



Avaruusgeometrian tehtävänäntöjen havainnollistaminen ja tieto- ja viestintäteknologia yläkoulun matematiikan oppikirjoissa

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen
tiedekunta
Pro gradu
Matematiikka
25.3.2020
Suvi Rönqvist

Ohjaaja: Mika Koskenoja

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		
Tekijä - Författare - Author Suvi Rönngqvist		
Työn nimi - Arbetets titel Avaruusgeometrian tehtävänantojen havainnollistaminen ja tieto- ja viestintäteknologia yläkoulun matematiikan oppikirjoissa		
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikka, aineenopettaja		
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu / Mika Koskenoja	Aika - Datum - Year 25.03.2020	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 43 sivua
Tiivistelmä - Referat - Abstract <p>Koulumatematiikka on ottanut valtavia harppauksia eteenpäin viime vuosien aikana. Vuonna 2014 hyväksytty perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet toivat ohjelmoinnin osaksi matematiikan opetusta. Opetussuunnitelmassa painotetaan paljon yleisesti sekä matematiikan osalta tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämistä osana opetusta. Teknologia antaa runsaasti mahdollisuuksia työskentelyyn koulussa. Avaruusgeometriaa voi luoda, havainnoida tai tutkia siihen tarkoitetuilla sovelluksilla. Valmiiksi tehtyjä käyttökelpoisia <i>apletteja</i> löytyy esimerkiksi GeoGebralta hyvin. Tästä voi olettaa, että oppikirjat antavat oppilaille paljon tukea teknologian hyödyntämiseen opinnoissa.</p> <p>Koulussa käytettävät oppimateriaalit muuttuivat viimeisimmän opetussuunnitelman myötä. Esimerkiksi materiaalit voivat olla digitaalisessa muodossa perinteisen kirjan sijaan. Perinteisissä oppikirjoissa on aikaisempien kirjojen tyyliin tehtäviä laidasta laitaan. Avaruusgeometriassa tehtävät painottuvat hahmottamiseen ja laskemiseen, mutta myös kolmiulotteiseen hahmottamiseen liittyviä tehtäviä on jonkin verran. Tieto- ja viestintäteknologiaa ei ole oppilaiden kirjoissa mainittuna tai tuotu esiin.</p> <p>Ylioppilastutkinnossa matematiikka on suoritettu kevästä 2019 alkaen sähköisenä kokeena. Peruskoulusta lukioon jatkaa yli puolet oppilaista, joten yläkoulun jälkeen oppilailla on muutama vuosi lukiossa aikaa omaksua erilaiset sähköiset työkalut. Lukiossa opiskeleville olisi valtavasti etua, jos perusopetuksessa tutustuttaisiin esimerkiksi geometriin piirtotyökaluihin. Nivelvaihe peruskoulun ja lukion välillä on joka tapauksessa suuri harppaus.</p> <p>Perusopetuksen matematiikan opetusmateriaaleissa ei ole hyödynnetty teknologiaa avaruusgeometriassa. Lisätutkimus teknologian integroimisesta osaksi matematiikan ja avaruusgeometrian opetusta olisi toivottavaa.</p>		
Avainsanat – Nyckelord Avaruusgeometria, perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, tieto- ja viestintäteknologia		
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information		

Sisällysluettelo

1	JOHDANTO	1
2	AVARUUSGEOMETRIA	3
	2.1 Kaavojen johtaminen	3
3	UUSI PERUSOPETUKSEN OPETUSSUUNNITELMA.....	8
	3.1 Opetussuunnitelma.....	8
	3.1.1 Ainekohtaisen opetussuunnitelman tasoja.....	9
	3.2 Matematiikka peruskoulussa.....	10
	3.2.1 Avaruusgeometria perusopetuksen opetussuunnitelmassa	11
	3.2.2 Tieto- ja viestintäteknologia ja työtavat opetussuunnitelmassa.	17
	3.2.3 3-6. luokan opetussuunnitelman - sisällöt	18
4	KIRJASARJAT	20
	4.1 Alakoulun kirjasarjoja ja pohjatiedot avaruusgeometriaan	20
	4.2 Yläkoulun kirjasarjoja geometriaan	22
	4.2.1 Kuutio.....	23
	4.2.2 Säde.....	24
5	TUTKIMUSTEHTÄVÄ JA TUTKIMUSKYSYMYKSET	27
6	TUTKIMUKSEN TOTEUTUS	27
	6.1 Valmiit avaruusgeometrian appletit.....	28
	6.1.1 Appletti 1. Sulava kartio	28
	6.1.2 Appletti 2. Lieriö 3D-GeoGebralla	31
7	TUTKIMUSTULOKSIA.....	34
8	LUOTETTAVUUS	35
9	POHDINTAA	35
	LÄHTEET	37
	LIITTEET.....	39

1 Johdanto

Valmistuessani saan kaksoispätevyyden matematiikan aineenopettajaksi sekä luokanopettajaksi. Ammatillinen kiinnostukseni on erityisesti yhtenäisessä peruskoulussa, jossa pääsen hyödyntämään kokonaisuudessaan tutkintoani. Matematiikan opettaminen on ollut intohimoni jo pitkään. Matematiikan ja matemaattisen ajattelun pohja luodaan oppilaiden osalta jo varhain alakoulussa, joten aiheiden looginen eteneminen on tärkeää. Olen opettanut yläkoulussa matematiikkaa vuosia, joten erityistä kiinnostusta on herättänyt se, miten alakoulussa matematiikan opetusta järjestetään ja millaisia oppimateriaaleja opettajat saavat tuekseen.

Onnekseni viimeisin perusopetuksen opetussuunnitelma on ollut käytössä suomalaisissa peruskouluissa vuodesta 2016 alkaen, joten aloitettuni luokanopettajan uran syksyllä 2019 olin kerennyt perehtyä siihen, mitä kouluissa on uuden opetussuunnitelman mukaan. Lisäksi olen opinnoissa saanut perehtyä opetussuunnitelmaan viimeisten opiskeluvuosien aikana monista eri näkökulmista. Uusien opetussuunnitelmien pohjalta on tutkittu lähinnä vuonna 2014 julkaistuun lukion opetussuunnitelmaan tulleita muutoksia. Muun muassa Topi Salmi (2015) tutki pro gradussaan uuden lukion opetussuunnitelman muutoksia (LOPS 2015). Salmi tutki opettajien asenteita matematiikan muuttumisesta sähköisempään muotoon sekä sähköiseen ylioppilaskokeeseen vaikutusta opetukseen.

Avaruudellinen hahmottaminen kehittyy ihmisillä pitkään ja peruskoulun jälkeen, joten monipuolinen visualisointi kouluaikana auttaa oppilaita kehittymään kolmiulotteisessa ajattelussa (Juniati ym. 2018). Avaruudellisen hahmottamisen kehittäminen monipuolisesti jo kouluaikana helpottaa työelämässä ja käytännön arjessa tulevaa mallintamista esimerkiksi jollakin tietokoneohjelmalla. Juniati ja kumppanit painottivat, että erityisesti tehtävien ja ongelmien ratkaisemisessa hahmottelu ja ajatusten visualisointi auttaa kokonaisvaltaisen kuvan saamista ongelmaan.

Pro gradussa tutkin yläkoulun matematiikan oppikirjasarjoja ja perusopetuksen opetussuunnitelmaa ja selvitän, millaisia visuaalisia havainnoiteja oppikirjoissa on ja ohjaako ne oppilasta hyödyntämään tieto- ja viestintäteknologiaa. Alkuun tutustutaan avaruusgeometriaan yleisesti ja miten sitä on peruskoulussa. Tästä jatketaan perusopetuksen opetussuunnitelman ja kirjasarjojen tutkimiseen ja lopuksi tutkimuksen tuloksia ja pohdintaa.

Tämä aihe on merkityksellinen erityisesti siksi, että kevästä 2019 asti matematiikan ylioppilaskokeet ovat olleet sähköisessä muodossa. Näen, että oppilaille on valtavaa etua siitä, mikäli peruskoulussa on tutustuttu matematiikan ohjelmistoihin, kuten GeoGebraan tai muihin vastaaviin. Internetistä löytyy valtavasti käyttökelpoista ja ilmaista opetusmateriaalia suomen kielellä, joten mahdollisuus tutkia ja perehtyä lähes mihin tahansa aiheeseen on mahdollista.

Yläkoulun oppikirjoista tutkin Sanoma Pro Oy:n kustantamaa Kuutio-sarjaa sekä Editan Säde-sarjaa. Tässä pro gradussa ei vertailla oppikirjasarjoja vaan pyritään löytämään, miten oppikirjasarjassa on tuotu esille tehtävien havainnointi avaruusgeometrian osalta kirjassa tai sähköisessä muodossa hyödyntäen tieto- ja viestintäteknologiaa.

Peruskoulussa otettiin vuonna 2016 käyttöön uusi perusopetuksen opetussuunnitelma (POPS 2014). Opetussuunnitelmia uudistetaan noin 10 vuoden sykleissä ja uudistuksien tarkoituksena on pysyä ajan tasalla ja vastata nykyisen yhteiskunnan ja työelämän haasteisiin. Opetussuunnitelman uudistukset tuovat muutoksia tavoitteisiin, sisältöihin, arviointiin, oppitunteihin ja ajoituksiin. Tässä pro gradussa perehdytään opetussuunnitelman perusteisiin sekä siihen, miten kirjat ja kustantamot ovat vastanneet valtakunnallisen opetussuunnitelmaan tulleisiin muutoksiin. Kirjasarjojen osalta tutkitaan sisältöjen järjestystä ja sitä, miten ja missä järjestyksessä sisällöt tulevat kirjasarjoissa olemaan. Oletuksena on, että kirjojen kohdalla edetään kronologisesti luku kerrallaan, koska on mahdollista, että edellisten lukujen asioita tulisi pystyä soveltamaan seuraavissa luvuissa tai aihepiireissä.

