattomaan vektorijonoon $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on se, että lineaarikombinaatiossa

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \cdots + a_k\bar{v}_k$$

skalaarit $(a_1, \ldots, a_k)$ ovat yksikäsitteiset (lause 2.10). Tämä tieto tulee tarpeen, kun osoitetaan, että affiinissa geometriassa pätee vastaavanlainen asia.

Lemma 6.3. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. Olkoon $(A_0, \ldots, A_m)$ joukon E pisteperhe, joita on $m+1$ kappaletta. Olkoon $X \in E$. Oletetaan, että $X = \sum_{i=0}^m \lambda_i A_i$, missä $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$. Tällöin skalaarit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ ovat yksikäsitteiset, jos ja vain jos vektoriperhe $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. Käytetään hyväksi affiinin kombinaation määritelmän yhteydessä saatua tietoa siitä, että

$$X = \sum_{i=0}^m \lambda_i A_i \text{ joss } \overrightarrow{A_0X} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i},$$

missä $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1$. Nyt käytetään hyväksi lausetta 2.10. Skalaarit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, jotka toteuttavat yhtälön $\overrightarrow{A_0X} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$, ovat yksikäsitteiset, jos ja vain jos vektoriperhe $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ on lineaarisesti riippumaton. Tarkastellaan todistuksen osat erikseen. Ensiksi oletetaan, että vektoriperhe $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ on lineaarisesti riippumaton, jolloin skalaarit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ ovat yksikäsitteiset. Koska $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$, niin skalaari λ_0 on myös yksikäsitteinen. Tällä tavoin lemman yksi suunta on todistettu. Toiseksi oletetaan, että skalaarit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, jotka toteuttavat ehdon $X = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i A_i$, ovat yksikäsitteiset, jolloin skalaarit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, jotka toteuttavat yhtälön $\overrightarrow{A_0X} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ ovat luonnollisesti myös yksikäsitteiset, mistä johtuu se, että vektoriperhe $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ on lineaarisesti riippumaton. □

Äskeisen tuloksen avulla voidaan määritellä uusi käsite, affiini kehys, joka juontaa juurensa vektoriavaruuden kannan käsitteestä.

Määritelmä 6.4. Affiini kehys. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. *Affiini kehys*, jonka lähtöpiste on A_0, on joukon E pisteet $(A_0, \ldots, A_m)$, joita on $m + 1$ kappaletta, sillä ehdolla, että vektorijono $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ kanta.

Affiiniksi kehykseksi, jonka lähtöpiste on A_0, kutsutaan myös paria $(A_0, (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}))$. Tällöin pisteen $X \in \overrightarrow{E}$ voi esittää samalla tavalla kuin yllä olevassa lemmassa 6.3:

$$X = \lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_m A_m.$$

Tässä skalaarit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$, joiden summa on yksi, ovat yksikäsitteiset ja niitä kutsutaan pisteen X painopistekoordinaateiksi suhteessa affiiniin kehykseen.

Pisteen X voi esittää myös sen vektorikannan avulla:

$$X = A_0 + x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \ldots, x_m\overrightarrow{A_0A_m}.$$

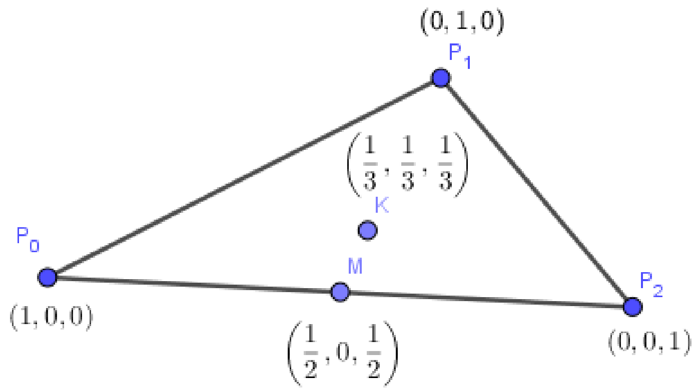
Tällöin skalaareita $(x_1, \ldots, x_m)$ kutsutaan pisteen X koordinaateiksi suhteessa affiiniin kehykseen $(A_0, (\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m}))$.

Joukon E pisteperhe $(A_i)_{i \in I}$ on affinisti riippuva, jos se ei ole affiinisti riippumaton.

Seuraavaksi tarkastellaan joitakin esimerkkejä.

Esimerkki 6.5. Oletetaan, että joukon E pisteet P_0, P_1 ja P_2 muodostavat affiinin avaruuden $(E, \overrightarrow{E}, +)$ affiinin kehyksen. Suhteessa affiiniin kehykseen pisteiden P_0, P_1 ja P_2 painopistekoordinaatit ovat vastaavasti $(1, 0, 0)$,

$(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$. Pisteiden P_0 ja P_2 välin keskipisteen M painopistekoordinaatit ovat $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$. Lisäksi kolmion $P_0P_1P_2$ keskipisteen K painopistekoordinaatit ovat $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Kuvasta 6.1 näkyy koko tilanne.



