Riskisijoitukset

Assi Vainikka

3. kesäkuuta 2020

Pro gradu -tutkielma
Helsingin yliopisto
Matematiikka

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiivistelmä

Tekijä
Assi Vainikka

Työn nimi
Riskisijoitukset

Tiedekunta Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Koulutusohjelma Matematiikan koulutusohjelma

Työn laji Pro gradu -tutkielma **Päiväys** 3. kesäkuuta 2020 **Sivuja** 43

Tiivistelmä

Riskisijoituksilla tarkoitetaan riskillistä omaisuutta, eli omaisuutta, jonka tulevaisuuden arvoa ei tiedetä varmasti. Kaikki omaisuus joka ei ole riskitöntä omaisuutta on riskillistä omaisuutta. Riskillisestä omaisuudesta puhuttaessa puhumme yksinkertaisuuden vuoksi osakkeista. Osakkeiden hinnat voivat nousta tai laskea nykyisestä arvosta ja osakkeiden tulevia hintoja mallinnamme erilaisten mahdollisten skenaarioiden avulla.

Osakekurssien dynamiikkaa voidaan tarkastella tuoton avulla. Koska osakkeen tuleva arvo on epävarma, myös tuotto on epävarma. Osakkeen tuotto koostuu osakkeen myyntivoitosta tai -tappiosta ja osakkeen mahdollisesti maksamasta osingosta. Odotetun tuoton voimme laskea aiempien periodien keskimääräisen tuoton avulla.

Binomipuumalli on osakkeiden hintojen malli, joka on määritelty olettaen että osakkeen hinta voi tulevaiuudessa vain joko nousta tai laskea, ja että riskittömän investoinnin yhden periodin tuotto on sama jokaisella periodilla. Binomipuu siis esittää kaikki osakkeen tulevien hintojen skenaariot.

Osakkeiden tulevia hintoja halutaan usein verrata riskittömien investointien tuottoon, ja tämä onnistuu tarkastelemalla riskineutraalia todennäköisyyttä, eli todennäköisyyttä jolla osakkeiden odotettu tuotto on sama kuin riskittömien investointien tuotto. Riskineutraali todennäköisyys on matemaattinen objekti, joka voi poiketa markkinoiden todellisesta tulevien hintojen todennäköisyydestä. Riskineutraaliin todennäköisyyteen viitataan myös martingaalitodennäköisyytenä.

Binomipuumalli laajennetaan trinomipuumalliin, joka on binomipuuta vastaava malli, mutta osakkeen tulevalla hinnalla on kahden sijaan kolme vaihtoehtoa. Hinnan nousun ja laskun lisäksi on näiden välillä oleva vaihtoehto, joka usein on neutraali, eli osakkeen hinta pysyy ennallaan.

Kaikissa aiemmin esitellyissä malleissa aika on diskreetti, mutta lopuksi perehdytään vielä jatkuvan ajan malliin. Malleissa joissa on diskreetti aika on joitain rajoitteita, näistä rajoitteista pyritään pääsemään eroon siirtymällä jatkuvaan aikaan. Binomipuumallia laajennetaan siis siten, että aikaperiodit voidaan jakaa äärettömän pieniin periodeihin ja tutkitaan muun muassa satunnaiskulkuja.

Toinen osio koostuu opetuspaketista, missä aiemmin esiteltyä teoriaa yksinkertaistetaan niin että sen opettaminen on mahdollista lukiotasolla. Opetuspaketin sisältöä on mahdollista hyödyntää lukion matematiikan tai yhteiskuntaopin kursseilla, tai ainerajat ylittävänä kokonaisuutena. Opetuspaketissa teoriaan on lisätty esimerkkejä ja aiheisiin liittyviä tehtäviä ratkaisuineen.

Avainsanat Riskillinen omaisuus, riskisijoitukset, osakekurssien dynamiikka, tuotto, odotettu tuotto, binomipuumalli, riskineutraali todennäköisyys

Säilytyspaikka

Muitatietoja

Sisältö

1 Johdanto

Tässä tutkielmassa perehdytään riskilliseen omaisuuteen ja osakekurssien dynamiikkaan. Tutkielma koostuu kahdesta osasta, ensimmäisessä osassa käsitellään riskillistä omaisuutta ja osakemarkkinoiden dynamiikkaa teoreettisesti ja toinen osio koostuu tähän teoriaan pohjaavasta opetuspaketista, jossa teoriaa on yksinkertaistettu paremmin kouluopetukseen soveltuvaksi, erityisesti lukiotasolle.

Riskillinen omaisuus on sitä omaisuutta joka sisältää riskin, eli omaisuuden tulevaa arvoa ei voida tietää varmasti. Omaisuuden tuleva arvo on siis satunnaismuuttuja, mutta voimme kuitenkin tarkastella varallisuuden mahdollista tulevaa arvoa ja luoda malleja osakkeiden hinnoille. Osakkeen tulevia hintoja voidaan mallintaa mahdollisten skenaarioiden avulla.

Osakkeen tuottoa tarkastellessa voimme tutkia osakkeen tuottoastetta tai logaritmista tuottoa. Tuotto koostuu osakkeiden myyntivoitoista (tai -tappioista), joka perustuu kysynnän ja tarjonnan lakiin, sekä mahdollisesta osakkeen maksamasta osingosta. Odotetun tuoton laskemisessa käytetään aiempien periodien keskimääristä tuottoa, sillä käytännössä on hankalaa estiomoida todennäköisyydet ja tuotot kaikille skenaarioille.

Binomipuumalli kuvaa osakkeiden hintoja. Mallissa oletamme että yhden aikaperiodin aikana osakkeen hinnalle voi tapahtua kaksi asiaa: osakkeen hinta voi nousta tai laskea. Lisäksi hinnan nousulle ja laskulle on jotkin todennäköisyydet. Kun yhdistämme osakkeen hinnan mahdolliset muutokset useamman periodin aikana, saamme osakkeiden hintojen mallin, jonka voi visualisoida ”puun”avulla.

Usein sijoittajia kiinnostaa osakkeiden mahdollisten tuottojen suhde riskittömien sijoitusten tuottoihin. Tätä voidaan tarkastella riskineutraalin todennäköisyyden avulla. Tarkastelemme osakkeiden hintojen odotusarvojen dynamikkaa, ja vertaamme näitä odotusarvoja riskittömän omaisuuden tuottoon. Voimme määrittää riskineutraalin todennäköisyyden ja jos tämä todennäköisyys vastaa todellista markkinoiden todennäköisyyttä, sanomme, että markkinat ovat riskineutraalit.

Lisäksi käsitellään trinomipuumallia, joka on binomipuumallin laajennus niin, että osakkeen hinnalle on kahden sijaan kolme vaihtoehtoa yhden aika-askeleen jälkeen. Kaksi vaihtoehtoa kuvaavat nousevia ja laskevia hinnanmuutoksia kuten ennenkin, ja kolmas edustaa väli hannan muutosta, joka on käytännössä usein neutraali, eli että osakkeen hinta pysyy muuttumattomana.

Teoriaosan lopuksi käsitellään vielä jatkuvan ajan mallia. Aiemmissa malleissa aika on ollut diskreetti ja sitä on kuvattu tiettyinä periodeina, jakamalla aika ”aika-askeleisiin”, jotka voivat olla vuosia, kuukausia tms. Usein vuosia. Tutustutaan myös satunnaiskulun käsitteeseen ja saadaan approksimaatio osakkeiden hintojen dynamiikalle. Jatkuvan ajan tapauksessa huomataan myös, että osakkeen hintaa kuvaavan muuttujaan logaritmi noudattaa normaalijakaumaa.

Toisen osan opetuspaketin tavoitteena on tutustuttaa opiskelija riskillisen omaisuuden, käytännössä osakkeiden, mallintamiseen. Raha ja omaisuus on kaikkia koskettava aihe ja opetuspaketin sisällöllä on suora yhteys arkielämään ja todellisiin ilmiöihin.

Opetuspaketissa teoria on esitetty yksinkertaisemmin ja helpommin ymmärrettävästi hieman yksinkertaistamalla notaatiota ja lisäämällä esimerkkejä teorian joukkoon. Paketista on jätetty pois trinomipuumalli sekä jatkuva-aikamalli, jotta pysytään kouluun sopivalla vaikeustasolla. Lisäksi opetuspaketti sisältää tehtäviä käsiteltäviin aiheisiin liittyen, sekä opetuspaketin lopussa näiden tehtävien ratkaisut.

Osa I

Teoria

2 Riskillinen omaisuus

Riskillisellä omaisuudella tai riskisijoituksilla tarkoitetaan varallisuutta jonka tulevaisuuden arvoa ei tiedetä varmasti. Kaikki omaisuus, joka ei ole riskitöntä omaisuutta (kuten käteinen raha, pankkitalletukset tai valtion joukkovelkakirjalainat), omaa jonkinlaisen riskin, ja on siten riskillistä omaisuutta. Toisaalta voidaan argumentoida, että kaikki omaisuus sisältää jonkin laisen riskin, erityisesti joukkovelkakirjalainat silloin kun markkinakorot ovat satunnaisia, vaikka niiden tuotto on ennalta sovittu.

Omaisuus koostuu siis riskittömästä omaisuudesta $A(t)$ ja riskillisestä omaisuudesta $S(t)$. Sijoittajan, jolla on hetkellä t $x(t)$ osaketta ja $y(t)$ rahaa pankkitilillä, kokonaisomaisuus hetkellä t on

$$V(t) = x(t)S(t) + y(t)A(t).$$

olettaen, että strategia on itserahoittava. Paria $(x(t), y(t))$ kutsutaan *sijoitusstrategiaksi* tai *sijoitussalkuksi*, $V(t)$:n ollessa salkun arvo, tai toisinsanoen sijoittajan varallisuus hetkellä t.

Keskitymme siis riskilliseen omaisuuteen, jolla käytännössä tarkoitetaan usein osakkeita, mutta se voi olla myös esimerkiksi ulkomaista valuuttaa, kultaa tai mikä tahansa hyödyke jonka arvo voi vaihdella. Voimme yksinkertaisuuden vuoksi ajatella, että riskillinen omaisuus on osake.

3 Osakekurssien dynamiikka

Usein sanotaan, että omaisuuserien hintojen muutosten täytyy olla satunnaisia, tehokkaiden markkinoiden hypoteesin johdosta. Tästä hypoteesista on muutamia eri versioita, mutta pohjimmiltaan kaikki sanovat kaksi asiaa kuten Wilmott, P., Howison, S. ja Dewynne, J kiteyttävät kirjassaan The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction [3]:

- Omaisuuserän historia on otettu täydellisesti huomioon omaisuuserän nykyisessä arvossa, ja ei siten sisällä sen enempää informaatiota.
- Markkinat reagoivat välittömästi kaikkeen uuteen omaisuuserää koskevaan informaatioon

Markkinahinta riippuu siis suuren määrän toimijoita tekemistä valinnoista epävarmuuden vallitessa. Vaikka osakkeiden hintoja ajatellaan satunnaisina, osakkeiden hinnoista voidaan kuitenkin muodostaa matemaattisia malleja kuvaamaan osakkeiden hintojen käyttäytymistä.

Osakkeiden hintaa hetkellä t merkitään $S(t)$. Tämän hetkinen osakkeiden arvo $S(0)$ on sijoittajien tiedossa, tuleviin arvoihin $S(t), t > 0$ liittyy epävarmuutta.

Arvo $S(1)$ voi nousta tai laskea. Teemme Capińskin ja Zastawniakin [1] tapaan seuraavat oletukset:

Oletus 1. Osakkeiden tuleva arvo $S(1)$ on satunnaismuuttuja, jolla on vähintään kaksi, mutta äärellinen määrä mahdollisia arvoja.

Oletus 2. Kaikki osakkeiden arvot ovat positiivisia.

$$S(t) \geq 0, \qquad t = 0, 1, 2, 3, ...$$

Oletus 3. Sijoittajalla voi olla osakkeita mikä tahansa määrä x, missä

$$x \in \mathbb{R}$$

Kun siloittajalla voi näin ollen olla jokin murto-osa osakkeita, niin osakkeet ovat siis *jaettavia*. *Likviditeetillä* tarkoitetaan markkinoiden ominaisuutta, jonka mukaan mitä tahansa varallisuutta voidaan ostaa tai myydä kysynnän mukaan markkinahintaan mielivaltainen määrä. Tämä on tosin vain matemaattinen ihanne, sillä todellisuudessa on kaupan volyymia koskevia rajoituksia.