2 Avaruusgeometria

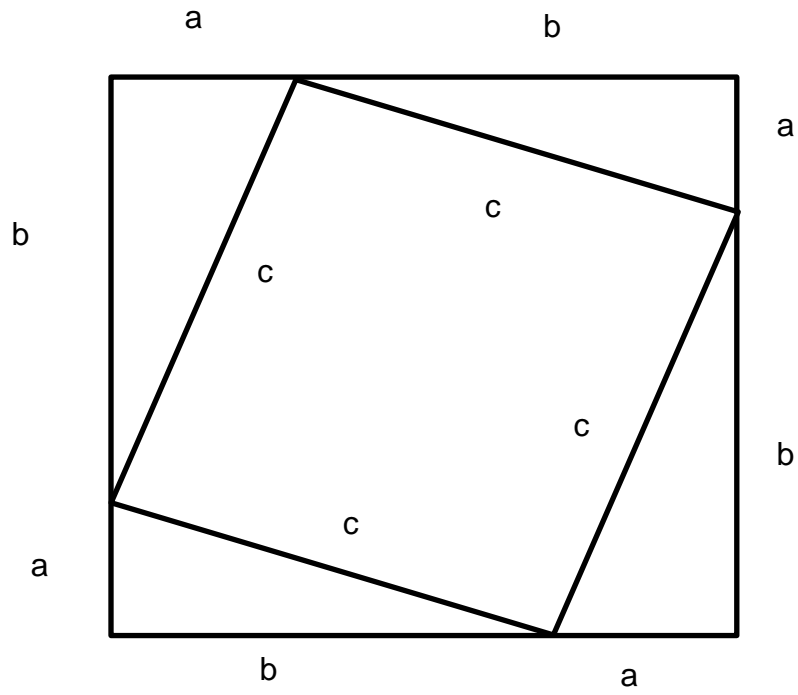
Avaruusgeometria on geometrian osa-alue, jossa tutkitaan ja perehdytään erilaisia kolmiulotteisiin kappaleisiin. Avaruusgeometria eroaa tasogeometriasta siten, että tasokuviolle on tullut kolmas ulottuvuus, syvyys, jolloin tasosta tulee kolmiulotteinen kappale. Avaruusgeometria koostuu kappaleista, joita ovat esimerkiksi lieriö, kartio ja pallo. Tasokuvioille on mahdollista laskea pinta-ala ja kappaleille on pinta-alan lisäksi mahdollista laskea tilavuus. Tämä tutkimus painottuu avaruusgeometrian havainnointiin oppikirjoissa ja tutkimuskysymykset ovat:

- 1) Millä tavoin avaruusgeometriaa on havainnollistettu oppikirjoissa?
- 2) Millaisia tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäviä välineitä suositellaan käytettäväksi oppikirjoissa avaruusgeometriaa käsittelevistä osiosta?
- 3) Miten opetussuunnitelmassa ohjeistetaan käyttämään tieto- ja viestintäteknologiaa osana matematiikan opetusta ja erityisesti avaruusgeometrian osalta?

2.1 Kaavojen johtaminen

Peruskoulun avaruusgeometriassa esiintyvät ympyräpohjainen lieriö, ympyräpohjainen kartio ja pallo. Peruskoulun oppilaat ovat lähes poikkeuksetta kiinnostuneita, mistä kyseisten kappaleiden kaavat tulevat ja miksi ne ovat juuri niin. Monet empiiriset demonstraatiot ja konkreettisilla kappaleilla kokeileminen ovat omiaan vakuuttamaan oppilaat kaavojen oikeellisuudesta. Hyvillä peruskoulumatematiikan tiedoilla voidaan johtaa tai perustella Pythagoraan lause.

Neliön sisälle on asetettu toinen neliö vinosti.

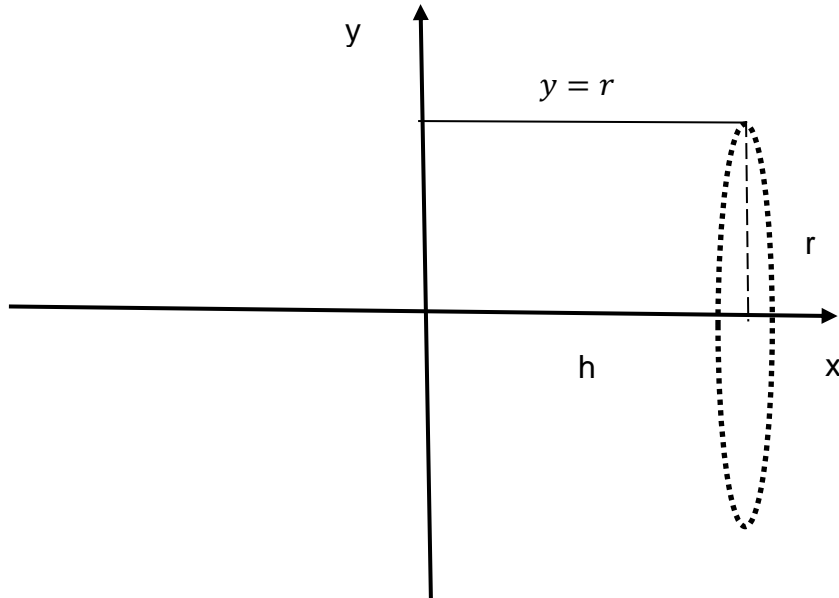


$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Ympyräpohjaisen lieriön kaava johdetaan seuraavasti lukion differentiaali- ja integraalilaskennan avulla.



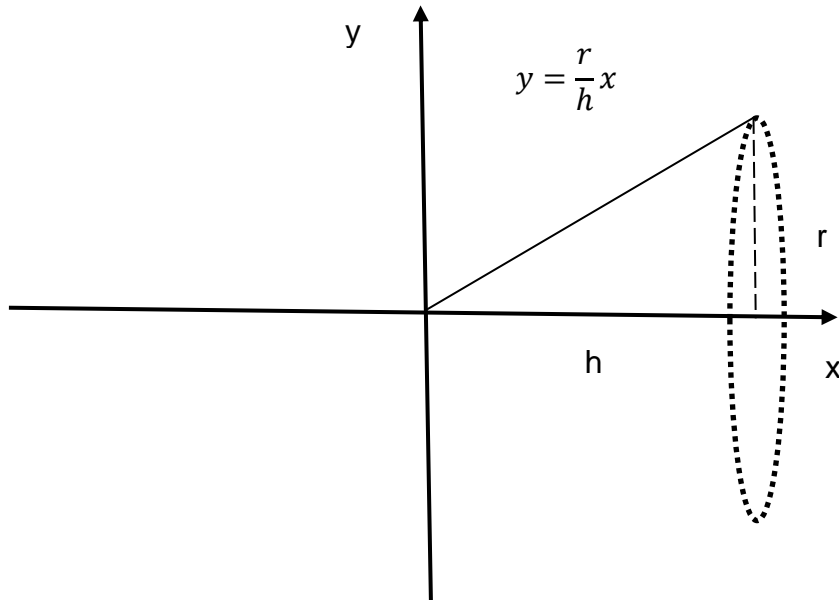
Suora $y = r$ pyörähtää x-akselin ympäri:

$$V = \pi \cdot \int_0^h r^2 dx$$

$$V = \pi r^2 \cdot \int_0^h x$$

$$V = \pi r^2 h$$

Aivan vastaavalla tavalla saadaan johdettua ympyräpohjaisen kartion kaava.



Suora $y = \frac{r}{h}x$ pyörähtää x-akselin ympäri

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx$$

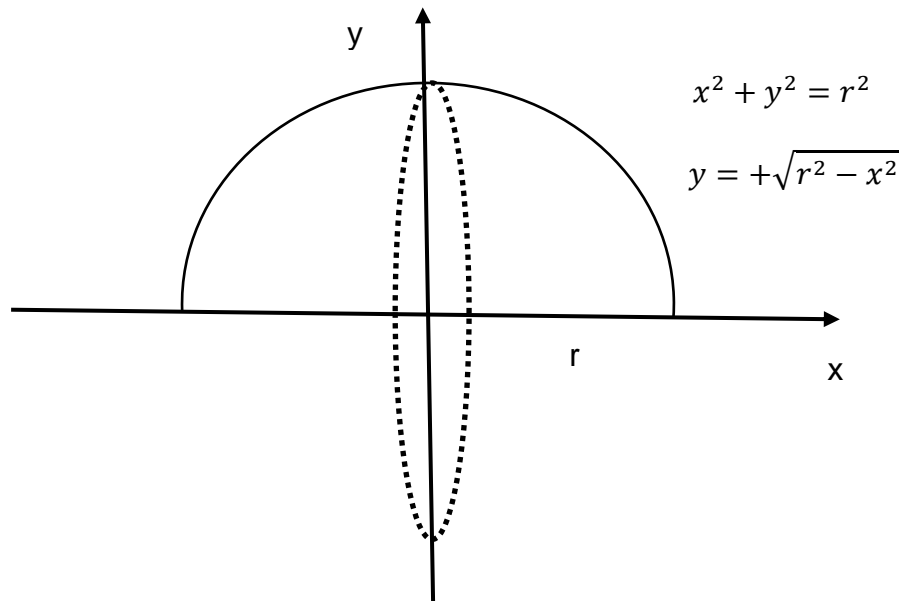
$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \int_0^h \frac{1}{3} x^3 dx$$

$$V = \frac{\pi r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Pallon kaavan johtaminen on vain hiukan monimutkaisempi.



Puoliympyrä $x^2 + y^2 = r^2$ pyörittää x-akselin ympäri.

$$V = \pi \cdot \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^r (r^2 - x^2) dx$$

$$V = 2\pi \cdot \int_0^r r^2 x - \frac{1}{3} x^3$$

$$V = 2\pi \cdot (r^3 - \frac{1}{3} r^3)$$

$$V = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

3 Uusi perusopetuksen opetussuunnitelma

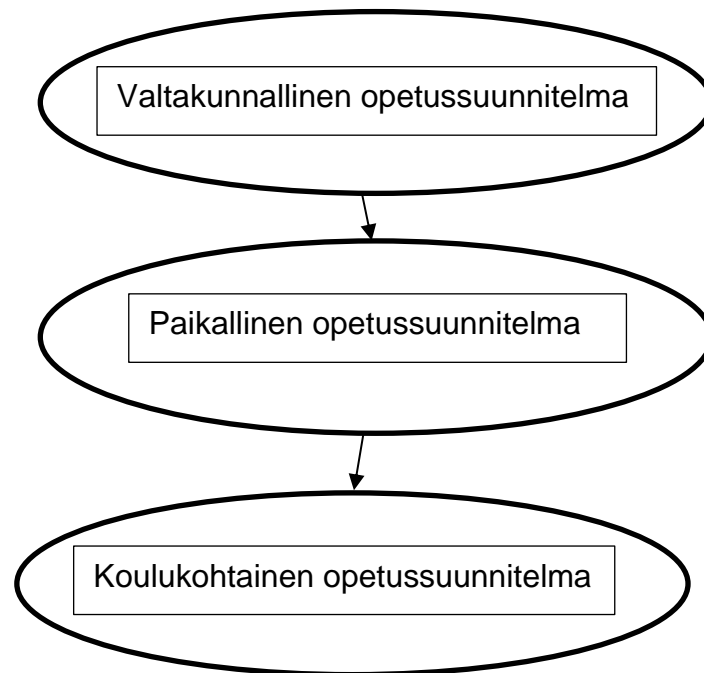
Opetussuunnitelmat ovat suomalaisen koulutuksen kulmakiviä. Opetussuunnitelma antaa suuntaviivat opettajille ja ohjaa heidän työtään. Opetussuunnitelman luomisesta vastaa Opetushallitus.

Opetussuunnitelman perusteissa sanotaan oppimateriaaleihin liittyen seuraavaa: ”Oppilaalla on oikeus saada maksutta opetus ja sen edellyttämät oppikirjat ja muu materiaali, työvälineet ja työaineet.” Voidaan siis olettaa, että jokainen oppilas on tasavertainen saadessaan käyttöön jonkin oppimateriaalin.