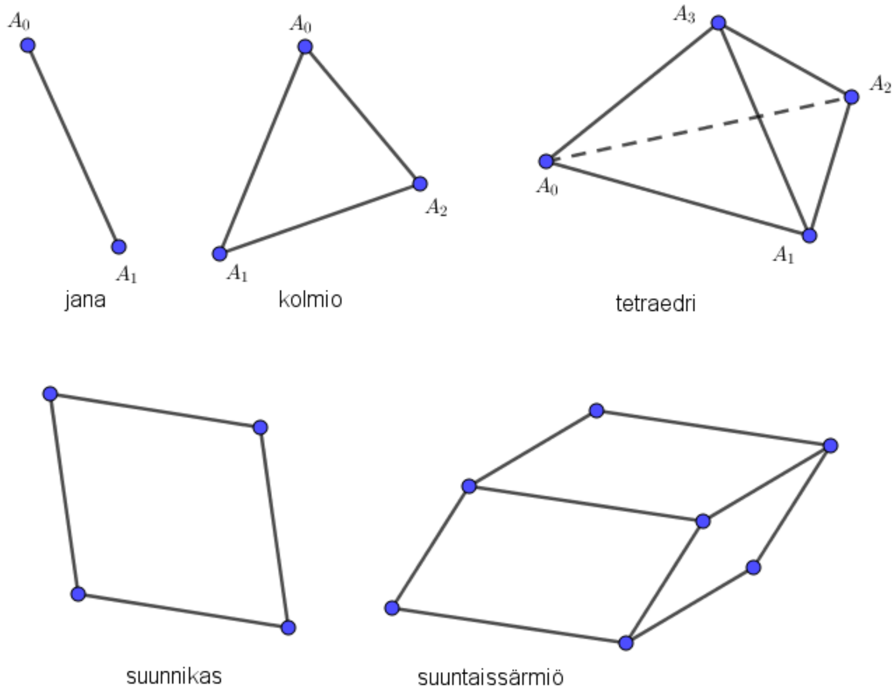
Kuva 6.1: Kolmio P_0, P_1, P_2

Esimerkki 6.6. Olkoot joukon E pisteet $A_0, \ldots, A_n$ affiinisti riippumattomat. Tällöin joukkoa $\lambda A_0 + \cdots + \lambda_n A_n$, missä $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n = 1$ ja $\lambda_i \geq 0$, kutsutaan konveksiksi muodoksi. Jos pisteitä on kaksi, joukoksi saadaan niiden pisteiden välinen jana. Jos pisteitä on kolme, saadaan kolmio, jonka kärjet ovat alkuperäiset pisteet. Jos pisteitä on neljä, saadaan tetraedri. Tässäkin tapauksessa pisteet A_0, A_1, A_2 ja A_3 ovat kärkinä. Joukkoa

$$\{A_0 + \lambda_1 \overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{A_0A_n} \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

kutsutaan monitahokkaaksi, jonka tahkot ovat suunnikkaita. Jos joukon E dimensio on kaksi, sitä kutsutaan suunnikkaaksi, jos kolme, suuntaissärmiöksi.

Kuvassa 6.2 ovat yleisimmät konveksiset muodot, sekä suunnikas ja suuntaissärmiö.



Kuva 6.2: Esimerkkejä

Luku 7

Affiini kuvaus

Affiini kuvaus säilyttää affiinit kombinaatiot ja se voidaan esittää lineaarikuvauksen avulla.

Määritelmä 7.1. Affiini kuvaus. Oletetaan, että kolmikot $(E, \overrightarrow{E}, +)$ ja $(E', \overrightarrow{E}', +')$ ovat affiineja avaruuksia. Tällöin funktio $E \to E'$ on *affiini kuvaus*, jos ja vain jos jokaiselle joukon E pisteperheelle $((A_i, \lambda_i))_{i \in I}$ ehdolla $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ pätee

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i A_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(A_i),$$

mikä tarkoittaa, että affiini kuvaus säilyttää painopisteet.

Affiini kuvaus voidaan saada lineaarikuvauksesta. Tästä lähtien molempien affiinien avaruuksien laskutoimitusten $+$ ja $+'$ merkkinä käytetään $+$ yksinkertaisuuden vuoksi.

Oletetaan, että $A \in E$ ja $B \in E'$ sekä että $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ on lineaarikuvaus. Tällöin affiini kuvaus $f : E \to E'$ on määritelty seuraavalla tavalla:

$$f(A + \bar{v}) = B + \bar{v},$$

missä $B = f(A)$. Näytetään, että tällä tavoin määritelty kuvaus f säilyttää painopisteet.

Tiedetään, että kun $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, pätee

$$\sum_{i \in I} \lambda_i (A + \bar{v}_i) = A + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{A(A + \bar{v}_i)} = A + \sum_{i \in I} \lambda_i \bar{v}_i$$

ja

$$\sum_{i \in I} \lambda_i (B + \overrightarrow{f}(\bar{v}_i)) = B + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{B(B + \overrightarrow{f}(\bar{v}_i))} = B + \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{f}(\bar{v}_i).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i\in I}\lambda_i(A+\bar{v}_i)\right) &= f\left(A+\sum_{i\in I}\lambda_i\bar{v}_i\right) \\ &= B+\overrightarrow{f}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\bar{v}_i\right) \\ &= B+\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{f}(\bar{v}_i) \\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i(B+\overrightarrow{f}(\bar{v}_i)) \\ &= \sum_{i\in I}\lambda_i f(A+\bar{v}_i).\ \square \end{aligned}$$

Seuraavaksi näytetään, että affiinin kuvauksen määritelmässä mainittu kuvaus $\overrightarrow{f}$ todellakin on lineaarikuvaus, jos oletetaan, että affiini kuvaus säilyttää painopisteet.

Lemma 7.2. Oletetaan, että $f : E \to E'$ on affiini kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ siten, että

$$f(A+\bar{v}) = f(A) + \overrightarrow{v},$$

jokaiselle $A \in E$ ja $\bar{v} \in \overrightarrow{E}$.

Todistus. Oletetaan, että $A \in E$. Lineaarikuvaus $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}'$ on hyvin määritelty, kun

$$\overrightarrow{f}(\bar{v}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\bar{v})}$$

kaikilla $\bar{v} \in \overrightarrow{E}$. Nyt pitää osoittaa, että kuvaus $\overrightarrow{f}$ on lineaarikuvaus ja että sen määrittely ei ole riippuvainen pisteen $A \in E$ valinnasta.

