HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Tekijä — Författare — Author

Antti Piironen

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Johdatus Modaaliseen Peliteoriaan

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Huhtikuu 02, 2020	57 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielmassani esittelen työkalumaisesti johdantoa modaalipelien teoriaan. Modaalipelit ovat modaalilogiikan ja modaalisen predikaattilogiikan avulla käytäviä pelejä, joissa voidaan hyödyntää klassisen peliteorian teoriaa. Modaalipelit muodostavat kielellisen raamin peleille ja toteankin että tutkielmassa tutkitaan Wittgensteinilaisia kielipelejä sekä kieltä, logiikan ollessa kieli. Tutkielma jakautuu kahteen osaan: I) Klassinen peliteoria ja II) Modaalinen Peliteoria. Ensimmäisessä osassa luon ensin historiallisen synteesin logiikan ja peliteorian kehityksen osalle, jonka jälkeen esittelen työkaluja vakiosummapeleihin sekä tasapainopeleihin. Esimerkkeinä käytän lähinnä kilpailullisia pelejä ja eräitä tunnetuimpia pelejä kuten vangin dilemma sekä tuon esille esimerkin yhteistyöpeleistä. Sen jälkeen pyrin esittämään mahdollisimman yksinkertaisesti tärkeimmät menetelmät pelien ratkaisuihin sekä tuoton maksimointiin, jotka ovat: dominoivat strategiat, sekastrategiat, Nash-tasapaino sekä min-max teorian perusteita. Tämän jälkeen todistan välttämättömät ja riittävät lauseet liittyen em. ratkaisuihin. Osassa kaksi aloitan ensin käsittelemällä työssä käytettävää logiikkaa, joka on modaalilogiikka ja modaalinen predikaattilogiikka. Käsittelemme ensin perusmääritelmät Kripke-semantiikalle, jossa esitämme esimerkkejä aleettisen, deonttisen sekä episteemisen logiikan käännöksiä lauseista. Sen jälkeen tarkastelemme modaalilogiikan totuuden asteita: validi mallissa, tautologia, K-validi jne. todistaen samalla riittävän ja välttämättömän määrän teoriaa modaalilogiikan tautologian ja validien lauseiden muodostuksesta, jotta niistä voidaan ylipäätänsäkään puhua semanttisten pelien voittostrategian olemassaolon yhteydessä. Tämän jälkeen esitän modaalisen predikaattilogiikan perusteet ja semantiikan joita käytämme todistaessamme päätuloksen semanttisen pelin voittostrategiasta. Semanttisten pelien yhteydessä pyrin esittämään määritelmän pelisäännöille, strategialle ja voittostrategialle sekä todistamaan tuloksen voittostrategian ehdosta pelaajalle II. Semanttisen pelin pyrin laatimaan niin että se kattaa klassiset semanttiset pelit (propositionaalilogiikan ja predikaattilogiikan semanttiset pelit) ja modaalilogiikan semanttiset pelit. Tämän jälkeen esitän lyhyitä esimerkkejä aiheesta. Viimeisenä esitän lyhyen luonnoksen klassisen peliteorian päälle rakentuvasta modaalipelistä käyttäen esimerkkinä Vangin Dilemmaa ja Paholaisen Asianajajaa. Mahdollisen maailman käsite vastaa sekä semanttisessa modaalipelissä että modaalisessa pelissä pelaajan aitoa tilaa johon hän on saapunut kielen käyttönsä tuloksena.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Peliteoria, Modaalilogiikka, Logiikka, Semanttinenpeli, Modaalipeli, Kielipeli

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

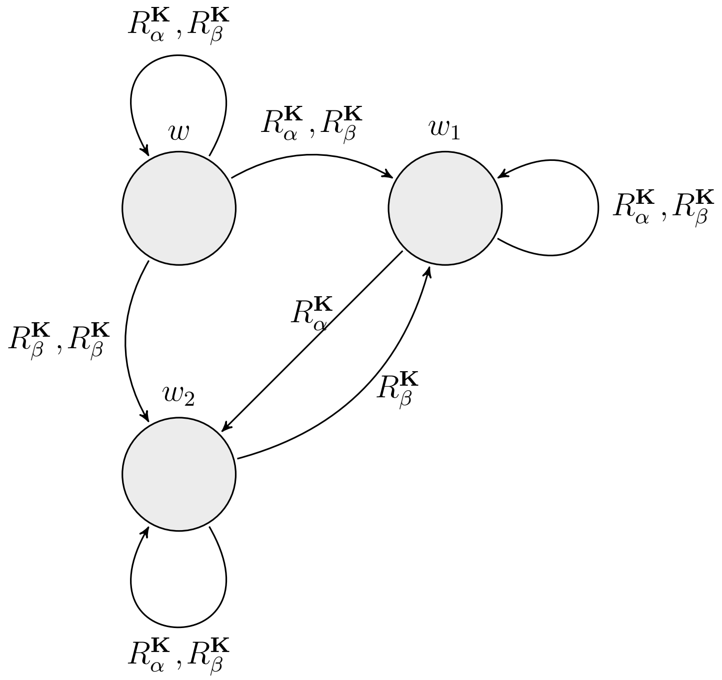
E-Thesis

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Johdatus Modaaliseen Peliteoriaan

Antti J. Piironen

$$M = \langle W, R_\alpha^{\mathbf{K}}, R_\beta^{\mathbf{K}}, P \rangle, \quad W = \{w, w_1, w_2\},$$
$$R_\alpha^{\mathbf{K}} = \{(w,w),(w,w_1),(w,w_2)(w_1,w_1),(w_1,w_2),(w_2,w_2)\},$$
$$R_\beta^{\mathbf{K}} = \{(w,w),(w,w_1),(w_1,w_1),(w,w_2),(w_2,w_1),(w_2,w_2)\}$$



$$G = \langle \{1,2\}, \{S_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N} \rangle, \quad G \models \exists x \mathbf{K}_\alpha(\phi \wedge \psi)$$

Pro Gradu, Helsingin Yliopisto,
Matematiikan ja Tilastotieteen osasto,
Matemaattinen Logiikka
Kevät 2020

Sisältö

1 Johdanto

> ”Ajattele myös, että kaikki se mitä tässä sanomme, voidaan ymmärtää vain, jos ymmärrämme, että kielemme lauseilla pelataan hyvin monia eri pelejä. . . ”, Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951), Ruskea Kirja (1934 – 35)[33]

Tämän pro gradun matematiikan ala on erityisesti peliteoria, matemaattinen logiikka ja filosofinen logiikka joidenka erityisaloista modaalilogiikkaa ja ensimmäisen kertaluvun logiikkaa esitämme riittävän teorian käsitelläksemme varsinaisesti semanttisia ja modaalisia pelejä. *Ludwig Wittgensteinin (1889 – 1951) kirjasta yllä esittämäni lainaus tiivistää tutkielmani tarkoitusperää: logiikat ovat kieliä, intensionaaliset tai modaaliset kielet puolestaan ’merkityksen’ omaavia. ’Merkitys’ ja ’ymmärrys’ ovat usein termejä joidenka ajatellaan kulkevan käsi kädessä. Merkitystä voidaan yrittää opettaa tai kiteyttää pelien avulla.* Esimerkiksi, neuroverkko-ohjelmoinnissa oppivien neuroverkkojen painojoukot ovat eräs mahdollinen tapa nähdä pelit: neurodien painofunktiot asettuvat lopulta sopivalla tavalla, kun verkko oppii tekemään asian ja muutoin toistetaan harjoitejoukolla. Edellisen lauselmani otan kuitenkin varovaisesti, sillä Ruskean ja Sinisen Kirjan (1934 – 35) lukijalle Wittgenstein selittää esittämiensä pelien toimivan merkityksen tai tarkoituksen oppimisessa. Tutkielmani tutkii siis kielen luonnetta ja merkitystä matematiikan eksaktilla kielellä lyhyenä johdantona siihen minkälaisia modaalipelejä mm. löytyy, mutta kuten yksittäinen pelikin voi kuvastaa useampaa erilaista asiaa niin myös voidaan ajatella näin myös modaalipeleistä. Kielellä tarkoitamme usein paljon laajempaa asioiden kirjoa kuin vain luonnollisia kieliä, esimerkiksi peli on usein malli jollekin asialle ja sen kieli liittyy siihen. Modaalipelien teoria on edelleenkin tutkimuksen kohteena [13] ja tässä esittämäni teoria on yritys koota joitakin tärkeitä ydinkohtia aiheeseen josta en ole nähnyt yhtäkään kurssia toistaiseksi Suomen yliopistoissa tai kattavaa kokonaisuutta tai kirjoitettua kirjaa muussa mielessä kuin tutkimusjulkaisuita joista mainittakoon tärkeimmiksi perusteorian kehittelyn kannalta [13], [14]. Karkeasti otettuna, esitän modaalipelejä kahdessa mielessä: mahdollisten maailmojen semantiikka kehyksenä klassisille peleille sekä joitakin semanttisia pelejä joita kumpiakin käsitellään esimerkin omaisesti perusteorian avulla. Tässä esityksessä esitän vaadittavan peruspeliteorian. Mikään ei estä puhtaasti modaalilogiikan teorian avulla rakennettuja pelejä, mutta silloin tällöin näkee keskustelua siitä että modaalipelit vaatisivat omia menetelmiään pelien ratkaisukonsepteiksi, eikä klassista peliteoriaa. On otettava huomioon että klassiset pelit ovat pelattavissa mahdollisten maailmojen raamien avulla mutta toisin päin ei välttämättä voida tehdä johtuen puhtaasti teknisistä syistä jolloin ei välttämättä päde esimerkiksi klassinen Nash-tasapaino [13]. Erityisesti esittelen tässä Wittgensteinilaisia kielipelejä eräissä asuissa peliteorian avulla ja logiikan avulla. Kieli jota käytän on erityisesti logiikka ja peliteorian kieli. Pelit joita tulkitsemme ovat mm. yksinkertaiset klassiset voitahäviä pelit, semanttiset pelit ja niille luodaan sopivaa peliteoreettista semantiikkaa matkalla. Edellisten lisäksi esittelen lopuksi eräitä yleisiä modaalipelin luonnehdintoja joissa klassinen peliteoria kohtaa modaalilogiikan. Pelkästään klassinen peliteoria olisi itsessään hyvin laaja esitys metodeineen, aivan liian laaja tähän tutkiemaan, mutta esitämme perus peliteoriasta työkalumaisesti teoriaa, todistaen vain välttämättömän niiden pelien kannalta joita esitämme. Pelissä tarkoitamme siis ylipäätänsäkin esittää *aiheen tiimoilta vain sen mitä nämä pelit ovat ja esittää niiden rakentamisen alkeita.*

Jos aihepiiri siis vaikuttaa rikkonaiselta, niin se johtuu siitä että joudun yrittämään systemaattisesti esittämään teoriaa jonka uskon jonakin päivänä olevan aiheen perusteita aiheesta, mutta josta en ole toistaiseksi nähnyt yhtään kurssiksi tehtyä kokonaisuutta ja joudun näin ollen yhdistämään tähän sen mitä pidän olennaisena aiheen kannalta. *Erityisesti aiheen historiassa yritän yhdistää kaksi asiaa: i) peliteorian historiaa ja ii) modaalilogiikan historiaa.* Kuten käy myös ilmi, *edellä mainitsemani kaksi pyrin myös yhdistämään* *synteesin omaisesti esittääkseni lopputulokseni modaalisille semanttisille peleille ja modaalisille peleille yleensä.*

Huomaamme, että semanttinen peli voi hyvin olla toinen lähestymistapa ensimmäisen ja useamman kertaluvun logiikan ymmärtämiseen myös modaalisessa mielessä ja siten vastaus moneen kielelliseen ongelmaan. Modaalilogiikka on tietyllä tavoin esitettynä toisen kertaluvun logiikan fragmentti. Kieliä joita voisimme tutkia näillä työkaluilla ja peliteorian avulla on mahdoton edes lähteä kaikkia esittämään, mutta mainittakoon esimerkin vuoksi: Matematiikan osa-alueet, politiikka, sosiologia, taloustiede, tietoteoria ja ontologia, luonnolliset kielet(kielioppi, merkitys, käännökset,. . .), ohjelmointikielet (elektroniikka, tietokoneet. . .) sekä koneoppiminen. Tutkielma jakautuu kahteen osaan: i) klassisen peliteoriasta tarvitsemamme perusteorian esitykseen, kuten mikä on strateginen peli ja ii) tutkielman keskeisimmän aiheen eli modaalipelit ja siis modaalilogiikan sekä ensimmäisen kertaluvun logiikan soveltamista peliteoriaan. *Pro Gradussa tutkimuksen kohteemme on yksinkertaisesti esittää johdantomaisesti modaalisen eli intensionaalisen peliteorian perusteita.* Erityisesti esitämme sekä tulkitsemme myös semanttisen pelin käsitteen intensionaalisessa konseptissa käyttäen hyväksi Prof. Jaakko Hintikan (1929 – 2015) ehdotusta intensionaalisten semanttisten pelien rakentamiseksi teoksessaan 'Game of Language (1984)'. Matemaattisista peleistä suosittelen lämpimästi Jouko Väänänen, *Games and Models* [31]. Erityisesti Tuomas Aho,*On The Philosophy Of Attitude Logic*, Acta Philosophica Fennica Vol. 57, 325 s., 1994 on erityisen suositeltavaa lukemistoa aiheesta sekä intensionaalisesta logiikasta vakavasti kiinnostuneelle.

Osa I
Klassinen Peliteoria

2 Neumannin Kysymys. Lyhyt katsaus historiaan ja nykypäivään

Olisi kenties väärin aloittaa historiallinen kerronta mainitsematta Platonia (429? — 347 eKr) ja Sokratesta, sillä Platonin dialogeista Lakhes ja Pidot ovat peräisin mm. seuraavat mielenkiintoiset kohdat keskusteltaessa sotataidosta ja urheudesta sekä sodankäynnistä liittyen Delionin sotaan, joka käytiin Ateenan ja Boiotian välillä vuonna 424 eKr. Delion oli Boiotian alue ja thebalaiset voittivat ateenalaiset. Lakhes-dialogin mukaan:

> ”Suurimmaksi osaksi hyödyksi se on kuitenkin silloin, kun rivistöt murtuvat ja on taisteltava mies miestä vastaan, kun ajaa takaa vihollista joka yrittää torjua ahdistajansa tai itse pakenee ja koettaa selvitä takaa-ajajistansa”, kirjassa[16] Lakhesin kohta 182 a – b, s. 62

Sokrateesta kerrotaan Pidot dialogissa:

> ”. . . kun sotajoukkomme pakeni Delionin luota... satuimme joutumaan lähekkäin. Kun joukot olivat lyöty hajalle ja hän oli peräytymässä yhdessä Lakheen kanssa. Osuin siis kohdalle ja kehotin pysymään rohkeana. . . asteli kurjen askelin. . . katseli yhtä tyynesti omia kuin vihollisia. Kaukaakin saattoi havaita, että siinä oli mies, joka uljaasti pitäisi puoliaan, jos joku uskaltaisi käydä hänen kimppuunsa.. . . Harvoinhan sodassa kukaan ahdistaa miestä, joka käyttäytyy sillä tavoin, kun taas niitä ajetaan takaa, jotka pakenevat pää kolmantena jalkana.”, kirjassa[17] Pidot kohta 220e – 221c, ss. 138 – 139.

Edellisten kohtien huomioon ottaminen johtuu siitä syystä, että vaikka nykyinen peliteoria saikin varsinaisesti syntynsä näkökulmasta riippuen 1928 tai 1944 siinä muodossa jossa siitä keskustelemme, niin näissä kohdista nousee peliteoreettisiä näkökulmia ja on noussut eri kommentaattoreiden toimesta [2]. Mainituista näkökulmista en kirjoita tässä enempää, mutta erityisesti Lakhes dialogin lainaukseni muistuttanee varmastikin sivistynyttä lukijaa ällistyttävän paljon eräästä tunnetusta pelityypistä.

Aristotelestä (384 – 322 eKr) pidetään usein modaalilogiikan varhaisena esi-isänä, esimerkiksi Tulkinnasta (De Interpretatione) kirjan 12. ja erityisesti 13. luvussa on keskustelu väitteiden jakamisesta ’Mahdollisesti olla’, ’Välttämättä olla’ sekä ’Kontingentti’ käsitteisiin ja niiden käsittelemisestä:

> ”Ilmauksesta ’mahdollista olla’ seuraa ’kontingenttia olla’, ja tämä siitä kääntäen, edelleen ’ei mahdotonta olla’ ja ’ei välttämätöntä olla’. Ilmauksista ’mahdollisesti ei ole’ ja ’kontingentisti ei ole’ seuraa ’ei ole välttämätöntä olla olematta’ ja ’ei ole mahdotonta olla olematta.” - Tulkinnasta (De Interpretatione), 13. kirja, 15 – 20.

Aristoteleen kirjallisuudessa[1], on havaittavissa myös keskusteluita sekä tiedon, uskon että aistihavainnon logiikkaan, kuten esimerkiksi Ensimmäinen (Analytica Priori) ja Toinen Analytiikka (Analytica Posteriori).

Mahdollisen maailman käsitteen isänä pidetään Gottfried Wilhelm Leibniziä (1646 – 1716) [35]. Tarkastelemalla, esimerkiksi Monadologiaa[2] kohdissa 53. – 54.:

[1] Aristotles I, *Kategoriat, Tulkinnasta, Ensimmäinen ja Toinen Analytiikka*, Gaudemus 1994, 321 sivua.
[2] Gottfried Wilhelm Leibniz, *Filosofisia tutkielmia*, Gaudeamus 2011, 511 sivua

> ”. . . ideoissa on ääretön määrä mahdollisia maailmankaikkeuksia ja koska vain yksi niistä voi olla olemassa. . . peruste voi olla vain sopivuudessa tai näiden maailmojen sisältämässä täydellisyyden asteessa.”.

On mielenkiintoista havaita että Leibnizin määritelmät ovat hyvin lähellä käsitteellisesti Kripke-mallin ja nykyisen mahdollisen maailman käsitteen kanssa, jotka esitämme jatkossa peruskäsitteiksi tutkielmassamme. Lähteen [35] mukaan on jopa esitetty että mahdollisten maailmoiden käsitteet olisivat samat joissakin tapauksissa.

Tutkielmani tutkii pelejä, jotka toisaalta ovat eräässä mielessä seuraajia *loogisille peleille* joidenka esi-isänä voitaneen pitää Oxfordissa toiminutta matemaatikkoa ja kirjailijaa Lewis Carrollia jonka oikea nimi on Charles Lutwidge Dodgson (1832 – 1898). Carrollin tunnettu teos *Games of Logic* julkaistiin vuonna 1886 ja oli eräänlainen lähtölaukaus loogisille peleille. Teoksessaan Carroll opettaa logiikkaa erilaisten pelien avulla ja tässä mielessä ovat loogiset pelit hyvinkin läheistä sukua Carrollin peleille. Filosofisessa mielessä on *kielipelien* syntyyn tai toiselta nimeltään ’Wittgensteinilaisten’ kielipelien eli semanttisten pelien syntyyn vaikuttanut merkittävästi eniten Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951), joka toimi Cambridgessä. Ranskalais-algerialainen matemaatikko Roland Fraïssé (1920 – 2008) ja Puolalainen matemaatikko Andrzej Ehrenfeucht kehittivät 1930–luvulla muutaman vuoden viiveellä kummatkin erilaisen muotoilun siitä kategoriasta mallien vertailupelejä ja kehittivät ns. back-and-forth menetelmiä, jotka tänä päivänä ovat tunnettu Ehrenfeucht-Fraïssé eli lyhyemmin EF-peleinä. Ehrenfeucht muotoili peliteoreettisesti pelin ja Fraïssé algebrallisesti. Semanttinen peli on eräänlainen muoto EF-peleistä ja erityisesti helmipeleistä. Wittgenstein puhuu erityisesti kielipeliensä luonteesta Ruskeassa Kirjassa (1934 – 35) ja Sinisessä Kirjassa (1935 – 1936) sekä Filosofiset Tutkimukset (1951) teoksissaan, joissa hän korostaa pelien ja alipelien osuutta ymmärtämisessä, tarkoituksessa ja oppimisessa. Wittgensteinin pelejä voidaan toki esittää monin tavoin ja tässä Pro Gradussa pyrimme esittämään niitä niillä *ainoailla kielillä*, jotka itse tunnen omakseni koulutukseni puolelta eli logiikan kielellä. Intensionaalisen logiikan, joka on keskeisellä sijalla tutkielmassani, mainittakoon ehkäpä tärkeimpänä ulkomaalaisena loogikkona Rudolf Carnap (1891 – 1970) ja erityisesti hänen teoksensa *Meaning and Necessity*, jossa hän tulee esittäneeksi instensionaalisen logiikan, erityisesti mm. ’välttämättömän’ ja ’mahdollisen’ käsitteet. Wittgensteinin työn jatkajana pidetään työmme kannalta relevanttia Deonttisen logiikan(1951) isää Georg Henrik Von Wrightia (1916 – 2003). Sittemmin Wrightin oppilas Jaakko Hintikka (1929 – 2015) kehitti erityisesti peliteoreettista semantiikkaa (GTS=Game Theoretical Semantics), mahdollisten maailmojen semantiikkaa, IF-logiikkaa ja episteemista logiikkaa. IF logiikkaa hän kehitti yhdessä Gabriel Sandun kanssa. Nykyisen mahdollisen maailman semantiikan isänä pidetään Saul Kripkeä (1940), jonka mukaan on nimetty hyvin suosittu Kripke-Semantiikka tai Jaakko Hintikkaa (1929 – 2015) ja toisinaan näkeekin termin Kripke-Hintikka semantiikka. Ennen John Von Neumannia esitti Ernst Zermelo (1871 – 1953) kuuluisan tuloksensa liittyen äärellisiin determinoituihin peleihin vuonna 1913. Zermelo osoitti että kahden pelaajan täysin kilpailulliselle pelille, jossa on äärellisen monta mahdollista siirtoa, pelaaja voi välttää häviämistä vain äärellisen monen siirron verran jos ja vain jos hänen vastustajansa omaa voiton mahdollisuuden. Johdettu lause sanoo että jokainen äärellinen, täysin kilpailullinen täyden informaation kahden pelaajan peli on determinoitu: joko pelaaja 1 tai pelaaja 2 omaa voittostrategian. Semanttisten pelien Modernin ajan peliteorian isänä pidetään matemaatikko John von Neumannia (1903 – 1957) sillä Neumann esitti vuonna 1928 Matematische Annalen numerossa 100 sivuilla 295 – 320 artikkelissaan *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* eli *Strategisten Pelien Teoriasta* ensimmäisenä seuraavan kysymyksen, jolla oli merkittäviä seuraamuksia peliteorian kehittymisen kannalta:

> ”n pelaajaa, $S_1, S_2, \ldots, S_n$, pelaavat annettua strategiapeliä G: Kuinka tulee

pelaajan S_n pelata jotta saavuttaisi tuloksen joka on mahdollisimman suotuisa ?"

Edellinen kysymys johtaa Neumannin esittämään seuraavat jatkokysymykset:

1. "Mikä, tarkalleen, on strategiapeli ?"
2. Koska "pelaajan kohtalo ei riipu vain hänen omista valinnoistaan vaan myöskin muiden pelaajien," ilmaisu "S_n pyrkii saavuttamaan mahdollisimman suotuisan tuloksen" on "hyvin epäselvä".

Lukemattomia ratkaisuja onkin annettu edellisiin ongelmiin. John von Neumannin (1903 – 1957) ja yhteistyötoverinsa taloustieteilijä Oskar Morgensternin (1902 – 1977) tunnetuimpana yhteenvetona ratkaisuista edellisiin kysymyksiin voidaan pitää heidän toimittamaansa, sikäläisen tieteenihanteen mukaisen aksiomatisoinnin sisältävästä, hakuteoksen omaista kirjaa *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Edellä mainittua vuotta pidetään useissa lähteissä varsinaisena peliteorian syntyvuonna, toisin kuin itse ajoitan sen vuoteen 1928. Neumannin tunnetuin peliteorian kontribuutio on varmaankin *peliteorian peruslauseena* (engl. fundamental theorem of Game Theory) tunnettu lause eli niin sanottu *Min–Max lause*. On kuitenkin selvää että von Neumannin edellä esittämät kysymykset ovat edelleen avoimia ja peliteoria elää jatkuvasti kehittyen kuten voidaan havaita esimerkiksi pelien ratkaisukonseptien moninaisuuden tulvaa tarkastellessa sekä lukemattomien sovelluskohteiden että uusien sovellusalueiden määrää tarkasteltaessa esimerkiksi Gabriel Sandu, *Logic, Language and Games*, Acta Philosophica Fennica Vol 91, 2015. Neumannin jälkeen merkittävimpiä alan tutkijoita peliteorialle on ollut John Forbes Nashin Jr. (1928 – 2015) vuonna 1950 julkaisemallaan mullistavalla kaksi sivuisella Proceedings of the National Academy of Sciences:n artikkelillaan *Equilibrium Points in N-Person Games* jossa hän soveltaa Shizuo Kakutanin (1911 – 2004) kuuluisan kiintopistelauseen yleistystä todistaakseen nykyään nimeään kantavaa tasapainopelin ratkaisua n-pelaajan peliin. Nykyisiä merkittävimpiä kehitysaskeleita ovat olleet Leon Henkinin (1921 – 2006) kehittämät kvanttoripelit sekä haarautuvat kvanttorit sekä ns. Skolem-muodot joita on edelleen käytetty kehittämään peliteoreettista semantiikkaa. Erityisesti edesmenneen filosofin, Bostonin yliopiston professorin, Jaakko Hintikan (1929 – 2015) ja Helsingin yliopiston filosofian laitoksen Gabriel Sandun kehittämä IF (engl. Independence Friendly Logic) eli *riippumattomuusystävällinen logiikka* on saanut GTS:n avulla erään tulkinnan IF-logiikan haastavalle useamman kertaluvun logiikan semantiikalle mm. pelien, mukaanlukien klassisen peliteorian ja informaation esittämisenä. IF-logiikka mahdollistaa Gottlob Fregen (1848 – 1925) kvanttorien vaikutusalan riippuvuuden ongelman poistamisen ja muuttamisen. Sittemmin Helsingin yliopiston Matemaattisen Logiikan professori Jouko Väänänen on kehittänyt IF-logiikalle toisen lähestymistavan, jota kutsuu riippuvuuslogiikaksi[30].