3.1 Opetussuunnitelma

Opetushallitus tekee valtakunnalliset opetussuunnitelmat perusopetukseen, luki-oon sekä aikuisopetukseen. Opetussuunnitelmat antavat pohjan opettajan työhön ja määrittävät opetuksen suunnat. Opetussuunnitelma on julkinen asiakirja, jonka pohjalta voidaan taata valtakunnallisesti tasapuolinen opetus kaikille ja varmistaa, että jokainen oppija suorittaa opetuksen määräämät tavoitteet.

Perusopetuksen opetussuunnitelma koostuu valtakunnallisista opetuksen perusteista moniaineisesti sekä luokka-asteille asetetut tavoitteet alkuopetukseen, 3-6 vuosiluokille sekä yläkouluun. Näiden kolmen luokka-astejaon sisälle on tehty oppiainekohtaiset tavoitteet ja sisällöt. Valtakunnallisen opetussuunnitelman pohjalta kunnat luovat kunnassa työskentelevien opettajien johdolla paikallisen opetussuunnitelman. Pienemmät kunnat voivat halutessaan luoda yhteistyössä muiden kuntien kanssa paikallisen opetussuunnitelman. Kunnansisäisen opetussuunnitelman pohjalta jokainen koulu tekee oman koulukohtaisen opetussuunnitelman, joka loppupeleissä määrää, mitä kyseisessä koulussa opiskellaan vuosiluokkatasolla eri oppiaineittain.



Kaavio 1. Opetussuunnitelma

3.1.1 Ainekohtaisen opetussuunnitelman tasoja

Valtakunnallinen perusopetuksen opetussuunnitelma on uudistunut tähän asti noin 10 vuoden sykleissä eli 1985, 1994, 2004 ja viimeisin opetussuunnitelma on vuodelta 2014. Vuoteen 1994 saakka oli käytössä maanlaajuinen kaikille yhteinen opetussuunnitelma, eli kaikkialla Suomessa noudatettiin samaa opetussuunnitelmaa ja tuntijakoa. Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa jokainen koulu sai itse päättää tiettyjen reunaehtojen vallitessa ainekohtaiset opetussuunnitelmat. Haastattelin erään vantaalaisen koulun opettajia, jotka kertoivat, että vuoden 1994 opetussuunnitelmaa valmisteltaessa valittiin pitkälti tulevina vuosina käytettävät opetusmateriaalit. Opetussuunnitelma ja oppikirja kulkivat siten lähes käsi kädessä.

Uusimmassa vuonna 2014 hyväksytyssä opetussuunnitelmassa samaisen vantaalaisen koulun opettajat kertoivat, että ainekohtaiset opetussuunnitelmat on napitettu kiinni kuntatasolla. Tämä kertoo siitä, että neljännesvuosisadan aikana on päästy valtava askel yhden oppikirjan käytöstä monimateriaaliseen suuntaan. Uusin opetussuunnitelma on otettu käyttöön vaiheittain vuodesta 2016 alkaen. Opetussuunnitelman päätavoite on taata jokaiselle oppilaalle sama opetus koulusta ja kunnasta riippumatta. Opettajan tulee siis toteuttaa opetuksessaan opetussuunnitelmaan merkittviä asioita.

Vuoden 2014 opetussuunnitelman eräs suurin muutos oli laaja-alaisen osaamisen tuominen osaksi opetussuunnitelmaa. Tämä tuo poikkitieteellisyyttä ja ymmärrystä eri oppiaineiden välillä eli oppiainerajojen ylittämistä. Esimerkiksi matematiikan osalta on opetussuunnitelmassa suositeltu, mihin osaan matematiikan opetuksessa sopii mikäkin laaja-alainen osaaminen.

L1 Ajattelu ja oppimaan oppiminen
L2 Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu
L3 Itsestä huolehtiminen ja arjen taidot
L4 Monilukutaito
L5 Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen
L6 Työelämätaidot ja yrittäjyys
L7 Osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävä tulevaisuuden rakentaminen

3.2 Matematiikka peruskoulussa

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa on kerrottuna jokaisen perusopetuksen oppiaineen yleiset tehtävät. Matematiikan osalta on painotettuna esimerkiksi loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Matematiikka mielletään eksaktiksi oppiaineeksi, mutta ajattelua ja toivottuun lopputulokseen pääsemisen ei tarvitse pitää sisällään tiettyä ajatusta. Matemaattinen ajattelu luo pohjaa ymmärtää matemaattisia käsitteitä ja antaa valmiuksia ratkaista ongelmia.

Opetussuunnitelmassa sanotaan, että konkretia sekä toiminallisuus ovat keskeinen osa matematiikan oppimista. Matematiikkaa sovelletaan arkielämässä huomaamatta ja yhteys koulu- ja arkimatematiikan välillä helpottaa matemaattisen ajattelun kehittymistä.

Tieto- ja viestintäteknologiaa suositellaan käytettäväksi osana opetusta ja erityisesti konkreettisenä havainnointityökaluna. Tässä kohtaa opetussuunnitelmaa ei ole tarkemmin kerrottu, miten ja millaista teknologiaa olisi hyvä käyttää. Tämä jättää opettajalle tulkinnan varaa tai myöhemmin opetussuunnitelmassa vastaantulevia tarkentavia kohtia.

Opetuksen tulisi oppiainekuvauksen mukaan tukea oppilaan myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja luoda oppijalle positiivista minäkuvaa samalla kehittäen sosiaalisia taitoja. Matemaattisten taitojen kehittyminen on pitkäjänteinen prosessi ja opetuksen tulee edetä loogisesti ja systemaattisesti, jotta aiemmin opittuja taitoja voidaan kehittää ja syventää.

Vuosiluokkien 7-9 aikana matematiikan opetuksen tulisi vahvistaa yleisivistystä ja syventää oppilaan matemaattisten käsitteiden välisiä yhteyksiä. Lisäksi opetuksen tulisi innostaa oppilaita kehittämään omaa toimintaa ja ohjautuvuutta ja ilmaisemaan omia ratkaisuja keskustelun kautta. (POPS 2014).

3.2.1 Avaruusgeometria perusopetuksen opetussuunnitelmassa

Valtakunnallisessa perusopetuksen opetussuunnitelmassa on kerrottuna tavoitteet ja sisällöt alakoulussa kahdelle ryhmälle: alkuopetukseen 1-2. luokille sekä 3-6. luokille. Avaruuskappaleet ovat esillä opetussuunnitelmassa alakoulun opetussuunnitelmassa heti alkuopetuksessa. Tällöin oppilaiden tulisi tutkia ja tunnistaa kappaleita ja pystyä luokittelemaan niitä eri ominaisuuksien mukaan. 3.-6. luokkien aikana syvennetään vuosi vuodelta aiemmin opittuja asioita pohjautuen alkuopetuksessa käytyihin asioihin.

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa on määritelty geometriaan tavoitteet ja sisällöt seuraavasti:

Alkuopetuksessa eli 1.-2. luokan opetussuunnitelmassa geometrian sisällöissä sanotaan seuraavaa avaruusgeometrian liittyen: ”Tutkitaan yhdessä kappaleita ja tasokuvioita. Tunnistamisen lisäksi rakennetaan ja piirretään. Ohjataan oppilaita löytämään ja nimeämään ominaisuuksia, joiden mukaan kappaleita ja tasokuvioita myös luokitellaan.”

Oppimisympäristöihin ja työtapoihin liittyen on mainittu, että alkuopetuksessa tulee hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa.

3.-6. luokalla syvennyttään alkuopetuksessa opittuihin avaruusgeometrian asioihin ja annetaan kolmiulotteisille kappaleille nimet ominaisuuksien mukaan. Tämän lisäksi opetellaan laskemaan ja arvioimaan kappaleiden tilavuuksia ja pintaaloja.

Tavoite 11 (jatkossa tavoite lyhennetään T) ohjata oppilasta **havainnoimaan ja kuvailemaan kappaleiden** ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia sekä tutustuttaa oppilas geometrisiin käsitteisiin.

Sisältö 4 (jatkossa sisältö lyhennetään S) geometria ja mittaaminen: **Rakennetaan, piirretään, tutkitaan ja luokitellaan kappaleita** ja kuvioita. **Luokitellaan kappaleet lieriöihin, kartioihin ja muihin kappaleisiin. Tutustutaan tarkemmin suorakulmaisen särmiöön, ympyrälieriöön, ympyräpohjaiseen kartioon ja pyramidiin.** Luokitellaan tasokuviot monikulmioihin ja muihin kuvioihin sekä tutkitaan niiden ominaisuuksia. Perehdytään tarkemmin kolmioihin, nelikulmioihin ja ympyrään. Perehdytään pisteen, janan, suoran ja kulman käsitteisiin. Harjoitellaan kulmien piirtämistä, mittaamista ja luokittelamista.

Tarkastellaan symmetriaa suoran suhteen. Ohjataan oppilaita havaitsemaan myös kierto- ja siirtosymmetrioita ympäristössä esimerkiksi osana taidetta.

Käsitellään koordinaatistosta ensin ensimmäinen neljännes ja laajennetaan siten kaikkiin neljänneksiin.

Tutustutaan mittakaavan käsitteeseen ja käytetään sitä suurennoksissa ja pienennöksissä. Ohjataan oppilaita hyödyntämään mittakaavaa kartan käytössä.

Harjoitellaan mittaamista ja kiinnitetään huomiota mittaustarkkuuteen, mittaus-tuloksen arviointiin ja mittauksen tarkistamiseen. **Mitataan ja lasketaan** eri-muotoisten kuvioiden piirejä ja pinta-aloja sekä **suorakulmaisten särmiöiden tilavuuksia**. Ohjataan oppilaita ymmärtämään, miten mittayksikköjärjestelmä rakentuu. Harjoitellaan yksikönmuunnoksia yleisemmin käytetyillä mittayksi-köillä.

Taulukko 1. Matematiikan opetuksen tavoitteet ja sisällöt vuosiluokille 3-6 (POPS 2014)

Nivelvaiheessa alakoulusta yläkouluun on määritelty hyvän osaamisen piirteet. Oppilaan osaamistaso on hyvä, jos hänen osaaminen toteuttaa taulukon 2 mu-kaiset vaatimukset.