Lyhyeksi myynnillä tarkoitetaan tilannetta, jossa investoija lainaa osakkeen, myy sen, ja käyttää tuoton johonkin toiseen sijoitukseen. Osakkeen omistajalla säilyy kaikki oikeudet osakkeeseen. Erityisesti omistaja on oikeutettu osakkeiden mahdollisesti tuottamaan osinkoon ja hän voi myydä osakkeen milloin haluaa. Tämän vuoksi sijoittajalla tulee aina olla riittävät resurssit täyttää mahdolliset velvoitteet, erityisesti ostaa takaisin lainattu osake ja palauttaa se osakkeen omistajalle. Tästä syystä teemme seuraavan oletuksen:

Oletus 4. Sijoittajan varallisuudella on alaraja

$$V(t) \geq \eta, \qquad t = 0, 1, \ldots$$

missä $\eta \leq 0$

Tämä on alaraja velanotolle, kun velanotto lasketaan kokonaisvarallisuuden mukaan. Sijoitussalkkua joka täyttää tämän ehdon sanotaan hyväksyttäväksi.

Arbitraasimahdollisuus on keino saada vaurautta ilman alkupääomaa. Selvästikään arbitraasimahdollisuus ei voi olla olemassa ilman että se tulee hyvin nopeasti hyödynnetyksi. Tämän vuoksi teemme seuraavan oletuksen, kuten Elliott ja Kopp, (1998)[5]:

Oletus 5. Ei ole olemassa hyväksyttävää salkkua alkuarvolla $V(0) = 0$, siten että $V(1) \geq 0$ todennäköisyydellä 1.

Eli yksikään investoija ei voi saada voittoa ilman riskiä, ja alkusijoitusta, eli arbitraasimahdollisuutta ei ole olemassa. Jos olisi olemassa porfolio, joka ei noudata tätä periaatetta, sanoisimme että arbitraasimahdollisuus on olenmassa. Tämä on Capińskin ja Zastawniakin [1] mukaan markkinoiden perustava oletus, markkinat eivät siis salli riskitöntä voittoa ilman alkupääomaa.

Todellisuudessa arbitraasimahdollisuuksia esiintyy harvoin. Tällainen mahdollisuus voisi ilmetä esimerkiksi kun markkinoiden toimijat tekevät jonkin virheen, tai tilanteessa jossa samat instrumentit kaupataan eri markkinapaikoissa. Jos tällainen mahdollisuus kuitenkin ilmenee, niin siitä saatavat tuotot ovat usein hyvin pieniä, lisäksi ne menevät ohi hyvin nopeasti ja niitä on vaikea huomata. Arbitraasimahdollisuuden poissulkeminen matemaattisesta mallista on tarpeeksi lähellä todellisuutta, ja käy ilmi, että se on hyödyllisimpiä oletuksia mallien kannalta. Tähän oletukseen perustuvat argumentit ovat finanssimatematiikan keskeisiä työkalija.

Matemaattisesti osakkeen arvo $S(t)$ voidaan ilmaista positiivisena satunnaismuuttujana todennäköisyysksien joukossa Ω, siten että

$$S(t) : \Omega \to (0, \infty).$$

Todennäköisyysjoukko Ω sisältää kaikki mahdolliset hinnanmuutosskenaariot $\omega \in \Omega$. Jos markkina noudattaa tätä skenaariota, merkitään hintaa hetkellä t $S(t, \omega)$. Nyt voimme sanoa, että tuleville osakkeiden hinnoille $S(t)$, missä $t > 0$ on vähintään kaksi mahdollista skenaariota $\omega, \widetilde{\omega} \in \Omega$, siten että $S(t, \omega) \neq S(t, \widetilde{\omega})$.

Olkoon aika diskreetti muuttuja, $t = n\tau$, missä $n = 0, 1, 2, 3, ...$ ja τ on kiinteä aika-askel, kuten vuosi, kuukausi, päivä ja niin edelleen. Koska oletamme vuoden ajan yksiköksi, kuukautta vastaa $\tau = 1/12$, viikkoa vastaa $\tau = 1/52$, päivää $\tau = 1/365$, ja niin edelleen.

Notaation yksinkertaistamiseksi identifioimme kuitenkin Capińskin ja Zastawniakin [1] tavoin $n\tau$:n n:ksi, ja kirjoitamme $S(0), S(1), S(2), ..., S(n), ...$ (sen sijaan, että kirjoittaisimme $S(0), S(1\tau)$,
$S(2\tau), ..., S(n\tau), ...$).

Tarkastellaan markkinaa, joka voi seurata kahta mahdollista skenaariota, noususuhdannetta ω_1 tai taantumaa ω_2. Olkoon tietyn osakkeen tämänhetkinen hinta x_0, joka voi nousta noususuhdanteen ansiosta seuraavalla periodilla hintaan x_1^n, tai taantuman seurauksena laskea hintaan x_1^t. Näissä olosuhteissa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, ja asettamalla $\tau = 1$ saadaan

skenaario	$S(0)$	$S(1)$
ω_1 (nousuhdanne)	x_0	x_1^n
ω_2 (taantuma)	x_0	x_1^t

Samoin tilanne voidaan muodostaa kolmelle skenaariolle $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	x_0	x_1^1	x_2^1
ω_2	x_0	x_1^2	x_2^2
ω_3	x_0	x_1^3	x_2^3

Nämä hinnan muutokset voidaan esittää myös puuna, tästä lisää myöhemmin.

3.1 Tuotto

Osakekurssien dynamiikkaa voidaan tarkastella tuoton avulla. Oletetaan aluksi, että osake ei maksa osinkoa.

Tuotto ilmaistaan osakkeiden tulevan arvon ja tämän hetkisen arvon erotuksen osuutena tämän hetkisestä arvosta.

$$K_s = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$

Koska tuleva arvo $S(1)$ on epävarma, myös tuotto K_s on epävarma. Yleistämällä tämä mille tahansa aikavälille $[m, n]$, (oikeastaan siis välille $[m\tau, n\tau]$) saamme seuraavat määritelmät kuten Capiński ja Zastawniak 2010 [1]:

Määritelmä 1. Tuottoaste, tai lyhyemmin vain tuotto $K(n, m)$ välille $[n, m]$ on satunnaismuuttuja

$$K(n, m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

Yhden aika-askeleen $[n-1, n]$ tuotto $K(n)$ on

$$K(n) = K(n-1, n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)},$$

josta seuraa

$$S(n) = S(n-1)(1 + K(n)).$$

Jos osake maksaa osinkoa $div(n)$ ajan hetkellä n, täytyy tuoton määritelmää muuttaa. Kun osinko maksetaan, osakkeen hinta tippuu osingon verran. Koska oikeus osinkoon on myönnetty ennen osakkeen maksupäivää, osakkeen arvon tippuminen on jo huomioitu osakkeen hinnassa $S(n)$. Joten investoija, joka ostaa osakkeen ajanhetkellä $n-1$ maksaen $S(n-1)$ ja toivoo myyvänsä osakkeen osakkeen hetkellä n, saa $S(n) + div(n)$, ja tuotto on

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1) + div(n)}{S(n-1)}$$

On tärkeää ymmärtää ero yksittäisen aika-askeleen tuoton, ja pidemmän periodin tuoton välillä. $K(0, n) \neq K(1) + ... + K(n)$

Lause 3.1. *Hintasuhde peräkkäisten yksittäisten askeleiden tuottojen ja yhdistetyn periodin tuoton välillä on*

$$1 + K(n, m) = (1 + K(n+1))(1 + K(n+2))...(1 + K(m)).$$

Todistus. Määritelmästän 1 perusteella

$$S(n) = S(n-1)(1 + K(n)) \tag{1}$$

Käyttäen tätä määritelmää saamme vastaavasti

$$S(n+1) = S(n)(1 + K(n+1))$$

Sijoittamalla $S(n)$:n paikalle (1) saamme

$$S(n+1) = S(n-1)(1 + K(n))(1 + K(n+1)). \tag{2}$$

Ja vastaavasti sijoittamalla (2) saamme

$$S(n+2) = S(n-1)(1 + K(n))(1 + K(n+1))(1 + K(n+2))$$

ja niin edelleen. Eli määritelmästä 1 seuraa että

$$S(m) = S(n)(1 + K(n+1))(1 + K(n+2))...(1 + K(m)).$$

Toisaalta määritelmästä 1 seuraa, että

$$S(m) = S(n)(1 + K(n,m)).$$

Jos nyt vertaamme näitä kahta muotoilua hinalle $S(m)$, saamme

$$S(n)(1 + K(n,m)) = S(n)(1 + K(n+1))(1 + K(n+2))...(1 + K(m)).$$

eli

$$1 + K(n,m) = (1 + K(n+1))(1 + K(n+2))...(1 + K(m)).$$

□

Määritelmä 2. Aikavälin $[n, m]$ logaritminen tuotto $k(n, m)$ on satunnaismuuttuja

$$k(n,m) = \ln \frac{S(m)}{S(n)}$$

Yhden periodin logaritminen tuotto $k(n)$ on

$$k(n) = k(n-1, n) = \ln \frac{S(n)}{S(n-1)}$$

niin että

$$S(n) = S(n-1)\mathrm{e}^{k(n)}$$

Tuoton $K(n, m)$ ja logaritmisen tuoton $k(n, m)$ suhde nähdään vertaamalla niiden määritelmiä, nimittäin

$$1 + K(m,n) = \mathrm{e}^{k(m,n)}.$$

Tämän ansiosta voimme vaihtaa toisen tuoton toiseksi.

Jos osake maksaa osinkoa $div(n)$ hetkellä n, ja tämä heijastuu hintaan $S(n)$, silloin logaritminen tuotto on muotoa

$$k(n) = \ln \frac{S(n) + div(n)}{S(n-1)}.$$

Peräkkäiset yhden aika-askeleen tuotot voidaan yhdistää lisäämällä ne yhteen, jotta saadaan koko periodin tuotto.

Lause 3.2. *Jos osinkoja ei makseta, niin*

$$k(n,m) = k(n+1) + k(n+2) + ... + k(m).$$

Todistus. Toisaalta

$$S(m) = S(n)\mathrm{e}^{k(m,n)}$$

logaritmisen määritelmän perusteella. Toisaalta käyttämällä toistuvasti yhden aika-askeleen tuottoa, saadaan

$$S(m) = S(n)\mathrm{e}^{k(n+1)}\mathrm{e}^{k(n+2)} \dots \mathrm{e}^{k(m)} = S(n)\mathrm{e}^{k(n+1)+k(n+2)+\dots+k(m)}.$$

Tulos seuraa vertaamalla näitä kahta ilmaisua. □

Voimme siis kiteyttää Moshe Levyn, Nathan Perskyn ja Sorin Solomin [2] tavoin, että osakkeen tuotto muodostuu kahdesta elementistä:

i **Myyntivoitto (-tappio):** Kysynnän ja tarjonnan laki, jonka määrittää kaikki investoijat, määrittää osakkeen hinnan. Jos sijoittaja omistaa osakkeen, kaikki nousu (lasku) osakkeen hinnassa tarkoittaa sijoittajan omaisuuden kasvua (vähenemistä).

ii **Osinko:** Yhtiö tekee voittoa ja jakaa osinkoja. Oletamme, että yhtiö jakaa osingon $div(n)$ per osake hetkellä t.

Yleistys yhdestä riskillisestä sijoituksesta moneen riskilliseen sijoitukseen on suoraviivainen. Kuitenkin yksi osake on riittävä tähän analyysiin, sillä rajoitumme globaalien markkinoiden ilmiöihin, emmekä halua tarkastella useampien sijoitusten jakaumia.