Peliteorian ratkaisukonseptit jotka perustuvat *rationalisuuteen* sekä *Nash-tasapainoon* ovat myöskin haastettu uusilla konsepteilla uusille konteksteille. Petrosjan ja Mazalov'n kuusitoista osaisen suurin piirtein kaiken nykyisen klassisen peliteorian sisältävässä kirjasarjassa "*Game Theory and Applications*" viimeisen osan viimeisessä luvussa sanotaan, että kaikki pelit voidaan jakaa suurin piirtein kolmeen laajaan kategoriaan: 1. *Ekstensiivisiin peleihin*, 2. *Strategisiin peleihin* ja 3. *Yhteistyöpeleihin*. Viimeisessä luvussa keskustellaan peliteorian tulevaisuudesta, jossa maininnan omaisesti todetaan, että peliteoriaa on sovellettu myös kielifilosofiaan ja lingvistiikkaan. Samoin, myöskin peliteorian ennusteita on pyritty parantamaan ja kyseenalaistamaan. Esimerkiksi, malleihin perustuvan peliteorian rinnalle on noussut ns. *behavioristinen peliteoria* joka tukeutuu yleensä empiirisiin tilastollisiin otantoihin. Tutkielmani aiheena on kuitenkin *modaalinen peliteoria* ja osittain joudumme myöskin perustamaan tutkielmassani esitettävää teoriaa Neumann-peliteorialle. Modaalisella peliteorialla tarkoitetaan sellaista peliteoriaa, jonka tulkinta tehdään *ei-klassisella* logiikalla kuten esimerkiksi *modaalilogiikalla* ja siten yleisemmin käytetty nimitys on *modaalipelit.* Emme tule keskittymään *korkeamman kertaluvun peliteoreettiseen semantiikkaan* tässä tutkielmassa sen syvällisemmin, mutta mainittakoon että *peliteoreettinen semantiikka* on avannut peliteorialle sekä semanttisille peleille laajoja uusia näköaloja että sovelluskohteita ja sitä kautta työkaluja myöskin esimerkiksi lingvistiseen tai kielifilosofiseen tarkasteluun.

3 Matemaattisia työkaluja

Todistaaksemme tarvittavia peliteorian tuloksia on esiteltävä riittävästi perusteoriaa taustalle. Koska pitäydymme korkeintaan kahden pelaajan peleissä rohkenen esittää yleistyksiä kahdelle pelaajalle tarvittavaan teoriaan. Tarvitsemme eräitä topologian sekä analyysin että funktioanalyysin käsitteitä [26, 27, 11, 24]. Näitä työkaluja tarvitaan klassisessa ja modaalisessa peliteoriassa, mutta tarvittava logiikka esitellään vasta klassisen teorian jälkeen päivänselvästä syystä. *Halki koko tämän tutkielman oletamme avaruuden X olevan euklidinen metrinen avaruus, jollei toisin mainita.*

Todennäköisyyslaskennasta tarvitsemme vain seuraavat perusmääritelmät [23]:

3.1 Todennäköisyyslaskenta

Määritelmä 1. Kokoelma $\mathcal{F}$ perusjoukon Ω osajoukkoja on σ-algebra, jos

σA_1 $\Omega \in \mathcal{F}$

σA_2 $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$

σA_3 $A_i \in \mathcal{F}\, (i = 1, 2, \ldots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Määritelmä 2. Kuvaus $P\colon \mathcal{F} \to \mathcal{R}$ on todennäköisyys, jos

T1 $P(A) \geq 0$ kaikilla $A \in \mathcal{F}$

T2 $P(\Omega) = 1$

T3 $A_i \in \mathcal{F}\, (i = 1, 2, \ldots)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$, niin

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lause 3. *Olkoon* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *todennäköisyysavaruus. Tällöin*

(i) $P(\emptyset) = 0$

(ii) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(iii) $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(iv) $0 \leq P(A) \leq 1$ *kaikilla* $A \in \mathcal{F}$*,*

(v) $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$*,*

(vi) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cup B)$

Todistus. Ks. [23]. □

Määritelmä 4. (kts. [23]) Jos X on diskreetti satunnaismuuttuja, arvojoukkona $\{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_i \in \mathbb{R}$ ja vastaavina pistetodennäköisyyksinä $p_k = P\{X = x_k\}$, X:n *odotusarvo* on luku
$$E(X) = \sum_k^n x_k \cdot p_k$$
edellyttäen, että ko. sarja suppenee itseisesti.

Edellinen määritelmä riittää tutkielman kannalta, sillä arvojoukko on aina äärellinen tutkielmassamme. Tällöin $E(X) < \infty$.

3.2 Topologia ja analyysi

Määritelmä 5. Euklidisen avaruuden $X = \mathbb{R}^n$ pisteiden $x, y \in X$ etäisyys toisistaan määritellään
$$d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}$$

Määritelmä 6. Olkoon $X = \mathbb{R}^n$ ja $x, y, z \in X$. Kutsumme funktiota $d(x,y)$:ä avaruuden X metriikaksi. Metriikalla on seuraavat ominaisuudet

(M1) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$

(M3) $d(x,y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

(M1) on tunnettu myöskin metriikan kolmiepäyhtälönä tai lyhyemmin metriikan Δ-ey:nä. Kutsumme metriikalla varustettua avaruutta *metriseksi avaruudeksi.*

Läpi tutkielman tarkoitamme metriikalla ja metrisella avaruudella edellisten määritelmien mukaisia struktuureita.

Määritelmä 7. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ projektiot. Kun $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $1 \leq j \leq n$, merkitään $x_j = \mathrm{pr}_j(x)$, $j \leq n$ eli n-jonon j:s jäsen. Saamme kuvauksen
$$\mathrm{pr}_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$
tämä on $\mathbb{R}^n$:n j:s projektiokuvaus eli lyhyesti projektio.

Määritelmä 8. Avaruuden $X = \mathbb{R}^n$ avoimella pallolla tarkoitamme joukkoa
$$B(a,r) = \{x \in X \colon d(a,x) = |x-a| < r\},$$
ja avaruuden X suljetulla pallolla tarkoitamme joukkoa
$$\bar{B}(a,r) = \{x \in X \colon d(a,x) = |x-a| \leq r\}.$$

Määritelmä 9. Olkoot $X = \mathbb{R}^n$. Silloin pisteiden $x, y \in X$ välinen yhdysjana ℓ määritellään

$$\ell(x, y, t) = \{x + t(y - x) \colon t \in [0, 1]\} = \{tx - (1 - t)y \colon t \in [0, 1]\}$$

Määritelmä 10. Avaruuden $X = \mathbb{R}^n$ osajoukko A on konveksi, jos pisteiden $x, y \in A$ yhdysjana sisältyy joukkoon A.

Lause 11. *Olkoot $X = \mathbb{R}^n$. Tuolloin avaruuden avoimet $B(a, r)$ ja suljetut pallot $\bar{B}(a, r)$ ovat konvekseja joukkoja kaikilla $a \in X$ ja $r > 0$.*

Todistus. Olkoon nyt $x, y \in B(a, r)$ ja $\ell(x, y, t) = xt + (1 - t)y$, $t \in [0, 1]$ pisteiden x, y yhdysjana. Olkoon pallon keskipiste a origo. Tällöin pätee $|(tx - (1 - t)y) - 0| \leq |tx| + |(1 - t)y| \leq t|x| + (1 - t)|y|$. Valitkaamme toinen pisteistä x, y siten, että pisteen etäisyys keskipisteestä on suurempi. Olkoon $|x - 0| = |x| \geq |y - 0| = |y|$. Tällöin pätee,että $t|x| + (1 - t)|y| \leq t|x| + (1 - t)|x| = |x| < r$. Olkoon sitten $x, y \in \bar{B}(a, r)$ ja $\ell(x, y, t) = xt + (1 - t)y$, $t \in [0, 1]$ janasuora. Olkoon pallon keskipiste a jälleen origo. Tällöin pätee $|(tx - (1 - t)y) - 0| \leq |tx| + |(1 - t)y| \leq t|x| + (1 - t)|y|$. Valitkaamme toinen pisteistä x, y siten, että pisteen etäisyys keskipisteestä on suurempi. Olkoon $|x - 0| = |x| \geq |y - 0| = |y|$. Tällöin pätee $t|x| + (1 - t)|y| \leq t|x| + (1 - t)|x| = |x| \leq r$. $\square$

Oletamme seuraavan tuloksen tunnetuksi ja todistus sivuutetaan.

Lause 12. *Olkoon (x_k) jono euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Tällöin (x_k) suppenee kohti pistettä $a \in \mathbb{R}^n$, jos ja vain jos $pr_j(x_k) \to pr_i(a)$, kun $k \to \infty$, kaikilla $j = 1, \ldots, n$.*

Määritelmä 13. Avaruuden (X, d) jono (x_n) on *Cauchyn jono* (tai adjektiivina) *Cauchy*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x_k) < \varepsilon$, kun $n \geq n_0$ ja $k \geq n_0$.

Määritelmä 14. Sanomme, että metrinen avaruus (X, d) on täydellinen, jos sen jokainen Cauchyn jono suppenee.

Lause 15. *Avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen.*

Todistus. Olkoon (x_k) Cauchyn jono $\mathbb{R}^n$:ssä. Kiinnitämme luvun $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kun $j, k \in \mathbb{N}$, niin

$$|\mathrm{pr}_i(x_j) - \mathrm{pr}_i(x_k)| \leq |x_j - x_k|.$$

Tästä nähdään, että $\mathbb{R}$:n jono $\mathrm{pr}_i(x_1), \mathrm{pr}_i(x_2), \mathrm{pr}_i(x_3), \ldots$ on myös Cauchy. Pidämme tunnettuna, että $\mathbb{R}$ on täydellinen. Siis tämä jono suppenee kohti jotakin lukua $a_i \in \mathbb{R}$. Tämä päättely pätee jokaisella $i = 1, \ldots, n$ ja luvut a_i määrittelevät $\mathbb{R}^n$ vektorin $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Lauseen 12 perusteella $x_k \to a$ kun $k \to \infty$. $\square$

Määritelmä 16. Olkoot $X = \mathbb{R}^n$ ja $E \subset X$. Olkoot $T \colon E \to X$ avaruuden X kuvaus. Jos on olemassa sellainen avaruuden piste $x \in E$ että $T(x) = x$, niin sanomme silloin että piste x on kuvauksen kiintopiste.

Kiintopistelause, jonka todistamme tässä on Brouwerin kiintopistelause avaruudessa $\mathbb{R}$, joka riittää tutkielmamme tapauksessa. Kiinnostava, 2-ulotteisen tapauksen todistus on esitetty [27] algebrallista topologiaa käsittelevässä osassa. Kaksiulotteinen tapaus ja yleinen tapaus vaatisi myöskin algebrallisen topologian peruskäsitteistön esittämistä kantapisteestä perusryhmään sekä nostolauseen ja vastaavien ominaisuuksien todistamista emmekä työn laajuuden sekä sen aihepiirin osalta tule esittämään niille todistuksia mutta kehoitamme kääntymään lähteiden [19, 15] puoleen.

Lause 17 (Brouwerin kiintopistelause)**.** *Olkoon $\bar{B}^n(a,r)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikköpallo ja olkoon kuvaus $f\colon \bar{B}^n(a,r) \to \bar{B}^n(a,r)$ jatkuva. Tällöin on olemassa piste $x \in \bar{B}^n(a,r)$ siten että $f(x) = x$.*

Todistus. Sivuutetaan. Katso [19, 15]. □

Lause 18 (Browerin Kiintopistelause konvekseille joukoille)**.** *Olkoon $K \subset \mathbb{R}^d$ suljettu, konveksi ja rajoitettu. Jos $T\colon K \to K$ on jatkuva, silloin on olemassa $x \in K$ siten että $T(x) = x$.*

Todistus. Todistus on löydettävissä lähteestä [15] ja sen todistamiseen vaadittavat menetelmät ovat tutkielman kannalta liian laajalle menevät joten todistus sivuutetaan. □

Lause 19 (Brouwerin kiintopistelause kun $X = \mathbb{R}$)**.** *Olkoon $\bar{B}(a,r)$ avaruuden $\mathbb{R}$ suljettu väli $[0,1]$. Olkoon kuvaus $f\colon \bar{B}(a,r) \to \bar{B}(a,r)$ jatkuva. Tällöin on olemassa piste $x \in \bar{B}(a,r)$ siten että $f(x) = x$.*

Todistus. Todistamme lauseen käyttämällä Bolzanon lausetta [11]. Koska kuvaus f on oletusten mukaan jatkuva, niin se saa kaikki arvot välillä $[f(0), f(1)]$ eli tapauksessamme $x, f(x) \in [0,1]$. Tarkistetaan ensin reunapisteet. Jos $f(0) = 0$ tai $f(1) = 1$, niin olemme valmiit. Oletetaan että näin ei ole. Määritellään $g(x) = f(x) - x$. $g(x)$ on jatkuva, koska f on jatkuva ja x on jatkuva määrittelyjoukossa. Nyt, pätee oletuksen mukaan, että $g(0) > 0$ ja $g(1) < 0$. Bolzanon lauseen mukaan saa kuvaus g arvon $g(x') = 0$, jollakin $x' \in [0,1]$. Tuolloin x' on haluttu kiintopiste koska $f(x') = x'$. □

4 Vastaus Neumannin Kysymykseen. - Peliteorian Alkeet

Palatkaamme takaisin John von Neumannin (1903 – 1957) kysymykseen vuodelta 1928:

> ”n pelaajaa, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ pelaavat annettua strategiapeliä G: Kuinka tulee pelaajan S_n pelata jotta saavuttaisi tuloksen joka on mahdollisimman suotuisa ?”

Pyrkikäämme vastaamaan edelliseen kysymykseen sekä kahteen jatko-ongelmaan aluksi keskustelemalla ja sitten standardin peliteorian keinoin. Ensimmäiseksi, vastatkaamme kysymykseen ”Mikä on, tarkasti, strateginen peli ?”. Toiseksi, pohdimme kysymystä mitä tarkoitetaan pelien voittamisella. Havaitsemalla, että minkä tahansa pelin kannalta ovat tärkeimpiä käsitteitä, kuten tunnetusti nämä ovat Shakissa: perussäännöt, taktiikka ja strategia, niin ovat myöskin peliteoriassa i) määrittelevät säännöt ja ii) strategiset säännöt. *Määrittelevillä säännöillä* tarkoitetaan niitä sääntöjä kuinka peliä pelataan eli mitä siirtoja voidaan tehdä ja *strategisilla säännöillä* kuinka peliä pelataan hyvin. *Taktiikka* liitty pelitilanteiden, kuten alipelien, peluuseen ja voittamiseen.

4.1 Strateginen Peli

Lähestymme asiaa suoraan utiliteetin eli hyödyn, pragmaattisesta, filosofisesta näkökulmasta, koska aiheemme kannalta pelit ovat vain kahden pelaajan täysin kompetitiivisia 1–0 pelejä tai yleisiä summapelejä. Tästä syystä määritelmämme on mukailtu yleisemmistä määritelmistä. Käsittelemme pelejä tässä muutamalla lyhyellä esimerkillä koskien peliteorian peruslauseiden todistamiseen ja ratkaisukonsepteihin. Siirrymme lyhyiden esimerkkien jälkeen suoraan kohti tämän tutkielman pääteemoja. Esitämme joitakin esimerkkejä *yleisistä summapeleistä*. Käytän seuraavaa konventiota: puhuttaessa pelaajista käytän roomalaisia numeroita I ja II useimmiten, mutta kaavoissa merkintöjä 1 ja 2.

Määritelmä 20. Normaalimuotoinen kahden pelaajan Strateginen peli G määritellään [3]:

$$G = \langle N, S, U \rangle = \langle \{1,2\}, \{S_i\}_{i \in N}, \{U_i\}_{i \in N} \rangle$$

jossa $N = \{1,2\}$ on pelaajien joukko, $\{S_i\}_{i \in N}$ jossa $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{in}\}$, $i \in N$ on pelaajien N strategioiden joukko eli strategia-avaruus (myös pelin kulku) ja $\{U_i\}_{i \in N}$ pelaajien utiliteetti- eli hyötyfunktio on kuvaus $U_i \colon S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ jossa $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$.

Pelaajan strategioiden joukko sisältää kaikki strategiat $s_{ij} \in S_i$ jotka määrittävät myös pelaajien siirrot jotka pelaaja voi pelissä G tehdä. Seuraavaksi määrittelemme mitä tarkoitamme utiliteetillä tai hyötyfunktiolla matemaattisessa mielessä. Normaalimuotoisessa strategisessa pelissä pelaajat valitsevat yhtäaikaisesti strategiat joita pelata ja hyöty määräytyy sen perusteella mitä valintoja pelaajat ovat tehneet [3]. Tässä tutkielmassa luemme "*yhtäaikaa*" tarkoittavan myös tilannetta jossa toinen pelaaja ei tiedä toisen siirtoa enempää kuin mitä esim. myöhemmin esitettävä rationaalioletus (23) mahdollistaa. Vakiosummapelit ovat normaalimuotoisia strategiapelejä. Vakiosummapelit määritellään peleiksi, joille pätee

Määritelmä 21. Olkoon $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$. Kahden pelaajan peli G on vakiosummapeli mikäli pätee pelaajien I ja II hyötyfunktioille, että

$$U_1(s_1, s_2) + U_2(s_1, s_2) = c \in \mathbb{R}$$

Seuraava peliesimerkki on puhdas *voitto-häviö peli*, joka on vakiosummapeli.

....

Esimerkki 1. Kaksi lasta leikkivät tunnettua leikkiä *kivi,paperi ja sakset*. Pelin säännöt ovat seuraavat: pelaajat valitsevat toisen tietämättä käsieleen joko kivelle, paperille tai saksille ja paljastavat yhtäaikaa omansa. Kaksi samaa tarkoittaa että kumpikin häviää, kivi voittaa sakset, paperi kiven ja sakset paperin. Voimme esittää koko pelin seuraavana taulukkona jossa pari (a, b) tarkoittaa paria (U_1, U_2). U_i määräytyy nyt pelin luonteen mukaisesti. Pelaaja yksi pelaa rivejä ja pelaaja kaksi sarakkeita. Olkoon peli $G = \langle N, P, U \rangle$

$(\mathbf{I}, \mathbf{II})$	Kivi	Paperi	Sakset
Kivi	(0,0)	(0,1)	(1,0)
Paperi	(1,0)	(0,0)	(0,1)
Sakset	(0,1)	(1,0)	(0,0)

Kuva 1: Kivi, Paperi ja Sakset

ja $N = \{1,2\}$. Pelaajien strategia-avaruus on joukko

$$S_i = \{\text{Kivi, Paperi, Sakset}\}, i \in \{1,2\}$$

Pelaajien hyötyfunktio U_i voidaan rakentaa havaitsemalla, että jos $U_i(s_1, s_2) = 1$, niin $U_j(s_1, s_2) = 0$ kun $i \neq j$.

$$U_i(s_1,s_2) = \begin{cases} U_i(\text{Kivi}, \text{Kivi}) = 0 \\ U_i(\text{Kivi}, \text{Paperi}) = i-1 \\ U_i(\text{Kivi}, \text{Sakset}) = i, \quad \text{jos}\, i = 1,\ \text{muuten}\, 0 \\ U_i(\text{Paperi}, \text{Kivi}) = i, \quad \text{jos}\, i = 1,\ \text{muuten}\, 0 \\ U_i(\text{Paperi}, \text{Paperi}) = 0 \\ U_i(\text{Paperi}, \text{Sakset}) = i-1 \\ U_i(\text{Sakset}, \text{Kivi}) = i-1 \\ U_i(\text{Sakset}, \text{Paperi}) = i, \quad \text{jos}\, i = 1,\ \text{muuten}\, 0 \\ U_i(\text{Sakset}, \text{Sakset}) = 0 \end{cases}$$

. . . .

Peli 1 on täysin kilpailullinen 1–0 peli jossa eivät pelaajat tiedä toistensa siirtoa etukäteen. Pelissä ei myöskään ole puhtaille strategioille selkeää voittostrategiaa, mutta toinen pelaaja voi alkaa huomata toisen pelaajan käyttävän esimerkiksi ’kivi’-strategiaa jollakin todennäköisyydellä eli säännöllisesti tietyllä tavalla. Myöhemmin keskustelemme *sekastrategioista* joilla voimme käsitellä em. tilanteita. Tarkastellaan vielä erästä peliä, jonka kehitin tämän tutkielman kuluessa erään keskustelun tuloksena, joka minulla oli henkilö X:n kanssa. Pelin ottaminen tähän tutkielmaan sopii hyvin sillä menetelmät ja logiikat, joita käytämme, osoittavat *tour de force*:n tässä deonttisenä pelinä. Osoittautui että peli on mitä mielenkiintoisin tutkielman tiimoilta ja kohtaamme pelin eri asuissa halki koko tutkielman. Tarkastellaan mainitsemaani peliä seuraavassa.

. . . .

Esimerkki 2. (Paholaisen Asianajaja/Devils Advocate) Pelin esitämme kahden pelaajan pelinä, mutta se voitaisiin nähdä n-pelaajan pelinä vaikkapa normatiivisen yhteisön ollessa kyseessä. Pelissä pelaajat valitsevat stragiansa joukosta $S_{ij} = \{E, P\}, 0 \leq j \leq 2\, i \in N$. Peli on yhteistyöpeli, sillä toimiessaan Paholaisena ($S_i = P$) pelaaja häviää. Mikäli kaksi Enkeliä kohtaa, niin kummankin voitto tuplaantuu. Enkelinä ($S_i = E$) toimiva henkilö tuottaa aina voiton itselleen. Peli kuvastaa vaikkapa yhteisiä velvollisuuksia ja yhteistyötä. Käsittelemme peliä deonttisena pelinä myöhemmin. Peliä voi ajatella esimerkiksi

$(\mathbf{I}, \mathbf{II})$	Paholainen	Enkeli
Paholainen	(-1,-1)	(0,1)
Enkeli	(1,0)	(2,2)

Kuva 2: Paholaisen Asianajaja

siltä kannalta, että Paholainen ei noudata yhteisiä sääntöjä. Edelleen, kumpikin pelaaja tietää pelissä että yhteistyö mahdollistaa menestyksen jolloin pelaajalle i on $U_i(\text{E}, E) = 2$. Paholaiseksi ryhtyminen heikentää toisen pelaajan voittoa mutta ei voi estää sitä eikä tuo minkäänlaista hyötyä paholaiselle. Järjestelmä taas ei toimi, jos kukaan ei tee velvollisuuksiaan.

. . . .

Edellinen peli sisältää selkeästi pyrkimyksen voittoon ja strategian miten se on saavutettavissa joka mahdollinen pelikerta. Olemme määritelleet strategian mutta emme vielä voittostrategiaa. Emme tarvitse tätä käsitettä ennen kuin tutkielmamme toisessa osassa. Täysin kilpailulliset pelit voidaan yleisesti määritellä peleiksi, joissa *toisen pelaajan voitto on toisen pelaajan häviö*. Voitto-häviö–pelit sekä vakiosummapelit ovat täysin kilpailullisia pelejä, sillä vakiosummapeli on aina muunnettavissa nollasummapeliksi.

Määritelmä 22. Olkoon $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$ pelaajien I ja II strategiat. Peli G on täysin kilpailullinen, mikäli pätee:

$$U_1(s_1, s_2) + U_2(s_1, s_2) = 0.$$

Nollasummapeli kuvastaa erityisesti tilannetta jossa *voittanut osapuoli saa hävinneen osapuolen koko hyödyn.* Seuraava peliesimerkki *täsmäävät pennit* on nollasummapeli, jossa hyöty siirtyy pelaajalta toiselle.

. . . .

Esimerkki 3. Täsmäävät pennit pelissä pelaajat valitsevat toiselta piilossa pennin Kruuna tai Klaava puolen ja näyttävät valintansa toiselle. Mikäli pennit täsmäävät pelaaja I häviää ja mikäli pennit eivät täsmää, niin pelaaja I voittaa. Pelissä voittanut osapuoli saa hävinneen pelaajan pennin. Tässä pelissä pelaajien strategia-avaruus on

$(\mathbf{I}, \mathbf{II})$	Kruuna	Klaava
Kruuna	(-1,1)	(1,-1)
Klaava	(1,-1)	(-1,1)

Kuva 3: Täsmäävät pennit

$$S_i = \{\text{Kruuna}, \text{Klaava}\}.$$

Hyötyfunktiot pelaajille saadaan edellisestä taulukkoesityksestä seuraavasti:

$$U_i(s_1, s_2) = \begin{cases} U_i(\text{Kruuna}, \text{Kruuna}) = (-1)^i \\ U_i(\text{Kruuna}, \text{Klaava}) = (-1)^{i-1} \\ U_i(\text{Klaava}, \text{Kruuna}) = (-1)^{i-1} \\ U_i(\text{Klaava}, \text{Klaava}) = (-1)^i \end{cases}$$

. . . .

Pelissä 3 ei vaikuta olevan kummallekkaan pelaajalle minkäänlaista voittostrategiaa. Itseasiassa, peli vaikuttaa täysin sattumanvaraiselta. Palaamme peliin sekastrategioiden yhteydessä. Seuraava peliesimerkki on jälleen nollasummapeli ja siis täysin kilpailullinen peli.

. . . .

Esimerkki 4. ”Lapsi piilottaa kaksi karkkia selkänsä takana käsiinsä. Hän voi laittaa karkin vain yhteen käteen (vasen) tai kummatkin vain toiseen (oikea). Sen jälkeen hän esittää kummatkin kätensä edessä ja arvaaja yrittää arvata kummassa kädessä nämä karkit ovat. 1) miten piilottajan kannattaa pelata tässä ja 2) mikä on odotettavissa oleva tappio-odotus piilottajalla ?”. Edelliset kysymykset jätämme sekastrategioiden yhteyteen sekä tarkemmin min-max lauseiden yhteyteen. Merkitään arvuuttajaa **II** ja arvaajaa **I**. Olkoot peli

(I, II)	Vasen	Oikea
Vasen	(1,-1)	(0,0)
Oikea	(0,0)	(2,-2)

Kuva 4: Karkin piilottamispeli

$G = \langle N, \{S_i\}_{i\in N}, U \rangle$. Strategia-avaruus pelaajalle $i \in \{1,2\}$ on: $S_i = \{\text{V, O}\}$. Taulukosta voidaan poimia pelaajien hyötyfunktion arvot ja muodostaa hyötyfunktio U kullekin pelaajalle. Pelaajalle $i \in \{1,2\}$ pätee: $U_1(s_1,s_2) = -U_2(s_1,s_2)$ ja erityisesti $U_1(V,V) = 1$, $U_1(O,O) = 2$ ja $U_1(s_1,s_2) = 0$ muuten. Pelaajille 1 ja 2 voidaan siis esittää:

$$U_i(s_1,s_2) = \begin{cases} U_i(V,V) = (-1)^{i-1} \\ U_i(O,O) = 2\cdot(-1)^{i-1} \\ U_i(s_1,s_2) = 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

....