T11 ohjata oppilasta ha-vainnoimaan ja kuvaile-maan kappaleiden ja kuvi-oiden geometrisia ominai-suuksia sekä tutustuttaa oppilas geometrisiin käsit-teisiin	Arvioitava kohde: geo-metrian käsitteet ja geo-metristen ominaisuuksien havainnointi	Hyvä osaaminen: Op-pilas osaa luokitella ja tunnistaa kappaleita ja kuvioita. Oppi-las osaa käyttää mit-takaavaa sekä tunnis-taa suoran ja pisteen suhteen symmetrisiä kuvioita
T12 ohjaa oppilasta arvioi-maan mittauskohteen suu-ruutta ja valitsemaan mit-taamiseen sopivan väli-neen ja mittayksikön sekä pohtimaan mittatuloksen järkevyyttä	Arvioitava kohde: mittaa-minen	Hyvä osaaminen: Op-pilas osaa valita sopi-van mittavälineen, mi-tata ja arvioida mit-taustuloksen järke-vyyttä. Oppilas osaa laskea pinta-aloja ja tilavuuksia . Hän hal-

		litsee yleisimmät mit- tayksikkömuunnok- set.
--	--	---

Taulukko 2. Hyvän osaamisen piirteet 6. luokan jälkeen (POPS 2014)

Yläkoulu:

Laaja-alainen osaaminen vuosiluokilla 7-9

L5 Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen

”Heille muodostuu käsitys siitä, miten tieto- ja viestintäteknologiaa voi hyödyntää eri oppiaineiden opiskelussa, myöhemmissä opinnoissa ja työelämässä sekä yhteiskunnallisessa toiminnassa ja vaikuttamisessa.”

”Käytännön taidot ja oma tuottaminen: Oppilaita kannustetaan oma-aloitteiseen tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämiseen erilaisissa oppimistehtävissä sekä eri tehtäviin sopivien työtapojen ja välineiden valintaan. Heidän käsityksensä eri laitteiden, ohjelmistojen ja palvelujen käyttö- ja toimintalogiikasta syvenee. He harjaantuvat systematisoimaan, organisoimaan ja jakamaan tiedostoja sekä valmistamaan erilaisia digitaalisia tuotoksia itsenäisesti ja yhdessä. Ohjelmointia harjoitellaan osana eri oppiaineiden opintoja.”

Opetussuunnitelmassa esitetään jokaisen oppiaineen kohdalla oppiaineen tehtävät. Matematiikan tehtävissä on muun muassa mainittu seuraavasti ”Oppimista tuetaan hyödyntämällä tieto- ja viestintäteknologiaa.”

Oppilaan oppimisen arviointi matematiikassa vuosiluokilla 7-9

”Arvioinnissa otetaan huomioon myös taito hyödyntää välineitä mukaan lukien tieto- ja viestintäteknologiaa.” – Tämä voi konkreettisesti toteutua lähinnä niiltä oppilailta, jotka ovat poikkeuksellisen kiinnostuneita matematiikasta tai kirjattomassa koulussa. Toisaalta kirjattomia kouluja tuskin on niin paljon ja vaikka kirjat ovat sähköisenä, tehtävät tehdään kynällä ja paperilla. Ratkaisujen formulointi voi viedä paljon aikaa vielä kehittymättömien ohjelmien takia.

7-9 luokilla tavoitteet ja sisällöt:

T9 opastaa oppilasta soveltamaan tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa sekä ongelman ratkaisemisessa (S1-6)

T16 tukea oppilasta ymmärtämään geometrian käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä

T17 ohjata oppilasta ymmärtämään ja hyödyntämään suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksia
T18 kannustaa oppilasta kehittämään taitoaan laskea pinta-aloja ja tilavuuksia
<p>S5 Geometria: laajennetaan pisteen, janan, suoran ja kulman käsitteiden ymmärtämistä ja perehdytään viivan ja puolisuoran käsitteisiin. Tutkitaan suoriin, kulmiin ja monikulmioihin liittyviä ominaisuuksia. Vahvistetaan yhdenmuotoisuuden ja yhtenevyyden käsitteiden ymmärtämistä. Harjoitellaan geometrista konstruointia. Opitaan Pythagoraan lauseen käänteislausetta ja trigonometrisia funktioita. Opitaan kehä- ja keskuskulma sekä tutustutaan Thaleen lauseeseen.</p> <p>Lasketaan monikulmioiden piirejä ja pinta-aloja.</p> <p>Harjoitellaan laskemaan ympyrän pinta-ala, kehän ja kaaren pituus sekä sektorin pinta-ala.</p> <p>Tutkitaan kolmiulotteisia kappaleita. Opitaan laskemaan pallon, lieriön ja kartion pinta-aloja ja tilavuuksia.</p> <p>Varmennetaan ja laajennetaan mittayksiköiden ja yksikkömuunnosten hallintaa.</p>

Hyvän osaamisen piirteet 9. luokan jälkeen:

T9 opastaa oppilasta soveltamaan tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa sekä ongelmien ratkaisemisessa	Arvioita kohde: tieto- ja viestintäteknologian käyttö	Hyvä osaaminen: oppilas osaa soveltaa tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa
T16 tukea oppilasta ymmärtämään geometrian käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä	Arvioitava kohde: geometrian käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien hahmottaminen	Hyvä osaaminen: Oppilas osaa nimetä ja kuvailla suoriin, kulmiin ja monikulmioihin liittyviä

		ominaisuuksia sekä niiden välisiä yhteyksiä.
T18 kannustaa oppilasta kehittämään taitoaan laskea pinta-aloja ja tilavuuksia	Arvioitava kohde: pinta-alojen ja tilavuuksien laskutaito	Hyvä osaaminen: Oppilas osaa laskea tasokuvioden pinta-aloja ja kappaleiden tilavuuksia. Oppilas osaa pinta-ala- ja tilavuusyksiköiden muunnoksia.

3.2.2 Tieto- ja viestintäteknologia ja työtavat opetussuunnitelmassa

Valtakunnallisessa opetussuunnitelmassa on painotettu matematiikassa tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämistä osana opetusta. Tieto- ja viestintäteknologian käyttö on suositeltavaa jo peruskoulussa, koska lukio-opinnot ovat kokeneet valtavia muutoksia viimeisen kymmenen vuoden aikana ja ylioppilaskirjoitusten sähköistymisen myötä. Esimerkiksi Janne Rantanen tutki pro gradussaan teknologian yhdenvertaisuutta lukiossa. Tutkimuksessa opettajat pohtivat yhdenvertaisuutta ja he arvelivat, että suurin ero lienee taloudellinen tilanne laitteiden hankinnassa. Matematiikan ylioppilaskoe on tehty kevästä 2019 asti sähköisenä kokeena.

Työtavoissa on pyritty tuomaan esille oppilaita itseään kiinnostavia aiheita, ilmiöitä ja ongelmia mielenkiinnon saamiseksi aiheisiin. Konkreettiset ja arkiset ilmiöt auttavat oppilaita linkittämään aiheita omaan elämään ja tuo siten erityistä innostusta heille. Teknologiaa koskevista työtavoista voi opetussuunnitelman mukaan hyödyntää esimerkiksi taulukkolaskennassa, geometrian piirtotyökaluilla, arvioinnin ja yleisen matemaattisen luovuuden apuvälineenä.

3.2.3 3.-6. luokan opetussuunnitelman sisällöt

Alkuopetuksen jälkeen lähdetään syventämään ensimmäisten luokkien aikana opittuja asioita.

Kahden alkuopetusvuoden jälkeen alakoulu jatkuu vielä neljä vuotta. Alkuopetuksessa opetellaan tunnistamaan ja tutkimaan kuvioita ja kappaleita ja 3.-6. luokkien aikana tullaan luokittelun lisäksi nimeämään muotoja ja kappaleita lieriöiksi, kartioiksi ja muiksi kappaleiksi.

Esimerkki kuinka tietoa tulee lisää:

1.-2. luokka	tutkitaan ja tunnistetaan kappaleita	tutkitaan ja nimetään ominaisuuksia, joilla luokitellaan niitä
3.-6. luokka	luokitellaan kappaleet: <ul style="list-style-type: none"> - lieriöt - kartiot - suorakulmaiset särmiöt - ympyräpohjainen lieriö - ympyräpohjainen kartio - pyramidi 	rakennetaan, piirretään ja tutkitaan kappaleita

Taulukosta huomataan, että alkuopetuksessa on opetus tutkimista ja tutustumista ja 3.-6. luokilla siirrytään konkretiaan, josta esimerkkinä on kappaleille annetut nimet ja niiden piirtäminen tai rakentaminen.

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa on määriteltynä hyvän osaamisen tavoitteet 6. luokan jälkeen sekä yläkoulun päättöarvosanan yhteyteen / 9. luokan jälkeen. Alakoulun jälkeen tavoitteen 11 mukaan *oppilasta tulisi ohjata havainnoimaan ja kuvailemaan kappaleiden ja kuvioiden geometrisia ominaisuuksia sekä tutustuttaa oppilas geometrisiin käsitteisiin*. Arvioinnin kohteena on tällöin geometrian käsitteet sekä geometrinen ominaisuuksien havainnointi.

Hyvän osaamisen täyttää, kun oppilas osaa luokitella ja tunnistaa kappaleita ja kuvioita, käyttää mittakaavaa sekä tunnistaa suoran ja pisteen suhteen symmetriaan.

9. luokan lopussa ja peruskoulun päättyessä hyvän osaamisen eli arvosanan 8 saa geometrian osalta (vaikka sitä ei pelkästään geometrian pohjalta anneta), kun täyttää opetussuunnitelman tavoitteet 16-18. Arvioinnin kohteena yläkoulussa geometrian osalta on geometrian käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien hahmottaminen (T16), suorakulmaisen kolmion ja ympyrän ominaisuuksien hahmottaminen (T17) sekä pinta-alojen ja tilavuuksien laskutaito (T18).

Arvosanan 8 saa geometrian osalta, kun oppilas osaa nimetä ja kuvailla suoriin, kulmiin ja monikulmioihin liittyvien ominaisuuksien yhteyksiä (T16). Oppilas osaa käyttää Pythagoraan lausetta ja trigonometrisia funktioita sekä ymmärtää kehäkulman ja keskuskulman käsitteet (T17). Oppilas osaa laskea tasokuvioiden pinta-aloja ja kappaleiden tilavuuksia ja osaa tehdä pinta-ala- ja tilavuuskappaleiden muunnoksia (T18).

4 Kirjasarjat

Uuden perusopetuksen opetussuunnitelman ja sen sisältö muutosten myötä kirjasarjat muovautuivat uusien systeemien mukaisiksi. Tutkin kirjasarjojen geometria osuuksia siitä näkökulmasta, että mitä asioita tulee missäkin kohdassa ja mitä pohjatietoja saadaan alakoulusta yläkoulun puolelle. Vuonna 2016 käyttöön otettu opetussuunnitelma on 2020 käytössä ensi kertaa kaikilla yhtenäisen peruskoulun luokilla.

4.1 Alakoulun kirjasarjoja ja pohjatiedot avaruusgeometriaan

Uuden opetussuunnitelman mukaisia kirjasarjoja tulee yhä enemmän tarjolle. Sanoma Pro Oy on tehnyt kesään 2019 mennessä kaksi alakoulun kirjasarjaa Kymppi ja Milli. Kymppi on aiemman opetussuunnitelman aikana luotu kirjasarja, mutta nyt sitä on vaiheittain muokattu uuden opetussuunnitelman mukaiseksi. Milli on luotu kokonaisuudessaan viimeisimmän opetussuunnitelman aikana. Molemmissa kirjasarjoissa geometria on jaettu kahteen osaan: geometria ja mittaus. Lisäksi Otavan kustantama Tuhattaituri-sarjasta löytyi uusimman opetussuunnitelman mukaisia kirjoja. Tuhattaituria on julkaistu jo aikaisemman opetussuunnitelman aikana. Kaikissa näissä sarjoissa on kaksi kappaletta kirjoja lukuvuotta kohden. Kirjat on nimetty syksyn ja kevään mukaan eli ajatuksena on käydä yksi kirja yhtä lukukautta kohden. Seuraavaksi kerrotaan havaintoja oppikirjoista vuosiluokka kerrallaan.