3.2 Odotettu tuotto

Oletetaan, että tietyn aikaperiodin K tuotto tiedetään. Silloin voimme laskea matemaattisen odotusavon $E(K)$, niin sanotun *odotetun tuoton.*

Lause 3.3. *Jos yhden askeleen tuotot* $K(n+1), \dots, K(m)$ *ovat riippumattomia, niin*

$$1 + E(K(n,m)) = (1 + E(K(n+1)))(1 + E(K(n+2))) \dots (1 + E(K(m))).$$

Todistus. Tämä on välitön seuraus lauseesta 3.1 ja siitä että riippumattomien satunnaismuuttujien tulon odotusarvo on odotusarvojen tulo. Eli vastaavasti jos X ja Y ovat satunnaismuuttujia ja a ja b vakioita, niin pätee, että

$$E(aY + bX) = aE(Y) + bE(X) \quad \text{(Verbeek 2012 [6])}$$

(Huomaa että jos $K(i)$:t ovat riippumattomia, niin satunnaismuuttujat $1+K(i)$, missä $i = n+1, \dots, m$ ovat myös.) □

Huom. Logaritmisen tuoton tapauksessa yhteenlaskettavuus laajenee odotettuun tuottoon, jos yhden askeleen tuotot ovat riippumattomia

$$E(k(n,m)) = E(k(n+1)) + E(k(n+2)) + \cdots + E(k(m)).$$

Tämä pätee koska satunnaismuuttujien summan odotusarvo on odotusarvojen summa (Verbeek, 2012 [6]).

Käytännössä on hankalaa estimoida todennäköisyydet ja tuotot kaikille skenaarioille joita tarvitaan odotetun tuoton muodostamiseen. Helpompaa on laskea aiempien periodien keskimääräinen tuotto, tässä kuitenkin on ongelmana se, että tulos voi muuttua huomattavasti valitun datan perusteella.

4 Binomipuumalli

Binomipuumalli on osakkeiden hintojen malli, joka mukautuu hyvin matemaattisesti sillä se sisältää vähän parametreja ja olettaa samanlaisen yksinkertaisen rakenteen jokaiselle solmulle, lisäksi malli onnistuu ilmentämään yllättävän monia todellisten markkinoiden ominaisuuksia.

Määritellään malli seuraavin ehdoin, kuten Capiński ja Zastawniak, 2010 [1]:

Ehto 4.0.1. Osakkeen yhden askeleen tuotot $K(n)$ ovat identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia, niin että

$$K(n) = \begin{cases} u & \text{todennäköisyydellä } p \\ d & \text{todennäköisyydellä } 1-p \end{cases}$$

jokaiselle aika-askeleelle n, missä $-1 < d < u$ ja $0 < p < 1$.

Tästä ehdosta seuraa se, että osakkeiden hinnat $S(n)$ voivat nousta tai laskea jokaisella aika-askeleella kertoimella $1+u$ tai $1+d$. Epäyhtälöt $-1 < d < u$ takaavat, että kaikki hinnat $S(n)$ ovat positiivisia, jos hinta $S(0)$ on positiivinen. Eli Baxterin ja Rennien [4] sanoin oletamme että vain kaksi asiaa voi tapahtua osakkeelle yhden aika-askeleen aikana: hinta voi liikkua "ylös"tai "alas". Kun vain kaksi asiaa on sallittu tapahtuvan, saamme kuvainnollisesti oksan. Lisäksi satunnaisuudella on jonkinlainen rakenne, sillä mahdollisilla hinannmuutoksilla on jotkin todennäköisyydet.

Olkoon r yhden τ:n pituisen aika-askeleen riskittömän investoinnin tuotto.

Ehto 4.0.2. Riskittömän investoinnin yhden aika-askeleen tuotto r on sama jokaisella aika-askeleella ja

$$d < r < u$$

Jälkimmäinen ehto kuvaa osakkeiden hintojen muutosta suhteessa riskittömään varallisuuteen, kuten käteiseen tai rahaan pankkitilillä. Epäyhtälöt $d < r < u$ ovat oikeutettuja sillä muutoin arbitraasimahdollisuus olisi olemassa.Voimme yleistää lauseen muotoon

Lause 4.1. *Binominen puumalli ei hyväksy arbitraasia, jos ja vain jos*

$$d < r < u.$$

Todistus. Aloitetaan yhden askeleen binomisella puulla. Tämän avulla rakennetaan myös useamman aika-askeleen tapaus.

Yksi aika-askel. Oletetaan että $r \leq d$.

- Lainataan yksi dollari riskittömällä kurssilla
- Ostetaan $1/S(0)$ osaketta.

Eli rakennetaan sijoitussalkku missä $x = 1/S(0)$ ja $y = -1$, jonka arvo on $V(0) = 0$. Yhden askeleen jälkeen joko $S(1) = S(0)(1+d)$ ja $V(1) = -r+d \geq 0$, tai $S(1) = S(0)(1+u)$ ja $V(1) = -r+u > 0$, mikä johtaa arbitraasiin.

Oletetaan seuraavaksi että $u \leq r$.

- Ostetaan yksi joukkovelkakirja
- Myydään vajaa osake $1/S(0)$.

Saadaan salkku missä $x = -1/S(0)$ ja $y = 1$ jälleen arvolla $V(0) = 0$. Yhden askeleen jälkeen tämän salkun arvo on $V(1) = r-u \geq 0$ jos osakkeen arvo nousee tai $V(1) = r - d > 0$ jos osakkeen arvo laskee, myös huomioiden arbitraasin mahdollisuus.

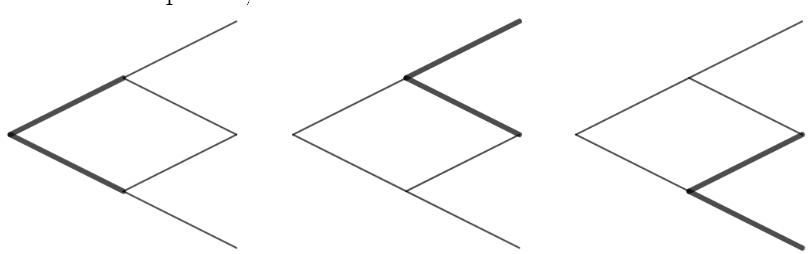
Lopulta oletetaan, että $d < r < u$. Jokaisen sijoitussalkun, jolla $V(0) = 0$ täytyy olla muotoa $x = a/S(0)$ ja $y = -a$ jollain luvulla a. Tarkastellaan kolmea seuraavaa tilannetta:

1. $a = 0$ (triviaali salkku joka ei sisällä yhtään rahaa tai osakkeita) jolloin vastaavasti $V(1) = 0$.
2. $a > 0$ (käteislaina sijoitettu osakkeeseen). Nyt $V(1) = a(d-r) < 0$ jos osakkeenarvo laskee.
3. $a < 0$ (lyhyeksimyynti osakkeilla rahoitetut pitkäaikaiset joukkovelkakirjat) tässä tapauksessa $(1) = a(u-r) < 0$, jos osakkeen arvo nousee.

Arbitraasi on selvästi mahdoton, kun $d < r < u$

Ylä oleva argumentti näyttää, että $d < r < u$ jos ja vain jos arbitraasia ei ole yhden periodin tapauksessa.

Useampi askel. Olkoon $d < r < u$ ja oletetaan, että löytyy arbitraasistrategia. Osakehintoja kuvastavan puun voidaan ajatella muodostuvan monesta yhden askeleen osapuusta, kuten kuvassa 1.



Kuva 1

Ottammalla pienimmän n jolle $V(n) \neq 0$, voidaan löytää yhden askelen osapuu juurella $V(n-1) \leq 0$ ja jonka $V(n) \geq 0$ jokaisessa solmussa joka tulee tästä juuresta, ja joista vähintään yksi $(n) > 0$. Yhden askeleen tapauksen perusteella tämä on mahdotonta jos $d < r < u$, ja päädymme ristiriitaan.

Kääntäen oletetaan, että useamman askeleen binomisesta puusta ei löydy arbitraasia. Nyt mistä tahansa strategiasta jolle $V(0) = 0$ voi seurata $V(n) \leq 0$ millä tahansa n, erityisesti $V(1) \leq 0$. Tästä seuraa $d < r < u$ yllä olevan yhden askeleen tapauksen argumentin perusteella. □

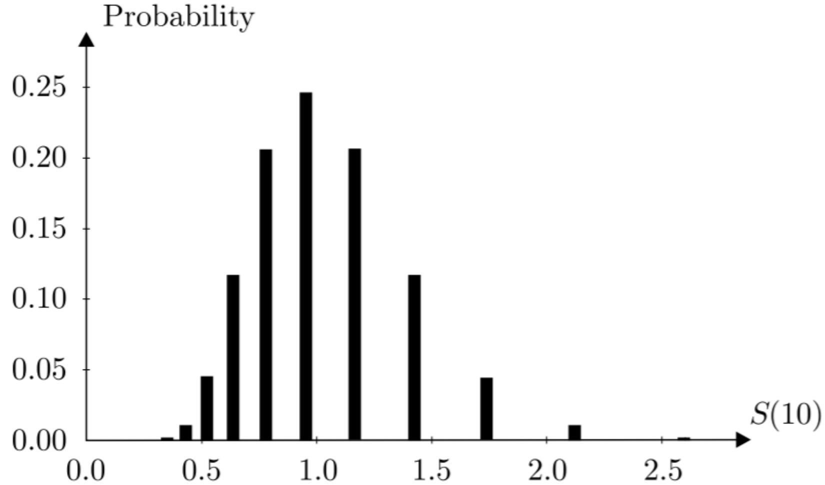
Koska $S(1)/S(0) = 1 + K(1)$ ehdosta 1 seuraa että satunnaismuuttuja $S(1)$ voi saada kaksi eri arvoa,

$$S(1) = \begin{cases} \mathrm{S(0)(1 + u)} & \text{todennäköisyydellä } p \\ \mathrm{S(0)(1 + d)} & \text{todennäköisyydellä } 1 - p. \end{cases}$$

$S(n)$:n arvot yhdessä vastaavien todennäköisyyksien kanssa voidaan löytää mille tahansa n. Oksista siis muodostuu puu, kun jokaisen yksittäisen aika-askeleen "oksat"yhdistetään. n-askeleen osakkeiden hintapuussa jokainen skenaario (tai reitti puun läpi) tarkalleen i:llä nousevalla, ja $1 - i$:llä laskevalla hinnan muutoksella tuottaa saman osakkeen hinnan $S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i}$ hetkellä n. Tällaisia skenaarioita on $\binom{n}{i}$ kappaletta, jokaisen todennäköisyys on $p^i(1-p)^{n-i}$. Tästä saadaan

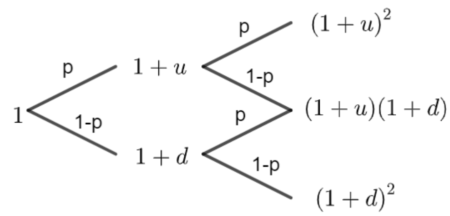
$$S(n) = S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i} \quad \text{todennäköisyydellä} \quad \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i} \quad [1]$$

missä $i = 0, 1, \ldots, n$. Osakkeen hinta $S(n)$ hetkellä n on diskreetti satunnaismuuttuja $(n+1)$:llä mahdollisella arvolla. Tämä $S(n)$:n jakauma on esitetty kuvassa 2, kun $n = 10$, $p = 0.5$, $S(0) = 1$, $u = 0.1$ ja $d = -0.1$.

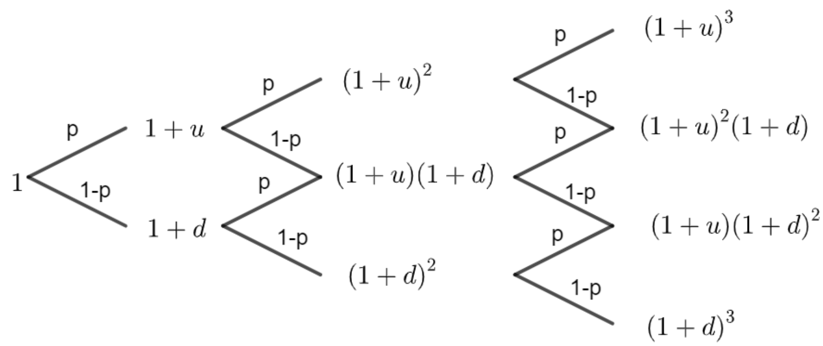


Kuva 2 (Capiński ja Zastawniak 2010 [1])

Nousevien hinnan muutosten määrä i on satunnaismuuttuja binomijakaumalla. Sama pätee laskevien hinnan muutosten määrälle $n-i$. Täten sanomme, että hinnanmuutosprosessi noudattaa binomista puuta. n-askeleen binomisesssa puussa kaikkien skenaarioiden joukossa Ω, joka on siis n-askeleen reitit siirtyen ylös tai alas jokaisella askeleella, on 2^n alkiota. Esimerkki kahden askeleen binomisesta puusta on esitetty kuvassa 3 ja kolmen askeleen kuvassa 4. Molemmissa $S(0) = 1$ yksinkertaisuuden vuoksi.