Osoitetaan ensin, että $\overrightarrow{f}(\lambda\bar{v}) = \lambda\overrightarrow{f}(\bar{v})$. Koska

$$A+\lambda\bar{v} = A+\lambda\overrightarrow{A(A+\bar{v})} + (1-\lambda)\overrightarrow{AA},$$

voidaan kirjoittaa $A+\lambda\bar{v} = \lambda(A+\bar{v})+(1-\lambda)A$. Määritelmän mukaan affiini kuvaus f säilyttää painopisteet, joten

$$f(A+\lambda\bar{v}) = \lambda f(A+\bar{v}) + (1-\lambda)f(A).$$

Tästä kaikesta saadaan

$$\overrightarrow{f(A)f(A+\lambda\bar{v})} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(A+\bar{v})} + (1-\lambda)\overrightarrow{f(A)f(A)} = \lambda\overrightarrow{f(A)f(A+\bar{v})},$$

mistä seuraa, että $\overrightarrow{f}(\lambda\bar{v}) = \lambda\overrightarrow{f}(\bar{v})$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\overrightarrow{f}(\bar{u}+\bar{v}) = \overrightarrow{f}(\bar{u}) + \overrightarrow{f}(\bar{v})$ kaikilla $\bar{u}, \bar{v} \in \overrightarrow{E}$. Koska

$$A + \bar{u} + \bar{v} = A + \overrightarrow{A(A+\bar{u})} + \overrightarrow{A(A+\bar{v})},$$

voidaan kirjoittaa

$$\overrightarrow{f(A)f(A+\bar{u}+\bar{v})} = \overrightarrow{f(A)f(A+\bar{u})} + \overrightarrow{f(A)f(A+\bar{v})},$$

mistä seuraa, että $\overrightarrow{f}(\bar{u}+\bar{v}) = \overrightarrow{f}(\bar{u}) + \overrightarrow{f}(\bar{v})$ ja edellisen todistuksen osan kanssa tämä osoittaa, että $\overrightarrow{f}$ on lineaarikuvaus.

Lopuksi osoitetaan, että lineaarikuvauksen määrittely ei ole riippuvainen pisteen $A \in E$ valinnasta. Painopisteen määritelmän yhteydessä osoitettiin, että $R = \sum_{i \in I} \lambda_i A_i$ on painoilla varustetun pisteperheen painopiste, jos ja vain jos

$$\overrightarrow{BR} = \sum_{i \in I} \lambda \overrightarrow{BA_i}.$$

Lisäksi

$$B + \bar{v} = A + \overrightarrow{AB} + \bar{v} = A + \overrightarrow{A(A+\bar{v})} - \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB}.$$

Taas kerran f säilyttää painopisteet, joten saadaan

$$f(B+\bar{v}) = f(A+\bar{v}) - f(A) + f(B).$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f(B)f(B+\bar{v})} &= \overrightarrow{f(B)f(A+\bar{v})} - \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(B)f(B)} \\
&= \overrightarrow{f(A)f(B)} + \overrightarrow{f(B)f(A+\bar{v})} \\
&= \overrightarrow{f(A)f(A+\bar{v})},
\end{aligned}$$

mitä pitikin osoittaa. □

Lineaarikuvauksen $\overrightarrow{f}$ määrittelyehdolla

$$f(A+\bar{v}) = f(A) + \overrightarrow{v}$$

on kaksi muuta vaihtoehtoista esitysmuotoa:

$$f(X) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AX}) \quad \text{ja} \quad \overrightarrow{f(A)f(X)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AX})$$

kaikilla $A, X \in E$. Affiinit kuvaukset f, joille $\overrightarrow{f}$ on identiteettikuvaus, kutsutaan translaatioiksi. Jos lineaarikuvaus on identiteetti eli $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}$, niin

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AX}) \\ &= f(A) + \overrightarrow{AX} \\ &= X + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{Af(A)} + \overrightarrow{AX} \\ &= X + \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{Af(A)} - \overrightarrow{XA} \\ &= X + \overrightarrow{Af(A)}. \end{aligned}$$

Saadaan, että $f(X) = X + \overrightarrow{Af(A)}$, mikä on sama kuin $\overrightarrow{Xf(X)} = \overrightarrow{Af(A)}$. Tästä näkee, että f on translaatio, joka ei riipu pisteestä A.

Nyt käsitellään joitakin affiinien avaruuksien ominaisuuksia. Seuraavaksi näytetään, että kahden affiinin kuvauksen yhdistetty kuvaus on myös affiini kuvaus. Oletetaan, että $f : E \to E'$ ja $g : E'' \to E'''$ ovat affiineja kuvaksia. Tällöin

$$g \circ f = g(f(A + \bar{v})) = g\left(f(A) + \overrightarrow{f}(\bar{v})\right) = g(f(A)) + \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{f}(\bar{v})\right),$$

mikä on myös affiini kuvaus.

Oletetaan, että $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus, jonka dimensio on m ja $(A_0, \dots, A_m)$ on joukon E affiini kehys. Lisäksi oletetaan, että $(F, \overrightarrow{F}, +)$ on myös affiini avaruus ja joukko F sisältää $m+1$ kappaletta pisteitä $(B_0, \dots, B_m)$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen affiini kuvaus $f : E \to F$ siten, että $f(A_i) = B_i$, missä $0 \leq i \leq m$. Tällöin affiini kuvaus f on

$$f(\lambda_0 A_0 + \cdots + \lambda_m A_m) = \lambda_0 B_0 + \cdots + \lambda_m B_m.$$

Tässäkin ehto $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1$ on voimassa. Affiini kuvaus on yksikäsitteinen koko joukossa E, sillä sen affiinin kehyksen kaikki pisteet ovat kuvauksessa mukana.