Ykkösluokka:

Sanoma Pron Milli 1B-kirjassa geometriassa hahmotetaan erilaisia kappaleita ja kehitetään avaruudellista hahmottamista, esimerkiksi värillisistä palikoista on rakennettu rakennelma ja tehtävänä on hahmottaa, miltä rakennelma näyttää eri suunnista. Lisäksi ykkösluokalla tunnistetaan erilaisia kappaleita muotojen ja ominaisuuksien perusteella.

Kakkosluokka:

Tuhattaiturin 2a -kirjassa harjoitellaan tunnistamaan muotoja ja niiden perusteella millaisia kappaleita on. Tavoitteena olisi siis tunnistaa, millaisista kuvioista kappale muodostuu. Hahmottamisen ja tunnistamisen lisäksi harjoitellaan myös kuvioiden ja kappaleiden piirtämistä.

Avaruusgeometria tulee Kympeissä ensimmäisen kerran Kymppi 2 syksy -kirjassa. Tässä oppikirjassa avaruuskappaleita tutkitaan ja lähestytään eri suunnista eli kappaletta katsotaan alhaalta, ylhäältä ja sivuista. Tämän lisäksi kappaleita aletaan nimeämään ja opetellaan hahmottamaan kappaleiden ominaisuuksia ja osia. Alkeisavaruusgeometria loppuu siihen, että esitetään selkeästi, millainen yhteys on tasokuvioilla ja kolmiulotteisilla kappaleilla.

Kolmas luokka:

Kirjassa Kymppi 3 syksyssä jatketaan kappaleiden tunnistamista niiden ominaisuuksien perusteella ja sen perusteella opitaan myös luokittelemaan niitä. Kirjassa harjoitellaan myös tasokuvioiden ja kappaleiden välisiä yhteyksiä ja lujitetaan siten vanhoja tietoja. Kympeissä harjoitellaan piirtämistä ja ominaisuuksien mittaamista ja laskemista.

Kolmannen luokan syksyyn suunnattu kirja Milli 3A:ssa tulee tasokuvioiden lisäksi kappaleita. Kuvioiden nimeämisten jälkeen kuvioiden termejä yhdistetään avaruuskappaleisiin ja opetellaan lieriöiden, kartioiden, pallojen ja muiden kappaleiden ominaisuuksia ja hahmottamista eri suunnista kehitetään edelleen. Kirjassa tuodaan esiin termit kärki, särmä ja tahko.

Neljäs luokka:

Neljännän luokan kirjoista Kymppi 4 syksy tai kevät kirjoissa ei ollut suoranaisesti avaruusgeometriaa. Kevään kirjassa kuitenkin tutustutaan mittaamista käsittelevässä alueessa mittayksikköihin, joihin lukeutuu litra, desilitra, senttilitra ja millilitra.

Viides luokka:

Kymppi 5 syksy -kirjassa on geometrian osuus, joka koostuu analyyttisestä ja tasogeometriasta. Näissä kappaleissa ei ole avaruuskappaleita

Kuudes luokka:

Tuhattaiturin kuudennen luokan ensimmäisessä kirjassa vahvistetaan edelleen tietoja jo aiemmin opituista kappaleista. Vahvistetaan ominaisuuksien tietämystä eli esimerkiksi huippu ja pohja. Tässä kohtaa tarkat määritelmät ja erot kappaleiden välillä tulisi olla hallussa. Täysin uusina asioina tulee suorakulmaisen särmiön pinta-alan ja tilavuuden laskeminen ja niiden tunnuksat A ja V tulevat vastaan laskuissa.

Kymppi 6 kevät- kirjassa on alue nimeltään ”Tutkitaan kappaleita ja tilavuuksia”. Tämä aihealue sisältää kappaleiden pinta-alojen laskemisesta. Pinta-aloja lasketaan alue kerrallaan ja lopussa lasketaan pinta-alat yhteen. Särmiön tilavuus lasketaan myös kuudennella luokalla. Pinta-alojen tai tilavuuksien osalta ei käytetä kaavamuotoa eli esimerkiksi $V = abc$ vaan tilavuuden selitys on ”*pituus x leveys x korkeus*”. Mittayksiköistä huomataan yhteys kuutiodesimetrim ja litran välillä. Kavaljeeriperspektiivistä piirtämistä harjoitellaan ja opetellaan piirtämään niin säännöllisiä kuin yhdistettyjä kappaleita.

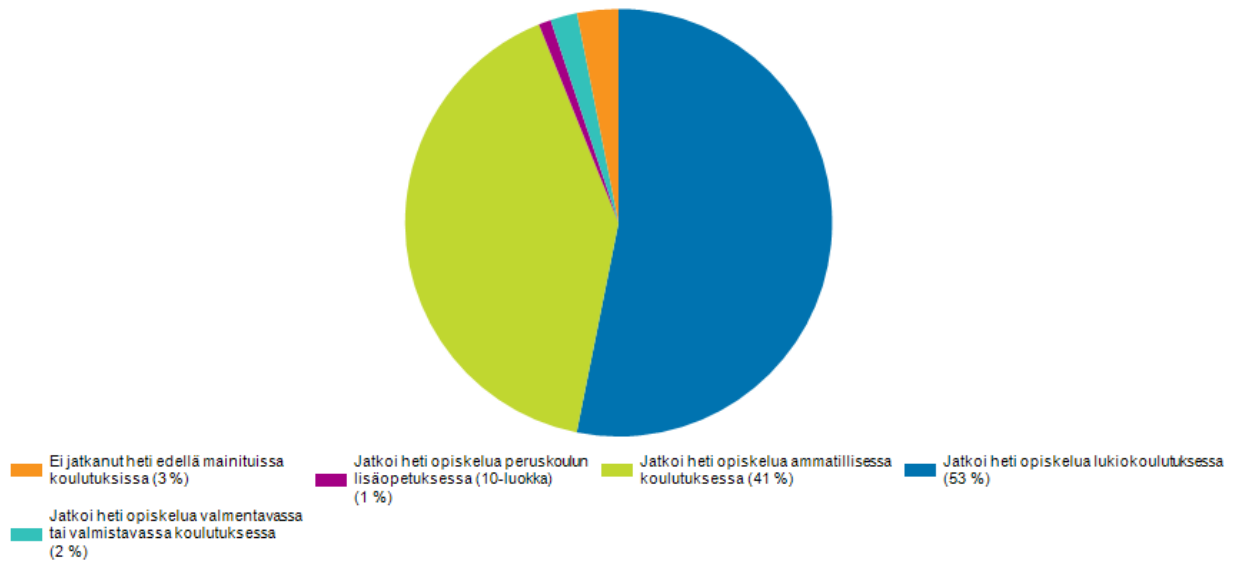
Avaruusgeometrian osuudet kirjoissa ovat kappaleisiin liittyvää luokittelua, hahmottamista ja ominaisuuksia. Yläkouluun mennessä kolmiulotteista hahmottamista on ollut paljon, joten alakoulusta tulee monipuoliset pohjat ja tiedot, joiden päälle on helppoa lähteä lisäämään tietoa ja syventämään aiemmin opittuja asioita.

4.2 Yläkoulun kirjasarjoja geometriaan

Uuden opetussuunnitelman mukaisia kirjasarjoja tulee yhä enemmän tarjolle. Sonoma Pro Oy on tehnyt kesään 2019 mennessä yläkoulun kirjasarjaa Kuutio.

Kuutio on jo aiemman opetussuunnitelman aikana tehty kirjasarja, mutta nyt sitä vuosi vuodelta kehitetty ja muokattu uuden opetussuunnitelman mukaiseksi. Editan kustantama Säde-sarja on kokonaan uuden opetussuunnitelman pohjalta.

Peruskoulun 9. luokan päättäneiden välitön sijoittuminen jatko-opintoihin 2000-2018 muuttujina Jatko-opinnot. KOKO MAA, Peruskoulun 9. luokan päättäneet yhteensä, 2018.



Lähde: Koulutukseen hakeutuminen, Tilastokeskus

Kaavio 2. Peruskoulun 9. luokkalaisten toisen asteen opintoihin siirtyminen

4.2.1 Kuutio

Kuutio-sarja muodostuu yhteensä viidestä kirjasta. Kiroista kolme on nimetty vuosiluokan mukaan eli Kuutio 7, Kuutio 8 ja Kuutio 9 ja näiden lisäksi kaksi kirjaa Kuutio X ja Kuutio Y. Sanoma Pro kertoo internet-sivuillaan, että kirjojen suositusjärjestys on Kuutio 7, Kuutio X, Kuutio 8, Kuutio Y ja Kuutio 9 riippuen kunnan tai koulun vuosiviikkotuntijaosta. Kuutio on ollut olemassa jo aiemman opetussuunnitelman aikana.

Avaruusgeometria löytyy viimeisestä eli Kuutio 9 -kirjasta. Aihe alkaa yksikkömuunnoksilla ja kolmiulotteisella piirtämisellä. Piirtämiseen liittyviä tehtäviä

on yhteensä kahdeksan, joista kuudessa tehtävässä harjoitellaan kavaljeeriperspektiiviopiirtämistä ja kahdessa tunnistetaan ja hahmotetaan avaruuskappaleita. Tämän oppikirjan osalta avaruusgeometria jatkuu siten, että käydään yhden avaruuskappaleiden tilavuus ja pinta-ala aina yhdessä kappaleessa seuraavassa järjestyksessä: särmiö, lieriö, kartio, pyramidi ja pallo.

Särmiön ja lieriön osalta apukuvina tehtävissä on esimerkiksi pillimehupurkki, hiekkalaatikko, tulitikkurasia, Aalto-maljakkokuppi ja euronkolikko. Näihin piirroksiin on lisätty tehtävänannossa kerrotut ominaisuudet eli tilavuus, pituus, leveys ja korkeus. Kaikissa tehtävissä ei ole apukuvaa ja esimerkkit tehtävissä kuva on hahmoteltuna ilman mainintaa sen tarpeellisuudesta.

Pyramidi kappaleessa lasketaan erilaisten pyramidien ominaisuuksia. Pääosin apukuvat ovat säännöllisiä pyramideja ja vain yhden tehtävän kuvassa pyramidina on grillikatoksen katto. Pallon ominaisuuksia laskettaessa on hyödynnetty edellisistä kappaleista tuttuja avaruuskappaleita. Esimerkiksi yhdessä tehtävässä jäätelöpallo sulaa ympyräpohjaisen kartion sisään ja tehtävässä lasketaan, mahtuuko koko jäätelöpallo sulamaan tötterön sisään. Tämän lisäksi oppilaat laskevat eri pallojen tilavuuksia ja pinta-aloja.