Kuva 3



Kuva 4

4.1 Riskineutraali todennäköisyys

Kun osakkeen tulevaa arvoa ei voida koskaan tietää varmasti, binomisen puun avulla on mahdollista selvittää odotetut osakkeiden hinnat. On luonnollista verrata näitä odotusarvoja ja riskittömiä investointeja.

Aluksi tarkastelemme osakkeiden hinnan odotusarvojen $E(S(n))$ dynamiikkaa kuten Capiński ja Zastawniak [1]. Kun $n = 1$

$$E(S(1)) = pS(0)(1+u) + (1-p)S(0)(1+d) = S(0)(1+E(K(1))),$$

missä

$$E(K(1)) = pu + (1-p)d$$

on yhdenaskeleen odotusarvo. Tämä voidaan laajentaa mille tahansa n seuraavasti

Lause 4.2. *Osakkeiden odotusarvot, missä* $n = 0, 1, 2, \dots$ *on*

$$E(S(n)) = S(0)(1+E(K(1)))^n.$$

Todistus. Koska yhden askeleen tuotot $K(1), K(2), \dots$ ovat riippumattomia, niin myös satunnaismuuttujat $1 + K(1), 1 + K(2), \dots$ ovat. Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
E(S(n)) &= E(S(0)(1 + K(1))(1 + K(2)) \dots (1 + K(n))) \\
&= S(0)E(1 + K(1))E(1 + K(2)) \dots E(1 + K(n)) \\
&= S(0)(1 + E(K(1)))(1 + E(K(2))) \dots (1 + E(K(n))).
\end{aligned}$$

Koska tuotot $K(n)$ ovat identtisesti jakautuneita, kaikilla on sama odotusarvo

$$E(K(1)) = E(K(2)) = \cdots = E(K(n)),$$

mikä todistaa kaavan $E(S(n))$. $\square$

Jos määrä $S(0)$ oli tarkoitus sijoittaa riskittömästi hetkellä 0, se kasvaisi määrään $S(0)(1+r)^n$ n askeleen jälkeen. Selvästi verrataksemme arvoja $E(S(n))$ ja $S(0)(1 + r)^n$, meidän täytyy verrata vain arvoja $E(K(1))$ ja r.

Kaikki osakesijoitukset sisältävät aina riskin, koska hinta $S(n)$ on aina etukäteen tuntematon. Tyypillinen riskiä välttävä investoija edellyttää että $E(K(1)) > r$, sillä perusteella että hänen tulisi saada suurempi odotettu tuotto siitä hyvästä että riski on suurempi. Käänteinen tilanne, missä $E(K(1)) < r$ voi kuitenkin olla houkutteleva joillekin sijoittajille, jos riskillinen tuotto on korkea pienellä nollastapoikkeavalla todennäköisyydellä ja matala suurella todennäköisyydellä. tyypillisenä esimerkkinä tästä on lotto, missä odotettu tuotto on negatiivinen. Tällaisia sijoittajia voidaan kutsua riskinottajiksi. Laajempaa tapausta markkinoista jossa $E(K(1)) = r$ sanotaan riskineutraaleiksi.

Merkitään *riskineutraalia todennäköisyyttä* p_*, ja vastaavaa *riskineutraalia odotusarvoa* E_*, kuten Marek Capińskin ja Tomasz Zastawniakin kirjassa [1], jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$E_*(K(1)) = p_* u + (1 - p_*)d = r$$

ja

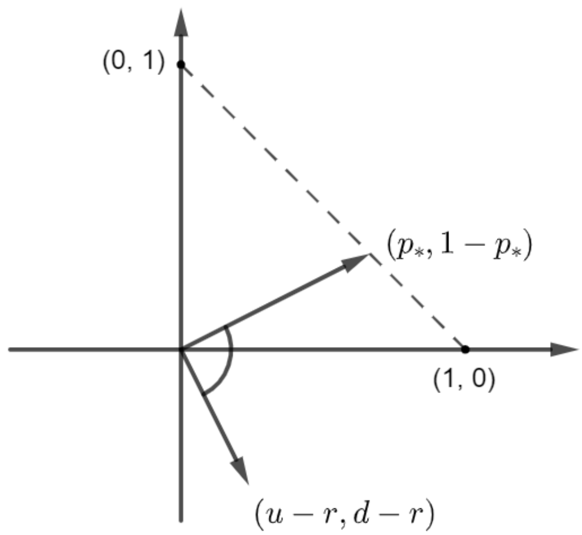
$$p_* = \frac{r - d}{u - d}.$$

On tärkeää ymmärtää, että p_* on matemaattinen objekti ja voi poiketa todellisesta markkinoiden todennäkäisyydestä p. Jos $p = p_*$, niin markkinat ovat riskineutraalit. Vaikka riskineutraalilla todennäköisyydellä p_* ei ole mitään yhteyttä todelliseen todennäköisyyteen p, ilmenee että todennäköisyys p_* on relevantimpi kuin p johdannaisten arvioinnissa.

Riskineutraalin odotusarvon ehdosta seuraa

$$p_*(u - r) + (1 - p_*)(d - r) = 0.$$

Geometrisesti tämä tarkoittaa sitä, että paria $(p_*, 1 - p_*)$ vastaava vektori avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on ortogonaalinen vektorin $(u - r, d - r)$ kanssa, joka kuvaa yksittäisen osakkeen omistajan mahdollista yhden askelen voittoa, tai tappiota, ostos on rahoitettu käteislainalla korolla r. Tämä tilanne on kuvattu kuvassa 5.



Kuva 5

Viiva pisteiden $(0,1)$ ja $(1,0)$ välillä koostuu kaikista mahdollisista pisteistä $(p, 1-p)$, missä $0 < p < 1$. Yksi näistä pisteistä vastaa todellista markkinatodennäköisyyttä, ja yksi riskineutraalia todennäköisyyttä.

4.2 Martingaali

Lauseen 3.2 perusteella hinnan $S(n)$ odotusarvo riskineutraalilla todennäköisyydellä p_* on

$$E_*(S(n)) = S(0)(1+r)^n,$$

kun $r = E_*(K(1))$.

Lause 4.3. *Olkoon osakkeen hinta n askeleen kuluttua $S(n)$. Riskineutraaliksi ehdolliseksi odotusarvoksi $S(n+1)$ tulee*

$$E_*(S(n+1)|S(n)) = S(n)(1+r).$$

Todistus. Oleteaan, että $S(n) = x$ n:n aika-askeleen jälkeen. Nyt

$$E_*(S(n+1)|S(n) = x) = p_* x(1+u) + (1-p_*)x(1+d)$$

koska $S(n+1)$ saa arvon $x(1+u)$ todennäköisyydellä p_* ja arvon $x(1+d)$ todennäköisyydellä $1-p_*$. Koska $E_*(K(1)) = p_* u + (1-p_*)d = r$, tämän perusteella $p_*(1+u) + (1-p_*)(1+d) = 1+r$, mistä seuraa että

$$E_*(S(n+1)|S(n) = x) = x(1+r)$$

mille tahansa $S(n)$:n mahdolliselle arvolle x. $\square$

Jakamalla yhtälön $E_*(S(n+1)|S(n)) = S(n)(1+r)$ molemmat puolet $(1+r)^{n+1}$ saamme seuraavan tuloksen *diskontatuille osakkeiden hinnoille* $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$.

Lause 4.4 (Martingaaliehto). *Mille tahansa* $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$E_*(\tilde{S}(n+1)|S(n)) = \tilde{S}(n)$$

Eli diskontatut osakkeiden hinnat $\tilde{S}(n)$ riskineutraalilla todennäköisyydellä p_* muodostavat martingaalin. Todennäköisyyteen p_* viitataan myös *martingaali todennäköisyytenä.*

5 Muita malleja

5.1 Trinomipuumalli

Binomisen puumallin luonnollinen laajennus on trinominen puumalli, missä yhden askelen tuotto saa kolme mahdollista arvoa $K(n)$. Ideana on sallia hinnan nousemisen tai laskemisen lisäksi ottaa niiden välisen arvon.

Vastaavasti kuin binomipuumallissa, määrittelemme trinomipuumallin Capińskin ja Zastawniakin [1] tavoin seuraavin ehdoin:

Ehto 5.1.1. Yhden askelen tuotot $K(n)$ ovat riippumattoomia satunnaismuuttujia, muotoa

$$K(n) = \begin{cases} \text{u} & \text{todennäköisyydellä } p \\ \text{n} & \text{todennäköisyydellä } q \\ \text{d} & \text{todennäköisyydellä } 1-p-q, \end{cases}$$

missä $-1 < d < n < u$ ja $0 < p, q, p+q < 1$.

Tämä tarkoittaa sitä, että u ja d edustavat nousevia ja laskevia hinnan muutoksia kuten aiemmin, kun taas n edustaa väli hinnan muutosta, käytännössä usein neutraalia ”muutosta”$n = 0$.

Ehto 5.1.2. Yhden askelen tuotto r riskittömässä investoinnissa on sama jokaisella aika-askeleella ja

$$d < r < u.$$

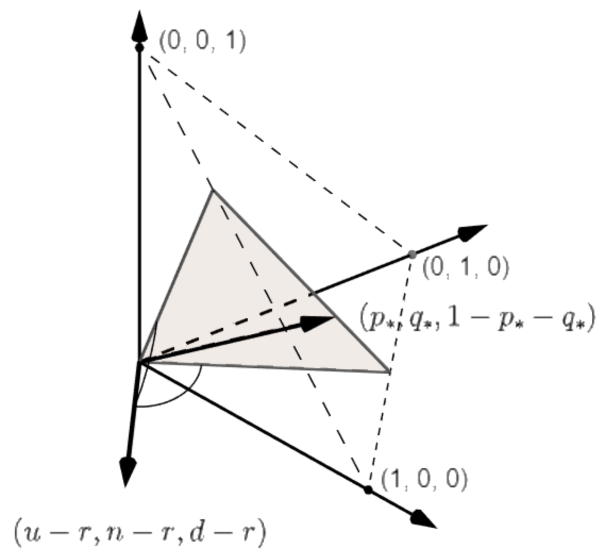
Koska $S(1)/S(0) = 1 + K(1)$, ehdosta 5.1.1 seuraa että $S(1)$ saa kolme eri arvoa

$$S(1) = \begin{cases} \text{S(0)(1 + u)} & \text{todennäköisyydellä } p \\ \text{S(0)(1 + n)} & \text{todennäköisyydellä } q \\ \text{S(0)(1 + d)} & \text{todennäköisyydellä } 1-p-q, \end{cases}$$

Ehto $E_*(K(n)) = r$ riskineutraaleille todennäköisyyksille p_*, q_* voidaan kirjoittaa muodossa

$$p_*(u-r) + q_*(n-r) + (1-p_*-q_*)(d-r) = 0$$

$(p_*, q_*, 1 - p_* - q_*)$ ajateltuna vektorina avaruudessa $\mathbb{R}^3$ on ortogonaalinen vektorin $(u - r, n - r, d - r)$ kanssa, joka esittää yksittäisen osakkeen omistajan mahdollisia yhden askeleen voittoja tai tappioita, hankinta rahoitettu käteislainalla. Tämä tarkoittaa sitä, että vektori $(p_*, q_*, 1 - p_* - q_*)$ leikkaa kolmion $\{(a, b, c) : a, b, c \geq 0, a+b+c = 1\}$ siten että kulkee kolmion määrittelemää tasoa pitkin, ja taso on ortogonaalinen voittovektorin $(u-r, n-r, d-r)$ suhteen. Kuten kuvassa 6



Kuva 6

Ehto 4.1.2 takaa, että leikkaus on epätyhjä, sillä viiva joka sisältää vektorin $(u - r, n - r, d - r)$ ei lävistä positiivista oktanttia, eli avaruuden $\mathbb{R}^3$ koordinaatiston osaa, jossa kaikki koordinaatit saavat vain positiivisia arvoja. Tässä tapauksessa on äärettömän monta riskineutraalia todennäköisyyttä leikkauksen ollessa jana.