Edellisessä pelissä toinen pelaaja voitaa ja toinen häviää ja tapahtuu materian siirtoa. Pelissä oletamme että pelaajalla II ei ole suurempaa voittopyrkimystä. Jälleen havaitsemme että puhdasta strategiaa ei ole, mutta tuntuisi järkevältä piilottaa vain yksi karkki toiseen käteen. Palaamme tähän kysymykseen. Peliesimerkissä 4 on kysymys sekastrategioista ja lineaarisesta optimoinnista.

4.1.1 Vahvasti dominoiva strategia ja rationaalisuus

Peliteorian eräs, ehkäpä tärkeimpiä, tapoja määrätä pelin kulku on pelaajien *rationaalisuuden* konsepti.

Määritelmä 23. Pelaajaa kutsutaan rationaaliseksi, jos hän pyrkii maksimoimaan hyötynsä.

Rationaalisuus liittyy myös Nash-tasapainoon. Rationaalikonseptissa oletamme, että *rationaalinen pelaaja ei pelaa vahvasti dominoituja strategioita*, eli *huonompia* vaihtoehtoja, koska ei ole syytä että pelaajat uskoisivat sellaisen strategian kannattavan.

Määritelmä 24 (Vahvasti dominoiva strategia)**.** Normaalimuotoisessa pelissä G olkoot $s_i' \in S_i$ ja $s_i'' \in S_i$ pelaajan $i \in N$ strategioita. Strategia s_i' on vahvasti strategian s_i'' dominoima, jos ja vain jos hyöty strategian s_i'' pelaamisesta on suurempi kuin strategian s_i' pelaaminen kaikilla soveltuvilla toisen pelaajan strategioilla s_i. Toisin sanoen, jos $\exists s'' \in S_1$ siten, että $\forall s' \in S_1$ ja $\forall s_2 \in S_2$ pätee

$$U_1(s'', s_2) > U_1(s', s_2),$$

niin strategia s'' dominoi vahvasti pelaajan 1 kaikkia muita strategioita. Jos $\exists s'' \in S_2$ siten, että $\forall s_1 \in S_1$ ja $\forall s' \in S_2$:

$$U_2(s_1, s'') > U_2(s_1, s'),$$

niin strategia s'' dominoi vahvasti pelaajan 2 kaikkia muita strategioita. Mikäli edellisissä pätee että saavutettava hyöty, pelattaessa strategioilla kuten edellä, on ainakin yhtä hyvää sanomme että strategia on *heikosti dominoiva strategia* ja '$>$' voidaan korvata '$\geq$':lla.

Odotamme seuraavassa rationaalipelissä, että vangit eivät tiedä toistensa aikeita.

. . . .

Esimerkki 5. Vangin dilemma eli PD(Prisoners Dilemma) [3]. Tässä pelaaja yksi on rivipelaaja ja pelaaja kaksi on sarakepelaaja. Kaksi epäityä on pidätettynä epäiltynä rikoksesta. Poliisilla ei ole riittävästi todisteita vangitsemiseen jollei vähintään toinen epäillyistä tunnusta. Poliisi pitää vankeja erillisissa selleissä ja selittää seuraukset heidän mahdollisista toimistaan. Jos kumpikaan ei tunnusta, niin heidät kumpikin tuomitaan vähäisestä rikoksesta 1 kk:ksi vankeuteen. Jos kumpikin tunnustaa, niin heidät tuomitaan kummatkin 6 kk:ksi vankeuteen. Vankien ei odoteta tekevän yhteistyötä. Lopuksi, jos toinen heistä tunnustaa mutta toinen ei, niin tunnustanut pääsee vapauteen ja toinen saa 9 kk vankeutta. 6 kk rikoksesta ja 3 kk oikeustoimien vaikeuttamisesta.

(**I**,**II**)	Tunnustaa	Vaikenee
Tunnustaa	(-6,-6)	(0,-9)
Vaikenee	(-9,0)	(-1,-1)

Kuva 5: Vangin Dilemma

Rationaalinen pelaaja pyrkii tässä pelissä maksimoimaan hyötynsä. Esimerkiksi, pelaajalle 1 vapaalle pääseminen $U_1(T,V)=0$ on parempi kuin vaikeneminen $U_1(V,V)=-1$, joka on parempi kuin vaikeneminen jos pelaaja 2 tunnustaa $U_1(V,T)=-9$. Tarkastetaan 24 mukaiset ehdot. Havaitsemme pelaajalle 1

$$U_1(T,V) > U_1(V,V)$$
$$U_1(T,V) > U_1(V,T)$$

ja samoin pelaajalle 2

$$U_2(V,T) > U_2(V,V)$$
$$U_2(V,T) > U_2(T,V)$$

Olkoot nyt pelaajille 1 ja 2 strategiat $s_{11}=T$ ja $s_{21}=T$, jolloin nämä dominoivat edellisten perusteella pelaajien 1 ja 2 muita strategioita määritelmän 24 mukaisesti antaen kummallekin pelaajalle hyödyn $U_1(s_{11},s_{21})=(-6,-6)=U_2(s_{11},s_{21})$. Kummatkin pelaajat ovat rationaalisia ja pelin voi myöskin ratkaista rationaalisuusoletuksella (23): pelaaja I olettaa, että pelaaja II on rationaalinen, joka olettaa että pelaaja I on rationaalinen. Toisin sanoen, pelaaja I olettaa että pelaaja kaksi pyrkii tunnustamaan saadakseen suurimman hyödyn jolloin hän tunnustaa itsekin. Pelaaja II olettaa pelaajan I olevan rationaalinen ja tavoittelemaan parasta hyötyä itsellensä ja tunnustavansa ja siten tunnustaa itsekin.

. . . .

4.1.2 Nash-tasapaino

Määritelmä 25. (vrt. [3]) Kahden pelaajan normaalimuotoisessa pelissä G strategiat $s_1^* \in S_1$, $s_2^* \in S_2$ ovat Nash-tasapaino, jos kummallekin pelaajalle pätee että s_i^* pelaajan paras vastastrategia toisen pelaajan strategiaan $s_{j\neq i}^*$ eli pelaajille

$U_1(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1, s_2^*)$ kaikilla $s_1 \in S_1$

ja

$U_2(s_2^*, s_2^*) \geq U_2(s_1^*, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$

Edellinen määritelmä on täysin yleinen ja se pätee sellaisenaan kun puhtaasta strategiasta vaihdetaan sekastrategiaan. Kutsumme myöskin strategiaa s_i^* *strategisesti stabiiliksi.* Huomaamme, että Vangin Dilemma peli 5 ratkeaa Nash-tasapainopelinä. Nyt, nimittäin, käyttämällä määritelmää huomaamme samoin kuin vahvasti dominoivan strategian suhteen että pelaajalle 1 ja 2 kummallekin on paras vastaus toisen strategiaan tunnustaa kuten dominoivien strategioiden menetelmän tapauksessakin. Paholaisen Asianajaja peli ratkeaa sekä Nash-tasapaino pelinä että rationaaliratkaisuna, sillä hyödyn maksimointi on Enkeli-strategian käyttämistä kaikkien pelaajien kannalta.

4.1.3 Sekastrategiat

Palaamme täsmäävien pennien peliin. Kuten havaitsemme, ei pelissä ole suoraa Nash-tasapainoa tai Dominoivia strategioita joten pelistä ei näyttäisi löytyvän ainoatakaan ratkaisua pelaajien voittostrategioiksi. Tämä ei kuitenkaan täysin pidä paikkaansa. Voimme tarkastella peliä ns. sekastrategioiden näkökulmasta.

Määritelmä 26. Pelaajan $i \in N$ puhtaiden strategioiden joukkoa merkitään tutkielmassa $S_i = \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$. Pelaajan i puhdastrategia e_{ij} on samalla sekastrategia jonka todennäköisyys on aina $e_{ij} = 1$.

Koska pelit joita käsittelemme tutkielmassa ovat äärellisiä, niin voidaan strategiat aina nimetä ja luetella.

Määritelmä 27. Olkoon S_a pelaajan $a \in \{1, 2\}$ puhtaiden strategioiden joukko ja $\#S_a = n$. Sekastrategia on joukko

$$S_{\mu,a} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Lause 28. *Sekastrategioiden joukko S_μ on rajoitettu, suljettu ja konveksi.*

Todistus. (kts. [19]). Olkoon $x \in S_\mu$, tällöin $x \in \mathbb{R}^n$ jossa n on puhtaiden strategioiden lukumäärä. Olkoon $M > 0$ sellainen luku että $|x| < M < \infty$. Silloin $x \in [0, M]^n$. Koska $n, M > 0$ ovat äärellisiä, niin silloin jokainen $x \in S_{\mu,a}$ on rajoitettu ja näin ollen joukko S_μ on rajoitettu. Tällöin joukko $S_{\mu,a}$ on suljettu. Olkoon nyt $x \in S_\mu$, $y \in S_\mu$ ja $t \in [0, 1]$. Tuolloin

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} (tx_i + (1-t)y_i) &= (tx_0 + (1-t)y_0) + \ldots + (tx_n + (1-t)y_n) \\
&= ((tx_0) + (1-t)y_0) + \ldots + ((tx_n) + (1-t)y_n) \\
&= (t \sum_{i=0}^{n} x_i + (1-t) \sum_{i=0}^{n} y_i) \\
&= t + (1-t) = 1,
\end{aligned}$$

joten joukon jokainen jono suppenee ja koska se on rajoitettu on se kompakti ja koska jokainen joukon piste voidaan yhdistää janasuoralla joka sisältyy joukkoon on joukko konveksi. Joukko on rajoitettu, suljettu ja konveksi. $\square$

Määritelmä 29. Jos $S_i = \{e_{i1}, \dots, e_{in}\}$, $i \in N$ on puhtaiden strategioiden joukko, niin niihin liittyvät sekastrategiat ja sekastrategioiden todennäköisyydet ovat $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in S_{\mu,i}$.

Määritelmä 30. Olkoon $S_1 = \{s_{11}, \ldots, s_{1J}\}$ ja $S_2 = \{s_{21}, \ldots, s_{2K}\}$ pelaajien puhtaat strategiat ja olkoon p_1 ja p_2 kuten määritelmässä 29. Jos pelaaja II pelaa strategioita S_2 todennäköisyyksillä p_2, niin pelaajan I odotettavissa oleva hyöty strategian s_{1j} pelaamisesta on

$$\begin{aligned} E_1 &\colon S_{\mu,2} \times S_1 \to \mathbb{R} \\ E_1(p_2, s_{1j}) &= \sum_{k=1}^{K} p_{2k} U_1(s_{1j}, s_{2k}). \end{aligned}$$

Pelaajan I odotettavissa oleva hyöty sekastrategian pelaamisesta on

$$\begin{aligned} E_{\mu,1} &\colon S_{\mu,1} \times S_{\mu,2} \to \mathbb{R} \\ E_{\mu,1}(p_1, p_2) &= \sum_{j=1}^{J} p_{1j} \left[\sum_{k=1}^{K} p_{2k} U_1(s_{1j}, s_{2k}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} p_{2k} U_1(s_{1j}, s_{2k}) \end{aligned}$$

jossa $p_{1j}p_{2k}$ on todennäköisyys sille että pelaaja I pelaa puhdasta strategiaa s_{1j} ja pelaaja II pelaa strategiaa s_{2k}. Vastaavasti, pelaajan II odotettavissa oleva hyöty, mikäli pelaaja I pelaa strategioita S_1 todennäköisyyksillä p_1 pelatessaan strategioita S_2 ja todennäköisyyksiä p_2, on

$$\begin{aligned} E_{\mu,2} &\colon S_{\mu,1} \times S_{\mu,2} \to \mathbb{R} \\ E_{\mu,2}(p_1, p_2) &= \sum_{k=1}^{K} p_{2k} \left[\sum_{j=1}^{J} p_{1j} U_2(s_{1j}, s_{2k}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} p_{1j} p_{2k} U_2(s_{1j}, s_{2k}) \end{aligned}$$

. . . .

Esimerkki 6. . . . jatkoa Täsmäävien Pennien pelin analyysille.

$(\mathbf{I}, \mathbf{II})$	Kruuna	Klaava
Kruuna	(-1,1)	(1,-1)
Klaava	(1,-1)	(-1,1)

Kuva 6: Täsmäävät pennit

Täsmäävien pennien pelissä 3 voisimme ajatella, että pelaaja I uskoo pelaajan II pelaavan kruunan todennäköisyydellä $0 \leq q \leq 1$ ja klaavan todennäköisyydellä $(1-q) \geq 0$. Odotusarvot pelaajalle I ovat

$$\begin{aligned} E(\text{Kruuna}) &= q \cdot (-1) + (1) \cdot (1-q) = 1 - 2q \\ E(\text{Klaava}) &= q \cdot (1) + (-1) \cdot (1-q) = 2q - 1 \end{aligned}$$

Koska $1 - 2q > 2q - 1$ jos ja vain jos $q < \frac{1}{2}$, niin pelaajan I paras puhdasstrategia on pelata kruunaa, jos $q < \frac{1}{2}$ ja klaavaa jos $q > \frac{1}{2}$. Jos taasen $q = \frac{1}{2}$ niin eroa ei ole valinnalla (kumpaankin on yhtä suuri todennäköisyys). Olkoot sitten Pelaajan 1 sekastrategia siten, että $0 \leq r \leq 1$ on todennäköisyys kruunalle ja $1 - r \geq 0$ on todennäköisyys klaavalle.

Haluamme määrätä parhaan odotettavissa olevan maksun $r^*(q)$ siten, että $(r, 1-r)$ on pelaajan I paras vastaus pelaajan II strategiaan $(q, 1-q)$:

$$\begin{aligned} r^*(q) &= (-1)\cdot rq + 1\cdot r(1-q) + 1\cdot(1-r)q + (-1)\cdot(1-r)(1-q) \\ &= -4rq + 2r + 2q - 1 = r(2-4q) + (2q-q) \end{aligned}$$

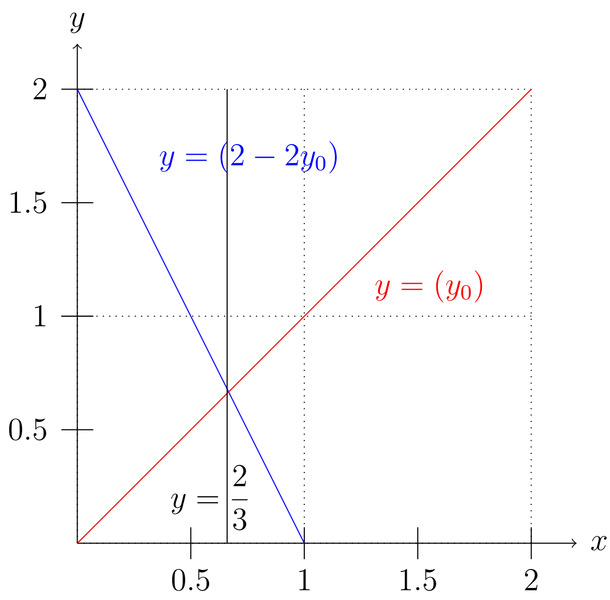
Nyt pelaajalle I $r(2-4q)$ on kasvava r:n suhteen, jos $2-4q > 0$ eli $q < \frac{1}{2}$ ja laskeva, jos $2-4q < 0$ eli $q > \frac{1}{2}$. Tuolloin, jos $r(2-4q) > 0$ on paras vastaus $r = 1$ elikkä kruuna ja jos $r(2-4q) < 0$ on paras vastaus $r = 0$ eli klaava. Päädymme toisin sanoen samaan tulokseen kuin puhtailla strategioilla, että mikäli $q < \frac{1}{2}$ niin kannattaa pelata Kruunaa ja jos $q > \frac{1}{2}$ niin klaavaa ja jos $q = \frac{1}{2}$ niin on samantekevää kumpaa pelataan. Sanomme funktiota $r^*(q)$ *parhaaksi vastaus korrespondensiksi.*

. . . .

Myöhemmin todistamme, että sekastrategioille on olemassa Nash-tasapaino todistaessamme Nashin lauseen. Määrittelemme Nash-tasapainon sekastrategioille kuten määritelmässä 25 jossa strategiat ovat nyt pelaajien sekastrategiat $S_{\mu,i}$.

. . . .

Esimerkki 7. Karkinpiilottamispeli 4 sisälsi kysymyksiä. Siirtykäämme niiden analysoimiseen. Selkeästi arvuuttajan maksimitappio on 2, kun arvaaja saa saman voiton. Tässä voimme siis ajatella, että Piilottaja valitsee vasemman käden todennäköisyydellä $p = y_0$ ja oikean käden todennäköisyydellä $y_2 = 1 - y_0$. Piilottajan odotettavissa oleva tappio



Kuva 7: Karkin piilottamispeli

on $E(y_0) = x \cdot p = 1 \cdot y_0$ kun arvaaja valitsee vasemman käden ja $E(y_0) = x \cdot p = 2 \cdot (1 - y_0)$ kun Arvaaja valitsee oikean käden. Piilottajan pahin odotettavissa oleva tappio on $\max\{y_0, 2(1-y_0)\}$, jonka piilottaja haluaa minimoida. Katso kuvaaja liittyen ongelmaan 7. Minimoidaksemme tappion, saamme yhtälöparin $y = y_0$ ja $y = 2 - 2y_0$ (kts. kuvaaja 7).

$$\begin{cases} 2 - 2y_0 &= \quad y \\ \quad y_0 &= y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y_0 &= \frac{1}{2}y \\ \quad y_0 &= y \end{cases} \Rightarrow 1 - y_0 = \frac{1}{2}y_0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

Nyt on selvää, että on odotettavissa Piilottajan kärsivän korkeintaan $y_0 = \frac{2}{3}$ tappion, joka on $\min\max\{y_0, 2(1-y_0)\}$ mutta ei ole odotettavissa korkeampaa tappiota. Arvaajan huonoin mahdollinen odotettavissa oleva voitto on $\min\{x_0, 2(1-x_0)\}$, jonka hän haluaa maksimoida. Arvaaja valitsee $x_0 = \frac{2}{3}$. Toisin sanoen, $E(2) = 2(1-y_0) = (2 \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$ ja $E(1) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ eli $\max\min\{x_0, 2(1-x_0)\} = \min\max\{y_0, 2(1-y_0)\} = \frac{2}{3}$ on pelin arvo joka kannattaa pelistä maksaa osallistuakseen siihen. Samalla näemme, että strategiana piilottaja kätkee yhden karkin vasempaan käteensä todennäköisyydellä $y_0 = \frac{2}{3}$ ja oikeaan käteensä todennäköisyydellä $1 - y_0 = \frac{1}{3}$.

. . . .

Karkinpiilottamisleikin analyysimme on lineaarinen optimointitehtävä le Maxmin-teorian soveltamista peliin, jota käsittelemme tarkemmin myöhemmin. *Max-min teorian avulla voidaan pyrkiä määräämään suurin mahdollinen tuotto mitä on odotettavissa pelaajille.* Lopuksi, haluamme vielä palauttaa tutkielman pelin 1 muistiin. Tässä pelissä ei ole selkeästikään olemassa puhdasta voittostrategiaa. Sekastrategioina peliä voitaisiin kuitenkin käsitellä paljolti täsmäävien pennien tavoin. Esitämme johdantoa pelin analysoimiseksi.

. . . .

Esimerkki 8. Olkoon pelinä *kivi, paperi ja sakset.* Olettakaamme Pelaajan II pelaavan *kivi* todennäköisyydellä $p_0 \geq 0$, *paperi* todennäköisyydellä $p_1 \geq 0$, $p_0 + p_1 \leq 1$ ja *sakset* todennäköisyydellä $0 \leq 1 - p_0 - p_1 \leq 1$. Voisimme lisäksi olettaa, että voittoavaruus on $\{-1, 1\}$. Tuolloin voisimme määrittää odotettavissa olevat hyödyt samoin kuin täsmäävien

$(\mathbf{I}, \mathbf{II})$	Kivi	Paperi	Sakset
Kivi	(-1,-1)	(-1,1)	(1,-1)
Paperi	(1,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
Sakset	(-1,1)	(1,-1)	(-1,-1)

Kuva 8: Kivi, Paperi ja Sakset

pennien tapauksessa. Nyt, siis pätisi jokaiselle vaihtoehdolle erikseen:

$$\begin{aligned} E_1(\text{Kivi}) &= (-1)p_0 + (-1)p_1 + (1 - p_0 - p_1) = 1 - 2p_0 - 2p_1 \\ E_1(\text{Paperi}) &= p_0 - p_1 + (-1)(1 - p_0 - p_1) = 2p_0 - 1 \\ E_1(\text{Sakset}) &= (-1)p_0 + p_1 + (-1)(1 - p_0 - p1) = 2p_1 - 1 \end{aligned}$$

Edelleen, erilliset yhtälöt muodostavat yhtälöparven, joka voitaisiin ratkaista ja näin ollen maksimoida hyöty tai mahdollisuus voittaa sekastrategioiden mielessä. Jos tämä tehtäisiin, niin silloin saisimme tuloksen joka ei vaikuttaisi mielekkäältä ensisilmäyksellä.

1. Mitä tulos tarkoittaisi kyseisellä arvolla ?

2. Miten todennäköisyyden arvojen muuttuminen vaikuttaisi tulokseen ?

Tehtävää kannattaa tarkastella samassa mielessä kuin täsmäävät pennit.

. . . .

Huomaamme kohtaavamme lasten perinteisissä leikeissä valtavan tärkeitä yhteiskunnallisia pelejä. Esimerkiksi, monien saalistavien sekä saaliseläinten poikasten leikit koostuvat saalistamisesta tai saalistajalta pakenemiselta. Edelliset pelit omaavat, esimerkiksi, sovelluksia niin kansainvälisessä politiikassa [41], sodankäynnissä kuin pesäpallossakin joissa huomaamme yhteneväisiä piirteitä. Peleillä ja leikeillä on yllättäviä yhteneväisyyksiä muun maailman toimintaan. Shakkimestari Garri Kasparov on mm. muotoillut kirjansa nimeksi *Kuinka Elämä Jäljittelee Shakkia* ja näin kokenut shakkipelin voimakkaan yhteyden elämän ilmiöihin. Esimerkiksi, Vangin Dilemma (peli 5) sopii hyvin malliksi kun pelissä on kilpailevat osapuolet. Esimerkkejä Vangin dilemmaan (peli 5) taloustieteen puolelta ovat mm. hintaneuvottelut sekä hintakilpailut [39]. Joitakin kiintoisia popularisoivia esimerkkejä voit löytää The New York Times kirjoitelmista [37], [38]. Peliteorian historiaa sekä sovelluksia on esitetty aihetta mielenkiintoisesti popularisoivassa kirjassa [40].

4.2 Tuoton maksimointi: Min-Max ja Nash

Olen muotoillut tämän osan erityisesti täysin kilpailullisia pelejä, erityisesti nollasummapelimuodossa olevia, varten. Tutkielmassani tutkimme semanttisten pelien yhteydessä erityisesti *puhtaita strategioita* ja nollasummapelejä 1-0 pelimuodossa. Modaalipelit yleensä voidaan laatia kuten klassinen peli, jossa sekastrategiat ja strategiat ovat kuten aiemmin esitetty tutkielmassa. Esitämme tässä luvussa kuitenkin tarpeellisia luonnehdintoja, työkaluja, koneistoja ja todistuksia edellä esitetyille teorioille.

Määritelmä 31. Olkoon $G = \langle \{1,2\}, (S_i), (U_i) \rangle$ täysin kilpailullinen strateginen peli. Strategia $s^* \in S_1$ on maxminimoija pelaajalle 1, jos

$$\min_{s' \in S_2} U_1(s^*, s') \geq \min_{s' \in S_2} U_1(s, s') \text{ kaikille } s \in S_1$$

Samoin, strategia $s'^* \in S_2$ on maxminimoija pelaajalle 2, jos

$$\min_{s \in S_1} U_2(s, s'^*) \geq \min_{s \in S_1} U_2(s, s') \text{ kaikille } s' \in S_2$$

Olemme nähneet aiemmin esimerkin maximinimoijien käytöstä pelaajille toiminnassa aiemmin eri pelien yhteydessä. Maximinimoija pelaajalle pyrkii siis maksimoimaan pelaajan $i \in N$ tuoton U_i, jonka tämä voi varmasti saavuttaa.

Lause 32. *Täysin kilpailullisen pelin hyötyfunktiolle U pätee kaikille strategia pareille z*

$$\min_z(-U(z)) = -\max_z U(z).$$

Todistus. Selvä. □

Pelillä on olemassa optimaallinen strategia, mikäli seuraavat ja edelliset ehdot täyttyvät.

Lemma 33 ((vrt. [36]))**.** *Olkoon $G = \langle \{1,2\}, (S_i), (U_i) \rangle$ täysin kilpailullinen nollasummapeli. Silloin*

$$\max_{s' \in S_2} \min_{s \in S_1} U_2(s, s') = -\min_{s' \in S_2} \max_{s \in S_1} U_1(s, s').$$

Todistus. Jokaisella $s' \in S_2$ pätee (*):

$$-\min_{s \in S_1}(U_2(s, s')) = \max_{s \in S_1}(-U_2(s, s')) = \max_{s \in S_1} U_1(s, s').$$

Edellisiin selvennyksenä mainittakoon että kun $U_i \to \{-1, 1\}$ ja $U_1 = -U_2$, niin pätee $-\min U(z) = -(-1) = 1$ sekä $\max -U(z) = 1$. Oletuksena pätee lause 32 ja edellisten perusteella:

$$\begin{aligned}\max_{s' \in S_2} \min_{s \in S_1} U_2(s, s') &\overset{\text{L.32}}{=} -\min_{s' \in S_2}(-\min_{s \in S_1} U_2(s, s')) \overset{(*)}{=} -\min_{s' \in S_2}(-\min_{s \in S_1}(-U_1(s, s'))) \\ &\overset{\text{L.32}}{=} -\min_{s' \in S_2}(-(-\max_{s \in S_1} U_1(s, s'))) \overset{\text{L.32}}{=} -\min_{s' \in S_2} \max_{s \in S_1} U_1(s, s').\end{aligned}$$

□

Seuraavassa lauseessa olemme seuranneet lähdettä [36] ja täydentäneet sitä tarvittaessa. Olemme esimerkiksi tehneet päättely pelaajille 1 ja 2 erikseen.

Lause 34. *Olkoon $G = \langle \{1,2\}, (S_i), (U_i) \rangle$ täysin kilpailullinen nollasummapeli. Tuolloin,*

(I) Jos pari (s_1^*, s_2^*) on pelin G Nash-tasapaino, niin s_1^* maxminimoija pelaajalle I ja vastaavasti s_2^* on maxminimoija pelaajalle II.