4.2.2 Säde

Säde on Editan kustantama kirjasarja, joka tuli uuden perusopetuksen opetussuunnitelman myötä käyttöön. Sarja koostuu yhteensä neljästä kirjasta, joita voi sovittaa koulun ja kunnan tuntijaon mukaan sopivaksi. Kirjat on suunniteltu käytäväksi läpi numerojärjestyksessä. Avaruusgeometria asettuu viimeiseen kirjaan eli Säde 4. Avaruusgeometrian alueeseen kuuluu yksikkömuunnoksia, erilaisten kuvioiden piirien ja pinta-alojen laskemista ja kappaleiden tilavuuksien laskemista.

Säde 4-kirjan lukijalle suunnatulla sivulla lukee seuraavasti: ”Opintojen edetessä luvuilla laskeminen jää pienempään osaan ja yksinkertaisia toistettavia vaiheita voi tehdä myös tietotekniikan avulla. Kokeile rohkeasti, mitä tietoteknisiä

apuvälineitä tehtävien ratkaisemiseen voi käyttää. Muista kuitenkin, että tietotekniikka on vain apuväline, sinun tehtäväsi on osata muotoilla riippuvuussuhteet ja päättelyketjut tietotekniikan ymmärtämään muotoon.”

Tästä voi päätellä, että oppilaiden oletetaan tietävän, millaisia ohjelmia on olemassa ja lisäksi heillä olisi vähän tietoa, kuinka ohjelma toimii. Tämä vaatii erityistä harrastuneisuutta ja oma-aloitteisuutta oppilaalta tai opettajalta halua perehdyttää oppilaat käyttämään tietotekniikkaa osana opetusta. Ongelmaksi voi tulla myös se, jos koululla ei ole ajanmukaisia tieto- ja viestintäteknologisia välineitä käytössä.

Säde 4 -kirjan avaruusgeometria osuus on jaettu kahteen osaan. Ensimmäinen osion alkuun on yksikkömuunnoksia, piirejä ja pinta-aloja. Nämä toimivat tuttujen asioiden kertauksena. Tämän jälkeen uusina asioina tulee lieriön, kartion ja näistä yhdistettyjen kappaleiden tilavuuksien laskemista. Näissä kirjan kappaleissa on reilusti mallikuvioita esimerkiksi ympyräpohjaisesta säilytysrasiasta, Khefrenin pyramidista sekä kavaljeeriperspektiivistä piirretyistä kappaleista tai tasokuvioista. Näiden lukujen tehtävissä on lähes poikkeuksetta kirjassa valmis malli siitä, millainen esine tai kappale on kyseessä. Kappaleiden esimerkeissä tai tehtävissä ei ole missään kohdassa mainintaa, että olisi suositeltavaa piirtää havainnekuvaa tilanteesta. Kaikissa esimerkkitehtävissä mallikuvat eivät ole valmiina, mutta ne ovat kirjassa osana ratkaisua ilman mainintaa, että suuntaa antava kuva helpottaa tehtävän ratkaisemista. Sanallisten tehtävien osalta tehtävänannon pituus riippuu siitä, onko tehtävään annettu valmis mallikuva. Jos mallikuva on osana sanallista tehtävänantoa, on tehtävänanto pitkä. Sama toisin päin, jos sanallisessa tehtävässä ei ole mallikuvaa, tehtävänanto on lyhyt.

Tilavuuksien jälkeen tulee luku, joka keskittyy kappaleiden piirtämiseen ja tutkimiseen. Tässä luvussa on esimerkkitehtäviä kolme lukua. Ensimmäisessä esimerkissä lasketaan apukuvassa olevan rasian tilavuus ja pinta-ala sekä rasian tasolevitys. Tasolevitys on piirros kappaleen vaipasta piirrettynä tasoon. Toisessa esimerkissä näytetään, kuinka piirretään ympyräpohjaisen lieriön tasolevi-

tys. Kolmannessa esimerkissä piirretään kuution ja pyramidin tasolevitykset. Molemmissa kolmiulotteisista kappaleista on annettu tarkat mitat, jotka on nähtävä ratkaisussa. Kirjan ratkaisu etenee vaihevaiheelta ja tarkasti selittäen.

Tässä kappaleessa tehtäviä on yhteensä 20.

Tasolevitys / piirrä tasolevitys	6
Kavaljeeriperspektiivissä piirrettävä kuva	3
Laske (tehtävänanto ilman apukuvaa, kuvaa ei tarvitse piirtää)	6
Laske (tehtävänanto apukuvalla)	5
Suunnan hahmottaminen	2

Taulukko 3, Säde 4, 8. Kappaleiden piirtämistä ja tutkimista

Taulukosta 3 huomataan, että tässä luvussa piirtäminen on pienessä osassa, vaikka luvun otsikko antaa viitteitä siihen, että tämän kappaleen tehtävissä harjoitellaan esimerkiksi kavaljeeriperspektiivissä piirtämistä.

Pinta-aloja käsitellään seuraavissa luvuissa lieriöiden ja kartioiden osalta. Näistä avaruuskappaleista on mallikuvioina jälleen arkielämän esineitä, kuten Toblerone-rasia, lelulaatikko ja telttä. Kavaljeeriperspektiivissä piirrettyjä mallikuvia on paljon ja niihin on liitettyä myös tehtävässä tarvittavat mitat.

Säde 4 -kirjassa pallon tilavuus ja pinta-ala tulevat osalta lieriöiden ja kartioiden jälkeen. Pallon tilavuus ja pinta-ala ovat samassa kappaleessa. Pallosta on käytetty apukuvissa muun muassa biljardipalloa, kattolamppua ja kääpiöplaneettaa. Tehtävissä on myös kavaljeeriperspektiivissä piirrettyjä palloja ja niissä ja muissa apukuvissa on tehtävänannossa annetut mitat valmiina.

Tässä oppikirjassa on avaruusgeometrian osalta visuaalisia kuvia. Havainnollistavissa kuvissa on aina tehtävässä annetut mitat liitettyä kuvioon. Nämä antavat tehtäväntekijälle valtavan avun ja pohdintaa ja omaa hahmotuskykyä ei tarvita kovin paljoa. Kirjassa ei ole mainintaa, että tehtäviä voi myös hahmotella tai luoda sähköisillä välineillä.

5 Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämä tutkielma on luonteeltaan sisältöanalyysi, jonka aineistona toimivat oppikirjat sekä perusopetuksen opetussuunnitelma. Tarkoituksena oli selvittää, miten oppikirjasarjat tuovat havainnointia ja visualisoimista esille oppikirjoissa. Opetussuunnitelmassa painotettiin useasti tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämistä monipuolisesti eri aihepiirien osalta.

Opetussuunnitelmassa puhutaan erilaisista geometrian konstruoinneista ja kirjoista Säde-kirjassa on avaruusgeometrian osalta yksi luku liittyen konstruointiin. Tässä vaiheessa Sädettä ei ole edetty pitkälle avaruusgeometriaa, joten konstruointi jää vähäiseksi. Muissakaan kirjan luvuissa ei ole suositusta tehtävien osalta, että pitäisi piirtää tai luoda kuvaa.

6 Tutkimuksen toteutus

Tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa perusopetuksen opetussuunnitelman pohjalta, miten peruskoulun matematiikan oppikirjoissa avaruusgeometriaa on havainnollistettu ja erityisesti tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäen.

Opetussuunnitelmasta poimittiin kohdat, jotka ovat osa avaruusgeometriaa, tieto- ja viestintäteknologiaa tai muita havainnollistamiskeinoja.

Oppikirjoista pyrittiin etsimään avaruusgeometriaan liittyviä kohtia ja tutustuttiin, miten on pyydetty havainnoimaan tai visualisoimaan kappaleita tai kuvioita. Hyviä opetuskäyttöön soveltuvia appletteja on internetissä paljon ilmaiseksi saatavilla ja niitä esitellään seuraavaksi.

6.1 Valmiit avaruusgeometrian appletit

Erilaisia tieto- ja viestintäteknologiaa hyödyntäviä sovelluksia on käytössä yhä enemmän. Tyypillisimpiä ohjelmia on muun muassa GeoGebra ja Texas Inspire, jotka ovat molemmat myös matematiikan ylioppilaskokeessa käytössä olevia työkaluja. GeoGebraa voi hyödyntää matematiikan tuottamiseen monilla erilaisilla tavoilla algebrasta tilastoihin ja geometriaan (POPS 2014). Tyypillisimmin GeoGebra tunnetaan geometrian havainnollistamisesta.

Ilmaisia, sähköisiä piirtotyökaluja on olemassa useita. Suomessa tyypillisesti käytetään muun muassa GeoGebraa, Casio Classpadia, KCalcia ja Texas Instruments TI-Nspire CASia, jotka ovat myös ylioppilaskokeessa käytettäviä sähköisiä työkaluja. Esimerkiksi GeoGebraan voi ihmiset jakaa omia teoksiaan erilaista matematiikan osa-alueilta ja erityisesti geometrian osalta GeoGebra on täynnä käyttökelpoisia ja havainnollistavia appletteja.

Avaruusgeometrian osalta appleteilla voi havainnoida kappaleita, niiden tilavuuksia, pinta-aloja tai melkein mitä vain. Seuraavaksi esitellään kaksi opetukseen soveltuvaa applettia GeoGebrasta, joita voi helposti hyödyntää opetuksessa.

6.1.1 Appletti 1. Sulava kartio

Tässä Aleksi Hermosen luomassa appletissa havainnoidaan ympyräpohjaisen lieriön ja kartion tilavuuksien suhdetta. Lieriöllä ja kartiolla on sama pohjan säde ja korkeus.

Ympyräpohjaisen lieriön tilavuuden kaava on

$$V_{\text{lieriö}} = \pi r^2 h.$$

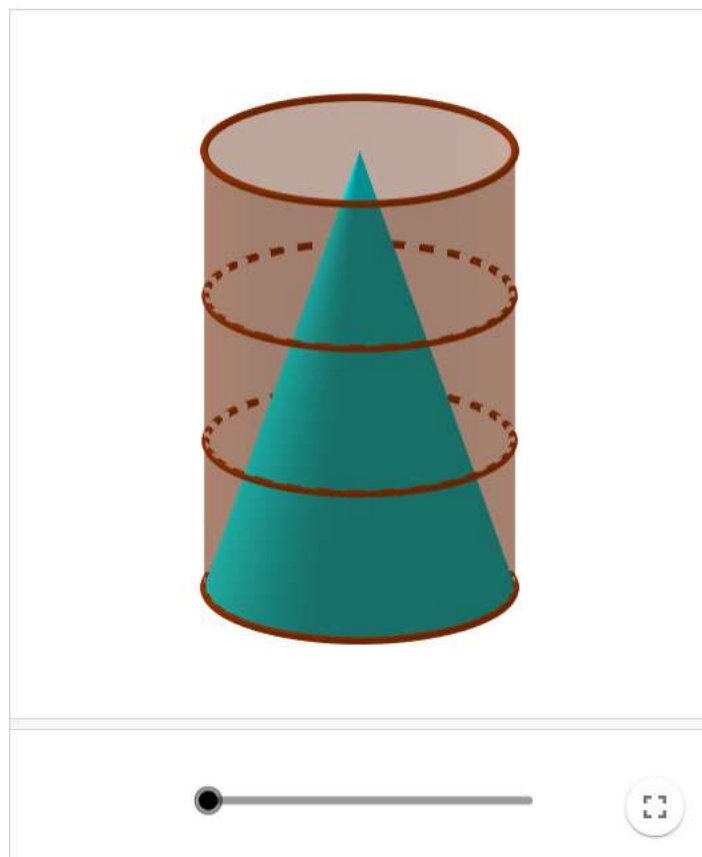
Ympyräpohjaisen kartion tilavuuden kaava on

$$V_{\text{kartio}} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Alkutilanteessa kartio on asetettuna lieriön sisälle. Lieriö on jaettu kolmeen osaan katkoviivoin. Kartion sulattaminen tapahtuu vetämällä alhaalla näkyvän janan mustaa pistettä oikealle.