5.2 Jatkuva aika

Malleilla joissa aika ja hinta ovat diskreettejä on ilmeisiä haittoja. Ne selvästi rajoittavat omaisuuden hintojen muutosten alaa kuten myös ajanhetkien joukkoa, jossa nämä muutokset voivat tapahtua. Pyrimme pääsemään näistä rajoitteista siirtymällä binomisesta puumallista jatkuvaan aikaan.

Ajatellaan binomista puuta aika-askeleella $\tau = \frac{1}{N}$, missä $N \to \infty$. Kaikissa binomisissa puumalleissa aproksimoidulla jaksolla oletetaan että nousevien ja laskevien hinnanmuutosten todennäköisyys on $\frac{1}{2}$ jokaisella askeleella.

Tässä kontekstissa on kätevää käyttää logaritmista tuottoa

$$k(n) = \ln(1 + K(n)) = \begin{cases} \ln(1 + \mathrm{u}) & \text{todennäköisyydellä } 1/2 \\ \ln(1 + \mathrm{d}) & \text{todennäköisyydellä } 1/2 \end{cases}$$

Yhden askeleen riskittömän tuoton kertoimen sijaan käytämme vastaavaa jatkuvaa yhdistettyä kerrointa r, joten τn pituisen aika-askeleen tuotto on $\mathrm{e}^{\tau r}$.

Merkitään Capińskin ja Zastawniakin [1] tavoin N:stä τ:n pituisesta askeleesta koostuvan yksikköaikavälin $[0, 1]$ logaritmisen tuoton $k(1)+k(2)+\cdots+k(N)$ odotusarvoa parametrilla m, ja keskihajontaa parametrilla σ. Logaritmiset tuotot $k(1), k(2), \ldots, k(N)$ ovat identtisesti jakautuneita ja riippumattomia, kuten $K(1), K(2), \ldots, K(N)$ ovat. Tästä seuraa että

$$\begin{aligned} m &= E(k(1) + k(2) + \cdots + k(N)) \\ &= E(k(1)) + E(k(2)) + \cdots + E(k(N)) = NE(k(n)), \\ \sigma^2 &= \mathrm{Var}(k(1) + k(2) + \cdots + k(N)) \\ &= \mathrm{Var}(k(1)) + \mathrm{Var}(k(2)) + \cdots + \mathrm{Var}(k(N)) = N\mathrm{Var}(k(n)) \end{aligned}$$

kaikille $n = 1, 2, ..., N$. Tämä tarkoittaa että kaikilla $k(n)$ on odotusarvo $\frac{m}{N} = m\tau$ ja keskihajonta $\sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \sigma\sqrt{\tau}$, joten jokaisen $k(n)$ kahden mahdollisen arvon täytyy olla

$$\begin{aligned} \ln(1 + u) &= m\tau + \sigma\sqrt{\tau}, \\ \ln(1 + d) &= m\tau - \sigma\sqrt{\tau}. \end{aligned}$$

Otetaan käyttöön riippumattomien satunnaismuuttujien jakso $\xi(n)$, joilla jokaisella on kaksi arvoa

$$\xi(n) = \begin{cases} +\sqrt{\tau} & \text{todennäköisyydellä } 1/2 \\ \text{-}\sqrt{\tau} & \text{todennäköisyydellä } 1/2 \end{cases}$$

nyt voimme kirjoittaa logaritmisen tuoton Marek Capińskin ja Tomasz Zastawniakin tavoin [1] muotoon

$$k(n) = m\tau + \sigma\xi(n).$$

Kun $p = 1/2$ ja $\xi(n)^2 = \tau$, odotusarvo $E(\xi(n))$ on

$$E(\xi(n)) = \frac{1}{2}\sqrt{\tau} - \frac{1}{2}\sqrt{\tau} = 0,$$

ja varianssi $\mathrm{Var}(\xi(n))$ on

$$\mathrm{Var}(\xi(n)) = E(\xi(n)^2 - E\xi(n))^2 = \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}\tau = \tau$$

Aikasarjaa $y(n) = \xi(n)$ kutsutaan ”valkoiseksi kohinaprosessiksiksi”, jos se toteuttaa seuraavat ehdot (Verbeek(2012)[6]):

- $E(\xi(n)) = 0$
- $\mathrm{Var}(\xi(n)) = \sigma_\xi^2$
- $E(\xi(n), \xi(m)) = 0, \qquad n \neq m$

Seuraavaksi otamme käyttöön kiinnostavan ketjun satunnaismuuttujia $w(n)$, jota kutsumme *satunnaiskuluksi*, siten että

$$w(n) = \xi(1) + \xi(2) + \cdots + \xi(n),$$

ja $w(0) = 0$.
Selvästi $\xi(n) = w(n) - \xi(1) + \xi(2) + \cdots + \xi(n-1) = w(n) - w(n-1)$. Viimeisen yhtälön johdosta, $\xi(n)$ viittaavat satunnaiskulun $w(n)$ askeliin. Satunnaiskulku on siis valkoisen kohinaprosessin kumuloituva summa (Verbeek, 2012 [6]).

Tästä eteenpäin kirjoitamme usein $S(n)$ ja $w(n)$ sijaan $S(t)$ ja $w(t)$, missä $t = \tau n$ ja $n = 1, 2, ...$

Lause 5.1. *Osakkeen hinta hetkellä $t = \tau n$ on*

$$S(t) = S(0)\exp(mt + \sigma w(t)).$$

Todistus. Yhtälön $S(n) = S(n-1)\mathrm{e}^{k(n)}$ perusteella

$$\begin{aligned}
S(t) = S(n\tau) &= S(n\tau - \tau)\mathrm{e}^{k(n)} \\
&= S(n\tau - 2\tau)\mathrm{e}^{k(n-1)+k(n)} \\
&= \cdots = S(0)\mathrm{e}^{k(1)+\ldots+k(n)} \\
&= S(0)\mathrm{e}^{mn\tau+\sigma(\xi(1)+\ldots+\xi(n))} \\
&= S(0)\mathrm{e}^{m\tau+\sigma w(t)},
\end{aligned}$$

mikä piti todistaa. □

Saavuttaaksemme jatkuvan ajan käytämme Capińskin ja Zastawniakin [1] tavoin approksimaatiota

$$\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2,$$

joka on tarkka pienille x:n arvoille, jotta saadaan

$$\frac{S(n\tau + \tau)}{S(n\tau)} = \mathrm{e}^{k(n+1)} \approx 1 + k(n+1) + \frac{1}{2}k(n+1)^2.$$

Sitten laskemme

$$k(n+1)^2 = (m\tau + \sigma\xi(n+1))^2 = (m\tau \pm \sigma\tau^{\frac{1}{2}})^2 = m^2\tau^2 \pm 2m\sigma\tau^{\frac{3}{2}} + \sigma^2\tau = \sigma^2\tau + \ldots$$

Missä "...”edustaa kaikkia τ:n yhtä suurempia potensseja, mikä voidaan jättää pois sillä ne ovat paljon pienempiä kuin edeltävä termi pienillä τ:n arvoilla. Seuraavaksi

$$\begin{aligned}
\frac{S(n\tau + \tau)}{S(n\tau)} &\approx 1 + m\tau + \sigma\xi(n+1) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau \\
&= 1 + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma\xi(n+1),
\end{aligned}$$

ja siis

$$S(n\tau + \tau) - S(n\tau) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(n\tau)\tau + \sigma S(n\tau)\xi(n+1).$$

Koska $\xi(n+1) = w(n\tau+\tau) - w(n\tau)$, saadaan approksimaatio osakkeiden hintojen dynamiikasta kuten Marek Capiński ja Tomasz Zastawniak 2010 [1]:

$$S(t+\tau) - S(t) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)\tau + \sigma S(t)(w(t+\tau) - w(t)), \tag{3}$$

missä $t = n\tau$. Tämän approksimaation ratkaisu $S(t)$ on annettu samalla kaavalla kuin lause 5.1.

Mille tahansa $N = 1, 2, \ldots$ ajatellaan binominen puumalli aika-askeleella $\tau = \frac{1}{N}$. Olkoon $S_N(t)$ vastaava osakkeen hinta ja olkoon $w_N(t)$ vastaava symmetrinen satunnaiskulku askeleilla $\xi_N(t) = w_N(t) - w_N(t - \frac{1}{N})$, missä $t = \frac{n}{N}$ on ajanhetki n askeleen jälkeen. Koska $\xi_N(i)$ ovat riippumattomia, $E(\xi_N(i)) = 0$ ja $\mathrm{Var}(\xi_N(i)) = \frac{1}{N}$ kaikille $i = 1, 2, \ldots$, tästä seuraa

$$\begin{aligned}
E(w_N(t)) &= E(\xi_N(1) + \cdots + \xi_N(N)) \\
&= E(\xi_N(1)) + \cdots + E(\xi_N(N)) = 0, \\
\mathrm{Var}(w_N(t)) &= \mathrm{Var}(\xi_N(1) + \cdots + \xi_N(N)) \\
&= \mathrm{Var}(\xi_N(1)) + \cdots + \mathrm{Var}(\xi_N(N)) = \frac{n}{N} = t
\end{aligned}$$

Käytetään keskeistä raja-arvolausetta saadaksemme satunnaiskulun $w_N(t)$ raja-arvon, kuten $N \to \infty$. Capiński ja Zastawniak (2001) [7] muotoilevat keskeisen raja-arvolauseen sanomalla, että $\frac{S(n)}{n}$ on asymptooppisesti normaalijakautunut odotusarvolla $E\left(\frac{S(n)}{n}\right) = a$ ja varianssilla $\mathrm{Var}\left(\frac{S(n)}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Tätä varten asetamme

$$x(n) = \frac{k(n) - m\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

jokaiselle $n = 1, 2, \ldots$, joka on ketju riippumattomia identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia, odotusarvolla 0 ja varianssilla 1. Keskeisestä raja-arvolauseesta seuraa, että

$$\frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(n)}{\sqrt{n}} \to X,$$

kun $n \to \infty$, missä X on satunnaismuuttuja standardinormaalijakaumalla (odotusarvolla 0 ja varianssilla 1).

Kiinnitetään $t > 0$. Koska satunnaiskulku w_N on määritelty vain diskreettien aikojen ollessa askeleen $\tau = \frac{1}{N}$ monikertoja, käsittelemme $w_N(t_N)$, missä t_N on t:tä lähin $\frac{1}{N}$ monikerta. Nyt selvästi Nt_N on kokonaisluku kaikilla N, voimme kirjoittaa kuten Capiński ja Zastawniak 2010 [1]

$$w_N(t_N) = \sqrt{t_N}\frac{x(1) + x(2) + \cdots + x(Nt_N)}{\sqrt{Nt_N}}.$$

Kun $N \to \infty$, saadaan $t_N \to t$ ja $Nt_N \to \infty$, joten

$$w_N(t_N) \to W(t)$$

jakumassa, jossa $W(t) = \sqrt{t}X$. Viimeinen yhtälö tarkoittaa että $W(t)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla t.

Tämä keskeiseen raja-arvolauseeseen perustuva argumentti toimii kaikille kiinteille $t > 0$. Tulos voidaan laajentaa saadaksemme raja-arvon kaikille $t > 0$ samanaikaisesti, mutta emme käsittele sitä tässä. Raja-arvoa $W(t)$ kutsutaan Wiener-prosessiksi. Se saa monia satunnaiskulun ominaisuuksia, esimerkiksi;

1. $W(0) = 0$, mikä vastaa $w_N(0) = 0$.
2. $E(W(t)) = 0$, vastaa $E(w_N(t)) = 0$
3. $\mathrm{Var}(W(t)) = t$, jolla on diskreetti vastine $\mathrm{Var}(w_N(t)) = t$
4. Askelet $W(t_3) - W(t_2)$ ja $W(t_2) - W(t_1)$ ovat riippumattomia kun $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$; niin ovat myös askelet $w_N(t_3) - w_N(t_2)$ ja $w_N(t_2) - w_N(t_1)$.
5. $W(t)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla t, tiheydellä $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2t}}$. Tämä liittyy $w_N(t)$:n jakaumaan. Jälkimmäinen ei ole normaali, mutta lähestyy normaalijakaumaa keskeisen raja-arvolauseen perusteella.