Affiinin kuvauksen voi esittää myös matriisin muodossa. Helpointa on käyttää apuna affiinin kuvauksen $f : E \to F$ affiinia kehystä $(A_0, \dots, A_n)$. Koska

$$f(A_0 + \bar{x}) = f(A_0) + \overrightarrow{f}(\bar{x})$$

kaikilla $\bar{x} \in \overrightarrow{E}$, tällöin

$$\overrightarrow{A_0 f(A_0 + \bar{x})} = \overrightarrow{A_0 f(A_0)} + \overrightarrow{f}(\bar{x}).$$

Edellisen yhtälön vektorit voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= x_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{A_0A_n} \\
\overrightarrow{A_0f(A_0)} &= b_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + b_n\overrightarrow{A_0A_n} \\
\overrightarrow{A_0f(A_0+\bar{x})} &= y_1\overrightarrow{A_0A_1} + \cdots + y_n\overrightarrow{A_0A_n}.
\end{aligned}$$

Nyt jos A on lineaarikuvaukseen $\overrightarrow{f}$ liittyvä $n \times n$ matriisi ja $(\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_n})$ on vektoriavaruuden $\overrightarrow{E}$ kanta, voidaan vektorit $\bar{x}$, $\bar{b}$ ja $\bar{y}$ esittää sarakevektoreina $(x_1, \ldots, x_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ ja $(y_1, \ldots, y_n)$, jolloin yhtälöt

$$\overrightarrow{A_0f(A_0+\bar{x})} = \overrightarrow{A_0f(A_0)} + \overrightarrow{f}(\bar{x}) \quad \text{ja} \quad \bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$$

ovat ekvivalentteja.

Huomautuksena pitää sanoa, että affiini kuvaus on lineaarikuvaus ainoastaan silloin, jos translaatio eli $\bar{b}$ on nollavektori, jolloin $f(A_0) = A_0$. Tällöin pistettä A_0 kutsutaan kiinteäksi pisteeksi.

Seuraavaksi tarkastellaan, mitä affiinit kuvaukset käytännössä ovat, parin esimerkin avulla.

Esimerkki 7.3. Katsotaan, miten affiini kuvaus

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

vaikuttaa kolmioon ABC, jonka kärkien koordinaatit ovat $A = (0,0)$, $B = (2,1)$ ja $C = (-2,3)$. Affiinin kuvauksen kuvana on myös kolmio. Sen kärkien koordinaatit ovat

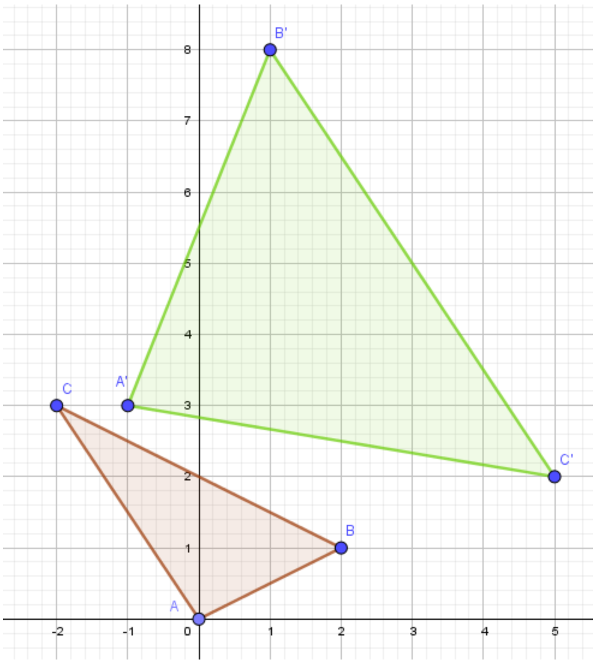
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ja

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Kolmiot ABC ja $A'B'C'$ näkyvät kuvassa 7.1. Affiinin kuvauksen myötä kolmion mittasuhteet muuttuvat, se kääntyy ja siirtyy ylöspäin.



Kuva 7.1: Kolmiot ABC ja $A'B'C'$

Esimerkki 7.4. Tutkitaan affiinin kuvauksen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vaikutusta neliöön $ABCD$, jonka kärkipisteinä ovat $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 3)$ ja $D = (0, 3)$. Affiinin kuvauksen voi myös esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Tästä voi jo ennustaa, että affiini kuvaus kääntää neliön, venyttää sitä ja kiertää sen sekä myös siirtää sen. Lasketaan vielä, mihin neliön $ABCD$ kärkipisteet kuvautuvat.

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

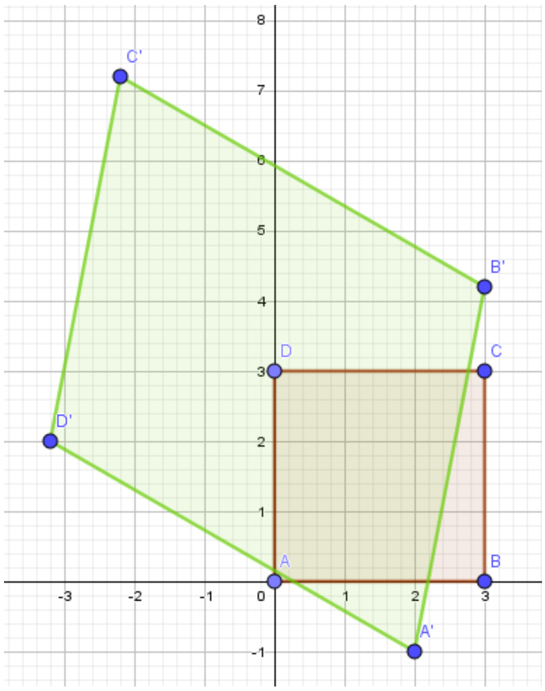
$$B' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3\sqrt{3} - 1 \end{pmatrix},$$

$$C' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} + 2 \end{pmatrix}$$

ja

$$D' = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Neliöt $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ näkyvät kuvassa 7.2.