Sulava kartio

Tekijä: [Aleksi Hermonen](#)

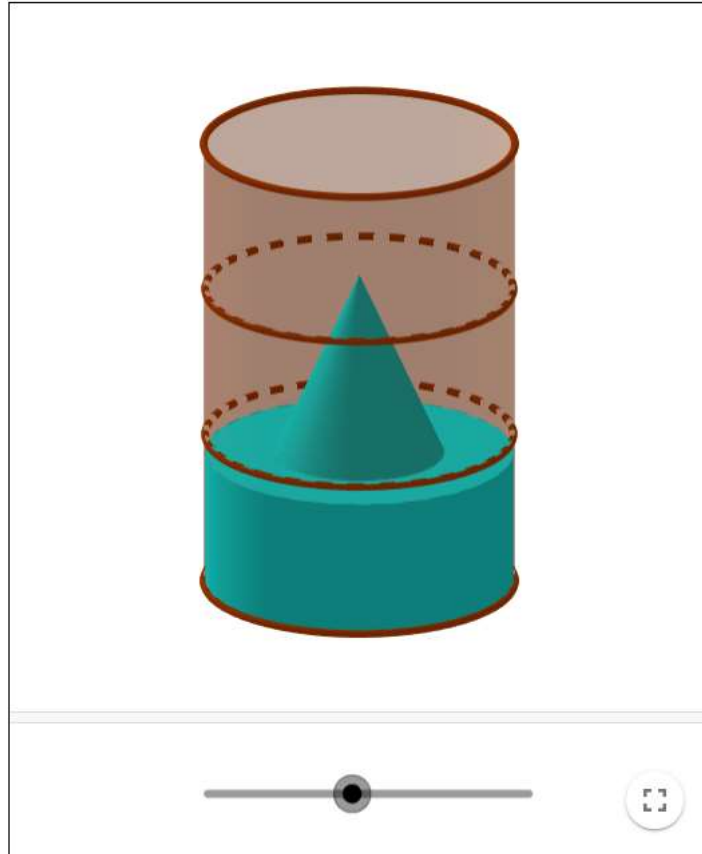


Kuva 1, kartio ennen sulatusta lieriön sisällä

Liuettaessa pistettä kartio alkaa sulamaan lieriön sisällä.

Sulava kartio

Tekijä: [Aleksi Hermonen](#)

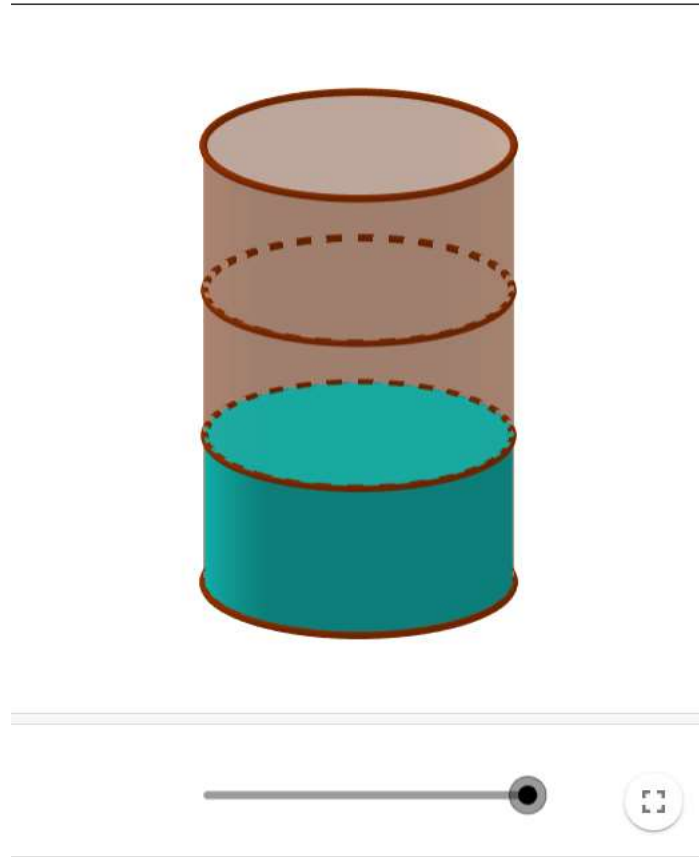


Kuva 2, kartio osittain sulaneena lieriön sisälle

Kun piste on siirrettyä janalla täysin oikealle, huomataan, että kartion sulatettu tilavuus on kolmasosa lieriön tilavuudesta.

Sulava kartio

Tekijä: Aleksi Hermonen



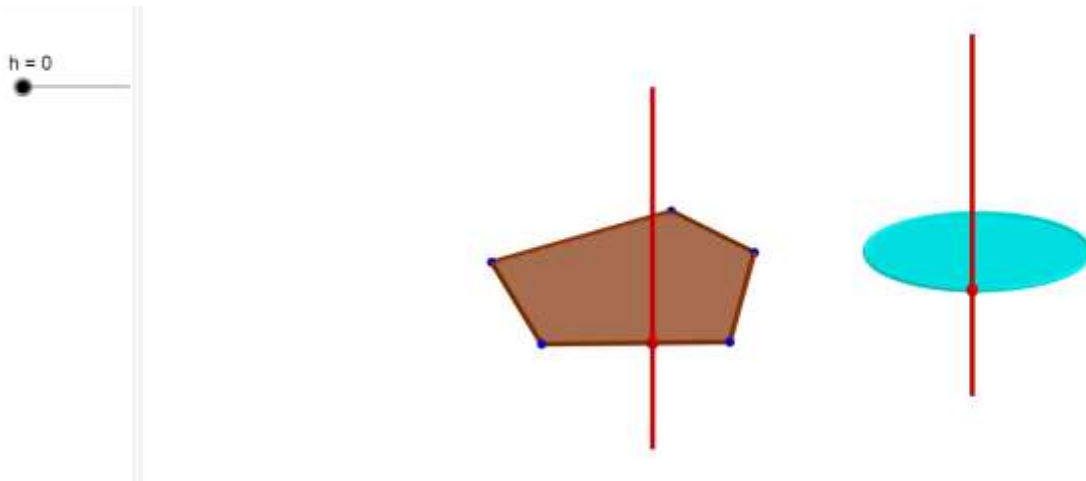
Kuva 3, Kartio kokonaan sulatettuna lieriön sisälle

Tämä appletti auttaa havainnoimaan lieriön ja kartion tilavuuksien suhdetta. Ympyrän pinta-alan kaavasta voidaan edetä loogisesti lieriön tilavuuteen ja tästä pääsee etenemään kohti kartiota. Oppilaat voivat ajatella murtolukumuodossa olevan kaavan haastavana, mutta tämä appletti selkeyttää sen, miksi kartion tilavuus on kolmasosa lieriön tilavuudesta.

6.1.2 Appletti 2. Lieriö 3D-GeoGebralla

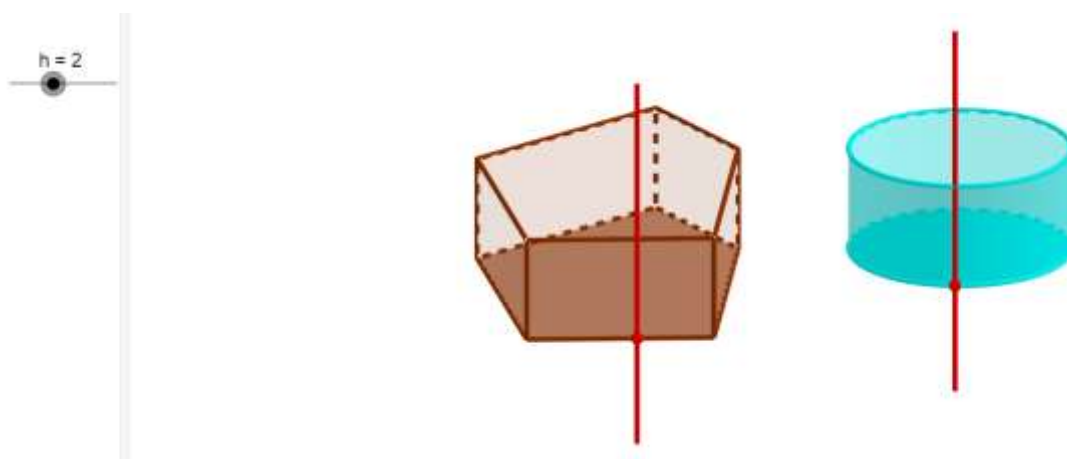
Matikkamatskut-niminen Internet-sivusto on luonut valtavasti matematiikkaan liittyvää lisämateriaalia. Sivusto on tarkoitettu erityisesti lukiomatematiikkaa silmällä pitäen, mutta materiaaleja voi soveltaa myös peruskoulussa.

Matikkamatskut-sivusto on myös luonut paljon erilaisia appletteja muun muassa GeoGebralla. Lieriö 3D-GeoGebralla appletissa tasokuviosta luodaan kappale antamalla kuviolle korkeus. Geometriassa ja avaruusgeometriassa kaavojen ymmärtäminen tuodaan käytäntöön tässä appletissa siten, että kuvioille annetaan korkeus.



Kuva 4, tasokuviolla ei ole korkeutta

Tässä appletissa on lähtötilanteessa viisikulmio ja ympyrä sekä vasemmalla laidassa korkeuden säädin.



Kuva 5, tasokuvion korkeus on 2

Kun vasemmalla olevaa mustaa pistettä liutetaan janaa pitkin oikealle, saadaan viisikulmiolle korkeus ja siten tilavuus.

Tasokuvioiden ja avaruuskappaleiden yhteys voi olla haastava hahmottaa. Tässä appletissa on tasokuviolle tehty korkeutta ja nähdään, että siten saadaan kappale, jolla on jokin tilavuus.