(II) Jos pari (s_1^*, s_2^*) on pelin G Nash-tasapaino, niin

$$\max_{s \in S_1} \min_{s' \in S_2} U_1(s, s') = \min_{s' \in S_2} \max_{s \in S_1} U_1(s, s') = U_1(s_1^*, s_2^*).$$

(III) Jos $\max_{s \in S_1} \min_{s' \in S_2} U_1(s, s') = \min_{s' \in S_2} \max_{s \in S_1} U_1(s, s')$ ja $s = s_1^*$ on maksiminimoija pelaajalle I ja $s' = s_2^*$ on maksiminimoija pelaajalle II , niin pari (s_1^*, s_2^*) on Nash-tasapaino.

Todistus. Aloitamme kohdista (I) ja (II). Jos pari (s_1^*, s_2^*) on Nash-tasapaino, niin pelaajalle II pätee että $U_2(s_1^*, s_2^*) \geq U_2(s_1^*, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Koska $u_2 = -u_1$, niin vastaavasti pelaajalle I pätee $U_1(s_1^*, s_2^*) \leq U_1(s_1^*, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Täsmällisemmin,

$$U_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2).$$

Samalla lailla pätee myös että $U_1(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1, s_2^*)$ kaikilla $s_1 \in S_1$. Tällöin pätee myöskin $U_1(s_1^*, s_2^*) \geq \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2)$ kaikilla $s_1 \in S_1$. Edellisten perusteella pätee $U_1(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2)$. Joten edellisten kohtien perusteella pätee:

$$U_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2)$$

Voimme edellisten perusteella päätellä s_1^*:n olevan maksiminimoija pelaajalle I.

Seuraavaksi, tarkastellaan väitteen pitävyyttä pelaajalle II. Pätee $U_2(s_1^*, s_2^*) \geq U_2(s_1^*, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Tällöin pätee $U_2(s_1^*, s_2^*) \geq \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Edellisien perusteella pätee $U_2(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2)$. Sama argumentti kuin pelaajalle I pätee $U_2 = -U_1$. Tällöin pätee myöskin: $U_2(s_1^*, s_2^*) \leq U_2(s_1^*, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$, josta seuraa että $U_2(s_1^*, s_2^*) \leq \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2)$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Edelleen pätee $U_2(s_1^*, s_2^*) \leq \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2)$. Edellisten perusteella voimme päätellä että

$$U_2(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2).$$

Voimme edellisten perusteella päätellä että s_2^* on maksiminimoija pelaajalle II. Lemman 33 mukaan $U(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U_1(s_1, s_2)$ ja edellisten kohtien päättelyiden mukaan pätee pelaajalle 1

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U_1(s_1, s_2) = U_1(s_1^*, s_2^*)$$

ja pelaajalle 2

$$\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2) = U_2(s_1^*, s_2^*).$$

Kohta (III). Olkoon nyt $v^* = \max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} U_1(s_1, s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} U_1(s_1, s_2)$. Lemman 33 mukaan $\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} U_2(s_1, s_2) = -v^*$. Koska $s_1^* \in S_1$ on maksimininoija pelaajalle 1, niin pätee $U_1(s_1^*, s_2) \geq v^*$ kaikilla $s_2 \in S_2$. Vastaavasti, koska $s_2^* \in S_2$ on maksiminimoija pelaajalle 2, niin pätee $U_2(s_1, s_2^*) \geq -v^*$ kaikilla $s_1 \in S_1$. Kun asetetaan $s_1 = s_1^*$ ja $s_2 = s_2^*$, niin saadaan että $U_1(s_1^*, s_2^*) = v^*$ ja $U_2(s_1^*, s_2^*) = -v^*$ sillä pätee että $u_2 = -u_1$. Edellisestä päättelystä saamme seuraavaa, mikäli pari (s_1^*, s_2^*) on Nash-tasapaino:

$$\begin{cases} U_1(s_1^*, s_2^*) \geq U_1(s_1, s_2^*) \\ U_2(s_1^*, s_2^*) \geq U_2(s_1^*, s_2) \end{cases}$$

kaikilla $s_1 \in S_1$ ja $s_2 \in S_2$ koska $s_1^* \in S_1$ ja $s_2^* \in S_2$ ovat maksiminimoijat pelaajille 1 ja 2. Jos oletamme että (s_1^*, s_2^*) ei ole Nash-tasapaino, niin voimme päätellä että $U_1(s_1^*, s_2^*) < U_1(s_1, s_2^*)$ jollakin $s_1 \in S_1$. Silloin, seuraisi että $U_1(s_1^*, s_2^*) < -U_2(s_1, s_2^*) \leq v^* = U_1(s_1^*, s_2^*)$ joka johtaa ristiriitaan. Samoin voisimme päätellä että $U_2(s_1^*, s_2^*) < U_2(s_1^*, s_2)$ jollakin $s_2 \in S_2$. Tuolloin seuraisi, että $U_2(s_1^*, s_2^*) < -U_1(s_1^*, s_2) \leq -v^* = U_2(s_1^*, s_2^*)$ ja saisimme jälleen ristiriidan. □

4.3 Nashin lauseen todistus

Tässä kappaleessa annamme Nashin lauseelle todistuksen Brouwerin kiintopisteen avulla kahden pelaajan yleiselle summapelille (vrt. [15, 19]).

Lause 35 (Nashin lause)**.** *Jokaiselle kahden pelaajan yleiselle summapelille on olemassa Nash-tasapaino.*

Todistus. Olkoon $G = (N, S, U)$ yleinen kahden pelaajan summapeli. Määrittelemme pelaajien I ja II sekastrategioiden hyötyfunktion kuten annettu edellä (kts. määritelmä 30). Lauseen 28 mukaan on jokainen $S_{\mu,n}$, $n \in \{1, 2\}$ suljettu, rajoitettu ja konveksi. Olkoon numeroidut ja nimetyt $S_1 = \{e_{11}, \dots, e_{1J}\}$ pelaajan 1 puhtaat strategiat ja vastaavasti $S_2 = \{e_{21}, \dots, e_{2K}\}$ pelaajan 2 puhtaat strategiat numeroituna ja nimettynä. Puhtaiden strategioiden indeksi viittaa myös siihen liittyvään sekastrategiaan. Olkoon $p_1 = (p_{1j}, \dots, p_{1J}) \in S_{\mu,1}$ ja $p_2 = (p_{2j}, \dots, p_{2K}) \in S_{\mu,2}$ kuten määritelmässä 30. Määritellään

$$c_j = c_j(p_1, p_2) = \max\{(E_{\mu,1}(e_{1j}, p_2) - E_{\mu,1}(p_1, p_2)), 0\},$$

jossa c_j on pelaajan I mahdollinen hyöty pelaajan vaihtaessa sekastrategiasta p_{1j} puhtaaseen strategiaan $j = e_{1j} \in S_1$, tässä e_{1j} viittaa myös siihen liittyvään sekastrategiaan. Vastaavasti pelaajalle II määritellään

$$d_k = d_k(p_1, p_2) = \max\{(E_{\mu,2}(p_1, e_{2k}) - E_{\mu,2}(p_1, p_2), 0\},$$

jossa d_k on pelaajan II vastaava hyötyfunktio vaihdettaessa sekastrategiasta p_{2k} puhtaaseen strategiaan $k = e_{2k} \in S_2$.

Määritellään:

$$\tilde{E} \colon S_{\mu,1} \times S_{\mu,2} \to S_{\mu,1} \times S_{\mu,2}, \quad \tilde{E}(p_1, p_2) = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$$

jossa $\tilde{p}_{1j} = \dfrac{p_{1j} + c_j}{1 + \sum_{j'=1}^{J} c_{j'}} \in S_{\mu,1}, \tilde{p}_2 = \dfrac{p_{2k} + d_k}{1 + \sum_{k'=1}^{K} d_{k'}} \in S_{\mu,2}, j \in \{1, \dots, J\}, k \in \{1, \dots, K\}$

Kuvauksessa $\tilde{E}$ pätee nyt $\tilde{p}_1$:lle

$$\sum_{j=1}^{J} \tilde{p}_{1j} = \frac{\sum_{j=1}^{J}(p_{1j} + c_j)}{1 + \sum_{j'=1}^{J} c_{j'}} = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{1j} + \sum_{j=1}^{J} c_j}{1 + \sum_{j'=1}^{J} c_{j'}} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{J} c_j}{1 + \sum_{j'=1}^{J} c_{j'}} = 1.$$

sillä määritelmän 30 mukaan $\sum_{i=1}^{n} p_{1i} = 1$. Samoin pätee nyt $\tilde{p}_2$:lle

$$\sum_{k=1}^{K} \tilde{p}_{2k} = \frac{\sum_{k=1}^{K}(p_{2k} + d_k)}{1 + \sum_{k'=1}^{K} d_{k'}} = \frac{\sum_{k=1}^{K} p_{2k} + \sum_{k=1}^{K} d_k}{1 + \sum_{k'=1}^{K} d_{k'}} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{K} d_k}{1 + \sum_{k'=1}^{K} d_{k'}} = 1.$$

Koska $\tilde{E}$ on jatkuva kuvaus rajoitetuilta, konveksilta, suljetulta joukolta $S_{\mu,1} \times S_{\mu_2}$ joukkoon $S_{\mu,1} \times S_{\mu_2}$, sillä se on rajoitettujen, konveksien ja suljettujen joukkojen tulo, niin Brouwerin teoreeman mukaan löytyy $(p_1^*, p_2^*) \in S_{\mu,m} \times S_{\mu,n}$ siten että $\tilde{E}(p_1^*, p_2^*) = (p_1^*, p_2^*)$. Seuraavaksi osoitamme että valitsemalla Brouwerin teoreeman mukainen pari (p_1^*, p_2^*) pätee $c_j = 0$, $d_k = 0$, kaikilla $j \in \{1, \ldots, J\}$ ja kaikilla $k \in \{1, \ldots, K\}$. Oletetaan että on olemassa puhdasstrategia e_{11} jolla $c_1 > 0$ ja osoitetaan oletuksen johtavan ristiriitaan. Pätee

$$E_{\mu,1}(p_1, p_2) < E_{\mu,1}(e_{11}, p_2)$$

Esitämme pelaajan I sekastrategioiden hyötyfunktion painotettuna summana puhtaiden strategioiden hyötyfunktiosta

$$E_{\mu,1}(p_1, p_2) = \frac{\sum_{j=1}^{J} p_{1j} E(e_{1j}, p_2)}{\sum_{j=1}^{J} p_{1j}},$$

jolloin on keskiarvon ominaisuuksien nojalla oltava olemassa luku $\ell \in \{2, \ldots, J\}$ jolla $p_{1\ell} > 0$ ja

$$E_{\mu,1}(e_{1\ell}, p_2) \leq E_{\mu,1}(p_1, p_2),$$

josta seuraisi että $c_\ell = 0$ määritelmän mukaan. Tuolloin seuraisi kiintopisteoletuksen nojalla että

$$p_{1\ell} = \frac{p_{1\ell} + c_\ell}{1 + \sum_{j=1}^{J} c_j} = \frac{p_{1\ell}}{1 + \sum_{j=1}^{J} c_j} < \frac{p_{1\ell}}{1} = p_{1\ell}$$

joka on ristiriita koska oletimme että $c_1 > 0$, jolloin pätisi $\sum_{j=1}^{J} c_j > 0$. Edellisen ristiriidan nojalla ei voi päteä $c_1 > 0$. Päättely voidaan toistaa jokaiselle puhtaalle strategialle erikseen. Vastaavasti sama päättely voidaan tehdä pelaajalle II. $\square$

Osa II

Modaalinen Peliteoria

5 Modaalilogiikka: Pluraalien Totuuksien ja Asenteiden Kieli

Esitämme perusmodaalilogiikan kielen tutkielman kannalta riittävästi ja välttävästi teoksen [18] mukaan. Aleettinen modaalilogiikka ja Kripke-semantiikka, jota tässä esitämme on varsin yleinen teoria ja se *soveltuu yleisesti erilaisten intensionaalisten tai modaalisten logiikkojen tutkimusvälineeksi ja kieleksi.* Kripke-mallin käsite ja modaalilogiikan perusteoria on jopa niin vahvaa että sitä voidaan miltei sellaisenaan soveltaa, esimerkiksi: *Deonttisessa, Episteemisessä, Doksastisessa, Temporaalisessa, Dynaamisessa ja Aleettisessa logiikassa.*

5.1 Kielioppi eli Kielen Syntaksi

Määrittelemme modaalilogiikan semantiikan ns. Saul Kripken (s. 1940) käyttämän semantiikan avulla, koska se on lienee käytetyin ja selkein perussemantiikka. Aiheemme kannalta teoksessa [18] on yleisesitys semantiikasta. Mainittakoon uraauurtava Jaakko Hintikan kirja *Knowledge and Belief – Logic of Two Notions* [4] hyvänä lähteenä episteemisen ja doksastisen logiikan filosofiseen tutkimukseen sekä uraauurtava Deonttisen Logiikan kehittäjän Georg H. Von Wright:n *Norm and Action*, Routledge, 1963. Hintikan teoksessa esitellään Kripken järjestelmää vastaava järjestelmä, jossa Hintikka kutsuu *Mallijoukoiksi* (model set) mahdollisten maailmoiden järjestelmäänsä. Wright käyttää hieman vanhempaa järjestelmää, mutta teos on silti täysin käyttökelpoinen ja on mahdollista esittää Kripkesemantiikassa jonka esitämme myöhemmin.

Määritelmä 36. Modaalilogiikan kieli koostuu seuraavista aakkosista eli symboleista:

(L1) Lausemuuttujat(propositiosymbolit) $p_1, p_2, p_3, \ldots$

(L2) Konnektiivit $\neg$, $\vee$, $\wedge$

(L3) Välttämättömyysoperaattori $\Box$

(L4) Mahdollisuusoperaattori $\Diamond$

(L5) Sulut (,)

Modaali logiikan *hyvin muodostetut kaavat*[3] saadaan rekursiivisesti seuraavista ehdoista:

Määritelmä 37. Kaikki modaalilogiikan kaavat saadaan seuraavilla kaavanmuodostussäännöillä:

(M1) Lausemuuttujat(propositiosymbolit) $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ovat kaavoja

(M2) Jos A on kaava, niin $\neg A$, $\Box A$, $\Diamond A$ ovat kaavoja

(M3) Jos A ja B ovat kaavoja, niin $(A \vee B)$ ja $(A \wedge B)$ ovat kaavoja

[3]Englanniksi *well-formed formulas* (wff).

Koska $(\neg, \vee)$ on täydellinen konnektiivipari, niin muut konnektiivit voidaan lausua sen avulla. Esimerkiksi

$$(A \vee B) :=_{\text{def}} \neg(\neg A \wedge \neg B) \qquad (\neg A \vee B) :=_{\text{def}} (A \rightarrow B)$$

Modaalioperaattorit $\Box A$ ja $\Diamond A$ ovat toistensa duaaleita ja määrittelemme

$$\Diamond A :=_{\text{def}} \neg\Box\neg A.$$

Koska keskustelemme tutkielmassa *asenteiden logiikasta* niin on syytä myös määritellä miten voimme puhua vaikkapa yksittäisen henkilön asenteesta, käsityksestä, velvoitteesta tai uskomuksesta jotakin asiaa kohtaan. Tarvitsemme ensin seuraavan määritelmän.

Määritelmä 38. Alaindeksillä α modaalioperaattorin $[\mathbf{M}]_\alpha$ edessä tarkoitamme agentin eli asenteen omaavan yksilön nimeä.

Edellisen määritelmän avulla voimme, esimerkiksi, *yksilöidä asenteita tai tutkia yksittäisten agenttien asenteiden käyttämisen tai kielen käytön seurauksia* myöhemmin esitettävässä semantiikassamme. Muotoilu ei yleensä ole, johtuen luonnollisen kielen monimerkityksekkyydestäkin, yksioikoista.

. . . .

Esimerkki 9. Käyttäen määritelmää 38 voimme nyt esittää useita erilaisia muotoiluita agentin asenteille käyttäen modaalioperaattoreita. Tulkitut modaalioperaattorit esimerkissä ovat episteeminen tieto-operaattori **K** ja doksastinen uskomusoperaattori **B** sekä **O** velvoiteoperaattori ja **P** sallimusoperaattori ovat normatiivisia Deonttisia operaattoreita.

1. $\mathbf{K}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α tietää, että A'
2. $\mathbf{K}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α tietää, johko A'
3. $\mathbf{K}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α tuntee A'
4. $\mathbf{B}_\alpha A :=_{\text{def}}$ '‘α uskoo, että A'
5. $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{K}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α uskoo tietävänsä, että A'
6. $\mathbf{B}_\alpha \mathbf{K}_\beta A :=_{\text{def}}$ 'α uskoo että β tietää, että A'
7. $\mathbf{K}_\alpha \mathbf{B}_\beta A :=_{\text{def}}$ 'α tietää että β uskoo, että A'
8. $\mathbf{K}_\alpha \mathbf{B}_\beta A :=_{\text{def}}$ 'α tietää että β luulee, että A'
9. $\mathbf{O}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α:lla on velvollisuus, että A'
10. $\mathbf{P}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α:lle on sallittua, että A'
11. $\mathbf{P}_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α sallii, että A'

. . . .

Sanomme myöskin lausemuuttujia (propositiosymboleita) atomilauseiksi. Säännöillä (M2) – (M3) saatuja kaavoja kutsumme myös lauseiksi tai molekulaarilauseiksi koska ne muodostetaan toisista lauseista. Teemme seuraavan sopimuksen kaavan uloimpien sulkeiden suhteen: *jatkossa ei ole tarpeen kirjoittaa kaavan uloimpia sulkeita näkyviin.*

Teemme tässä eroa sanojen *kaava* ja *lause* käyttötarkoituksen välillä vaikka usein niitä käytetään takoittamaan samaa asiaa [18]. Tutkielmassa ei korosteta muuten kuin on tarpeen eroa. Näillä kahdella sanalla on kuitenkin eroa. Esimerkiksi, myöhemmin käsiteltävässä predikaattilogiikassa *lause on sellainen kaava, jossa ei esiinny yhtään muuttujaa vapaana.* Kirjallisuudessa näiden kahden sanan käyttö modaalilogiikassa on toisinaan erilainen, nimittäin *lause on modaalilogiikan kaava joka on saatu instantoimalla toisesta modaalilogiikan kaavasta*[4].

Määritelmä 39. Olkoon A modaalilogiikan kaava ja $q_1, \ldots, q_k$ sen lausemuuttujat. Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ modaalilogiikan kaavoja. Sanomme kaavaa A' joka on saatu kaavasta A sijoittamalla, lausemuuttujiin q_i kaavat B_i, kaavan A instanssiksi. Merkitsemme sijoitusta $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$.

5.2 Kielen Raamit: Kripke Malli ja semantiikka

Määritelkäämme ensin Kripke-raami, joka on koko Kripke-semantiikan tärkein käsite.

Määritelmä 40. Kripke-raami on $F = \langle W, R \rangle$, jossa W on mahdollisten maailmoiden joukko ja $R \subseteq W \times W$ on vaihtoehtorelaatio.

Edellistä määritelmää tarvitsemme tutkielman aivan lopussa ja se on yksinkertaisesti nimensä mukaisesti malli ilman vielä liitettyjä lausemuuttujia tai kaavoja. Voidaksemme puhua varsinaisesti totuudesta tai kielestä, on meidän määriteltävä tarkemmin.

Määritelmä 41 (Kripke Malli)**.** Kripke-malli on struktuuri $M = \langle W, R, P \rangle$, jossa $W \neq \emptyset$ on mahdollisten maailmojen joukko, $R \subseteq W \times W$ vaihtoehtorelaatioiden joukko. P on kuvaus $P\colon A \to \mathcal{P}(W)$, jossa $A = \{p_0, p_1, \ldots\}$, joka kuvaa lausemuuttujat $p_i \in A$ (propositiosymbolit) mahdollisten maailmoiden W osajoukoille.

Malleissa tarkastellaan tutkittavia kaavoja *aktuaalisen maailman suhteen.* Aktuaalista maailmaa merkitään yleensä joko w:llä tai w_0:lla. Usein ajatellaan vaihtoehtoisia maailmoita todellisina vaihtoehtoina joihin toiminta tai kielenkäyttö voi johtaa (kts. esim. [6, 10]).

Merkitsemme asiantilaa wRw', $R(w, w')$ tai $(w, w') \in R$ lauseyhteydestä riippuen. Relaatioilla R voi olla mm. seuraavia ominaisuuksia kaikilla $w, w', w'' \in W$:

1. Seriaalinen jos $\forall w \in W\, \exists w' \in W\colon (w, w') \in R$
2. Refleksiinen $(w, w) \in R$
3. Symmetrinen $(w, w'), (w', w) \in R$
4. Antisymmetrinen $(w, w') \in R$ mutta $(w', w) \notin R$
5. Transitiivinen $(w, w'), (w', w'') \in R \Rightarrow (w, w'') \in R$
6. Euklidinen $(w, w'), (w, w'') \in R \Rightarrow (w', w'') \in R$

Mikäli yksilöimme agenttien asenteita Kripke-malleissa tai lisäämme muita modaalioperaattoreita, on meidän annettava myöskin agenttien ja asenteiden vaihtoehtorelaatiot Kripkemallissa. Niinpä, mallissa jossa käsittelemme vaikkapa Abélard:n tietämyksiä ja Eloise:n uskomuksia on meidän annettava erikseen kummankin vaihtoehtorelaatiot[5].

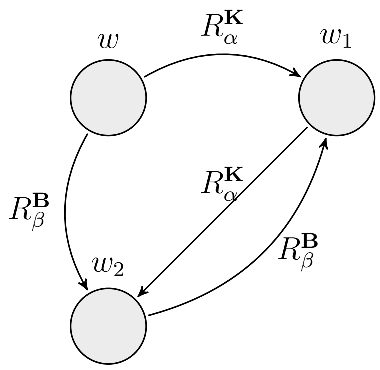
. . . .

[4]Esim .Jaakko Hintikan kirjassa *Knowledge and Belief – Logic of Two Notions*, Cornell University Press, 1962 (Reprint 2005) tehdään luvussa 1.6 ero näiden välillä.

[5]Héloïse d'Argenteuil eli Eloise (1101 — 1162) oli ranskalainen benediktiiniläisnunna ja keräsi 42 teologista kysymystä Pierre Abélardille (1079 — 1142) joka oli yksi skolastisen metodin kehittäjistä. Eloise ja Abélard tulivat tunnetuiksi romanssistaan.

Esimerkki 10. Käsittelemme Kripke-mallissa α='Abélard':n tietoa ja β='Eloise':n uskomuksia. Näin ollen on meidän määriteltävä malli, jossa on annettu Abéladin vaihtoehtorelaatio ja Eloisen vaihtoehtorelaatio. Eräs tälläinen Kripke-malli on silloin, esimerkiksi

$$M = \langle W, R_\alpha^{\mathbf{K}}, R_\beta^{\mathbf{B}}, P \rangle, \quad W = \{w, w_1, w_2\},$$
$$R_\alpha^{\mathbf{K}} = \{(w, w_1), (w_1, w_2)\}, \quad R_\beta^{\mathbf{B}} = \{(w, w_2), (w_2, w_1)\}$$



jossa $R_\alpha^{\mathbf{K}} \subseteq W \times W$ on Abélard episteemiset vaihtoehtorelaatiot mallissa M ja $R_\beta^{\mathbf{B}} \subseteq W \times W$ ovat Eloisen doksastiset vaihtoehtorelaatiot mallissa M.

. . . .

Seuraavaksi määrittelemme mitä tarkoitamme kaavan totuudella Kripke-mallissa M, tai lyhyemmin K-mallissa. Kaavan totuus K-mallissa saadaan rekursiivisesti seuraavan määritelmän avulla.

Määritelmä 42. Modaalilogiikan kaavoilla (M1)–(M3) muodostettujen kaavojen totuus määräytyy mahdollisissa maailmoissa nyt seuraavasti

(1) Jos $A = p$ on lausemuuttuja, niin $M, w \models p$ joss $w \in P(p)$

(2) Jos $\neg A$ on kaava, niin $M, w \models \neg A$ joss $M, w \not\models A$

(3) Jos A, B ovat kaavoja, niin $M, w \models A \vee B$ joss $M, w \models A$ tai $M, w \models B$

(4) Jos A, B ovat kaavoja, niin $M, w \models A \wedge B$ joss $M, w \models A$ ja $M, w \models B$

(5) Jos $\Box A$ on kaava, niin $M, w \models \Box A$ joss $M, w' \models A$ jokaiselle $w' \in M$ jolle pätee $(w, w') \in R$

(6) Jos $\Diamond A$ on kaava, niin $M, w \models \Diamond A$ joss $M, w' \models A$ jollekin $w' \in M$ jolle pätee $(w, w') \in R$

Muuten sanomme että kaava on epätosi ja merkitsemme esimerkiksi kaavalle A: $M, w \not\models A$.

Edellinen määritelmä ei anna mitään muuta vihjettä sellaisen tilanteen kannalta jossa on kaava $\Box A$ joka pitäisi tulkita maailmassa $w \in W$, mutta jolle ei päde $\exists w' \in W : wRw'$. Yleensä sovitaan seuraavan määritelmän mukaisesti.

Määritelmä 43. (Reunanylitys) Olkoon M Kripke-malli ja olkoot $\Box A$ ja $\Diamond A$ kaavoja. Jos ei päde että $\exists w' \in W : wRw'$, niin määrittelemme:

- $M, w \models \Box A$
- $M, w \not\models \Diamond A$

Määrittelemme totuusjoukon kaavalle A mallissa M seuraavasti:

Määritelmä 44. Kaavan A totuusjoukko mallissa M on joukko

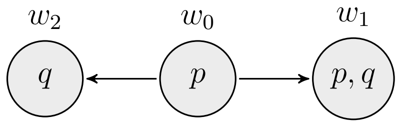
$$\|A\|^M = \{w \in W \mid M, w \models A\}$$

Esimerkki 11. Olkoon K-malli M seuraava:

$$M = \langle W, R, P \rangle, \quad W = \{w_0, w_1, w_2\}, \quad R = \{(w_0, w_1), (w_0, w_2)\},$$
$$P(p) = \{w_0, w_1\} \quad \text{ja} \quad P(q) = \{w_1, w_2\}.$$

Nyt mm. pätee

$$M, w_0 \models \Box q, \quad M, w_0 \models \Box (q \vee p)$$
$$M, w_0 \models \Diamond p \quad M, w_0 \not\models \Box q \to q$$



Edellisessä esimerkissä korostuu myöskin eräs tärkeä relaatioiden ominaisuus. Nimittäin, refleksiivisyys R:n ominaisuutena vastaa myös esimerkiksi kaavaa $\Box A \to A$. Intuitiivisesti vaikuttaisi todelle että jos A on välttämättä tosi, niin siitä seuraa että A. Kuitenkin, esimerkiksi, tässä mallissa relaation ominaisuus johtaa siihen että kaava ei ole yleisesti tosi. Asenteiden suhteen on hyvinkin järkevää ajatella refleksiivisyyden yleistä paikkansapitävyyttä: esimerkiksi, mitä tämä tarkoittaisi tiedon tai luulon suhteen ? Mielenkiinnosta voisin johdatella seuraaviin tietoteoreettisiin, epistemologisiin, kysymyksiin:

1. Minkälaista ovat K-malleissa tietoteoriat[6] : *evidenssi, koherentti, correspondenssi* ?

2. Minkälainen René Descartesin (1596 – 1650) *tietoteoria*[7] olisi K-malleissa ?

Edelleen, jatkamme edellä esitettyä esimerkkiä Abélardin ja Eloisen suhteen. Esimerkissä oletamme ainoastaan että operaattorit **K** ja **B** noudattavat samoja sääntöjä kuin esimerkiksi välttämättömyysoperaattori $\Box$ agenttien vaihtoehtorelaatioiden suhteen.