Tärkeä ero $W(t)$:n ja $w_N(t)$:n välillä on on se että $W(t)$ on määritelty kaikille $t \geq 0$, kun taas aika satunnaiskulussa $w_N(t)$ on diskreetti, $t = \frac{n}{N}$, missä $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$S_N(t)$:n raja-arvosta $N \to \infty$ saatu hintaprosessi ilmaistaan $S(t)$, Kun $S_N(t)$ toteuttaa approksimaation (3) asianmukaisin muutoksin, eli

$$S_N(t + \frac{1}{N}) - S_N(t) \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_N(t)\frac{1}{N} + \sigma S_N(t)(w_N(t + \frac{1}{N}) - w_N(t)),$$

jatkuva-aikaiset osakkeiden hinnat $S(t)$ toteuttavat yhtälön muotoa.

$$\mathrm{d}S(t) = \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t). \tag{4}$$

Tässä $\mathrm{d}S(t) = S(t + \mathrm{d}t) - S(t)$ ja $\mathrm{d}W(t) = W(t + \mathrm{d}t) - W(t)$ ovat $S(t)$:n ja $W(t)$:n infinitesimaalisen intervallin $\mathrm{d}t$ kasvut. Ratkaisuiden kaavat ovat myös samanlaiset,

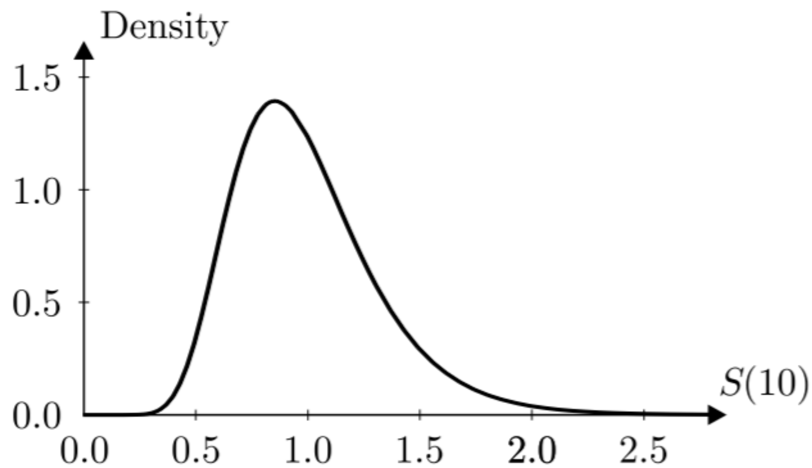
$$S_N(t) = S_N(0)\exp\left(mt + \sigma w_N(t)\right)$$

diskreetissä tapauksessa, kun taas

$$S(t) = S(0)\exp\left(mt + \sigma W(t)\right)$$

jatkuvassa tapauksessa.

Koska $W(t)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla 0 ja varianssilla t, siitä seuraa että $\ln S(t)$ noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla $\ln S(0)+mt$ ja varianssilla $\sigma^2 t$. Täatä johtuen sanotaan että jatkuva-aika hintaprosessilla $S(t)$ on *log normaalijakauma*. Lukua σ kutsutaan hinnan $S(t)$ volatiliteetiksi. Jakauman $S(t)$ tiheys on esitetty kuvassa 7, missä $t = 10$, $S(0) = 1$, $m = 0$ ja $\sigma = 0,1$ Tätä voidaan verrata diskreettiin jakaumaan (kuvassa 2)



Kuva 7 (Capiński ja Zastawniak 2010 [1])

Huom. Yhtälö (4) ja kasvut $\mathrm{d}S(t)$, $\mathrm{d}W(t)$ ja $\mathrm{d}t$ on esitelty yllä vain epäformaalisti analogisesti diskreetin tapauksen kanssa. Ne voidaan antaa täsmällisesti stokastisessa laskennassa, teoriassa perustavanlaatuisia sovelluksia edistyneessä matemaattisessa taloustieteessä. Erityisesti (4) on esimerkki stokastisesta differentiaaliyhtälöstä.

Osa II
Opetuspaketti

6 Opetuspaketin tavoitteet

Opetuspaketin tavoitteena on tutustuttaa opiskelija riskillisen omaisuuden, käytännössä osakkeiden hintojen, mallintamiseen ja ymmärtämiseen, sekä hahmottaa varallisuuden erilaisia muotoja ja niiden ominaisuuksia. Opetuspaketissa käsitellään osakekurssien dynamiikkaa, tuottoa, odotettua tuottoa sekä binomipuumallia osakkeiden hintojen mallina. Lisäksi tutustutaan riskineutraaliin todennäköisyyteen ja martingaaliin.

Raha ja omaisuus ovat kaikkia koskettavia asioita, joten aiheet sopivat kaikille, ja niillä on selvä yhteys arkielämään. Matemaattisen ajattelun ja mallintamisen yhteys todellisiin ilmiöihin on siis opetuspaketin aiheiden osalta ilmeinen, eikä vaadi erillistä motivointia. Erityisesti opetuspaketista on hyötyä niille, jotka ovat kiinnostuneet sijoittamisesta ja osakemarkkinoista, vedonlyönnistä, arpapeleistä tai matemaattisista mallinnuksista erilaisille arkielämän ilmiöille.

Opetuspaketti on suunniteltu esittämään ensimmäisen osan teoriaa yksinkertaisemmin ja selkeämmin, niin että aihe soveltuu koulussa, erityisesti lukiossa opetettavaksi. Perusopetukseen paketin sisältö on haastavaa, sillä pohjatietoina on hyvä olla taitoja joita käsitellään ja syvennetään lukio-opetuksessa, kuten tilasto- ja todennäköisyys laskentaa, yhtälöitä ja potenssilaskuja.

Opetuspaketissa teoriaa on helpotettu yksinkertaistamalla notaatiota. Esimerkiksi mahdollisuuksien joukon suhteen tyydymme puhumaan eri skenaarioista numeroimalla ne, skenaario 1, skenaario 2 ja skenaario 3. Lisäksi joitain ehtoja ja määritelmiä on karsittu ja lauseiden todistukset on jätetty teoriaosioon. Teorian eksaktius toki hieman kärsii notaation yksinkertaistuksesta, mutta koska kyse ei ole yliopistoon suunnatusta opetuksesta, niin pääpaino on keskeisten ideoiden hahmottamisessa.

Opetuspaketti sisältää helpompia ja haastavampia tehtäviä, jotta opetuksen eriyttäminen on mahdollista. Esimerkiksi osakekursseista, tuotosta ja binomipuumallista saa yksinkertaisia esimerkkejä ja tehtäviä hyödyntämällä helpompia kokonaisuuksia, kun riskineutraalitodennäköisyys ja martingaali ovat mahdollisesti hieman haastavampia aiheita. Kaikista aiheista on kuitenkin pyritty tekemään myös yksinkertaisia tehtäviä ja lisäämään teoriaa selkeyttäviä esimerkkejä. Esimerkeissä 1, 4, 5, 6, 9 ja tehtävissä 4, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 20, 21 on hyödynnetty Capińskin ja Zastawniakin Mathematics for Finance -kirjan [1] tehtäviä. Paketin lopussa on myös esitetty kaikkiin paketin tehtäviin ratkaisut.

6.1 Opetuspaketti ja lukion opetussuunnitelman perusteet

2019 lukion opetussuunnitelmassa [8] mainitaan matematiikan opetuksen tehtäväksi ohjata opiskelijaa ymmärtämään matematiikan merkityksen nykyajan kulttuureissa ja huomaamaan sen välttämättömyyden eri aloilla. Alasta riippumatta raha ja omaisuus koskevat kaikkia yhteiskunnan jäseniä ja omaisuuden hallintaan liittyvät tiedot ja taidot ovat arkielämän kannalta hyödyllisiä. Eli myös 2019 lukion opetussuunnitelmassa mainittu arkielämän ja matematiikan välisten yhteyksien tutkiminen sekä yhteiskunnallinen osaaminen toteutuvat tämän opetuspaketin sisällön puitteissa. Lisäksi mainitaan, että opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita kiinnostavista aiheista, ilmiöistä ja niihin liittyvistä ongelmista, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla.

Lukion matematiikan opetuksen tavoitteisiin lukeutuu, että opiskelija ymmärtää matematiikan käyttökelpoisena välineenä, kun mallinnetaan, hallitaan tai ennustetaan yhteiskunnan tai talouden ilmiöitä, sekä että opiskelija rakentaa matemaattista pohjaa jatko-opinnoilleen. Opetuspaketti voi vastata kumpaankin näistä tavoitteista sillä toisaalta opetuspaketissa mallinnetaan osakemarkkinoita matematiikan avulla, ja toisaalta opetuspaketti luo pohjaa erityisen hyvin jos jatko-opinnot suuntautuvat matematiikkaan, taloustieteeseen tai kauppatieteisiin.

Nykyään opetussuunnitelmasta löytyy uudehkona kokonaisuutena talousmatematiikan kurssi, jota ei ennen ole löytynyt pitkän matematiikan puolelta. Valikoituja osia tästä opetuspaketista voi siis liittää pitkän matematiikan MAA9 Talousmatematiikka -kurssiin, jonka yhtenä tavoitteena on oppia sovittamaan taloudellisiin tilanteisiin matemaattisia malleja ja ymmärtää niiden rajoitukset. Vastaavasti lyhyen matematiikan puolella MAB6 Talousmatematiikan alkeet -kurssilla sekä MAB7 Talousmatematiikka -kurssilla voi soveltaa opetuspaketin osia opiskelijoiden sen hetkiseen osaamiseen suhteutettuna. Kokonaisuudessaan opetuspaketin mahduttaminen voi olla hankalaa olemassa oleviin kursseihin, sillä lukiossa aikataulut ovat varsin tiukkoja. Opetuspaketista voi kuitenkin löytää osioita jotka voi liittää olemassa oleviin matematiikan kursseihin, tai suurempana kokonaisuutena hyödyntää koulukohtaisissa valinnaisissa syventävissä matematiikan kursseissa.

Opetuspaketin soveltuvuutta lukio-opetukseen voi tarkastella myös yhteiskuntaopin kannalta, sillä yhteiskuntaopin opetuksen yhtenä tehtävänä on vahvistaa opiskelijan talousosaamista. Lisäksi yhteiskuntaoppi kehittää opiskelijan hyvinvointiosaamista vahvistamalla oman elämän ja taloudenhallinnan taitoja. Myös yhteiskuntaopin pyrkimys vahvistaa jatko-opintovalmiuksia toteutuu paketin osalta vastaavasti kuin matematiikassa. Yhteiskuntaopin osa-alueista tämän opetuspaketin sisältö soveltuu parhaiten taloustieteeseen, eli joitain osia voi olla mahdollista soveltaa kurssilla YH2 Taloustieto, tai koulukohtaisissa soveltavissa valinnaisissa kurssiessa.

Toisenlaisena vaihtoehtona opetuspakettia on mahdollista hyödyntää lukio-opetuksessa ainerajat ylittävissä ilmiöopetuksen kursseissa. Nämä kurssit antavat lähes rajattomat mahdollisuudet erilaisille kokonaisuuksille opiskelijoiden kiinnostuksen mukaan. Opetuspaketissa matematiikka ja yhteiskuntaoppi linkittyvät varsin saumattomasti ja voidaan hyödyntää ja syventää opiskelijoiden mahdollista kiinnostusta esimerkiksi sijoittamiseen ja osakemarkkinoihin.

7 Osakekurssit

Omaisuuden voidaan ajatella koostuvan kahdesta osasta: riskittömästä pääomasta ja riskillisestä pääomasta. Riskitöntä pääomaa on omaisuus joka ei sisällä riskiä, kuten käteinen lompakossa tai raha pankkitilillä ajatellaan usein riskittömäksi omaisuukdeksi. Toisaalta voidaan argumentoida että kaikki omaisuus sisältää jonkinlaisen riskin, mutta pitäytyäksemme yksinkertaisemmassa luokittelussa, tarkoitamme riskillisellä pääömalla omaisuutta joka sisältää ilmeisen riskin, eli omaisuutta jonka tulevasta arvosta ei ole varmuutta. Tällaista omaisuutta ovat esimerkiksi osakkeet, sillä emme tiedä miten osakekurssit tulevat vaihtelemaan, eli emme tiedä nouseeko vai laskeeko osakkeen arvo tulevaisuudessa.