Kuva 7.2: Neliöt $ABCD$ ja $A'B'C'D'$

Jos oletetaan, että affiini kuvaus $f : E \to E'$ on bijektio ja kolme joukon E pistettä A, B ja C sijaitsevat samalla suoralla, missä $A \neq B$ ja $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$, huomataan, että pisteet $f(A), f(B)$ ja $f(C)$ ovat myös samalla suoralla. Syy siihen on se, että affiini kuvaus säilyttää painopisteet, jolloin $f(C) = (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B)$.

Lisäksi kolmelle samalla suoralla sijaitsevalle pisteelle A, B ja C, missä $A \neq C$ ja $B = (1 - \beta)A + \beta C$, voidaan määrittää pistejonon A, B, C suhde:

$$\text{suhde}(A, B, C) = \frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}}.$$

Seuraavaksi tarkastellaan bijektiivisiin affiineihin kuvauksiin liittyvää käsitettä: homotetiaa. Olkoon $A \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Homotetiakeskuksen A ja suhdeluvun λ homotetia on kuvaus $H_{A,\lambda}$, joka määritellään seuraavalla tavalla:

$$H_{A,\lambda}(X) = A + \lambda\overrightarrow{AX}$$

kaikilla $X \in E$. Kun $\lambda = 1$, $H_{A,1}$ on identiteettikuvaus.

Esimerkki 7.5. Olkoon $O \in E$ homotetiakeskus ja $\lambda = 2$. Oletetaan myös, että $A, B, C \in E$. Tällöin

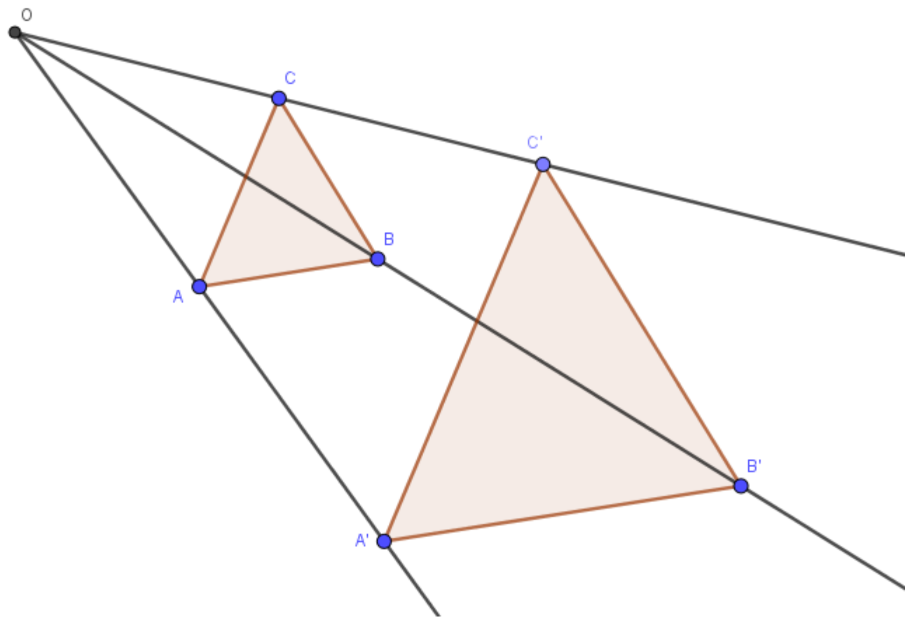
$$H_{O,2}(A) = A + 2\overrightarrow{OA} = A',$$

$$H_{O,2}(B) = B + 2\overrightarrow{OB} = B'$$

ja

$$H_{O,2}(C) = C + 2\overrightarrow{OC} = C'.$$

Tämän esimerkin homotetia on havainnollistettu kuvassa 7.3.



Kuva 7.3: Homotetia

Luku 8

Affiinin geometrian esimerkkejä

Tässä luvussa todistetaan kolme affiinin geometrian tulosta kayttäen apuna sitä tietoa, mitä ollaan käsitelty.

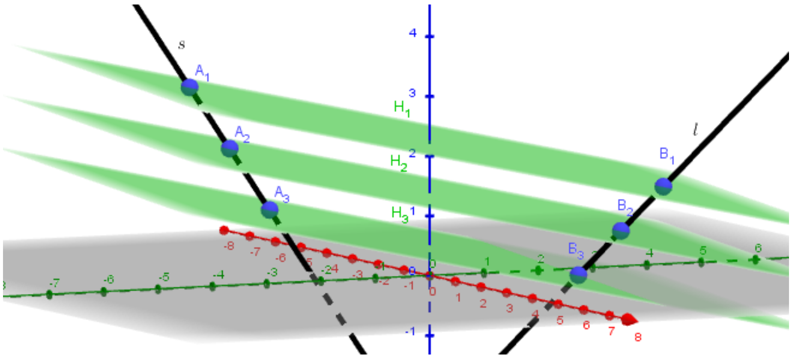
Lemma 8.1. Thaleen lause. Olkoon kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ affiini avaruus. Oletetaan, että H_1, H_2, ja H_3 ovat kolme yhdensuuntaista hypertasoa. Hypertasoksi kutsutaan $(n-1)$-ulotteista affiinia aliavaruutta. Lisäksi oletetaan, että suorat s ja l eivät ole yhdensuuntaisia hypertasojen kanssa, pisteet A_1, A_2 ja A_3 ovat suoran s ja hypertasojen leikkauspisteet, sekä pisteet B_1, B_2 ja B_3 ovat vastaavasti suoran l ja hypertasojen leikkauspisteet. Tällöin seuraavat suhteet ovat samat:

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}} = r.$$

Toisinpäin, jos mille tahansa suoralla s olevalle pisteelle C pätee, että $\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = r$, niin $C = A_3$. Kuva 8.1 havainnollistaa tilannetta.