Esimerkki 12. Käsittelemme Kripke-mallissa α='Abélard':n tietoa ja β='Eloise':n uskomuksia. Olkoon Kripke malli M seuraavanlainen

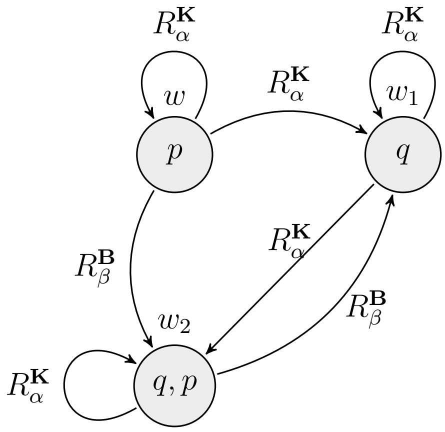
$$M = \langle W, R_\alpha^{\mathbf{K}}, R_\beta^{\mathbf{B}}, P \rangle, \quad W = \{w, w_1, w_2\},$$
$$R_\alpha^{\mathbf{K}} = \{(w, w), (w, w_1), (w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}, \quad R_\beta^{\mathbf{B}} = \{(w, w_2), (w_2, w_1)\}$$
$$P(p) = \{w, w_2\}, \quad P(q) = \{w_1, w_2\}$$

Nyt pätee mm. seuraavat kaavat Abélardille ja Eloiselle:

$$M, w \not\models \mathbf{K}_\alpha q \quad M, w \models \mathbf{K}_\alpha q \to q$$
$$M, w \not\models \mathbf{K}_\alpha \mathbf{K}_\alpha p \quad M, w \models \mathbf{K}_\alpha p \to p$$
$$M, w \models \mathbf{B}_\beta q \quad M, w \not\models \mathbf{B}_\beta \mathbf{B}_\beta p$$

[6] Kun kysymme tietoteoriosta, tarkoitamme tietysti tiedon varmennustapaa elikkä totuutta tässä yhteydessä. Esimerkiksi, *koherentti teoria olettaa lauseiden olevan keskenään ristiriidattomia.* Miten esittäisit sen K-malleissa ?

[7] René Descartes (1596 – 1650) uskoi perimmäisen totuuden olevan johdettavissa sisältä käsin: "*...meidän ei koskaan pidä mennä uskomaan muuuhun kuin järkemme todistukseen...*", René Descartes, *Teokset I*, Gaudeamus 2001, 335 sivua. Edellä mainitusta teoksesta erityisesti *Metodin esitys, 4. osa* kattaa tärkeimpiä perusteluita.



. . . .

5.3 Analyyttinen ja synteettinen: Tautologia ja Validisuus

Otsikointi viittaa siihen totuuksien sekä lauseiden jaotteluun jonka viimeisiä suuria uran uurtajia olivat Immanuel Kant (1724-–1804) teoksillaan

1. *Kritik der reinen Vernunft (Puhtaan Järjen Kritiikki)*(1781),

2. *Prolegomena zu einer Jeden Künftigen Metaphysik (Prolagomena eli johdatus mihin tahansa metafysiikkaan, joka vastaisuudessa voi käydä tieteestä)*(1783)

sekä Ludwig Wittgenstein (1889–1951) mm. teoksellaan *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921/1933). Wittgenstein esittää Tractuksessaan mm. totuusfunktionaaliteorian ja sen avulla lauseen totuuden. G. H. Von Wright (1916–2003) esittää, teoksessa *Looginen Empirismi*(1943/1998) luvussa 4. *loogisen tiedon luonne*, että lauseiden jaottelu totuusfunktionaalisesti voidaan jakaa i) *analyyttisiin lauseisiin eli tautologioihin* ja ii) *synteettisiin eli ekstentionaalisiin* lauseisiin. Ekstensionaalisilla lauseilla koemme olevan tietoa lisäävä vaikutus, kun taas tautologia ei tuo mitään uutta tietoa. Tämän tutkielman osalta emme voi ottaa kantaa *synteettinen a priori* lauseiden olemassaoloon, sillä tutkielmassamme emme pureudu lauseiden sisällön semantiikkaan vaan pureudumme niiden rakenteen semantiikkaan. Tautologia, validisuus sekä käyttämämme logiikan kaavat yleisesti ovat käytännössä luokiteltavissa analyyttisen ja synteettisen määritelmiin, sillä tautologiat ovat tosia kaikissa Kripke-malleissa ja validit lauseet sekä kaavat ovat tosia toisissa K-malleissa mutta voivat hyvin olla sekä epätosia että tosia toisissa K-malleissa. Erityisesti, myöhemmin puhuessamme systeemeistä tämä näkökulma on ilmeinen johtuen puhtaasti jo määritelmistä. Olemme myös nähneet esimerkin kaavan $\Box A \to A$ suhteen, joka vastaa vaihtoehtorelaation R ominaisuutta refleksiivinen.

Määritelmä 45. Sanomme, että lause eli kaava A on validi Kripke-mallissa M jos ja vain jos pätee

$$\forall w \in W\colon M, w \models A.$$

Merkitsemme tuolloin että $M \models A$. Jos A on validi jokaisessa Kripke-mallissa niin merkitsemme myös $\models A$ tai $\models_K A$.

Modaalilogiikan tautologiat määritellään:

Määritelmä 46. kaava B on *modaalilogiikan tautologia*, jos on olemassa sellainen lauselogiikan eli propositionaalilogiikan tautologia A ja *modaalilogiikan kaavat* $B_1, \ldots B_k$, että $B = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$.

Tarvitsemme tuloksia liittyen validisuuteen ja tautologiaan erityisesti semanttisten pelien yhteydessä, mutta enemmänkin määritelmän omaisesti ja yhteydessä. Todistaaksemme seuraavat tulokset on meidän määriteltävä totuusfunktio eli valuaation käsite.

Määritelmä 47. Totuusfunktio eli valuaatio on kuvaus $v\colon \{p_1, p_2, \ldots\} \to \{t, e\}$. Totuusfunktio laajennetaan lauseiden eli kaavojen joukkoon seuraavasti: $v\colon \{A \mid A \text{ on kaava}\} \to \{t, e\}$.

Edellä mainittu lauselogiikan tautologia tarkoittaa sitä että jos A on lause ja v on mielivaltainen valuaatio, niin

Määritelmä 48. Lauselogiikan tautologia on lauselogiikan kaava A jolle pätee $v(A) = t$ kaikilla valuaatiolla.

Todistaaksemme tuloksia Modaalilogiikan tautologiaan liittyen tarvitsee ensin todistaa tuloksen että tautologiaan sijoitus on tautologia. Tätä ennen on meidän kuitenkin todistettava seuraava aputulos jota tarvitsemme:

Lause 49. *Tarkastellaan lauselogiikan kaavoja A, joissa on korkeintaan lausemuuttujat $q_1, \ldots, q_k$ ja olkoon $B_1, \ldots, B_k$ kaavoja. Olkoon $A' = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Olkoot valuaatiot v ja v' sellaisia, että*

$$v(q_i) = v'(B_i), \quad i \leq k \text{ ja } v(A') = v'(A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]).$$

Todistus. Lause todistetaan induktiolla lauseen pituuden suhteen. Olkoot A, B ja C kaavoja, jolloin: $(A)' = A'$, $(\neg B)' = (\neg B')$, $(A \wedge B)' = A' \wedge B'$, $(A \vee B)' = A' \vee B'$.

1. Olkoon $A = q_i$. Tuolloin $A' = B_i$. $v(A') = v(B_i) = v'(A[q_i/B_i]) = v'(A)$ kun $i \leq k$.

2. Olkoon $A = \neg B$ ja väite pätee. $v(A') = v(\neg B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]) = v(\neg B') = t \Leftrightarrow v'(\neg B) = v(\neg B') = v(A') = t$.

3. Olkoon B ja C joille väite pätee. $v((B \wedge C)') = v(B' \wedge C') = t \Leftrightarrow v(B') = t$ ja $v(C') = t \Leftrightarrow v'(B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]) = t$ ja $v'(C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k) = t \Leftrightarrow v'(A \wedge B) = t$.

4. Olkoon B ja C joille väite pätee. $v((B \vee C)') = v(B' \vee C') = t \Leftrightarrow v(B') = t$ tai $v(C') = t \Leftrightarrow v'(B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]) = t$ tai $v'(C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k) = t \Leftrightarrow v'(A \wedge B) = t$.

$\square$

Nyt voimme todistaa yleisen väittämän että sijoittamalla lauselogiikan tautologiaan saadaan lauselogiikan tautologia.

Lause 50. *Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ ja A lauselogiikan kaavoja. Jos A on tautologia, niin on myös $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$.*

Todistus. Oletetaan ensin että A on tautologia ja $A' = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Kaavalle A pätee että $v(A) = t$ mielivaltaisella totuusjakaumalla tautologian määritelmän mukaan. Olkoon nyt voimassa lause 49. Silloin $v(A') = v(A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]) = v'(A)$. Pätee $v'(A) = t$ aina koska A on tautologia, niin myös kaava $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ on tautologia ja siksi A' on tautologia. □

Seuraavaksi osoitamme että lauselogiikan tautologiat ovat K-valideita mielivaltaisissa Kripke malleissa. Todistamme ensin seuraavan lauseen jota tarvitsemme.

Lause 51. *Olkoon v valuaatio, M-Kripkemalli ja w sen maailma. Jos*

$$v(p_i) = t \Leftrightarrow M, w \models p_i,\ i \in \mathbb{N},\ \textit{niin}\ v(A) = t \Leftrightarrow M, w \models A$$

aina kun A on lauselogiikan kaava.

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla. Olkoon A ja B sellaisia kaavoja joille väite pätee. Lauseen oletuksin pätee:

1. $v(\neg A) = t \Leftrightarrow v(A) = e \Leftrightarrow M, w \not\models A \Leftrightarrow M, w \models \neg A$
2. $v(A \wedge B) = t \Leftrightarrow v(A) = v(B) = t \Leftrightarrow M, w \models A$ ja $M, w \models B \Leftrightarrow M, w \models A \wedge B$
3. $v(A \vee B) = t \Leftrightarrow v(A) = t$ tai $v(B) = t \Leftrightarrow M, w \models A$ tai $M, w \models B \Leftrightarrow M, w \models A \vee B$

□

Seuraava lause sanoo että propositiolauseen A tautologisuus vastaa samaa kuin K-validisuus.

Lause 52. *Olkoon A lauselogiikan kaava. Tällöin A on tautologia jos ja vain jos pätee $\models_K A$.*

Todistus. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ sekä $w \in W$ mielivaltaisia ja oletetaan että A on tautologia. Määritellään valuaatio:

$$v(p_i) = \begin{cases} t,\ w \in P(p_i) \\ e,\ w \notin P(p_i) \end{cases}$$

Määritelmän mukaan $v(p_i) = t \Leftrightarrow M, w \models p_i$. Koska A oletettiin tautologiaksi, niin pätee $v(A) = t$ ja lauseen 51 perusteella pätee $W, w \models A$. Koska oletimme K-mallin M ja w mielivaltaisiksi, niin tautologia A on osoitettu K-validiksi määritelmän 45 mukaan. Toiseen suuntaan, riittää tehdä jälleen olettamus että $M = \langle W, R, P \rangle$ sekä $w \in W$ mielivaltaisia ja A on K-validi. Koska jälleen $M, w \models A$ mielivaltaisella w:llä, niin nyt lauseesta 51 seuraa että $v(A) = t$. Koska malli M oli mielivaltainen, niin seuraa siitä nyt että K-validi kaava A on tautologia. □

On huomattava että kaava voi hyvinkin olla Kripke-mallissa validi mutta ei välttämättä yleisesti K-validi eikä siiskään tautologia. Modaalilogiikan tautologia on kuitenkin validi. Todistaaksemme edellisen, on meidän ensin todistettavat seuraavat lauseet. Aloitamme lauseella joka on analoginen lauselogiikan sijoituslauseelle.

Lause 53. *Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ kaavoja ja $q_1, \ldots, q_k$ lausemuuttujia. Jos K-mallit $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $M' = \langle W, R, P \rangle$ ovat sellaisia että*

$$P(p_j) = \begin{cases} \|B_i\|^{M'}, & \textit{jos}\ \exists i \in \{1, \ldots, k\} : p_j = q_i \\ P'(p_j), & \textit{muulloin} \end{cases}$$

niin $M, w \models A \Leftrightarrow M', w \models A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ aina, kun $w \in W$ ja A on modaalilogiikan kaava.

Todistus. Olkoon A lausemuuttuja jolloin lauseen oletukset ovat voimassa. Oletetaan induktio-oletuksena seuraavaksi että B, C ovat kaavoja joille oletus pätee. Tällöin:

$$M, w \models B \Leftrightarrow M', w \models B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \text{ kaikilla } w \in W \text{ ja}$$

$$M, w \models C \Leftrightarrow M', w \models C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \text{ kaikilla } w \in W$$

Tuolloin:

1. $M, w \models \neg B \Leftrightarrow M, w \not\models B \overset{\text{Ind.Ol.}}{\Leftrightarrow} M', w \not\models B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$
   $\Leftrightarrow M', w \models \neg B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ kaikilla $w \in W$.

2. $M, w \models B \wedge C \Leftrightarrow M, w \models B$ ja $M, w \models C \overset{\text{Ind.Ol.}}{\Leftrightarrow}$
   $M', w \models B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ ja $M', w \models C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \Leftrightarrow$
   $M', w \models (B \wedge C)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ kaikilla $w \in W$

3. $M, w \models B \vee C \Leftrightarrow M, w \models B$ tai $M, w \models C \overset{\text{Ind.Ol.}}{\Leftrightarrow}$
   $M', w \models B[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ tai $M', w \models C[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \Leftrightarrow$
   $M', w \models (B \vee C)[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ kaikilla $w \in W$

4. Olkoon $w, w' \in W$ siten että $M, w \models \Box B \Leftrightarrow M, w' \models B$ aina kun $(w, w') \in R \overset{\text{Ind.Ol.}}{\Leftrightarrow}$
   $M', w' \models B \Leftrightarrow M', w \models \Box B$.

□

Osoitamme seuraavaksi että, jos kaava on modaalilogiikan K-validi kaava niin siihen sijoituksella saadaan K-validi kaava. Tässä vaiheessa on hyvä muistaa että tautologiat ovat K-valideita. Niimpä olemme osoittaneet jo tärkeän osan Modaalilogiikan tautologioista ja siirrymme nyt osoittamaan että voimme tehdä vastaavalla tavalla sijoituksia modaalilogiikan kaavoihin kuin teimme lauselogiikan yhteydessä alussa.

Lause 54. *Olkoon $B_1, \ldots, B_k$ ja A modaalilogiikan kaavoja. Jos $\models_K A$, niin $\models_K A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$.*

Todistus. Oletetaan että $\models_K A$ ja olkoon $M' = \langle W, R, P \rangle$ K-malli. Määritellään K-malli $M = \langle W, R, P \rangle$ siten että

$$P(p_j) = \begin{cases} \|B_i\|^{M'}, & \text{jos } \exists i \in \{1, \ldots, k\} : p_j = q_i \\ P'(p_j), & \text{muulloin} \end{cases}$$

Lauseen 53 mukaan

$$M, w \models A \Leftrightarrow M', w \models A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k] \text{ aina, kun } w \in W.$$

Koska pätee että A on K-validi, niin pätee että $M, w \models A$ kaikilla $w \in W$ joten pätee myös $M', w \models A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ aina, kun $w \in W$. Koska mallista M' ei oletettu mitään erityistä, niin seuraa että $\models_K A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. □

Lopuksi keräämme edelliset lauseet yhteen tulokseen, jota olemme pyrkineet todistamaan (vrt. [18]):

Lause 55. *Olkoon B modaalilogiikan tautologia. Tällöin B on K validi.*

Todistus. Modaalilogiikan tautologiat B ovat määritelmän 46 mukaan kaavoja, jotka ovat saatu lauselogiikan tautologioista A sijoittamalla kaavat $B_1, \ldots, B_k$ lausemuuttujiin $q_1, \ldots, q_k$ siten että $B = A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$. Lauseen 52 mukaan ovat lauselogiikan tautologiat K-valideita. Tapauksessamme A on siis K-validi. Lauseen 54 mukaan taas ovat K-valideista kaavoista sijoituksella $A[q_1/B_1, \ldots, q_k/B_k]$ saadut kaavat K-valideita kaavoja $\models_K B$. Koska olemme saaneet mielivaltaisen kaavan B määritelmän 46 mukaisesta tautologiasta A sijoittamalla, niin B on modaalilogiikan tautologia ja siis K-validi. □

. . . .

Esimerkki 13. Lauselogiikan kaava $A = \neg(q \wedge \neg q)$ on lauselogiikan tautologia. Sijoittamalla A:n modaalilogiikan kaava $B = \Box A$ saadaan modaalilogiikan tautologia:

$$A' = A[q/B] = \neg(\Box A \wedge \neg\Box A).$$

. . . .

5.3.1 Totuus, Koko Totuus ja Ainoastaan Totuus: Totuuden asteet

Tämä luku kattaa lähinnä lyhyen yhteenvedon Modaalilogiikan ja Kripke-mallien totuuden luonteesta. Kuten edellisessä luvussa huomasimme, niin totuuden aste on erilainen käsitteillä: Tautologia, Validi, kaava ja K-validi. Yhteenvetona voisimme esittää seuraavan luettelon totuuden eri asteista, jotka ovat taasen käyttökelpoisia luokiteltaessa voittostrategian luonnetta:

Määritelmä 56. Modaalilogiikan kaavan totuus Kripke mallissa M voidaan jaotella seuraavasti edellisten lukujen ja validisuuden käsitteen pohjalta:

1. Jollekin $w \in W$ pätee $M, w \models A$ eli siis kaava on aksidentaalisesti tosi. Samoin tilanteessa $M, w \not\models A$
2. Kaikille $w \in W$ K-mallissa M pätee $M, w \models A \Leftrightarrow M \models A$ ja A on siis validi ainakin yhdessä mallissa.
3. Kaikille $M \in \mathcal{M}_K$ pätee että $M \models A$ eli kyseessä on modaalilogiikan tautologia tai yleisesti validi lause ja pätee $\models_K A$.
4. Kaikille $M \in \mathcal{M}_K$ pätee että $M \not\models A$ eli kyseessä on ristiriitainen kaava.

Edellisissä M_K on Kripke-mallien M luokka, joka siis sisältää kaikki K-mallit. Voimme esittää että modaalilogiikassa totuus jakautuu neljään eri asteeseen joista äärimmäisinä tapauksina ovat tautologiat ja ristiriitaiset kaavat. Edelliset neljä tapausta on välttämättä oltava esillä, sillä kuten tulemme näkemään, voittostrategia semanttisissa peleissä ja modaalipeleissä on mitä voimakkaimmin kytkeytynyt yhteen totuuden ja erityisesti validisuuden käsitteen kanssa.

5.4 Asenteiden järjestelmät: Modaalilogiikan Systeemit

Modaalilogiikan lauseella tarkoitetaan modaalilogiikan kaavasta sijoittamalla eli instantaatiolla saatua kaavaa.

Määritelmä 57. Määrittelemme, että normaali modaalilogiikka tai normaali modaalilogiikan systeemi on sellainen joukko joka sisältää kaikki tautologiat, skeeman (K) instanssit ja on suljettu sääntöjen (RN), modus ponensin ja (MP) ja universaalin substituution suhteen (US).

Koska tarkastelemme Kripke-semantiikkaa, niin kaikki tutkielmassa käytetyt järjestelmät toteuttavat normaalin modaalilogiikan maaritelmät. Tarkastelemme Kripke-semantiikan näkökulmasta seuraavaa minimaalista systeemiä, jota kutsumme **K**:ksi.

Määritelmä 58. Määrittelemme **K**:n pienimmäksi kaavajoukoksi, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(PL) Jos A on tautologia, niin $A \in$**K**

(K) Jos A ja B ovat kaavoja, niin $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B) \in$**K**

(MP) Jos $A \in$**K** ja $A \to B \in$**K**, niin $B \in$**K**

(RN) Jos $A \in$**K**, niin on myös $\Box A \in$**K**.

Kaikki kaavajoukon **K** jäsenet voidaan generoida edellä esitetyistä ehdoista. Voidaan osoittaa että relaatioiden R ominaisuuksia vastaten ovat valideita seuraavat kaavat (59). Kun puhumme instantaatiosta, niin tarkoitamme tietynlaista kaavaan sijoittamista. Seuraavat kaavat ovat aksioomaskeemoja ja ovat valideita vastaavan vaihtoehtorelaation R omatessa vastaavan ominaisuuden (5.2):

Määritelmä 59. Muita, vaihtoehtorelaation $R \subset W \times W$, ominaisuuksia vastaavia aksiomatisointeja ovat mm.:

(**K**) R Yleisesti $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ normaalin modaalilogiikan perusaksiooma.

(**D**) R Seriaalinen $\Box A \to \Diamond A$

(**T**) R Refleksiinen $\Box A \to A$

(**B**) R Symmetrinen $A \to \Box\Diamond A$

(**4**) R Transitiivinen $\Box A \to \Box\Box A$

(**5**) R Euklidinen $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

Edelliset ovat aksioomaskeemoja ja vastaten R:n ominaisuksia voidaan niiden avulla muodostaa systeemejä joissa pätee mm. niiden instanssit. Tutkielmassa käytämme perusjärjestelmänä systeemia **K**. Lisäämällä edelliseen kaavajoukkoon aksiomatisointeja (59) saadaan muita järjestelmiä jotka palvelevat tarkemmin tutkittavaa asennetta, esimerkiksi:

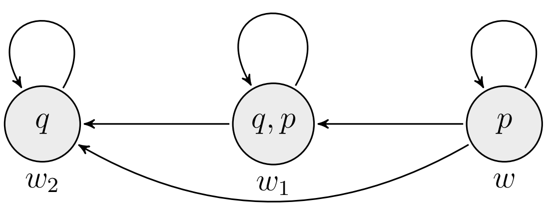
$$\mathbf{KT} = \mathbf{K}+\mathbf{T},\ \mathbf{S4} = \mathbf{K}+\mathbf{T}+\mathbf{4} = \mathbf{KT4},\ \mathbf{S5} = \mathbf{K}+\mathbf{T}+\mathbf{B}+\mathbf{4} = \mathbf{KT5}.$$

Esimerkiksi [4] esitetään **T+4** sopiviksi tiedon esittämiseksi elikkä järjestelmä **S4**. Vastaavalla tavalla [18] mukaan **S5** on ollut erityisesti käytössä loogista välttämättömyyttä tutkittaessa.

. . . .

Esimerkki 14. Käsittelemme Kripke-mallissa $M = \langle W, R, P\rangle$ tietoa. Olkoot malli **S4**:n mukainen eli seuraavanlainen

$$W = \{w, w_1, w_2, w_3\}, P(p) = \{w, w_1\}, \quad P(q) = \{w_1, w_2\}$$
$$R = \{(w, w), (w,_w 3), (w, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_3)\},$$



. . . .

5.5 Bisimulaatio

Kuten kaikkien logiikoiden ja pelien suhteen on tarpeellistä määritellä työkaluja, joilla voidaan vertailla erilaisten struktuurien samankaltaisuutta. Erityisesti modaalilogiikan tärkein työkalu on Bisimulaatio. Bisimulaation avulla tarkastellaan ovatko kaksi rakenteeltaan mahdollisesti poikkeavat mallit kuitenkin *riittävän samankaltaisia* ja onko niissä samat lauseet tosia [18].

Määritelmä 60. Olkoon $F = \langle W, R\rangle$ ja $F^* = \langle W^*, R^*\rangle$ kehyksiä. Tällöin epätyhjä relaatio $Z \subset W \times W^*$ on kehysten F ja F^* välinen *bisimulaatio*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Jos $w_1 Z w_1^*$ ja $w_1 R w_2$, niin $\exists w_2^* \in W^* : w_2 Z w_2^*$ ja $w_1^* R^* w_2^*$.

2. Jos $w_1 Z w_1^*$ ja $w_1^* R^* w_2^*$, niin $\exists w_2 \in W : w_2 Z w_2^*$ ja $w_1 R w_2$.

Kehysten F ja F^* välinen bisimulaatio Z on lisäksi mallien $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^*\rangle$ välinen bisimulaatio, jos lisäksi on voimassa:

3. Jos wZw^*, niin $M, w \models p_i \Leftrightarrow M^*, w^* \models p_i$ aina, kun $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Mikäli Z on bisimulaatio ja wZw^*, niin sanomme maailmojen w ja w^* olevan *bisimilaariset.*

Mikäli edellinen pätee, niin saadaan tulos joka kertoo meille että bisimilaarisissa maailmoissa ovat tosia täsmälleen samat kaavat eli $\mathrm{Th}(M, w) = \mathrm{Th}(M^*, w^*)$, jossa $\mathrm{Th}(M, w) = \{A \mid M, w \models A\}$:

Lause 61. *Olkoon $Z \subset W \times W^*$ mallien $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^*\rangle$ välinen bisimulaatio. Jos maailmat $w \in W$ ja $w^* \in W$ ovat bisimilaariset, niin $M, w \models A$ jos ja vain jos $M^*, w^* \models A$ eli $Th(M, w) = Th(M^*, w^*)$.*

Todistus. (vrt. [18]). Käytetään Bisimulaation määritelmää ja oletetaan kohta 3. ja tehdään induktio-oletus kaavoille A ja B että

$$M, w \models A \Leftrightarrow M^*, w^* \models A \text{ ja } M, w \models B \Leftrightarrow M^*, w^* \models B$$

aina kun wZw^*. Induktio oletuksen perusteella pätee:

1. $M, w \models \neg B \Leftrightarrow M^*, w^* \models \neg B$ jos ja vain jos $M, w \not\models B \Leftrightarrow M^*, w^* \not\models B$.