Puhumme siis riskillisestä omaisuudesta osakkeina, ja osakkeisiin liittyen teemme muutaman oletuksen:

- Osakkeiden tuleva arvo on satunnaismuuttuja.
- Osakkeiden arvot ovat positiivisia.
- Sijoittajalla voi olla osakkeita mikä tahansa määrä.

Merkitään osakkeen arvoa $S(t)$, missä t on ajanhetki $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Ajanhetket voivat olla vuosia, kuukausia, päiviä, tai niin edelleen. Usein kuitenkin käytetään vuotta yhtenä aika-askeleena. Aika hetkellä $t = 0$ on nykyhetki, eli $S(0)$ on osakkeen nykyinen arvo ja $t = 1$ on vuoden kuluttua, eli $S(1)$ on osakkeen arvo vuoden kuluttua.

Tarkastellaan markkinaa joka voi seurata kahta mahdollista skenaariota, noususuhdannetta tai taantumaa. Merkitään tietyn osakkeen tämänhetkistä hintaa x_0, joka voi nousta noususuhdanteen ansiosta seuraavalla periodilla hintaan x_1^n tai taantuman seurauksena laskea hintaan x_1^t. Voimme esittää osakkeen hinnan mahdolliset muutokset talulukossa:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$
1 noususuhdanne	x_0	x_1^n
2 taantuma	x_0	x_1^t

Samoin tilnne voidaan muodostaa kolmelle skenaariolle; skenaario 1, skenaario2 ja skenaario 3:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
1	x_0	x_1^1	x_2^1
2	x_0	x_1^2	x_2^2
3	x_0	x_1^3	x_2^3

Esimerkki 1. Ajatellaan markkinoita joissa on vain kaksi mahdollista tilaa: nousukausi (skenaario 1) ja taantuma (skenaario 2). Osakkeen tämänhetkinen

hinta on 10 euroa, joka voi nousta nousukausivuoden kuluttua 12 euroon, tai laskea 7 euroon taantumavuoden jälkeen. Näiden kahden skenaarion olosuhteissa, kun asetetaan $t = 1$, saadaan

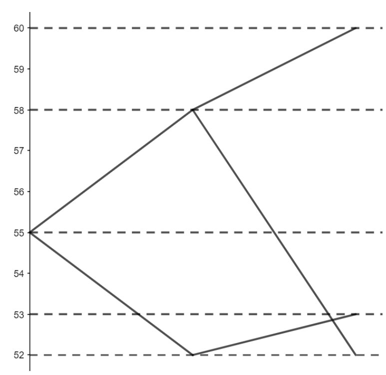
skenaario	$S(0)$	$S(1)$
1 (noususuhdanne)	10	12
2 (taantuma)	10	7

Eri skenaarioita osakkeen hinnan muutoksille voidaan hahmotella esittämälle ne "puuna". Vasemmalla puun juurena on osakkeen nykyinen arvo ja eri skenaariot tästä juuresta alkavia oksia. Puuhun saadaan siis hahmoteltua kaikki osakkeen eri skenaariot.

Esimerkki 2. Oletetaan nyt, että markkinoilla on kolme mahdollista skenaariota, $1, 2$ ja 3. Osakkeiden hinnat saavat seuraavat arvot kahdella aika-askeleella:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
1	55	58	60
2	55	58	52
3	55	52	53

Nämä hinnan muutokset voidaan esittää puun avulla, kuten kuvassa 1. Puu havainnollistaa eri skenaariot polkuina puun läpi juuresta vasemmalta solmujen kautta oikealle oksien kärkiin.



Kuva 1

7.0.1 Tehtäviä

Tehtävä 1. Ajatellaan markkinoita joissa on kolme mahdollista skenaariota, ja yksi aika-askel vastaa yhtä vuotta. Osakkeen tämänhetkinen hinta on 10 euroa, eli $S(0) = 10$, joka voi skenaarion 1 toteutuessa nousta 2 euroa ensimmäisen vuoden aikana ja sitten laskea 2 euroa toisen vuoden aikana. Skenaarion 2 toteutuessa osakkeen hinta nouee yhden euron ensimmäisen vuoden aikana ja nousee vielä 2 euroa toisen vuoden aikana. Skenaarion 3 toteutuessa osakkeen hinta laskee 3 euroa ensimmäisen vuoden aikana ja nousee 5 euroa toisen vuoden aikana.

Esitä osakkeen mahdolliset hinnanmuutokset taulukkona.

Tehtävä 2. Hahmottele puu, joka esittää markkinoita joissa osakkeen hinnat noudattavat seuraavia skenaarioita

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
1	100	110	120
2	100	105	100
3	100	90	100

7.1 Tuotto

Osakekurssien dynamiikkaa voidaan tarkastella tuoton avulla. Osakkeen tuotto muodostuu kahdesta elementistä: myyntivoitosta (tai -tappiosta) ja osingosta.

Tilanteessa, jossa osake ei maksa osinkoa, tuotto ilmaistaan osakkeiden tulevan arvon ja tämän hetkisen arvon erotuksen osuutena tämän hetkisestä arvosta.

$$K_s = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$

Koska tuleva arvo $S(1)$ on epävarma, myös tuotto K_s on epävarma. Voimme yleistää tämän mille tahansa aikavälille $[n, m]$ ja saamme tuottoasteen, tai lyhyemmin vain tuoton $K(n, m)$ joka on satunnaismuuttuja

$$K(n, m) = \frac{S(m) - S(n)}{S(n)}.$$

Yhden aika-askeleen $[n-1, n]$ tuotto $K(n)$ on

$$K(n) = K(n-1, n) = \frac{S(n) - S(n-1)}{S(n-1)},$$

josta seuraa

$$S(n) = S(n-1)(1 + K(n)).$$

Esimerkki 3. Edellisen esimerkin tilanteessa tuotot ovat satunnaismuuttujia seuraavin arvoin:

skenaario	$K(1)$
1	20%
2	-30%

Sillä skenaariossa 1: $K(1) = \frac{12-10}{10} = 0,2$,
ja skenaariossa 2: $K(1) = \frac{7-10}{10} = -0,3$

Jos osake maksaa osinkoa $div(n)$ ajan hetkellä n, täytyy tuoton määritelmää muuttaa. Kun osinko maksetaan, osakkeen hinta tippuu osingon verran. Koska oikeus osinkoon on myönnetty ennen osakkeen maksupäivää, osakkeen arvon tippuminen on jo huomioitu osakkeen hinnassa $S(n)$. Joten investoija, joka ostaa osakkeen ajanhetkellä $n-1$ maksaen $S(n-1)$ ja toivoo myyvänsä osakkeen ajan hetkellä n, saa $S(n)+div(n)$, ja tuotto on

$$K(n) = \frac{S(n) - S(n-1) + div(n)}{S(n-1)}$$

josta seuraa

$$S(n) = S(n-1)(1 + K(n)) - div(n).$$

Esimerkki 4. Jos edellisen esimerkin tilanteessa osake maksaa osinkoa yhden euron, tuotot ovat

skenaario	$K(1)$
1	30%
2	-20%

Sillä skenaariossa 1: $K(1) = \frac{12-10+1}{10} = 0,3$,
ja skenaariossa 2: $K(1) = \frac{7-10+1}{10} = -0,2$

On tärkeää ymmärtää ero yksittäisen aika-askeleen tuoton, ja pidemmän periodin tuoton välillä, sillä on hyvin mahdollista, että esimerkiksi $K(0,2) \neq K(1) + K(2)$

Esimerkki 5. Oletetaan, että $S(0) = 100$euroa.

- Ajatellaan tilannetta, jossa $S(1) = 110$ ja $S(2) = 100$ euroa. Tässä tapauksessa $K(0,2) = 0\%$, kun $K(1) = 10\%$ ja $K(2) \approx -9.09\%$, yhden askeleen tuottojen $K(1)$ ja $K(2)$ summa on positiivinen ja suurempi kuin $K(0,2)$.
- Ajatellaan toista tilannetta, matalammalla hinnalla $S(1) = 90$euroa ja $S(2) = 100$euroa, kuten edellä. Nyt $K(1) = -10\%$ ja $K(2) \approx 11.11\%$, ja niiden summa on edelleen suurempi kuin $K(0,2) = 0\%$.
- Tilanteessa, jossa $S(1) = 110$ ja $S(2) = 121$ euroa ja $K(0,2) = 21\%$, joka on suurempi kuin $K(1) + K(2) = 10\% + 10\% = 20\%$.

7.1.1 Tehtäviä

Tehtävä 3. Laske tuotto $K(1)$ seuraavissa kolmessa skenaariossa:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$
1	35	41
2	35	32
3	35	28

Tehtävä 4. Laske edellisen tehtävän tilanteessa vastaavat tuotot, kun osake maksaa osinkoa 2 euroa.

Tehtävä 5. Osakkeen tuotot on esitetty taulukossa ja hinta $S(0) = 45$euroa. Selvitä mahdolliset osakkeen hinnat, ja hahmottele puu hinnanmuutoksista.

skenaario	$K(0)$	$K(1)$	$K(2)$
1	10%	5%	−10%
2	5%	10%	10%
3	5%	−10%	10%

Tehtävä 6. Tee edellisen tehtävän tilanteeseen vaadittavat muutokset, kun osake maksaa osinkoa yhden euron jokaisen aika-askeleen lopussa.

Tehtävä 7. Selvitä $K(0,2)$ ja $K(0,3)$ tehtävän 5 datalla ja vertaa tuloksia yhden askeleen tuottojen summiin $K(1) + K(2)$ ja $K(1) + K(2) + K(3)$.

Tehtävä 8. Olkoon $K(1) = 10\%$ tai -10% ja $K(0,2) = 21\%$, 10% tai -1%, etsi mahdolliset skenaariot joilla $K(2)$ saa kaksi mahdollisimman eri arvoa.

7.2 Odotettu tuotto

Oletetaan, että tietyn aikaperiodin K tuotto tiedetään. Silloin voimme laskea matemaattisen odotusavon $E(K)$, niin sanotun *odotetun tuoton.*

Jos yhden askeleen tuotot $K(n+1), \dots, K(m)$ ovat riippumattomia, niin

$$1 + E(K(n,m)) = (1 + E(K(n+1)))(1 + E(K(n+2))) \dots (1 + E(K(m))).$$

Esimerkki 6. Estimoidaan laman, pysähtyneisyyden (stagnaatio) ja nousukauden todennäköisyyksiä 1/4, 1/2, 1/4. Jos odotettu vuotuinen tuotto jollain osakkeella näillä skenaarioilla on $-6\%, 4\%, 30\%$, niin vuotuinen odotettu tuotto on

$$-6\% \cdot \frac{1}{4} + 4\% \cdot \frac{1}{2} + 30\% \cdot \frac{1}{4} = 8\%.$$

7.2.1 Tehtäviä

Tehtävä 9. Olkoon laman, pysähtyneisyyden (stagnaatio) ja nousukauden todennäköisyydet 1/4, 1/2, 1/4, ja kahden ensimmäisen näistä skenaarioista vuotuisilla odotetuilla tuotoilla -5% ja 6%, selvitä jäljelle jääneen skenaarion vuotuinen tuotto kun odotettu vuotuinen tuotto on 6%.

Tehtävä 10. Olkoon osakkeen hinnat seuraavassa kolmessa skenaariossa:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
1	100	110	120
2	100	105	100
3	100	90	100

todennäköisyyksillä $1/4, 1/4, 1/2$. Selvitä odotetut tuotot $E(K(1)), E(K(2))$ ja $E(K(0,2))$. Vertaa arvoja $1 + E(K(0,2))$ ja $(1 + E(K(1)))(1 + E(K(2)))$ keskenään.

Tehtävä 11. Oletetaan, että aika-askel on kolme kuukautta $t = 1/4$, ja kvartaalituotot $K(1), K(2), K(3), K(4)$ ovat riippumattomia ja identtisesti jakautuneita. Selvitä odotettu kvarttaalituotto $E(K(1))$, ja odotettu vuotuine ntuotto $E(K(0,4))$, jos odotettu tuotto $E(K(0,3))$ kolmen kvarttaalin yli on 12%.