Todistus. Koska tasot H_1, H_2 ja H_3 ovat yhdensuuntaiset, niillä on sama suunta $\overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{E}$. Nyt on tarkoitus projektoida suoran l pisteet suoralle s kulkien hypertasojen suuntaa pitkin. Esitetään suora s suuntavektorin avulla: olkoon vektori $\bar{u} \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{H}$, sellainen, että $s = A_1 + \mathbb{R}\bar{u}$. Suora s ei ole yhdensuuntainen hypertasojen kanssa, joten voidaan määrittää lineaarikuvaus $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \mathbb{R}\bar{u}$, joka on hypertasojen suunnan $\overrightarrow{H}$ kanssa yhdensuuntainen projektio suoralle $\mathbb{R}\bar{u}$. Tämän lineaarikuvauksen avulla saadaan affiini kuvaus $f : E \to s$, joka määritellään seuraavalla tavalla:

$$f(B_1 + \bar{w}) = A_1 + \overrightarrow{f}(\bar{w})$$



Kuva 8.1: Thaleen teoreema

kaikilla $\bar{w} \in \overrightarrow{E}$. Tällöin piste B_1 kuvautuu pisteeksi A_1 eli $f(B_1) = A_1$. Koska tasoilla H_1, H_2 ja H_3 on sama suunta $\overrightarrow{H}$, niin myös $f(B_2) = A_2$ ja $f(B_3) = A_3$. Affiini kuvaus f säilyttää samalla suoralla sijaitsevien pisteiden suhteet, joten

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}.$$

Nyt todistetaan toinen väite. Oletetaan, että piste C on mikä tahansa suoralla s oleva piste ja että $\frac{\overrightarrow{A_1C}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = r$. Tiedetään, että myös $\frac{\overrightarrow{B_1B_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}} = r$. Tällöin samalla tavalla kuin edellisessä todistuksessa määritellyn kuvauksen f mukaan pitää olla, että $f(B_3) = C$. Koska kuvaus f säilyttää samalla suoralla sijaitsevien pisteiden suhteet, pitää olla, että $f(B_3) = A_3$, jolloin välttämättä $C = A_3$. $\square$

Seuraavaksi todistetaan yksi lemma, josta on apua seuraavissa lauseissa.

Lemma 8.2. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus, pisteet $A, B \in E$ eivät ole samat ja f on homotetiakuvaus, joka ei identiteettikuvaus. Jos $A' = f(A)$, $s =< A, B >$ on pisteiden A ja B kautta kulkeva suora ja s' on pisteen A' kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran s kanssa, niin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja:

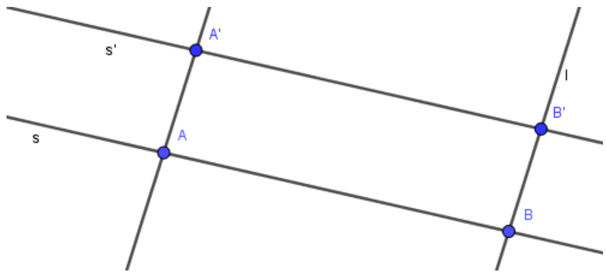
(i) $B' = f(B)$;

(ii) Olkoon l pisteen B kautta kulkeva ja pisteiden A ja A kautta kulkevan suoran kanssa yhdensuuntainen suora. Jos f on translaatio, niin B' on suorien s' ja l leikkauspiste.

Jos homotetiakuvauksen f homotetiakeskus on piste C, niin $B' = s' \cap < C, B >$.

Tässä lemmassa on siis kaksi osaa, jotka todistetaan erikseen.
Todistus.

(Osa 1) Osan 1 tilanne näkyy kuvassa 8.2.



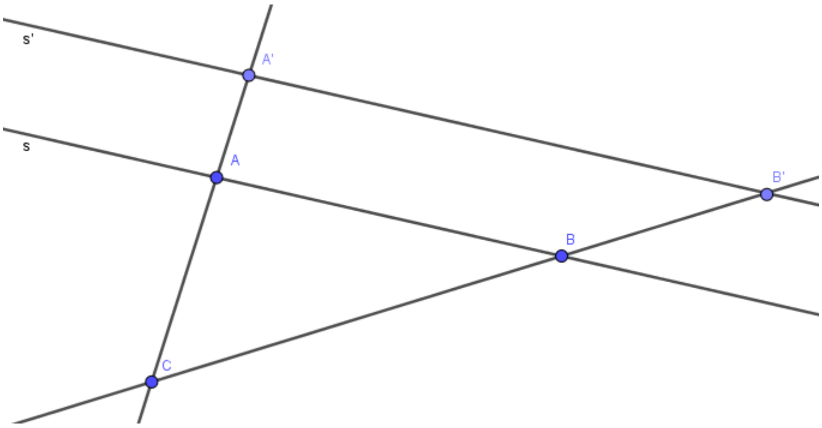
Kuva 8.2: Osa 1

Oletetaan, että $B' = f(B)$ ja että kuvaus f on translaatio, jolloin $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{Bf(B)}$ eli vektoreiden pituus ja suunta ovat samat. Siitä, että vektoreiden suunta on sama, johtuu, että pisteiden A ja A' kautta sekä pisteiden B ja B' kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaiset eli piste B' sijaitsee suoralla l. Suorien yhdensuuntaisuudesta ja siitä, että vektoreiden $\overrightarrow{AA'}$ ja $\overrightarrow{BB'}$ pituudet ovat samat, johtuu, että pisteiden A ja B kautta kulkeva suora s on yhdensuuntainen pisteiden A' ja B' kautta kulkevan suoran kautta, joka on määrittelyn mukaan suora s'. Siis piste B' sijaitsee sekä suoralla l että suoralla s'. Näin ollen piste B' on niiden suorien leikkauspiste.