2. $M, w \models A \wedge B \Leftrightarrow M^*, w^* \models A \wedge B$ jos ja vain jos $M, w \models A \Leftrightarrow M^*, w^* \models A$ ja $M, w \models B \Leftrightarrow M^*, w^* \models B$.

3. $M, w \models A \vee B \Leftrightarrow M^*, w^* \models A \vee B$ jos ja vain jos $M, w \models A \Leftrightarrow M^*, w^* \models A$ tai $M, w \models B \Leftrightarrow M^*, w^* \models B$.

aina kun wZw^*. Olettakaamme seuraavaksi, että löytyy wZw^* ja $M, w \not\models \Box A$, jolloin on olemassa $w' \in W$ $M, w' \not\models A$. Bisimulaation määritelmästä kohtien 1. ja 2. mukaan tulee päteä että on olemassa $w'^* \in W^*$ siten että $w'Zw'*$ ja $w * R^* w'^*$. Induktio-oletuksista maailmojen w' ja $w'*$ suhteen, pätee että $M^*, w'^* \not\models A$ eli $M^*, w^* \not\models \Box A$. Vastaavalla tavalla saamme että $M^*, w^* \not\models \Box A$ eli $M, w \not\models \Box A$. Induktioväittämä

$$M, w \models \Box A \Leftrightarrow M^*, w^* \models \Box A$$

on todistettu. $\square$

Mallien M ja M^* välisiä bisimulaatioita, joita voidaan käyttää mallien tarkasteluun, on toki mahdollista esittää useita edellisen yleisen määritelmän jälkeen.

Määritelmä 62. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$ malleja. Tuolloin mallien sanotaan olevan isomorfiset, jos on olemassa bijektio $f \colon W \to W^*$ siten, että

$$\forall w_1 \in W : \forall w_2 \in W : w_1 R w_2 \Leftrightarrow f(w_1) R^* f(w_2)$$

ja

$$P^*(p_i) = f(P(p_i)) = \{f(w) \mid w \in P(p_i)\}$$

Tällöin sanomme että f on isomorfismi mallista W mallille W^*.

Isomorfismin suhteen on huomattava että määritelmässämme on kaksi erityistä vaatimusta: maailmoiden relaatioiden suhteen ja propositiosymboleiden ja siten lauseen totuuden suhteen. Emme ole esittäneet erityisesti ehtoa yksilövakioiden suhteen, jotka esitämme myöhemmin tutkielmassamme.

Määritelmä 63. Olkoon $M = \langle W, R, P \rangle$ ja $M^* = \langle W^*, R^*, P^* \rangle$ malleja. Mallien välillä sanotaan olevan pseudoepimorfismi tai p-morfismi $f \colon W \to W^*$ jos ja vain jos

(f0) $P^*(p_i) = f(P(p_i))$

(f1) $\forall w_1 \in W \colon \forall w_2 \in W \colon w_1 R w_2 \Leftrightarrow f(w_1) R^* f(w_2)$

(f2) $\forall w_1 \in W \colon \forall w^* \in W^* \colon f(w_1) R^* w^* \Rightarrow \exists w \in W w_1 R w$ ja $f(w) = w^*$

6 Yksilöiden ja joukkojen asenteiden logiikka

Tässä luvussa käsittelemme koko tutkielmamme erästä keskeisintä aihetta, nimittäin kvanttorien toimintaa mahdollisien maailmoiden semantiikassa. Luvussa annamme perusmääritelmät aiheesta.

6.1 De Re/De Dicto lukutapa ja Modaalinen Predikaattilogiikka

Modaalinen predikaattilogiikka saadaan lisäämällä kvanttorit modaalilogiikan kieleen sekä määrittämällä niiden tulkinta mahdollisissa maailmoissa. Näin ollen, voidaan sanoa että modaalinen predikaattilogiikka käsittelee yksilöitä ja joukkoja sekä niiden ominaisuuksia sekä asenteita. Ilmeisesti koetaan että yleisesti esitetyt erilaiset esitykset modaalisesta predikaattilogiikasta ovat usein jokseenkin epäselviä tai riittämättömiä. Usein ongelmatonta sekä monipuolista semantiikkaa onkin hyvin vaikeata luoda. Modaalisessa predikaattilogiikassa voidaan ajatella että järjestelmissä on joko *i) samat yksilöalueet tai ii) vaihtelevat yksilöalueet mahdollisissa maailmoissa*, joista kumpikin edellisistä valinnoista vaikuttavat merkittävästi kaavojen tulkintaan. Jälleen, seuraamme semantiikan osalta [18], jossa esitetty semantiikka on riittävän rikas tarkoitusperäämme.

Alunperin latinan kielestä on peräisin ns. lukutavan ongelma. Päädymme kahteen erilaiseen tulkintaan kaavan tai lauseen suhteen riippuen kvanttorien ja modaalioperaattorien järjestyksestä:

$$\Box \forall x R(x) \tag{1}$$

ja

$$\forall x \Box R(x) \tag{2}$$

Edelliset kaavat ovat esimerkki De Re/De Dicto lukutavoista. Modaalioperaattori on De Dicto asemassa silloin kun sen alassa seuraavana on vapaa muuttuja. Esimerkiksi, kaavassa 2 on modaalioperaattori De Dicto asemassa, kun taas kaavassa 1 on se De Re asemassa eli sen edessä seuraavana ei ole vapaata muuttujaa. Ennen kuin jatkamme eteenpäin, esitetään semantiikka modaaliselle predikaattilogiikalle:

Määritelmä 64. Olkoon Kripkeraami $\mathcal{F} = \langle W, R, U(w)_{w\in W}, v\rangle$, jossa W on mahdollisten maailmoiden joukko, $R \subseteq W \times W$ vaihtoehtorelaatio, $U\colon W \to \mathcal{P}(C)$ jossa C on yksilövakioiden c_i joukko on *mahdollisen maailman w universumifunktio* ja v on valuaatio. Universumifunktio $U(w)$ kuvaa alkion $w \in W$ siihen liittyvien yksilövakioiden joukon C osajoukkoon. Kehyksen kaikkien mahdollisten yksilöiden joukko on $\hat{U} = \bigcup_{w\in W} U(w)$. Valuaatiofunktio v määritellään:

1. $v(P, w)$ on jokin $\hat{U}$:n osajoukko (ei välttämättä $U(w)$:n osajoukko)
2. $v(c, w)$ on jokin $\hat{U}$:n alkio (ei välttämättä $U(w)$:n alkio)

Tulkitsemme totuusehdot konnektiiveille ja modaalioperaattoreille kuten ennenkin. Kvanttorien ja yksilöiden tulkinta määrätään:

$$
\begin{aligned}
w &\models P(c), \text{ jos } v(c,w) \in v(P,w) \\
w &\models \forall x A(x), \text{ jos } w \models A(a) \text{ kaikille } a \in U(w) \\
w &\models \exists x A(x), \text{ jos } w \models A(a) \text{ jollekin } a \in U(w)
\end{aligned}
$$

Vaadimme lisäksi seuraavan ominaisuuden, joka ei ole triviaali vaan usein vaihtelee erilaisissa sovelluksissa, semantiikaltamme:

Määritelmä 65. Jos kaikissa $w \in W$ pätee $a \in U(w)$ ja a ei ole eri maailmoissa eri yksilövakio, niin sanomme että a on *rigidi designaattori* eli pätee $v(c, w) = v(c, w')$.

. . . .

Esimerkki 15. Olkoot $M(x)$=”x on mustapukuinen” ja $R(x)$=”x on paholaisen asianajaja”. Tutkitaan seuraavia lauseita:

1. $\exists x \mathbf{K}_\alpha (M(x) \wedge R(x))$
2. $\mathbf{K}_\alpha \exists x (M(x) \wedge R(x))$

Edellisien lauseiden käännökset voisivat olla:

3. ”On olemassa henkilö x, josta agentti α tietää että mustapukuinen mies on paholaisen asianajaja”.
4. ”Agentti α tietää että on olemassa henkilö x, joka on mustapukuinen paholaisen asianajaja”.

Edelliset ovat kielellisesti todella erilaisen merkityksen omaavia lauseita. Esimerkiksi, eroteltuna kvanttorien ottaessa demonstratiivipronominin ’tuo’ sijan ja ’mies’ muuttujan x paikalla:

5. ”Tuo on mies, jonka α tietää mustapukuiseksi paholaisen asianajajaksi”.
6. ”α tietää että tuo mustapukuinen mies on paholaisen asianajaja”.

lauseet 5 ja 6 valaisevat hieman asiaa ja lauseiden eroa. Aivan samoin voitaisiin ajatella kvanttorien ottavan muitakin rooleja, kuten joukkokvantifiointeja ja yksilötason kvantifiointeja.

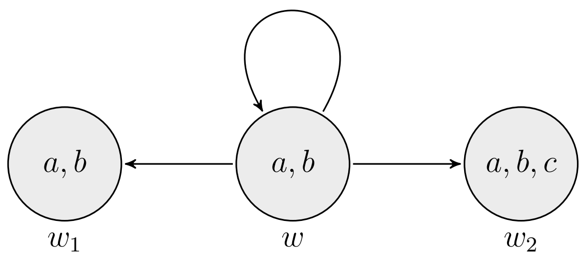
. . . .

Esimerkki 16. Olkoon Kripke-malli $M = \langle W, R, P\rangle$ ja $U(w)$ maailmojen universumi. Olkoot $W = \{w, w_1, w_2\}$ sekä $R = \{(w, w), (w, w_1), (w, w_2)\}$. Olkoon

$$U(w) = \{a, b\},\ U(w_1) = \{a, b\},\ U(w_2) = \{a, b, c\}$$

Olkoot niin, että lisäksi maailman w_2 yksilöllä c ei ole haluttua ominaisuutta P, mutta kaikilla muilla kaikkien mallin maailmoiden yksilöillä on. Tuolloin pätee:

$$w \models \forall x \Box P(x), \quad w \models_v \forall x P(x) \quad w \not\models_v \Box \forall x P(x) \quad w_1 \models_v P(a) \quad w_1 \models_v P(b)$$
$$w_2 \not\models_v \forall x P(x), \quad w_2 \not\models_v P(c), \quad w_2 \models_v P(a), \quad w_2 \models_v P(b)$$



. . . .

7 Wittgenstein ja kielipelit

Tämän tutkielman pääteemana esitän olleen Ludwig Wittgensteinin (1889-1951) kielipelit liittyen esimerkiksi hänen teoksiinsa Ruskea ja Sininen kirja (1933-1935) sekä Tractatus Logico-Philosophicus (1921) ja Filosofiset Tutkielmat (1951). Tutkielman kuluessa ei ole lukijalle ehkäpä valjennut vielä mitä tarkoitan. Tämä on siksi, että pelin luonne on johdatella Wittgensteinilaisessa mielessä lukija ymmärtämään mitä ovat nämä pelit joita tässä esitetään ja merkitys kiteytynee itse pelin peluussa ja strategioissa. Eli mitä tarkoittaa ylipäänsäkään kieli ja peli - mitä yhteyttä niillä ylipäätänsäkään on ? Kielessä ja peleissä on jotakin samaa: säännöt, joilla voidaan ilmaista jotakin; kummassakin on jokin merkitys sekä mitä ilmeisemminkin kummankin sääntöjen käyttö (pelin siirrot) johtavat johonkin toiseen tilanteeseen. Wittgensteinin Sininen Kirja (1933-1934) sisältää kielipelejä, joidenka määrä on mm. opettaa merkitystä, merkityksen merkitystä ja tarkoitusta - vaikka ei suoraan. *Esimerkiksi, kirjassa on peli jossa henkilö näyttää punaista ja pyytää toista maalaamaan punaisella.* Kielipelejä ei voi esittää varsinaisesti oikeassa järjestyksessä:

> ”Maailmankuvan muodostavien lauseiden järjestelmältä ei puutu vain kiinnilyötyjä rajoja. Järjestelmällä on myös erittäin homogeeninen rakenne. Se on valtavan alajärjestelmien joukon kasautuma, jossa kullakin alajärjestelmällä on häilyvät rajat ja ’sekalainen’ sisältö. Nämä alajärjestelmät liittyvät siihen mitä Wittgenstein kutsuu kielipeleiksi. . . . Pelit ovat eri-ikäisiä yksilön kehityksessä yhtä hyvin kuin kieliyhteisön (’kulttuurin’) historiassa.”
> - Georg H. Von Wright (1916-2003), Ludwig Wittgensteinin ’Varmuudesta’, WSOY 1999

Pelit liittyvät, esimerkiksi, yksilön kehitykseen. Modaalilogiikka on seuraava luonnollinen askel esitettäessä asenteita peleissä. Semanttiset pelit ovat vain yksi ja erityinen tapa lähestyä merkitystä ja kieltä eri tasoilta, niiden luonne on tosin kuvaileva ja kielellinen verrattuna esimerkiksi yleisiin peliteorian peleihin, joissa kysymys on esim. strategiasta ja pelaajien uskomuksista. Modaalipelit muodostavat eräänlaisen sulauman. Mainittakoon että Von Wrightin kommentaarin mukaan episteemiset pelit esim. kuuluvat kielenkäyttäjän kypsymisessä myöhäisempään vaiheeseen (eli tiedon pelit), käytännön sovelluksina voitaisiin nähdä tilastolliset pelit tai jopa koneoppimisen pelit. Peliteoreettisesti ne kuuluvat mm. täydellisen tiedon[8] epätäydellisen tiedon peleihin.

7.1 Asenteiden varmistaminen: Semanttinen Peli

> ”Yet another Pandora box of puzzling question conserns the overall character of semantical games, as to what they are not. Earlier, I preferred them as activies of attempted verification or falsification. Yet this identification is by no means unproblematic. The very terms ”verification” and ”falsification” have to be handled with great care. For what kind of activities do we usually think of as being involved in the ”verification” and ”falsification” of propositions ?”, The Principles Of Mathematics Revisited, Jaakko Hintikka

Käytän toistuvasti sanaa ’lauselogiikka’ ja ’propositionaalinen logiikka’ nyt tässä samassa merkityksessä. Edellinen lainaus kuvastaa hyvin suuresti semanttisia peleja, sillä niissä oletamme kaksi pelaajaa, vaikkapa Abelárd ja Eloise, joista toisen rooli on vahvistaa lause ja toisen toimia epätodentajana. Eloise on perinteisesti todentaja ja Abelárd epätodentaja. Pyrimme esittämään modaaliset semanttiset pelit kuvailevasti käyttäen työkaluja, jotka ovat esitetyt edellä logiikan yhteydessä sekä logiikan kursseilla ja *esitämme niiden pohjalta eräänlaista peleihin sopivaa peliteoreettista semantiikkaa.* Erityisesti semanttiset pelit ovat *Wittgensteinilaisia Kielipelejä.* Tässä osassa tutkimme yksinkertaisia kielipelejä eli modaalisia semanttisia pelejä. Jaakko Hintikka esittää kirjassaan *Game of Language*(1984) sivulla 9, että:

> (x) Game theoretical semantics is easily extended to intensional logics by using the well-known possible-worlds semantics for intensional logics as an interim step. The main novelty is that at each move the players are now considering not only a sentence S’, but also a world w_0, which is a member of the frame with respect to which the original sentence is to be interpreted. The stronger of each pair of interrelated intensional operators (necessity, knowledge, belief, oblication, etc.) marks natures move, the weaker (possibility, epistemic possibility, compatibility with one’s beliefs, permission, etc) my move. A move consist of selection of one of the words, say w_1, alternative to w_0. At the next move, the players will consider w_1 instead of w_0. In brief, intensional operators are quantifiers ranging over alternative worlds.

Tutkielmassamme olemme esittäneet modaalilogiikan sekä modaalisen predikaattilogiikan perusteita, joka johtaa meidät luonnollisesti tarkastelemaan sekä semanttisia pelejä ilman predikaattilogiikkaa sekä predikaattilogiikan vahvistamana. Koko semanttisten pelien ajan seuraamme lähdettä [30] sivuja 63–67 kehitellessämme modaalisen semanttisen teorian käyttämällä hyväksi lähteen teoriaa predikaattilogiikan semanttisille peleille.

Määritelmä 66. Pelin G pelipuu on pelaajien kaikkien mahdollisten vaihtoehtojen esittäminen alaspäin aukeavan puurakenteen avulla.

[8] Engl. *perfect information* tai *perfect knowledge*

Olisi modaalisen predikaattilogiikan mukaista määritellä sääntöihin vielä niin että vaikka yksilöt c_i olisivat samat maailmoissa w ja w', niin yksilöillä saattaisi olla jokin toisistaan poikkeava ominaisuus $\zeta(x)$ näissä maailmoissa joka vaikuttaisivat kaavan totuuteen. Mahdolliset maailmat kuvastavat usein aitoja tilanteita joihin henkilöiden valinnat tai kielenkäyttö voi heidät johtaa, aihe jota peliteoria tutkii. *Oletamme tässä luvussa kuitenkin että kaikki yksilöt c ovat rigideitä designaattoreita* määritelmän 65 mukaisesti, ja että samalle yksilölle pätee sama ominaisuus $\zeta(x)$ jokaisessa sille mahdollisessa maailmassa. Siirrymme määrittelemään semanttisen pelin säännöt modaaliselle predikaattilogiikalle.

Määritelmä 67. Modaalisella semanttisella pelillä tarkoitetaan Modaalilogiikan $\mathcal{L}$ Kripke-mallissa $M = \langle W, R, P \rangle$ pelattavaa peliä $G(\phi, M)$ joka on kahden pelaajan peli. Pelissä kaava tulkitaan aina aktuaalisen maailman w_0 suhteen. Pelissä asemaa kuvastetaan nelikolla (ϕ, w, v, a) jossa ϕ on kaava, $w \in W$ on mahdollinen maailma, v on valuaatio kuten määritelmässä 64 ja $a \in \{1, 2\}$ on pelaaja. Pelaajan vastustajaa merkitään a^*.

G.A Jos asema on (ϕ, w, v, a), kaava ϕ on lausemuuttuja ja pätee $M, w \models \phi$ maailmassa w, niin pelaaja a voittaa. Muuten voittaa vastustaja a^*.

G.R Jos asema on $(\phi(t_1, \dots t_n), w, v, a)$ ja pätee $M, w \models_v \phi(t_1, \dots t_n)$ maailmassa w valuaatiolla v, niin pelaaja a voittaa. Muuten vastustaja a^*.

G.$\vee$ Jos asema on $(\phi \vee \psi, w, v, a)$ niin pelaaja a valitsee seuraavaksi asemaksi joko (ϕ, w, v, a) tai (ψ, w, v, a).

G.$\wedge$ Jos asema on $(\phi \wedge \psi, w, v, a)$ niin pelaaja a^* valitsee seuraavaksi asemaksi joko (ϕ, w, v, a) tai (ψ, w, v, a).

G.$\Diamond$ Jos asema on $(\Diamond\phi, w, v, a)$ ja wRw' jollekin mahdolliselle maailmalle w' niin pelaaja a valitsee maailman w' ja uusi asema on (ϕ, w', v, a). Jos ei ole wRw', niin käsitellään tämä kuin pätisi $M, w \not\models_v \phi$.

G.$\Box$ Jos asema on $(\Box\phi, w, v, a)$ ja wRw' jollekin mahdolliselle maailmalle w' niin pelaaja a^* valitsee maailman w' ja uusi asema on (ϕ, w', v, a). Jos ei ole wRw', niin käsitellään tämä kuin pätisi $M, w \models_v \phi$.

G.$\exists$ Jos asema on $(\exists x\, \phi, w, v, a)$, niin pelaaja a valitsee yksilövakion c kyseisestä maailmasta $c \in U(w)$ ja peli jatkuu kohdasta $(\phi, w, v(c, w), a)$.

G.$\forall$ Jos asema on $(\forall x\, \phi, w, v, a)$, niin pelaaja a^* valitsee yksilövakion c kyseisestä maailmasta $c \in U(w)$ ja peli jatkuu kohdasta $(\phi, w, v(c, w), a)$.

G.$\neg$ Jos asema on $(\neg\phi, w, v, a)$, niin roolit vaihtuvat pelaajien I ja II kesken. Peli jatkuu kohdasta (ϕ, w, v, a^*) eli pelaajan a vastustajasta.

Mikäli pelissä ei ole kvanttoreita voidaan pelin kohta ilmaista (ϕ, w, a). Mikäli pelissä ei ole modaalioperaattoreita, niin pelin kohta voidaan ilmaista (ϕ, s, a) tai (ϕ, v, a).

Esitämme pelin pelin määrittelevät säännöt eli perussiirrot, strategian käsitteen sekä voittostrategian käsitteen. Pelistä voi huomata että peli toimii lähes automaattisesti, sillä jokainen siirto on määritelty ja siirtyy määritelmän mukaan seuraavaan kohtaan seuraavan määritelmän strategialle 68 mukaan. Myöhemmin määriteltävä voittostrategia toiselle pelaajalle näyttävät, mikäli siinä yhteydessä määriteltävät ehdot pitävät, että peli todella toimii prosessin omaisesti soveltaen määritelmiä.

Määritelmä 68 (Pelaajan Strategia)**.** Pelaajan a strategia pelissä $G(\phi, M)$ on mikä tahansa jono τ funktioita τ_i jotka ovat määriteltyjä osittaisten pelien joukossa $(p_0, \dots, p_{i-1})$, $i < n$ jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

1. Jos $p_{i-1} = (\phi \vee \psi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a minkä strategian valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) \in \{0, 1\}$. Jos $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = 0$, niin silloin pelaaja valitsee vasemman puoleisen kaavan (ϕ, w, v, a) ja jos $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = 1$ pelaaja valitsee oikean puoleisen kaavan (ψ, w, v, a).

2. Jos $p_{i-1} = (\phi \wedge \psi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a^* minkä strategian valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) \in \{0, 1\}$. Jos $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = 0$, niin silloin pelaaja valitsee vasemman puoleisen kaavan (ϕ, w, v, a) ja jos $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = 1$ pelaaja valitsee oikean puoleisen kaavan (ψ, w, v, a).

3. Jos $p_{i-1} = (\Diamond\phi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a minkä strategian valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = w' \in W$. Tarkastelu siirtyy kaavaan (ϕ, w', v, a), jossa wRw' ja w, w' ovat mahdollisia maailmoita määritelmien mukaisesti.

4. Jos $p_{i-1} = (\Box\phi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a^* minkä strategian valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) = w' \in W$. Tarkastelu siirtyy kaavaan (ϕ, w', v, a), jossa wRw' ja w, w' ovat mahdollisia maailmoita määritelmien mukaisesti.

5. Jos $p_{i-1} = (\exists x\, \phi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a minkä yksilövakion c valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) \in U(w)$. Tarkastelu siirtyy kaavaan $(\phi, w, v(c, w), a)$.

6. Jos $p_{i-1} = (\forall x\, \phi, w, v, a)$, niin τ kertoo pelaajalle a^* minkä yksilövakion c valita eli $\tau_i(p_0, \dots, p_{i-1}) \in U(w)$ Tarkastelu siirtyy kaavaan $(\phi, w, v(c, w), a)$.

Sanomme että pelaajan strategia τ on *voittostrategia* pelissä $G(\phi)$ jos ja vain jos tämä voittaa jokaisen pelin jossa on käyttänyt strategiaa τ.

Voittostrategian määritelmästä voidaan päätellä että jos lause ϕ on validi mallissa, niin verifioijalla on olemassa voittostrategia kyseisessä mallissa ja jos lause ϕ on tautologia niin on verifioijalla olemassa voittostrategia jokaisessa Kripke-mallissa. Esitämme erityisesti seuraavaksi seuraavaksi ehdon $M, w \models \phi$ voittostrategian olemassa ololle pelaajalle II. Tähän saakka kuvaamamme semanttinen peli on *täydellisen tiedon peli* sillä voimme ajatella kaikki kaavat ja alikaavat tunnetuiksi pelaajille sekä mahdolliset maailmat elikkä seuraukset siirtojen tekemisestä. Peli on myös nollasummapeli ja voita-häviä peli koska toisen pelaajan voitto johtaa aina toisen pelaajan häviöön. Seuraavaksi esitämme yhteyden modaalilogiikan kaavan ϕ validisuuteen mallissa ja pelaajan voittostrategian välillä. Esimerkeissä luvun lopussa osoitamme, että voittosrategia voi olla muussakin tilanteessa. Esimerkiksi, voisimme höllentää ehtoa $M, w \models \phi$ erikoistapauksissa. Silloin emme kuitenkaan voisi taata että voittostrategia löytyisi aina, mutta validille kaavalle, K-validille ja tautologialle voimme.

Lause 69. *Olkoon ϕ modaalilogiikan kaava. Silloin $M, w \models \phi$ jos ja jos vain varmentajalla eli pelaajalla II on olemassa* voittostrategia *semanttisessa pelissä $G(\phi)$.*

Todistus. Todistamme lauseen induktiolla määritelmän 67 suhteen sekä induktiolla kaavan rakenteen suhteen. Merkinnöissä $a^* \in \{1, 2\}$ on pelaajan $a \in \{1, 2\}$ vastapelaaja $a^* = 3 - a$. Todistaaksemme "$\Longrightarrow$" suuntaan, näytämme että jokaisessa tilanteessa (ϕ, w, v, a) jos pätee $M, w \models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 2$, niin pelaaja II voi taata että peli jatkuu yhden kierroksen jälkeen tilanteesta (ψ, w', v', a') jossa (*) $M, w' \models_v \psi$ jos ja vain jos $a' = 2$ tai sitten pelaaja II voittaa pelin.

1. Olkoon pelitilanne $p_i = (\phi, w, v, a)$ ja ϕ atomikaava eli lausemuuttuja tai predikaatti. Silloin pelaaja II voittaa pelin määritelmän ja ind. ol. (*) mukaan.