7 Tutkimustuloksia

Tässä tutkimuksessa tarkasteltiin viimeisimpiä perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita sekä tällä hetkellä kouluissa käytettäviä oppikirjoja. Tavoitteena on löytää, miten avaruusgeometriaa on havainnoitu oppikirjoissa sekä miten teknologisten työkalujen käyttöä on tuotu esille oppikirjoissa.

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa oli maininta, että matematiikassa olisi hyvä olla ilmiöitä ja oppilaiden omaan elämään liittyviä asioita. Yläkoulun kirjojen tehtävissä laskettiin jalkapallon tilavuutta ja säilykepurkkien pinta-alaa. Nämä ovat arkisia esineitä ja lisäävät siten mielenkiintoa tehtävää kohtaan. Säde-kirjassa on eritasoisia tehtäviä lukua kohden yli 20 kappaletta ja sivumäärässä vähintään kolme sivua. Kuutiossa sen sijaan aina alle 20 tehtävää ja aina kaksi sivua. Tehtävien skaala on laajempi Säteessä ja kirjan fyysinen koko verrattuna Kuutioon on suurempi.

Oppikirjasarjoissa ei ollut mainintaa tieto- ja viestintäteknologia sovelluksista tai hyödyntämisestä. Oppikirjasarjoissa suositellaan oppilaita hyödyntämään monipuolisesti teknologiaa (Säde 4), mutta oppikirjojen luvuista ei löydy, mistä etsiä apuja tieto- ja viestintäteknologian hyödyntämiseen kyseisen aihepiirin osalta. Opetussuunnitelmien noudattaminen ei ole suoraan oppikirjojen tekijöiden vastuulla vaan opettajien, vaikka oppikirja on luotu opetussuunnitelman tarpeisiin. Teknologisten apuvälineiden käyttöön opetuksessa ei ole suosituksia ainakaan avaruusgeometrian osalta, joten tämä vaatii niin opettajilta kuin oppilailta omakohtaista aktiivisuutta etsiä ja perehtyä ohjelmistoihin. Opettajat voivat tiukkojen aikataulujen puitteissa ottaa omaan opetukseen mukaan tietokoneet ja näyttää oppilaille, miten esimerkiksi GeoGebralla konstruoidaan ympyräpohjainen lieriö. Kirjoissa olevat luvut on laskettu hyvin tarkasti vuosiviikkotuntien mukaan, joten tässä tilanteessa opettaja käy joko joitakin aiheita nopeammalla tahdilla tai jättää aiheita käymättä.

Oppikirjasarjojen tulisi kauttaaltaan tuoda lisää valmiuksia käyttää tietokonetta niin koulussa kuin oppilaan omalla ajalla. Mahdollisesti opetussuunnitelman tai kirjojen aiheiden tiivistäminen toisi lisää aikaa hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa osana opetusta ja pienentäisi näin erityisesti nivelvaihetta peruskoulusta lukioon. Perusopetuksen opetussuunnitelmaan on lisätty uusi aihepiiri: ohjelmointi. Tämä lohkaisi useita tunteja matematiikan opetuksesta, joten mahdollisesti seuraavassa opetussuunnitelmassa voi olla matematiikassa aidosti enemmän tieto- ja viestintäteknologiaa.

8 Luotettavuus

Työ perustuu kirjojen ja opetussuunnitelman tutkimiseen, joten tutkimuksen luotettavuus perustuu yhden henkilön havaintoihin kirjasarjoista ja perusopetuksen opetussuunnitelmasta. Tutkimuksessa oli ajatuksia, miten oppikirjasarjat voisivat tuoda lisää tieto- ja viestintäteknologiaa omiin kirjoihin ja sitä kautta osaksi opetusta. Oppimateriaaleissa on paljon valinnanvaraa ja kirjat tulevat varmasti pysymään osana peruskoulua vuosien ajan, vaikka digitaalisuutta tuodaan mukaan monipuolisesti lisää useisiin oppiaineisiin.

9 Pohdintaa

Avaruusgeometria on tutkituissa oppikirjasarjoissa yleensä yksi viimeisimmistä peruskoulumatematiikassa opiskeltavista aiheista. Yhdeksännen luokan jälkeen valtaosa oppilaista siirtyy toiselle asteelle joko lukioon tai ammattikouluun. Lukio-opinnot aloittaa hieman yli puolet peruskoulun päättäneistä (Tilastokeskus, koulutukseen hakeutuminen 2018), joten jo pelkästään lukio-opintoja silmällä pitäen olisi ensiarvoisen tärkeää saada peruskoulussa yhä enemmän taitoja hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikassa.

Nivelvaiheet alakoulusta yläkouluun ja yläkoulusta lukioon ovat aina eräänlainen kasvunpaikka ja askeleet ovat isoja siirtyessä uudenlaiseen järjestelmään. Matematiikassa peruskoulu ja lukio ovat kaksi eri maailmaa, joten oppimistulosten ja oppilaiden kannalta olisi varmasti helpompaa, jos ero ei olisi niin iso ja asiat tulisivat jo vähän tutuiksi peruskoulussa.

Ylioppilaskirjoituksissa matematiikka on muuttunut sähköiseksi kokeeksi keväästä 2019, joten tietokoneen hallitsemiseen jää opiskelijan osalta aikaa vajaa pari vuotta, jos tietotekniikkaa ei ole käytetty aiemmin peruskoulussa.

Tästä aiheesta olisi hyvä tehdä enemmän tutkimusta esimerkiksi

- > haastattelemalla kirjan tekijöitä tai opettajia
- > paikallisten opetussuunnitelmien tutkiminen

Lähteet

- Etelämäki, H., Koppatz, N., Laitinen, A., Lammi, P. & Nieminen, J., (2017). *Säde 4*. Keuruu: Edita.
- Forsback, M., Kalliola, A. & Tikkanen, A., (2016). *Tuhattaituri 2a (OPS16)*. Keuruu: Otava.
- Hassinen, S., Latva., Makkonen, J-M., Tolvanen, A. & Pirrtimaa., (2018). *Kuutio 9*. Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Häkkinen, K., Kaleva, T., Patrikainen, S., Similä, M. & Sohlman, L., (2019). *Milli 1B*, Helsinki, Suomi, Sanoma Pro Oy.
- Hänninen, L., Malinen, K., Ranta, P. & Vallo, L., (2019). *Milli 3A*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Juniati, D., Puloo, M. & Wijayanti., (2018). *Visualization Profile of Junior High School Students in Solving Geometry Problems Viewed from Gender Differences*, Journal of Physics.
- Kiviluoma, P., Nyrhinen, K. & Perälä, P., (2018). *Tuhattaituri 6a (OPS16)*. Keuruu: Otava.
- Lukion opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus
- Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus
- Rantanen, J. (2018). *Lukiomatematiikan opetuksen teknologinen yhdenvertaisuus*.
- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2017). *Kymppi 2 syksy*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2017). *Kymppi 3 syksy*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2017). *Kymppi 4 kevät*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.

- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M. & Uus-Leponiemi, T. (2016). *Kymppi 5 syksy*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Rinne, S., Salonen, M., Sintonen, A-M., & Uus-Leponiemi, T. (2017). *Kymppi 6 kevät*, Helsinki: Sanoma Pro Oy.
- Salmi, T. (2015). *Sähköinen ylioppilaskirjoitus ja sen vaikutus matematiikan opetukseen matematiikan opettajien näkökulmasta*.

Liitteet

LIITE 1 muistiinpanoja ja sisällysluetteloita kirjoista

Milli 1B: geometria

- Hahmottaminen, tässä voi hyvin nähdä hahmotushäiriöt
 - o hahmotuksia
 - o loogista päättelyä ja tutkimista
 - o mistä suunnasta katsottuna
- kappaleet
 - o muotojen tunnistamista
 - o kappaleiden luokittelua

Kymppi 2 syksy: geometria

- katsotaan eri suunnilta
 - o miltä asiat näyttävät eri suunnista
 - o ylhäältä, sivusta, alhaalta jne.
 - o suuntien ymmärrys
- tutustutaan kappaleisiin
 - o kappaleiden nimeäminen
 - o millaisia kappaleita on olemassa (mm. avaruuskappaleet)
 - o kappaleiden leikkauksia
 - o opetellaan hahmottamaan millaisista palasista jotkin asiat muodostuvat
- tasokuvioita ja kappaleita
 - o edelliseen kappaleeseen liittyen miten kuviot ja kappaleet liittyvät toisiinsa

Tuhattaituri 2a: geometriaa

- kappaleita
 - o tunnistetaan mistä osista muodostuu kappaleet ts. kappaleet muodostuvat kuvioista

- harjoitellaan hahmottamista
- sen lisäksi piirtämistä

Kymppi 3 syksy

- luokitellaan kappaleita
 - tunnistetaan kappaleita
 - tunnistetaan kappaleiden ominaisuuksia
 - kappaleiden jakamisia, millaisia pohjia esimerkiksi on
- kappaleita ja tasokuviota
 - kappaleiden ja tasokuvioiden ominaisuuksia lisää
 - vähän edellisen kappaleen asioita lisää
- harjoitellaan ja piirretään
 - lasketaan piirejä
 - piirretään kuvioita ja kappaleita

Milli 3A: Geometriaa

- kappaleiden luokittelua
 - luokitellaan sekä kuvioita, että kappaleita (lieriö, kartio, muut)
 - hahmottamista eri suunnista

Tuhattaituri 6a: geometria

- kappaleiden luokittelua
 - tunnistettavat kappaleet: lieriöt, kartiot, pallot, muut
 - kappaleiden ominaisuudet: pohja, huippu
 - tarkkoja määritelmiä eri kappaleille
 - millaisesta vaipasta kappale muodostuu
 - erotetaan kappaleet toisistaan
 - väitteet tosi vai epätosi
- suorakulmaisen särmiön pinta-alan laskeminen
 - pinta-alan ajatus ja kirjain A
 - termit kulma, särmä, tahko

- pinta-alan laskeminen kuinka pinta-ala kertaa 2, pinta-ala kertaa 2
- lasketaan pinta-aloja särmiöille, tehdään välivaiheita
- kuinka monta pientä kuviota menee ison kuvion sisälle
- päättely ja ongelmanratkaisua
- suorakulmaisen särmiön tilavuus
 - tilavuuden ajatus ja kirjain V
 - lasketaan pinta-aloja ja ymmärretään niitä
 - laskemista ja päättelyä, kuinka monta pientä kappaletta menee ison sisälle

Kuutio 9: Trigonometria ja avaruusgeometria (trigonometria jätetty pois tarkastelusta)

- tilavuus

Seuraavat asiat sisältävät sekä tilavuuksia että pinta-aloja

- särmiö
- lieriö
- kartio
- pyramidi
- pallo
- sovelluksia

Säde 4: avaruusgeometria

syventävissä vielä vähän lisää asiaa

- lieriön tilavuus
- kartion tilavuus
- yhdistettyjä kappaleita
- kappaleiden piirtäminen ja tutkimista
- lieriön pinta-ala
- kartion pinta-ala
- pallo

- pinta-aloja ja tilavuuksia