Todistetaan väite toiseen suuntaan. Oletetaan, että f on translaatio ja piste B' on suorien s' ja l leikkauspiste. Edelleen translaation vuoksi pätee, että $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{Bf(B)}$, joten pisteen $f(B)$ on todistuksen toisen suunnan mukaan oltava suorien l ja s' leikkauspiste, joka oletuksen mukaan on piste B'. Siis $B' = f(B)$.

(Osa 2) Kuvan 8.3 avulla tilanne selkenee.

Oletetaan, että $B' = f(B)$ ja että homotetiakuvauksen f homotetiakeskus on piste C. Homotetiakuvauksesta $f_{C,\lambda}(B) = C + \lambda\overrightarrow{BC} = B'$, missä $\lambda \neq 1$, johtuu, että piste B' luonnostaan sijaitsee suoralla, joka kulkee pisteiden B ja C kautta. Lisäksi homotetiakuvauksesta johtuen mittasuhteet säilyvät: $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AA'}} = \frac{\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{BB'}}$. Tällöin Thaleen lauseen mukaan



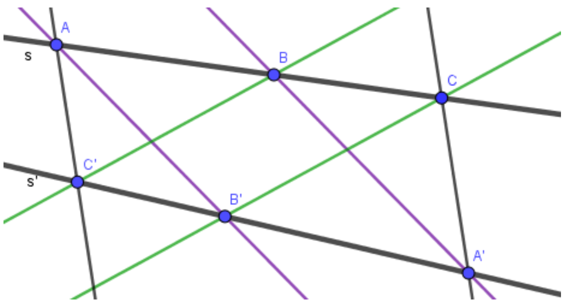
Kuva 8.3: Osa 2

pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran s on oltava yhdensuuntainen pisteiden A' ja B' kautta kulkevan suoran kanssa, jonka täytyy olla suora s'. Piste B' siis sijaitsee sekä suoralla s' että suoralla $< C, B >$ eli $B' = s' \cap < C, B >$.

Todistetaan väite toiseen suuntaan. Oletetaan, että homotetiakuvauksen f homotetiakeskus on piste C ja $B' = s' \cap < C, B >$. Tällöin suoraan Thaleen lauseeseen viitaten kuvaus f on määritelty niin, että $B' = f(B)$. $\square$

Lemma 8.3. Pappoksen lause. Oletetaan, että E on affiini taso, suorat s ja s' eivät ole samat, sekä pisteet A, B ja C ovat suoralla s. Oletetaan lisäksi, että pisteet A', B' ja C' ovat suoralla s'. Jos mikään pisteistä A, B, C, A', B' ja C' ei ole suorien s ja s' leikkauspiste ja suorat $< A, B' >$ ja $< A', B >$ ovat yhdensuuntaiset samoin kuten suorat $< B, C' >$ ja $< B', C >$, niin suorat $< A, C' >$ ja $< A', C >$ ovat myös yhdensuuntaiset.

Suorat näkyvät kuvassa 8.4.



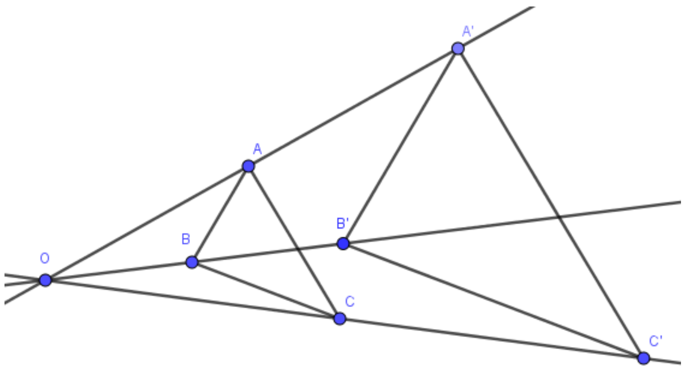
Kuva 8.4: Pappoksen lause

Todistus. Jos suorat s ja s' eivät ole yhdensuuntaiset, olkoon O niiden leikkauspiste. Olkoon f homotetiakuvaus, jonka homotetiakeskus on piste O, ja jolle pätee, että $f(A) = B$. Lisäksi olkoon g homotetiakuvaus, jonka homotetiakeskus on myös piste O, ja jolle pätee $g(B) = C$. Koska suorat $< A, B' >$ ja $< A', B >$ ovat yhdensuuntaiset, lemman 8.2 mukaan $A' = f(B')$. Samalla tavalla koska $< B, C' >$ ja $< B', C >$ ovat yhdensuuntaiset, niin $B' = g(C')$. Olkoon $h = g \circ f$, jolloin $h(A) = C$ ja näin ollen $h(A') = C'$. Edelleen lemmasta 8.2 johtuen suorat $< A, C' >$ ja $< A', C >$ ovat yhdensuuntaiset.