2. Olkoon pelitilanne $p_i = (\phi, w, v, a)$, $\phi = \neg\psi$ ja ind. ol. (*) pätee. Siirron jälkeen ollaan pelitilanteessa $p_i = (\psi, w, v, a^*)$, missä $a^* = 1$ jos $a = 2$ ja $a^* = 2$ jos $a = 1$. Nyt pätee:

$$\begin{aligned}
&\text{Nyt } M, w \models_v \phi \text{ jos ja vain jos } a = 2\\
&\text{eli } M, w \not\models_v \phi \text{ jos ja vain jos } a = 1\\
&\text{eli } M, w \models_v \psi \text{ jos ja vain jos } a = 1\\
&\text{eli } M, w \models_v \psi \text{ jos ja vain jos } a^*2
\end{aligned}$$

3. Olkoon pelitilanne $p_i = (\zeta, w, v, a)$, $\zeta = \phi \vee \psi$. Oletetaan, että $a = 2$ jolloin $M, w \models_v \phi$ tai $M, w \models_v \psi$. Jos $M, w \models_v \phi$, niin pelaaja 2 valitsee $p_{i+1} = (\phi, w, v, a)$ muutoin pelaaja 2 valitsee $p_{i+1} = (\psi, w, v, a)$ jolloin (*) pätee.
Oletaan sitten että $a = 1$, jolloin sekä $M, w \not\models_v \phi$ että $M, w \not\models_v \psi$. Pelaaja 1 valitsee joko $p_{i+1} = (\phi, w, v, a)$ tai $p_{i+1} = (\psi, w, v, a)$. Kummassakin tapauksessa ehto (*) pätee.

4. Olkoon pelitilanne $p_i = (\zeta, w, v, a)$, $\zeta = \phi \wedge \psi$. Oletetaan, että $a = 2$. Pelaaja 1 tekee valinnan joko $M, w \not\models_v \phi$ tai $M, w \not\models_v \psi$ ja pelitilanne on vastaavasti $p_{i+1} = (\phi, w, v, a)$ tai $p_{i+1} = (\psi, w, v, a)$. Kummassakin tapauksessa ehto (*) pätee. Oletetaan sitten että $a = 1$, jolloin pelaaja 2 tekee valinnan. Tuolloin joko $M, w \models_v \phi$ tai $M, w \models_v \psi$ ja pelitilanne on vastaavasti $p_{i+1} = (\phi, w, v, a)$ tai $p_{i+1} = (\psi, w, v, a)$. Kummassakin tapauksessa ehto (*) pätee.

5. Olkoon pelitilanne $p_i = (\Diamond\phi, w, v, a)$. Oletetaan että $a = 2$. Oletuksen nojalla $M, w \models_v \Diamond\phi$ joten pelaaja a pystyy valitsemaan vaihtoehtoisen maailman $w' \in W$ siten että wRw' ja $M, w' \models_v \phi$. Peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w', v, a)$ joten (*) pätee. Oletetaan sitten että $a = 1$. Oletuksen nojalla $M, w \not\models_v \Diamond\phi$ joten pelaaja a valitsee vaihtoehtoisen maailman $w' \in W$ siten että wRw' ja $M, w' \not\models_v \phi$. Peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w', v, a)$ jolloin (*) pätee edelleen.

6. Olkoon pelitilanne $p_i = (\Box\phi, w, v, a)$ jolloin $a^* = 3 - a$ tekee maailman $w' \in W$ valinnan siten että wRw'. Peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w', v, a)$. Oletetaan, että $a = 2$. Tällöin $M, w \models_v \Box\phi$, joten $M, w' \models_v \phi$ ja siis ehto (*) pätee. Seuraavaksi, oletetaan että $a = 1$. Nyt $M, w \not\models_v \Box\phi$. Tällöin $a^* = 2$ voi valita maailman $w' \in W$ siten, että wRw' ja $M, w' \not\models_v \phi$. Ehto (*) pätee edelleen.

7. Olkoon pelitilanne $p_i = (\exists x\, \phi, w, v, a)$. Nyt pelaaja a valitsee yksilövakion $c \in U(w)$ ja peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w, v(c, w), a)$. Oletetaan, että $a = 2$. Tällöin $M, w \models_v \exists x\, \phi$ joten pelaaja 2 pystyy valitsemaan yksilövakion $c \in U(w)$ jolla $M, w \models_{v(c,w)} \phi$ ja peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w, v(c, w), a)$, jolloin ehto (*) pätee. Seuraavaksi, oletetaan että $a = 1$. Nyt pätee, että $M, w \not\models_v \exists x\, \phi$ jolloin $M, w \not\models_{v(c,w)} \phi$ ja peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w, v(c, w), a)$. Ehto (*) pätee edelleen.

8. Olkoon pelitilanne $p_i = (\forall x\, \phi, w, v, a)$ jolloin $a^* = 3 - a$ tekee valinnan. Peli jatkuu pelitilanteesta $p_{i+1} = (\phi, w, v(c, w), a)$. Oletetaan, että $a = 2$. Tällöin $M, w \models_v \forall x\, \phi$ eli $M, w \models_v (c, w)\phi$ jolloin ehto (*) pätee. Olkoon sitten $a = 1$ jolloin $a^* = 2$. Pelaaja 2 valitsee yksilövakion $c \in U(w)$ siten että $M, w \not\models_{v(c,w)} \phi$ ja peli jatkuu pelitilanteesta $p_i = (\phi, w, v(c, w), a)$. Edelleen ehto (*) pätee.

Todistamme "$\Longleftarrow$" suuntaan. Näytämme induktiolla kaavan ϕ rakenteen suhteen että jos pelaajalla 2 on voittostrategia (v.s.) τ pelitilanteessa (ϕ, w, v, a), niin (*) $M, w \models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 2$.

1. Olkoon pelitilanne $p_i = (\phi, w, v, a)$ jossa ϕ on atomilause eli lausemuuttuja tai predikaatti. Koska pelaajalla 2 on v.s. τ, niin silloin pelaaja II voittaa pelin määritelmän ja ind. ol. (*) mukaan.

2. Olkoon pelitilanne $p_i = (\phi, w, v, a)$, $\phi = \neg\psi$ ja ind. ol. (*) pätee. Siirron jälkeen ollaan tilanteessa $p_i = (\psi, w, v, a^*)$, missä $a^* = 1$ jos $a = 2$ ja $a^* = 2$ jos $a = 1$. $a^* = 3 - a$. Nyt pätee, koska pelaaja II käyttää strategiaansa τ, että:

   Nyt $M, w \models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 2$
   eli $M, w \not\models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 1$
   eli $M, w \models_v \psi$ jos ja vain jos $a = 1$
   eli $M, w \models_v \psi$ jos ja vain jos $a^* = 2$.

3. Olkoon pelitilanne (ζ, w, v, a), $\zeta = \phi \vee \psi$. Olkoon $a = 2$ ja pelaajan II strategia τ antaa nyt (ϕ, w, v, a) tai (ψ, w, v, a). Voidaan olettaa että v.s. τ antoi (ϕ, w, v, a) joten ind. ol. seuraa $M, w \models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 2$ joten $M, w \models_v \zeta$. Joten ehto (*) pätee. Olkoon sitten $a = 1$ jolloin pelaaja valitsee (ϕ, w, v, a) tai (ψ, w, v, a). Koska pelaajalla II on v.s. τ, niin $M, w \not\models_v \phi$ ja $M, w \not\models_v \psi$. Ehto (*) pätee edelleen.

4. Olkoon pelitilanne (ζ, w, v, a), $\zeta = \phi \wedge \psi$. Olkoon $a = 2$ ja pelaaja 1 valitsee (ϕ, w, v, a) tai (ψ, w, v, a). Koska pelaajalla 2 on v.s. τ niin ehto (*) pitää edelleen. Olkoon sitten $a = 1$ ja pelaajan 2 v.s. τ antoi (ϕ, w, v, a) joten ind. ol. seuraa että $M, w \not\models_v \phi$. Ehto (*)pitää edelleen.

5. Olkoon pelitilanne $(\Diamond\phi, w, v, a)$. Olkoon $a = 2$ jolloin v.s. τ antaa vaihtoehtoisen maailman $w' \in W$ siten että wRw' jolloin ind. ol. antaa $M, w' \models_v \phi$ jos ja vain jos $a = 2$. Peli jatkuu kohdasta (ϕ, w', v, a). Olkoon sitten $a = 1$, jolloin pelaaja 1 valitsee vaihtoehtoisen maailman $w \in W$ siten että wRw'. Koska pelaajalla 2 on v. s. τ pelissä, niin ind. ol. antaa $M, w' \not\models_v \phi$. Peli jatkuu kohdasta (ϕ, w', v, a). Ehto (*) pitää kummassakin tapauksessa.

6. Olkoon pelitilanne $(\Box\phi, w, v, a)$ ja a^* valitsee. Olkoon $a = 2$, jolloin $a^* = 3 - 2 = 1$ valitsee vaihtoehtoisen maailman $w' \in W$ siten että wRw'. Koska pelaajalla 2 on v.s. τ, niin ind. ol. antaa $M, w' \models_v \phi$ edelleen ja peli jatkuu kohdasta (ϕ, w', v, a). Olkoon sitten $a = 1$, jolloin $a^* = 3 - 1 = 2$. Pelaajan v. s. τ antaa vaihtoehtoisen maailman $w' \in W$ siten että siten että wRw' ja Ind. ol. antaa nyt että $M, w' \not\models_v \phi$. Peli jatkuu tilanteesta (ϕ, w', v, a). Ehto (*) pitää kummassakin tapauksessa.

7. Olkoon pelitilanne $(\exists x\, \phi, w, v, a)$. Olkoon $a = 2$. Tällöin pelaajan 2 v.s. τ antaa yksilövakion $c \in U(w)$ ja peli jatkuu pelitilanteesta $(\phi, w, v(c, w), a)$. Koska pelaaja käytti voittostrategiaansa, niin on hänellä edelleen edelleen voittostrategia tästä uudesta pelitilanteesta eteenpäin. Tällöin ind. ol. mukaan pätee $M, w \models_{v(c,w)} \phi$ jolloin $M, w \models_v \exists x\, \phi$ ja ehto (*) pätee. Olkoon sitten $a = 1$. Tällöin pelaaja 1 valitsee yksilövakion $c \in U(w)$ ja peli jatkuu tilanteesta $(\phi, w, v(c, w), a)$. Koska pelaajalla 2 on edelleen pelitilanteesta v.s. τ eteenpäin, niin ind. ol. seuraa $M, w \not\models_{v(c,w)} \phi$ ind. ol. nojalla. Koska tämä pätee kaikille yksilövakioille c jotka pelaaja 1 voi valita, niin pätee $M, w \not\models_v \exists x\, \phi$. Ehto (*) pätee edelleen.

8. Olkoon pelitilanne $(\forall x\, \phi, w, v, a)$ ja $a^* = 3 - a$ valitsee. Olkoon $a = 2$, jolloin $a^* = 3 - 2 = 1$ ja pelaaja 1 valitsee yksilövakion $c \in U(w)$. Koska pelaajalla 2 on v.s. τ niin ind. ol. seuraa $M, w \models_v \phi$ ja peli jatkuu kohdasta $(\phi, w, v(a, w), a)$. Ehto (*) pitää. Seuraavaksi olkoon $a = 1$, jolloin $a^* = 3 - 1 = 2$, jolloin pelaajan 2 v.s. τ antaa yksilövakion $c \in U(w)$ jolloin ind. ol. mukaan $M, w \not\models_v \phi$. Peli jatkuu kohdasta $(\phi, w, v(c, w), a)$. Ehto (*) pitää.

Olemme näyttäneet väitteen induktiolla rakenteen suhteen. □

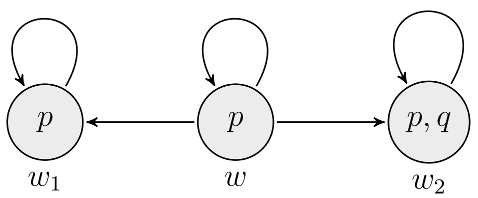
Seuraavaksi esitämme esimerkkejä joissa näkyy totuuden eri asteiden läsnäolo semanttisissa peleissä, jotka lyhyesti tiivistin aiemmin määritelmässä 56.

7.1.1 Esimerkkejä

Otamme kolme yksinkertaista esimerkkiä, joista toisessa pelataan puhtaasti modaalilogiikan kaavalla ja toisessa modaalisen predikaattilogiikan kaavalla, jotka littyvät vahvasti edellä esitettyihin keskusteluihin ja lainauksiin Wittgensteinilta ja Hintikalta sekä teoriaan. Seuraavista esimerkeistä toinen on lisäksi olennaisesti hyvä esimerkki pelistä, joille ei päde $M \models \phi$ mutta jossa on voittostrategia $M, w \models \phi$ mielessä.

....

Esimerkki 17. Olkoon Kripke-malli $M = \langle W, R, P\rangle$, $W = \{w, w_1, w_2\}$ sekä $R = \{(w, w), (w, w_1), (w_1, w_1), (w, w_2), (w_2, w_2)\}$ episteeminen vaihtoehtorelaatio. Oletamme että $\mathbf{K}_\beta\, A$ suhtautuu kuten $\Box A$ kaavaan A. Olkoon p, q lausemuuttujia ja $P(p) = W$ ja $P(q) = \{w_2\}$. Valitaan pelattavaksi lauseeksi $\mathbf{K}_\beta\, A = \mathbf{K}_\beta\, (p \vee q)$.



Kuva 9: Esimerkin 17 malli M

Eloise aloittaa pelin. Abelárd rooli on osoittaa Eloisen tieto vääräksi.

1. Pelitilanne alkaa kohdasta $p_0 = (\mathbf{K}_\beta\, (p \vee q) w, 2)$, joten $a^* = 1$. Abelárd käyttäen strategiaansa $\tau(p_0) = w_1$ määritelmän 68 mukaan valitsemaan vaihtoehtoisen maailman w_1. Peli jatkuu kohdasta $p_1 = (p \vee q, w_1, 2)$.

2. Pelitilanne on nyt $p_1 = (p \vee q, w_1, 2)$. Sääntöjen 67 mukaan Eloise pelaa ja hän käyttää strategiaansa $\tau(p_1) = 0$ määritelmän 68 mukaan valitsemaan disjuktiosta $p \vee q$ vasemman puoleisen lausemuuttujan p. Peli jatkuu kohdasta $p_2 = (p, w_1, 2)$.

3. Pelitilanne on nyt $p_2 = (p, w_1, 2)$. Eloise on edelleen pelaajana. Sääntöjen 67 mukaan Eloise on tullut tilanteeseen **G.** A ja pätee $M, w_1 \models p$. Koska pätee $M, w_1 \models (p \vee q)$ ja $M, w \models \mathbf{K}_\beta\, (p \vee q)$, niin Eloise voittaa pelin. Osittaispelit olivat $p = \{p_0, p_1, p_2\}$.

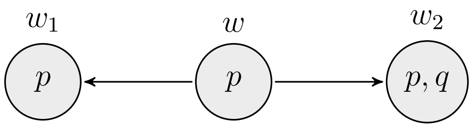
Eloise voitti pelin. Tarkemmin, disjunktiosta riittää saada toinen puoli todeksi joten ei ole tarpeellista käsitellä toista puolta. Pätee $M \models \mathbf{K}_\beta\, (p \vee q)$.

. . . .

Seuraava esimerkki muodostaa mielenkiintoisen mahdollisuuden voittostrategian olemassaoloon niin, että $M \not\models A$ jollakin $w \in W$, nimittäin valitaankin seuraavassa pelissä heikompi operaattori.

. . . .

Esimerkki 18. Olkoon Kripke-malli $M = \langle W, R, P\rangle$, $W = \{w, w_1, w_2\}$ sekä $R = \{(w, w_1), (w, w_2)\}$ episteeminen vaihtoehtorelaatio. Olkoon p, q lausemuuttujia ja $P(p) = W$ ja $P(q) = \{w_2\}$. Valitaan pelattavaksi lauseeksi $\Diamond A = \Diamond(p \vee q)$. Eloise aloittaa pelin.



Kuva 10: Esimerkin 18 malli M

1. Pelitilanne alkaa kohdasta $p_0 = (\Diamond(p \vee q), w, 2)$. Eloise käyttää strategiaansa $\tau((p_0) = w_2$ määritelmän 68 mukaan valitsemaan vaihtoehtoisen maailman w_2. Peli jatkuu kohdasta $p_1 = (p \vee q, w_2, 2)$.

2. Pelitilanne on nyt $p_1 = (p \vee q, w_2, 2)$. Sääntöjen 67 mukaan Eloise pelaa ja $a = 2$ ja hän käyttää strategiaansa $\tau(p_1) = 0$ määritelmän 68 mukaan valitsemaan disjunktiosta $p \vee q$ vasemman puoleisen lausemuuttujan p. Peli jatkuu kohdasta $p_2 = (p, w_2, 2)$.

3. Pelitilanne on nyt $p_2 = (p, w_2, 2)$. Eloise on edelleen pelaajana. Sääntöjen 67 mukaan Eloise on tullut tilanteeseen $\mathbf{G.}A$ ja pätee $M, w_2 \models p$. Koska pätee $M, w' \models (p \vee q)$ ja $M, w \models \Diamond(p \vee q)$, niin Eloise voittaa pelin. Osittaispelit olivat $p = \{p_0, p_1, p_2\}$.

Eloise voitti pelin. Tarkemmin, disjunktiosta riittää saada toinen puoli todeksi joten ei ole tarpeellista käsitellä toista puolta. Pätee $M, w \models \Diamond(p \vee q)$ mutta $M \not\models \Diamond(p \vee q)$ sillä, jos valittaisiin esimerkiksi $M, w_1 \not\models \Diamond(p \vee q)$.

. . . .

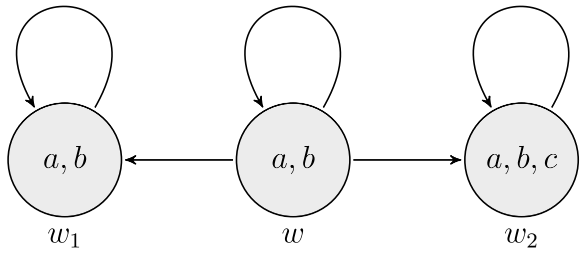
Edellinen esimerkki 18 on tärkeä esimerkki sellaisesta tilanteesta, jossa kaavalle pätee $M, w \models A$ ja pelaajalla on voittostrategia vaikka ei päde että $M \models A$. Jos modaliteetti olisi määrätty $\Box A$:n totuusehtojen ja määritelmien mukaan, niin pätisi $M \models A$. Osoittautuu myös, että totuuden luokitteluni määritelmässä 56 on varsin käytännöllinen luokitellessa semanttisia pelejä totuuksien mukaan. Seuraava esimerkki demonstroi tarkemmin modaalisia predikaattilogiikan semanttisia pelejä.

. . . .

Esimerkki 19. Olkoon Kripke-malli $M = \langle W, R, P\rangle$ jolle on semantiikka määrätty määritelmän 64 mukaan. Olkoot $W = \{w, w_1, w_2\}$, $R = \{(w, w), (w, w_1), (w, w_2)\}$ sekä

$$U(w) = \{a, b\},\ U(w_1) = \{a, b\},\ U(w_2) = \{a, b, c\}.$$

Olkoot pelaajat jälleen Abelárd ja Eloise sekä operaattori $\mathbf{K}_\beta$ kuten esimerkissä 17. Olkoot tutkittava ominaisuus nyt $Q(x)$:=”x on punainen” ja oletamme tämän olevan ominaisuutena kaikilla yksilöillä U:ssa. Olkoot tutkittava lause $A = \exists x \mathbf{K}_\beta Q(x)$, joka sanoo että: ”on olemassa sellainen x, jonka Eloise tietää punaiseksi”. Eloise aloittaa pelin:



Kuva 11: Esimerkin 19 malli M

1. Pelitilanne alkaa kohdasta $p_0 = (\exists x \mathbf{K}_\beta \, Q(x), w, v, 2)$. Eloise käyttää määritelmän 68 mukaisesti strategiaansa $\tau(p_0) = a \in U(w)$, koska määritelmän 64 mukaan $M, w \models Q(a)$ kun $v(a, w) \in v(P, w)$. Pelisääntöjen 67 mukaan peli jatkuu kohdasta $p_1 = (\mathbf{K}_\beta \, Q(a), w, v(a, w), 2)$.

2. Peli on tilanteessa $p_1 = (\mathbf{K}_\beta \, Q(a), w, v(a, w), 2)$ joten pelaaja $a^* = 1$. Abelárd käyttää määritelmän 68 mukaisesti strategiaansa $\tau(p_1) = w_1 \in W$. Pelisääntöjen 67 mukaan peli jatkuu kohdasta $p_2 = (Q(a), w_1, v(a, w), 2)$

3. Peli on tilanteessa $p_2 = (Q(a), w_1, v(a, w), 2)$. Eloise on edelleen pelaajana. Pelisääntöjen 67 mukaan on tultu tilanteeseen $\mathbf{G.}R$ ja pätee $M, w_1 \models_{v(a,w)} Q(a)$ sillä $a \in U(w_1)$ ja pätee $M, w_1 \models_{v(a,w)} Q(a)$ määritelmän 64 mukaan kun $v(a, w) \in v(P, w_1)$. ja $M, w \models_v \exists x \mathbf{K}_\beta \, Q(x)$ niin pelisäääntöjen 67 mukaan Eloise voittaa pelin ja Abelárd häviää. Osittaispelit olivat $p = \{p_0, p_1, p_2\}$.

....

Edellä esitetyt päättävät tutkielmamme semanttisten pelien osalta.

8 Luonnostelma syvällisemmistä kielipeleistä

”Tämän kirjan ymmärtää ehkä vain se, joka itse on jo kertaalleen ajatellut siinä ilmaistut ajatukset - tai ainakin samantapaisia ajatuksia.”
- Ludwig Wittgenstein, Tractatus Logico-Philosophicus (1921)

Aluksi haluan ilmaista että tämä luku on ainoastaan luonnoksen omainen eikä tämän tutkielman tiimoilta ole tarkoituksen mukaista esittää kuin luonnostelma aiheesta. Luku on siis luonnostelma eräästä modaalipelien alatyypistä, jossa ilmaistaan klassisia pelejä mahdollisten maailmojen ja modaalilogiikan avulla. Kerros kielessä mahdollistaa tutkia pelien muita syvempiä ominaisuuksia objekti-ja metakielisuhteessa, tarkoittaen että voimme rakentaa peliä varten ilmaisuvoimaisempaa kieltä kuin mitä se alunperin omasi. Pelien vahvuus on, että niiden avulla voidaan tutkia myös perinteisiä kuten, esim. PD (prisoners dilemma) eli klassisen peliteorian malleja käyttäen modaalilogiikan kaavoja. Tässä luvussa käytämme taustakoneina klassisen peliteorian teoriaa joka on esitetty aiemmin. Semanttiset pelit sekä klassiset pelit ovat hyvin läheistä sukua modaalipeleille. Olennainen kysymys on kielen *ilmaisuvoimasta.* Kappaleessa seuraamme ja mukailemme lähdettä [13] käyttäen PD peliimme syvemmän kerroksen. Sen jälkeen käsittelemme uudelleen peliä 2 deonttisen logiikan avulla.

8.1 Valoa Vankilassa - Vangin Dilemma jälleen

Esitämme Modaalipeleistä yksinkertaistetun kahden pelaajan version. Pelityypeissä ajattelemme että kummatkin pelaajat valitsevat yhtä aikaa roolinsa tietämättä toisen valinnasta vaikka esitämmekin pelipuun ja mahdollisten maailmoiden raamin avulla pelin, kuten pelaajat tekisivät siirrot eri aikaan.

Määritelmä 70. Esittämämme modaalipelistä [13] yksinkertaistetun mukaelman $G(N, P, f, U_{i \in N})$, joka pelataan mahdollisissa maailmoissa. P on pelissä G osittaispelien joukko. Esitämme pelin pelipuumuodossa (määritelmä 66). Olkoon $f \colon W \to N$ funktio joka kuvaa mahdollisen maailman pelaajien joukkoon ja $C \colon W \times A \to W$ funktio joka kuvaa mahdollisen maailman ja valinnan mahdollisten maailmoiden joukkoon. Pelissä peliin G liitetään pelaajien $i \in N$ peliraamiksi Kripke-raami $F_G = \langle W, R_1, R_2 \rangle$ siten että $(w, w') \in R_i$ jos ja vain jos $f(w) = i$ ja $w' = C(w, a)$ eli tilassa w pelaaja on $i, j \in \{1, 2\}$ ja voi tekemällä toiminnan a saapua tilaan w'. Toiminta on yksinkertaisesti pelaajan strategia $a \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$ joka määräytyy pelin mukaan. Erotamme pelaajan i ja j siirrot eli strategian valintaa käyttämällä merkintöjä a ja a'.

Tässä pelissä pelaajan vaihtoehdot siirtoa valittaessa ovat sama kuin Vangin Dilemma pelissä 5 eli $a, a' \in \{V, T\}$. Olkoon peliä varten $W = \{w, w_1, w_2, w_1', w_1'', w_1', w_2''\}$. Vaihtoehto relaatiot $R_1, R_2 \subseteq W \times W$ määritellään:

$$R_1 = \{(w, w_1), (w, w_2)\} \quad R_2 = \{(w_1, w_1''), (w_1, w_1'), (w_2, w_2''), (w_2, w_2')\}.$$

Määritellään funktio f

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = w \in W \\ 2, & \text{muilla } x \in W \end{cases}$$

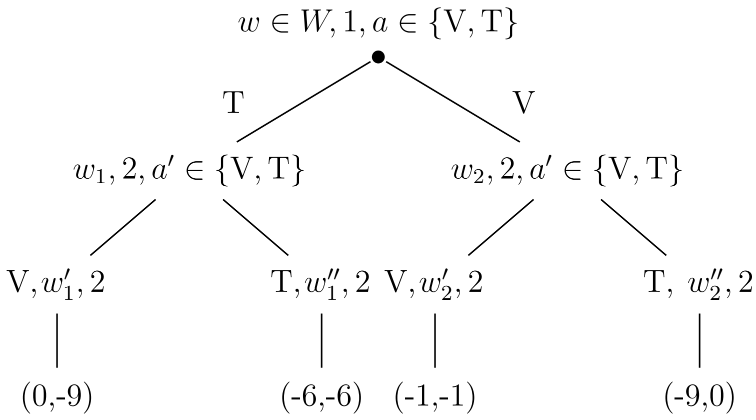
Käytämme esimerkissä pelipuun käsitettä, kuten aiemmin määritelty. Peli 70 saadaan kuvailtua luonnollisella tavalla pelipuulla. Määritellään vielä funktiolle C että

$$C(w', a) = \begin{cases} w_1, & \text{jos } w' = w \in W \text{ ja } a = T \\ w_2, & \text{jos } w' = w \in W \text{ ja } a = V \\ w_1', & \text{jos } w' = w_1 \in W \text{ ja } a' = V \\ w_1'', & \text{jos } w' = w_1 \in W \text{ ja } a' = T \\ w_2', & \text{jos } w' = w_2 \in W \text{ ja } a' = V \\ w_2'', & \text{jos } w' = w_2 \in W \text{ ja } a' = T \end{cases}$$

Teemme tarkemmin selvennyksiä kuvaan.