Jos suorat s ja s' ovat yhdensuuntaiset, todistus menee samalla tavalla translaatioita käyttäen. Olkoon f translaatio, jolle pätee $f(A) = B$. Olkoon g translaatio, jolle pätee $g(B) = C$. Koska suorat $< A, B' >$ ja $< A', B >$ ovat yhdensuuntaiset, lemman 8.2 mukaan $A' = f(B')$. Samalla tavalla koska $< B, C' >$ ja $< B', C >$ ovat yhdensuuntaiset, niin $B' = g(C')$. Olkoon $h = g \circ f$, jolloin $h(A) = C$ ja näin ollen $h(A') = C'$.Tällöin lemmasta 8.2 johtuen suorat $< A, C' >$ ja $< A', C >$ ovat yhdensuuntaiset. $\square$

Lemma 8.4. Desarguesin lause. Oletetaan, että kolmikko $(E, \overrightarrow{E}, +)$ on affiini avaruus. Olkoot ABC ja $A'B'C'$ kolmioita. Jos kolmioiden sivut $< A, B >$ ja $< A', B' >$ sekä $< B, C >$ ja $< B', C' >$ ovat yhdensuuntaiset, niin sivut $< A, C >$ ja $< A', C' >$ ovat myös yhdensuuntaiset, jos ja vain jos suorat $< A, A' >$, $< B, B' >$ ja $< C, C' >$ ovat joko yhdensuuntaiset tai niillä on yhteinen leikkauspiste.

Lausetta havainnollistaa kuva 8.5.



Kuva 8.5: Desarguesin lause

Todistus. Oletetaan ensin, että suorat $< A, B >$ ja $< A', B' >$, $< B, C >$ ja $< B', C' >$, sekä $< A, C >$ ja $< A', C' >$ ovat yhdensuuntaiset. Koska suorat $< A, B >$ ja $< A', B' >$ ovat yhdensuuntaiset, piteet A, A', B ja B' sijaitsevat samalla tasolla. Tällöin suorat $< A, A' >$ ja $< B, B' >$ ovat joko yhdensuuntaiset tai leikkaavat toisensa pisteessä O. Tarkastellaan tapaus, jossa suorat leikkaavat toisensa. Olkoon f homotetiakuvaus, jonka homotetiakeskus on piste O ja $f(A) = A'$. Tällöin lemman 8.2 mukaan $f(B) = B'$. Jos $f(C) = C''$, niin edelleen lemman 8.2 mukaan suorat $< B, C >$ ja $< B', C'' >$ sekä suorat $< A, C >$ ja $< A', C'' >$ ovat yhdensuuntaiset. Koska pisteen A kautta kulkeva suora, joka on yhdensuuntainen suoran $< A, C >$ kanssa, on yksikäsitteinen, ja se on suora $< A', C' >$, täytyy olla, että $C' = C''$. Näin ollen suora $< C, C' >$ leikkaa suorat $< A, A' >$ ja $< B, B' >$ homotetiakeskuksessa eli pisteessä O.

Nyt mennään tapaukseen, missä suorat $< A, A' >$ ja $< B, B' >$ ovat yhdensuuntaiset. Olkoon kuvaus f sellainen translaatio, että $f(A) = A'$ ja $f(B) = B'$ lemmasta 8.2 johtuen. Tällöin jos $f(C) = C''$, niin lemman 8.2 mukaan suorat $< B, C >$ ja $< B', C'' >$ sekä suorat $< A, C >$ ja $< A', C'' >$ ovat yhdensuuntaiset, mikä edelleen johtaa siihen johtopäätökseen, että $C' = C''$. Tästä syystä suorat $< A, A' >$, $< B, B' >$ ja $< C, C' >$ ovat yhdensuuntaiset.

Todistetaan toinen suunta. Oletetaan, että suorat $< A, A' >$, $< B, B' >$ ja $< C, C' >$ ovat joko yhdensuuntaiset tai niillä on yhteinen leikkauspiste, ja sen lisäksi, että $< A, B >$ ja $< A', B' >$ sekä $< B, C >$ ja $< B', C' >$ ovat yhdensuuntaiset. Tarkastellaan tapaus, missä suorat $< A, A' >$, $< B, B' >$ ja $< C, C' >$ leikkaavat toisensa pisteessä O. Olkoon f homotetiakuvaus, jonka homotetiakeskus on piste O ja jonka mukaan $f(A) = A'$. Lemmasta 8.2 johtuu se, että $f(C) = C'$ sekä se, että tällöin suorien $< A, C >$ ja $< A', C'' >$ on oltava yhdensuuntaiset.

Nyt katsotaan, mitä tapahtuu, jos suorat $< A, A' >$, $< B, B' >$ ja $< C, C' >$ ovat yhdensuuntaiset. Suorat $< A, B >$ ja $< A', B' >$ sekä $< B, C >$ ja $< B', C' >$ ovat oletuksen mukaan myös yhdensuuntaiset. Olkoon kuvaus f translaatio, jonka mukaan $f(A) = A'$, sekä lemmasta 8.2 johtuen $f(C) = C'$. Tällöin taas kerran lemman 8.2 mukaan tulos on se, että suorat $< A, C >$ ja $< A', C' >$ ovat yhdensuuntaiset. $\square$

Luku 9

Kirjallisuutta

(1) N. L. Balazs (1980) Weyl's association, Wigner's function and affine geometry, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol.102(2)

(2) J. Gallier (2018) *Curves and Surfaces In Geometric Modeling: Theory And Algorithms*, University of Pennsylvania, Department of Computer and Information Science

(3) J. Gallier (2011) *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, 2. painos, Springer

(4) J. Häsä, L. Oinonen, J. Rämö (2015) *Johdatus lineaarialgebraan, Osa I*, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

(5) K. T. Leung (1974) *Linear Algebra and Geometry*, Hong Kong University Press

(6) L. Oinonen, J. Rämö (2015) *Johdatus lineaarialgebraan, Osa II*, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

(7) I. R. Shafarevich, A. O. Remizov (2013) *Linear Algebra and Geometry*, Springer