Määritelmä 71. Määritelmässä a on pelaajan I valinta toiminnaksi ja a' on pelaajan II valinta toiminnaksi. Modaalilogiikan edellä esitettyyn kieleen lisätään seuraavat määritelmät

1. Jos $U_i(a, a')$ on utiliteetti, niin se on atomikaava
2. Jos $b_i \in \mathbb{R}$ on vakio, niin se on atomikaava
4. NASH on atomikaava ja tarkoittaa Nash-tasapainoa
5. Jos a ja b ovat atomikaavoja $(1-2)$, niin on $a = b$, $a \leq b$ sekä $a \geq b$ kaavoja



Kuva 12: PD mukailtuna ja tarkennettuna pelipuun muodossa

Koska tarkoituksemme on esittää perusteita, niin tutkielman kannalta riittää tarkastella jo esitettyä peliä PD peli on esitettävissä modaalisena pelinä ja sen määritelmä ei juuri muutu. Tämän luvun määritelmiä soveltamalla voidaan kuvailla peliä seuraavasti: maailmassa w pelaaja 1 aloittaa. Tästä vaihtoehdot $a \in \{\mathrm{V}, \mathrm{T}\}$ haarautuvat maailmoihin w_1 ja w_2 jotka vastaavat nyt *vaikenemista* ja *tunnustamista* pelaajalle. Tällöin täyttyy ehto $R_1(w, w_1)$ tai $R_1(w, w_2)$. Tämän jälkeen pelaaja 2 valitsee maailmassa w_1 tai w_2 vastaavasti strategian $a \in \{\mathrm{V}, \mathrm{T}\}$ jolloin vaihtoehtorelaatiolle pätee $R_2(w_1, w_1')$, $R_2(w_1, w_1'')$, $R_2(w_2, w_2')$ tai $R_2(w_2, w_2'')$ vastaavasti ja peli päättyy. Hyöty määräytyy samalla tavoin kuin klassisessa esimerkissämme PD (Peli 5).

Etuna mahdollisissa maailmoissa määritellyillä peleillä on modaalilogiikan operaattoreiden ja modaalilogiikan kielen ilmaisuvoiman käyttäminen pelaamisessa. Toisaalta voimme tehdä väittämän loogisesti pelistä kaavamuodossa sekä testata sen totuutta pelissä että toisaalta voimme ilmaista pelin oman totuuden kaavamuodossa. Esimerkiksi, Vangin Dilemma pelissä 5 havaitsemme, että tilassa (T,T) pätee lause $A = (U_1(\mathrm{T,T}) = -6 \wedge U_2(\mathrm{T,T}) = -6)$. Voimme merkitä $G, w_1'' \models A$. Vastaavalla tavalla voimme muodostaa muita kaavoja ja tutkia niitä käyttämällä hyvällä samoja menetelmiä mitä tutkimme semanttisten pelien yhteydessä. Esimerkiksi[13] sisältää enemmän käsittelyä aiheesta.

8.2 Teot ja Toiminta: Paholaisen Asianajaja uudelleen

Kuten aiemmin keskustelimme, on peli 2 yhteistyöpeli ja erityisesti Deonttinen peli. Koska Deonttinen logiikka käsittelee normatiivisia asenteita ja toimintaa, niin peli erityisesti puhuu yhteistyön tekemisestä ja sen merkityksestä voiton saavuttamiseksi vaikkapa yhteisöissä tai yhteisen päämäärän tavoittamiseksi. Erityisesti pelaajan valinta P kuvastaa velvollisuuden laiminlyötiä ja valinta E kuvastaa velvollisuuden noudattamista. Pelin toimii kuten edellä olleessa määritelmässä 70, tässä tapauksessa oletamme sen kielen sisältävän määritelmän 71 mukaiset kaavat. Oletamme nyt, että $A = \{E, P\}$ ja että edellisen pelin funktiot määräytyvät muuten samoin mutta strategiat vaihdetaan tätä peliä varten edellisissä määritelmissä $E = T$ ja $P = V$, sekä utiliteetti määräytyy kuten pelissä 2. Olkoon $W = \{w, w_1, w_2, w_1', w_1'', w_1', w_2''\}$. Vaihtoehto relaatiot $R_1, R_2 \subseteq W \times W$ määritellään:

$$R_1 = \{(w, w_1), (w, w_2)\} \quad R_2 = \{(w_1, w_1''), (w_1, w_1'), (w_2, w_2''), (w_2, w_2')\}.$$

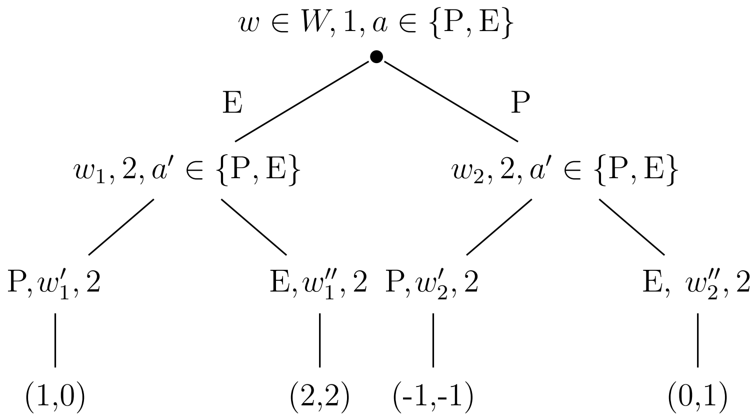
Määritellään funktio f

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = w \in W \\ 2, & \text{muilla } x \in W \end{cases}$$

Määritellään vielä funktiolle C että

$$C(w',a) = \begin{cases} w_1, & \text{jos } w' = w \in W \text{ ja } a = E \\ w_2, & \text{jos } w' = w \in W \text{ ja } a = P \\ w_1', & \text{jos } w' = w_1 \in W \text{ ja } a' = P \\ w_1'', & \text{jos } w' = w_1 \in W \text{ ja } a' = E \\ w_2', & \text{jos } w' = w_2 \in W \text{ ja } a' = P \\ w_2'', & \text{jos } w' = w_2 \in W \text{ ja } a' = E \end{cases}$$

Käytämme esimerkissä pelipuun käsitettä, kuten aiemmin määritelty. Peli 2 saadaan kuvailtua luonnollisella tavalla pelipuulla.



Kuva 13: Paholaisen Asianaja Modaalipelipuu

Deonttisen logiikan kielessä, kuten olemme nähneet esimerkissä 9, kaava A ei välitä tavalliseen tapaan asiantilaa vaan teon. Koska kaava A välittää teon, niin tästä syystä myös puhutaan että *deonttinen logiikka on normien ja toiminnan logiikkaa.*

Määritelmä 72. Deonttisten operaattoreiden merkitykset pelissä G ovat

1. $O_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α noudattaa/tekee velvollisuutta/teon A'
2. $F_\alpha A :=_{\text{def}}$ 'α ei noudata/ei tee velvollisuutta/tekoa A'

ja määräämme niiden totuuden pelimallissa G kummallekin pelaajalle seuraavasti:

1. $G, w \models O_\alpha A$ joss $\exists w \in W' \colon wR_\alpha w',\ G, w' \models A,\ f(w) = \alpha,\ C(w,a) = w',\ a = E \in \{P, E\}$ ja $\alpha \in \{1, 2\}$
2. $G, w \models F_\alpha A$ joss $\exists w \in W' \colon wR_\alpha w',\ G, w' \models A,\ f(w) = \alpha,\ C(w,a) = w',\ a = P \in \{P, E\}$ ja $\alpha \in \{1, 2\}$

Edellisille on voimassa määritelmät relaatiolle R_α kuten 70 määrittelimme. Esimerkiksi,

$$w_1 R_2 w_1' \Leftrightarrow f(w_1) = 2 \text{ ja } C(w_1, P) = w_1'$$
$$w R_1 w_1 \Leftrightarrow f(w) = 1 \text{ ja } C(w, E) = w_1$$

Edellisten määritelmien mukaan odotamme pelaajan valintojen vaikutavan operaattorien tulkintaan ja totuuteen, mikä lienee hyvin realistista. Määrätään vielä että teolle A pätee nyt pelissä että $\forall w \in W: G, w \models A$. Näillä määritelmillä saame määrättyä pelin. Nyt, esimerkiksi, on totta pelissä G että

$$G \models O_1 O_2 A \quad G \models O_1 F_2 A \quad G \models F_1 F_2 A \quad G \models F_1 O_2 A$$

jotka vastaavat niitä $2^2 = 4$ tapaa joilla kahdella operaattorilla kaksi henkilöä voivat muodostaa tekemisensä tai tekemättä jättämisensä pelissä tai velvollisuuden noudattamisen vaihtamalla asenteitansa. Edelliset eivät kuitenkaan ole samantekeviä pelissä G vaikka ne nyt ovat kaikki totta, sillä ne vastaavat nyt individuoidusti pelaajien valintoja eli pelitilanteita. Esimerkiksi,

$$\begin{aligned} &G \models O_1 O_2 (A \wedge (U_1(a, a') = 2 \wedge U_2(a, a') = 2)) \\ &G \models O_1 F_2 (A \wedge (U_1(a, a') = 1 \wedge U_2(a, a') = 0)) \\ &G \not\models O_1 F_2 (A \wedge (U_1(a, a') = 2 \wedge U_2(a, a') = 2)) \\ &G \models F_1 F_2 (A \wedge (U_1(a, a') = -1 \wedge U_2(a, a') = -1)). \end{aligned}$$

Edellisillä menetelmillä on mahdollista muuntaa mikä vain edellä esitetyistä peleistä modaalipeliksi taikka yleisistä summa- ja vakiosummapeleistä, tasapainopeleistä tmv. Näin olemme toisaalta tulleet tämän tutkielman tien päähän. Kiinnostuneille lukijoille eräs mielenkiintoinen viite Deonttisiin Strategisiin peleihin:
Tamminga Allard, *Deontic Logic for Strategic Games*, Erkenntnis, Vol. 78, 2013, sivut: 183–200.

9 Yhteenveto

Tähän lopetamme tutkielman, sillä kuten tästä esitystavasta käy ilmi on pelejä mahdollista esittää ja analysoida klassisin keinoin tutkielmassa esitetyin menetelmiin. Tässä vaiheessa se, mitä olemme sanoneet ja kirjoittaneet kulminoituu. '*Miksi semanttiset pelit ja miksi klassisen peliteorian osa ja miksi niin kattavasti modaalilogiikan teoriaa*' kysymys on saanut loogisen vastauksensa, sillä voimme lausua tehdä muutaman havainnon:

- voimme ilmaista pelimalleissa lauseita, jotka ilmaisevat modaalilogiikan kielen avulla vallitsevan asiantilan.
- Edellisissä peleissä olemme yhdistäneet klassisen peliteorian ja modaalilogiikan kuten oli tarkoitus.
- Olemme esittäneet kuinka esimerkkimme voidaan muuntaa modaalipeleiksi.
- Olemme osoittaneet tutkimuksemme tarkoitusperien mukaisesti modaalipelien ja pelien yhteyden ja kuinka modaalikieltä voidaan käyttää peleissä.
- Olemme esittäneet edellä Semanttisen pelin modaalilogiikalle ja modaaliselle predikaattilogiikalle jota voidaan hyödyntää muissa modaalipeleissä tai käyttää sellaisenaan niin klassisissa kvanttoripeleissä tai lauselogiikan peleissä.

Yhteenvedoksi sanon meidän pyrkineen esittämään modaalisten pelien perusteita ja Wittgensteinilaisia kielipelejä. Wittgensteinilaisessa mielessä esitämme mm. Modaalilogiikan raamina peleille mutta toisaalta esitämme mm. semattisia pelejä myös modaalilogiikalle. Mitä näissä peleissä voidaan ilmaista on mm. kiinni kielen vahvuudesta kuten, esimerkiksi, Nash-tasapainon ilmaiseminen. Aluksi esitimme peliteoriaa työkalumaisesti riittävästi voidaksemme luoda perustan myöhemmille pelin käsitteille ja esittää muutaman esimerkin, joista yksi oli omani ja jonka avulla esitin yhteistyön käsitteen yleisellä summapelillä. Todistimme ja kuvailimme tärkeimmät metodit ja teoriat. Esitimme logiikan osalta välttämättömät ja riittävät perusteet, jotta saatoimme esittää modaalilogiikan ja mahdollisen maailman käsitteen käytön semanttisten pelien ja modaalipelien yhteydessä. Semanttisten pelien yhteydessä esitimme modaalipelin ja kopulapelin kuvailevasti muutaman esimerkin avulla käyttäen määritelmiä ja logiikkaa jonka välttämättömät perustiedot annoimme. Aivan lopuksi otimme esille esimerkin modaalilogiikan mahdollisten maailmojen käyttämisestä Vangin Dilemma pelin yhteydessä niin, että Kripke-raami ja mahdollisten maailmojen käsitteet olivat pelaajien toimintojen kuvailussa käytössä. Otimme myös uudelleen oman pelini esimerkkinä Deonttisesta logiikasta. Tutkielmassamme kielemme on logiikan kieli ja peliteorian kieli.

Lopuksi, haluan kiittää erityisesti: Pro Gradun ohjaajaani Yliopistonlehtori Tapani Hyttinen Helsingin Logiikan Ryhmästä sekä Helsingin Logiikan ryhmästä Prof. Jouko Väänänen, Prof. Juha Kontinen, Juliette Kennedy, Dos. Taneli Huuskonen, yliopistonlehtori Åsa Hirvonen sekä kunnioituksella arvon Filosofi Jaakko Hintikka jonka ennätin kohdata muutaman kerran sekä muistaen Georg Henrik Von Wrightia innoituksesta. Lopuksi, kiitän kärsivällisyydestä vanhempiani Kyösti Piironen ja Pirjo Piironen sekä siskoani Minna Piironen jotka ovat seuranneet intohimoani kiinnostuneena ja tukien.

A Predikaattilogiikka

Tässä luvussa käymme halki riittävät predikaattilogiikan tiedot, jotta voimme käsitellä kvanttoripelejä ja kvanttoreita tutkielmassamme, perinteisellä tavalla. Tutkielmassa olemme esittäneet oman semantiikkansa modaaliselle predikaattilogiikalle johon emme tarvitse tämän liitteen aineistoa. Luku on mukana lähinnä perinteiden takia, sillä kielipelit ovat perinteisesti esitetty sekä konnektiivi- että kvanttoripeleinä(kts. esim. [7, 5]).

Määritelmä 73. Struktuuri M $(\neq \emptyset)$ on mikä tahansa joukko varustettuna äärellisellä jonolla vakioita, relaatioita tai funktioita. Struktuuria M, jonka universumi on M, relaatiot ovat $R_1, \ldots R_n$, yksilövakiot ovat $c_1, \ldots, c_k$ ja funktiot ovat $f_1, \ldots, f_m$ merkitään

$$M = (M, R_1, \ldots, R_n, f_1, \ldots, f_m, c_1, \ldots, c_k)$$

Määritelmä 74. Aakkosto on joukko L joka sisältää vakiosymboleita, relaatiosymboleita ja funktiosymboleita. Aakkostoon liitty paikkaluku $\#_L$. Käytämme symboleita R relaatioista, f funktioista ja c_i vakioista. Kutsumme joukkoa L-aakkostoksi (tai kieleksi). Relaatiosymbolia $R \in L$ sanomme $\#_L(R)$ paikkaiseksi. Funktiosymbolia $f \in L$ sanomme $\#_L(f)$ paikkaiseksi.

Määritelmä 75. Jos L on L-aakkosto, niin L-struktuuri on pari $M = (M, Tul_M)$, missä M on epätyhjä joukko ja Tul_M on funktio siten, että

(1) dom(Tul_M)=M

(2) $R \in L \Longrightarrow Tul_M(R) \subset M^{\#_L(R)}$

(3) $f \in L \Longrightarrow Tul_M(R) \subset M^{\#_L(f)}$

(4) $c \in L \Longrightarrow Tul_M(c) \in M$

Määritelmä 76. L-termit t määritellään

1. Vakiotermi c on termi
2. Muuttuja v_n, $n \in \mathbb{N}$ on termi
3. Jos n paikkainen relaatio R on termi ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat termejä, niin $R(t_1, \ldots, t_n)$ on termi.

Määritelmä 77. L-kaava ϕ måäritellään

1. $\phi = R(t_1, \ldots, t_n)$ on kaava.
2. Jos ψ on kaava, niin $\phi = \neg\psi$ on kaava.
3. Jos ψ ja θ ovat L-kaavoja, niin $\phi = (\psi \wedge \theta)$ on kaava.
4. Jos ψ ja θ ovat L-kaavoja, niin $\phi = (\psi \vee \theta)$ on kaava.
5. Jos θ on kaava, niin $\phi = \forall v_i \theta$ on kaava.
6. Jos θ on kaava, niin $\phi = \exists v_i \theta$ on kaava.

Määritelmä 78. Tulkintajono on kuvaus $s\colon \mathbb{N} \to M$, $s(n) \in M$. Olkoot ${}^{\mathbb{N}}M$ kaikkien tulkintajonojen joukko ${}^{\mathbb{N}}M = \{s | s\colon \mathbb{N} \to M\}$. Silloin $s(n) \in {}^{\mathbb{N}}M$. Määrittelemme

$$s(a/n)(i) = \begin{cases} s(n), & i \neq n \\ s(a), & i = n \end{cases}$$

Toisin sanoen $s(a/n)$ on sama tulkintajono kuin s mutta $s(n)$ arvo on nyt muutettu $s(a/n)$:ssä a:ksi.

Tarvitsemme kvanttorien semantiikan täsmälliseen tulkitsemiseen seuraavat apuvälineet

Määritelmä 79. Jos $\chi \subseteq {}^{\mathbb{N}}M$, niin $A_n(\chi) = \{s | s(a/n) \in \chi \,\text{kaikilla}\, a \in M\}$, eli siis

$$s \in A_n(\chi) \leftrightarrow \text{ kaikilla}\, a \in M\colon s(a/n) \in \chi.$$

Samoin $E_n(\chi) = \{s | s(a/n) \in \chi \,\text{jollakin}\, a \in M\ \}$, jolloin

$$s \in E_n(\chi) \leftrightarrow \text{ jollakin}\, a \in M\colon s(a/n) \in \chi$$

Joukko E_n voidaan johtaa myös joukosta A_n, mikäli ajattelemme eksistenssikvanttorin olevan kaikkikvanttorin duaali $\exists v_n \phi = \neg\forall\neg\phi$.

Määritelmä 80. L-termin t arvo tulkintajonolla s L-mallissa M, merkitään $t^M\langle s\rangle$, saadaan

1. $t = c$ on vakiotermi. $c^M\langle s\rangle = c^M$
2. $t = v_n$ on muuttuja. $v_n^M\langle s\rangle = s(v_n) = s(n)$
3. $t = R(t_1, \ldots, t_n)$ on relaatio. $Tul_M(R^M)(t_1^M\langle s\rangle, \ldots, t_n^M\langle s\rangle)$

Määritelmä 81 (Tarskin totuusmääritelmä). Jos L on aakkosto, ϕ on L-kaava ja M on L-stuktuuri, niin $Tul_M(\phi)$ määritellään seuraavasti:

(1) $Tul_M(R(t_1, \dots t_n)) = \{s | \langle t_1^M \langle s \rangle, \dots, t_n^M \langle s \rangle \rangle \in R^M\}$

(2) $Tul_M(\neg\phi) = {}^{\mathbb{N}}M \setminus Tul_M(\phi)$

(3) $Tul_M(\psi \wedge \theta) = Tul_M(\psi) \cup Tul_M(\theta)$

(4) $Tul_M(\psi \vee \theta) = Tul_M(\psi) \cap Tul_M(\theta)$

(5) $Tul_M(\psi \to \theta) = ({}^{\mathbb{N}}M \setminus Tul_M(\psi)) \cap Tul_M(\theta)$

(6) $Tul_M(\forall v_n \phi) = A_n(Tul_M(\phi))$

(7) $Tul_M(\exists v_n \phi) = E_n(Tul_M(\phi))$

$Tul_M(\phi)$ on kaavan ϕ tulkinta L-struktuurissa M. Sanomme, että s toteuttaa ϕ:n M:ssa,

$$M \models_s \phi,$$

jos $s \in Tul_M(\phi)$. Sanomme, että M toteuttaa ϕ:n,

$$M \models \phi,$$

jos $Tul_M(\phi) = {}^{\mathbb{N}}M$, jolloin sanomme että ϕ on tosi M:ssä ja M on ϕ:n malli.

Esimerkki 20. Okoon $M = (M, R)$ L-malli. Olkoot s tulkintajono ja $\forall v_0 \exists v_1 \phi$. Silloin $s \in Tul_M(\forall v_0 \exists v_1 \phi) \Rightarrow s \in A_n(\exists v_1 \phi) \Rightarrow s \in A_n E_n(\phi)$. Jos edelliset pätevät, niin

$$M \models_s \forall v_0 \exists v_1 \phi.$$

Toisin sanoen, olkoon $s \in Tul_M(\forall v_0 \exists v_1 \phi)$. Siis mielivaltaisella $a \in M$ pätee $s(a/0) \in Tul_M(\exists v_1 \phi)$. Olkoot $b \in M$. Jos pätee $s(a/0)(b/1) \in Tul_M(\phi)$, niin silloin s toteuttaa ϕ:n mallissa M.

Viitteet

[1] Tuomas Aho, *On The Philosophy Of Attitude Logic*, Acta Philosophica Fennica, Vol. 57, 325 s., 1994

[2] Ross, Don, *Game Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/game-theory/

[3] Robert Gibbons, *Primer In Game Theory*, Prentice-Hall, 267 s., 1992, ISBN 0-7450-1159-4

[4] Jaakko Hintikka, *Knowledge and Belief – Logic of Two Notions*, Cornell University Press ,1962 (Reprint 2005)

[5] Jaakko Hintikka, *Game Of Language – A Game theoretical approach*

[6] Jaakko Hintikka, *Kieli ja Mieli – Katsauksia kielifilosofiaan ja merkityksen teoriaan*, Otava, 255 s., 1982, ISBN 951-1-06757-5

[7] Jaakko Hintikka, *Principles Of Mathematics Revisited*, Oxford 1995.

[8] Hannu Honkasalo, *Lineearialgebra I*, Matematiikan ja tilastotieteen laitoks, luentomoniste

[9] Jukka Kangasaho et al, *Analyyttinen Geometria - pitkä matematiikka*, WSOY, 158 s. 1999, ISBN 951-0-20097-2

[10] Saul Kripke, *Naming and Necessity*, Harvard University Press, 1980

[11] Mika Koskenoja et al, *Analyysiä Reaaliluvuilla*, Unigrafia Oy, s. 353, 2014, ISBN 978-952-93-4162-7

[12] John von Neumann, Oskar Morgenstein *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944

[13] Wiebe van der Hoek, Marc Pauly, *Modal logic for games and information*, Studies in Logic and Practical Reasoning Volume 3, ss. 1–1233 (2007), Handbook of Modal Logic

[14] Giacomo Bonanno, *Modal Logic and Game theory - two alternative approaches*, Risk Decision and Policy (2002), vol. 7, pp. 309–324.

[15] Yuval Peres, *Game Theory, Alive*, moniste ja AMS-kirja

[16] Platon, *Teokset I*, Otava 1999, 309 s.

[17] Platon, *Teokset III*, Otava 1999, 420 s.

[18] Veikko Rantala et al, *Johdatus Modaalilogiikkaan*, Gaudeamus, 2004

[19] Henri Nousiainen, *Johdatus Peliteoriaan*, Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan ja Tilastotieteen laitos, 2013

[20] Gabriel Sandu et al, *Independency Friendly logic — Game Theoretical Semantics Approach, London Mathematical society Student notes*

[21] Gabriel Sandu, *Logic, Language And Games*, Acta Philosophica Fennica, Vol 91, 139 s., 2015

[22] llard Tamminga, *Deontic Logic for Strategic Games*, Erkenntnis (2013) 78:183—200

[23] Pekka Tuominen, *Todennäköisyyslaskenta I*, Limes ry, 6.p., s. 229, 2002, ISBN 951-745-156-3

[24] Hans-Olav Tylli et al., *Funktionaalianalyysin Peruskurssi*, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, luentomoniste, 2010

[25] Nikolai N. Vorob'ev, *Game Theory: Lectures for Economists and Systems Scientists*

[26] Jussi Väisälä, *Topologia I*, Limes ry, 3.p., s. 144, 2004, ISBN 951-745-204-7

[27] Jussi Väisälä, *Topologia II*, Limes ry, 2.p., s. 195, 2005, ISBN 951-745-209-8

[28] Jouko Väänänen, Hannele Väänänen, *Johdatus Logiikkaa*, Gaudeamus

[29] Jouko Väänänen, *Matemaattinen Logiikka*, Matematiikan ja Tilastotieteen laitos, luentomoniste

[30] Jouko Väänänen, *Dependency Logic A New Approach to IF logic*, London Mathematical Society Student Text 70, 2007, s. 225

[31] Jouko Väänänen, *Games and Models*, Cambridge Studies In Advanced Mathematics 132, 2011, ISBN 978-0-521-51812-3

[32] Hodges Wilfrid, *Logic and Games*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/logic-games/

[33] Ludwig Wittgenstein, *Sininen ja Ruskea kirja*, WSOY, 3. p., 2001, s. 299, ISBN 951-0-23921-6

[34] Garri Kasparov, *Kuinka elämä jäljittelee Shakkia*,

[35] Look, Brandon C., "Leibniz's Modal Metaphysics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), ¡https://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/leibniz-modal/¿.

[36] Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein,*A Course in Game Theory, Electornic version*,MIT Press, 2011, ISBN 0-262-65040-1

[37] James Gleick, *Prisoner's Dilemma has unexpected applications*, https://nyti.ms/29CwvCm, The New York Times, JUNE 17, 1986

[38] Peter Passell, *The Law as the Free Market's Rogue: Hostage to the Prisoner's Dilemma*, https://nyti.ms/298vOl1, The New York Times, MARCH 25, 1994

[39] Elvis Picardo, *The Prisoner's Dilemma in Business and the Economy*, https://www.investopedia.com/articles/investing/110513/utilizing-prisoners-dilemma-business-and-economy.asp# , Investopedia, Updated June 28, 2018 — 12:04 PM EDT

[40] Tom Siegfried, *John Nash, Peliteoria ja Luonnon Koodi*, Terra Cognita Oy, 2008, s. 259

[41] Duncan Snidal,*Coordination vs. Prisoners Dilemma: Implication to International Cooperation and Regimes*, The American Political Science Review, Vol. 79 No 4, Dec 1985, pp. 923-942