8 Binomipuumalli

Binomipuumalli on osakkeiden hintojen malli, joka mallintaa osakkeiden hintojen mahdollista vaihtelua tietyn ajan kuluessa. Binomipuumalli muistuttaa aiemmin hahmottelemiamme puita, mutta on määritelty tarkemmilla ehdoilla, ja sisältää myös eri hinnanmuutosvaihtoehtojen todennäköisyydet.

Malli on määritelty seuraavin ehdoin

Ehto 8.0.1. Osakkeen yhden askeleen tuotot $K(n)$ ovat identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia, niin että

$$K(n) = \begin{cases} u & \text{todennäköisyydellä } p \\ d & \text{todennäköisyydellä } 1-p \end{cases}$$

jokaiselle aika-askeleelle n, missä $-1 < d < u$ ja $0 < p < 1$.

Tästä ehdosta seuraa se, että osakkeiden hinnat $S(n)$ voivat nousta tai laskea jokaisella aika-askeleella kertoimella $1 + u$ tai $1 + d$. Epäyhtälöt $1 < d < u$ takaavat, että kaikki hinnat $S(n)$ ovat positiivisia, jos hinta $S(0)$ on positiivinen. Eli oletamme että vain kaksi asiaa voi tapahtua osakkeelle yhden aika-askeleen aikana: hinta voi liikkua "ylös"tai "alas". Kun vain kaksi asiaa on sallittu tapahtuvan, saamme kuvainnollisesti oksan. Lisäksi satunnaisuudella on jonkinlainen rakenne, sillä mahdollisilla hinannmuutoksilla on jotkin todennäköisyydet.

Olkoon r yhden t:n pituisen aika-askeleen riskittömän investoinnin tuotto.

Ehto 8.0.2. Riskittömän investoinnin yhden aika-askeleen tuotto r on sama jokaisella aika-askeleella ja

$$d < r < u$$

Jälkimmäinen ehto kuvaa osakkeiden hintojen muutosta suhteessa riskittömään varallisuuteen, kuten rahaan pankkitilillä tai joukkovelkakirjoihin.

Koska $S(1)/S(0) = 1 + K(1)$ ehdosta 1 seuraa että satunnaismuuttuja $S(1)$ voi saada kaksi eri arvoa,

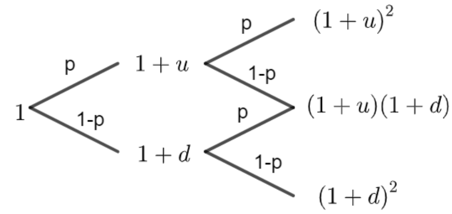
$$S(1) = \begin{cases} \text{S(0)(1 + u)} & \text{todennäköisyydellä } p \\ \text{S(0)(1 + d)} & \text{todennäköisyydellä } 1-p. \end{cases}$$

Osakkeen hintojen arvot $S(n)$ yhdessä vastaavien todennäköisyyksien kanssa voidaan löytää mille tahansa n. Oksista siis muodostuu puu, kun jokaisen yksittäisen aika-askeleen "oksat"yhdistetään. n-askeleen osakkeiden hintapuussa jokainen skenaario (tai reitti puun läpi) tarkalleen i:llä nousevalla, ja $1-i$:llä laskevalla hinnan muutoksella tuottaa saman osakkeen hinnan $S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i}$ hetkellä n. Tällaisia skenaarioita on $\binom{n}{i}$ kappaletta, jokaisen todennäköisyys on $p^i(1-p)^{n-i}$. Tästä saadaan

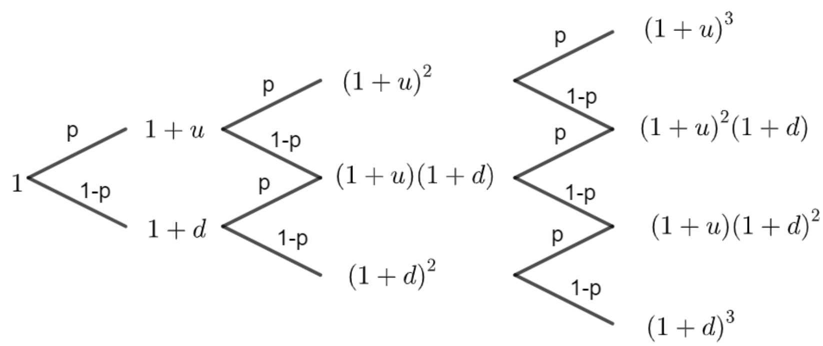
$$S(n) = S(0)(1+u)^i(1+d)^{n-i} \quad \text{todennäköisyydellä} \quad \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$$

missä $i = 0, 1, \dots, n$.

Nousevien hinnan muutosten määrä i on satunnaismuuttuja binomijakaumalla. Sama pätee laskevien hinnan muutosten määrälle $n-i$. Täten sanomme, että hinnan muutosprosessi noudattaa binomista puuta. n-askeleen binomisessa puussa kaikkien skenaarioiden joukossa, joka on siis n-askeleen reitit siirtyen ylös tai alas jokaisella askeleella, on 2^n alkiota. Esimerkki kahden askeleen binomisesta puusta on esitetty kuvassa 2 ja kolmen askeleen kuvassa 3. Molemmissa $S(0) = 1$ yksinkertaisuuden vuoksi.



Kuva 2



Kuva 3

Esimerkki 7. Olkoon hinnalla $S(1)$ on kaksi mahdollista arvoa 52 ja 58 euroa ja hinnalla $S(2)$ on mahdolliset arvot 53, 55 ja 60.

Voimme selvittää u:n $S(1)$:n ja $S(2)$:n korkeimpien arvojen avulla, sillä

$$S(1) = S(0)(1+u) \qquad \text{todennäköisyydellä } p$$

Mistä saadaan
$$u = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$
Vastaavasti mille tahansa n, eli $S(1)$:n ja $S(2)$:n korkeimmista arvoista saadaan:
$$u = \frac{60 - 58}{58} \approx 0,0345.$$
d:n selvittämiseksi täytyy ensin selvittää $S(0)$, joka onnistuu u:n ja $S(1)$:n korkeimman arvon avulla. Samasta yhtälöstä, mistä ratkaisimme u:n, voimme ratkaista $S(0)$:n:
$$S(1) = S(0)(1 + u) \qquad \text{todennäköisyydellä } p$$
Mistä saadaan
$$S(0) = \frac{S(1)}{1 + u}$$
Eli u:n ja $S(1)$:n korkeimman arvon avulla saamme:
$$S(0) \approx \frac{58}{1 + 0,0345} \approx 56,07$$
euroa. Nyt voimme määritellä d:n $S(0)$:n ja $S(1)$:n matalimman arvon avulla, sillä
$$S(1) = S(0)(1 + d) \qquad \text{todennäköisyydellä } 1 - p$$
Mistä saamme
$$d = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}$$
Eli
$$d \approx \frac{52 - 56,07}{56,07} \approx -0,0726.$$
Eli saamme arvot $u \approx 0,0345$ ja $d \approx -0,0726$

8.0.1 Tehtäviä

Tehtävä 12. Oleta, että osakkeen hinta jokaisena päivänä voi olla joko noussut 5% tai laskenut 4 % edellisen päivän hinnasta. Hahmottele puu kuvaamaan osakkeiden hintoja kolmen seuraavan päivän ajan, kun osakkeen hinta tänään on 20 euroa. Kuinka monta eri skenaariota löytyy?

Tehtävä 13. Kuinka monta eri arvoa satunnaismuuttujilla $S(2)$ ja $S(3)$ on binomipuumallissa ehdon 8.0.2 tilanteessa? Mitkä arvot ovat ja mitkä ovat niitä vastaavat todennäköisyydet? Kuvat 2 ja 3 ayttavat hahmottamaan tilannetta.

Tehtävä 14. Selvitä d ja u, kun $S(1)$:llä on kaksi mahdollista arvoa 87 euroa tai 76 euroa, ja korkein mahdollinen arvo hinnalle $S(2)$ on 92 euroa.

Tehtävä 15. Oletetaan, että hinnan $S(2)$ mahdolliset arvot ovat 32, 28 ja x euroa. Selvitä x olettaen, että osakkeiden hinnat noudattavat binomista puuta. Pystytkö täydentämään puun? Voidaanko tämä tehdä yksiselitteisesti?

Tehtävä 16. Oletetaan, että osakkeen hinnat noudattavat binomipuuta. Hinnan $S(2)$ mahdolliset arvot ovat 121, 110 ja 100 euroa. Selvitä u ja d, kun

a) $S(0) = 100$ euroa

b) $S(0) = 104$ euroa

8.1 Riskineutraalitodennäköisyys

Kun osakkeen tulevaa arvoa ei voida koskaan tietää varmasti, binomisen puun avulla on mahdollista selvittää odotetut osakkeiden hinnat. On luonnollista verrata näitä odotusarvoja ja riskittömiä investointeja.

Aluksi tarkastelemme osakkeiden hinnan odotusarvojen $E(S(n))$ dynamiikkaa. Kun $n = 1$

$$E(S(1)) = pS(0)(1 + u) + (1 - p)S(0)(1 + d) = S(0)(1 + E(K(1))),$$

missä

$$E(K(1)) = pu + (1 - p)d$$

on yhden askeleen odotusarvo. Tämä voidaan laajentaa mille tahansa n kirjoittamalla yhtälö muotoon

$$E(S(n)) = S(0)(1 + E(K(1)))^n,$$

missä $n = 0, 1, 2, \dots$

Jos määrä $S(0)$ oli tarkoitus sijoittaa riskittömästi hetkellä 0, se kasvaisi arvoon $S(0)(1 + r)^n$ n askeleen jälkeen, kun r on riskittömän investoinnin yhden aika-askeleen tuotto (ehto 8.0.2). Selvästi verrataksemme arvoja $E(S(n))$ ja $S(0)(1 + r)^n$, meidän tarvitsee verrata vain arvoja $E(K(1))$ ja r.

Kaikki osakesijoitukset sisältävät aina riskin, koska hinta $S(n)$ on aina etukäteen tuntematon. Tyypillinen riskiä välttävä investoija edellyttää että $E(K(1)) > r$, sillä perusteella että hänen tulisi saada suurempi odotettu tuotto siitä hyvästä että riski on suurempi. Käänteinen tilanne, missä $E(K(1)) < r$ voi kuitenkin olla houkutteleva joillekin sijoittajille, jos riskillinen tuotto on korkea pienellä nollastapoikkeavalla todennäköisyydellä ja matala suurella todennäköisyydellä. Tyypillisenä esimerkkinä tästä on lotto, missä odotettu tuotto on negatiivinen. Tällaisia sijoittajia voidaan kutsua riskinottajiksi. Laajempaa tapausta markkinoista jossa $E(K(1)) = r$ sanotaan riskineutraaleiksi.

Esimerkki 8. Tarkastellaan markkinoita jotka noudattavat mallia, jossa $u = 0,035$ ja $d = 0,073$. Markkinoiden todennäköisyydellä $p = 0,60$ saadaan

$$E(K(1)) = 0,60 \cdot 0,035 + (1 - 0,60)0,073 = 0,0502.$$

Jotta nyt riskin välttäjä investoisi markkinoille, tulisi olla $r < 0,0502$. Jos $r \geq 0,0502$ riskiä välttävä sijoittaja valitsee mielummin riskittömän vaihtoehdon.

Merkitään *riskineutraalia todennäköisyyttä* p_*, ja vastaavaa *riskineutraalia odotusarvoa* E_*, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$E_*(K(1)) = p_* u + (1 - p_*)d = r$$

ja

$$p_* = \frac{r - d}{u - d}.$$

On tärkeää ymmärtää, että p_* on matemaattinen objekti ja voi poiketa todellisesta markkinoiden todennäköisyydestä p. Jos $p = p_*$, niin markkinat ovat riskineutraalit.

8.1.1 Tehtäviä

Tehtävä 17. Laske odotettu tuotto $E(S(3))$ tehtävän 14 tilanteessa, kun $p = 0,55$

Tehtävä 18. Arvioi ovatko edellisen tehtävän kuvaamat markkinat riskineutraalit, kun $r = -0,0024$.

Tehtävä 19. Oletetaan markkinat jossa $u = 0,03$, $d = -0,01$, $p = 0,50$ ja $r = 0,005$. Jos sijoittaja on riskin välttäjä, sijoittaako hän markkinoihin?

Tehtävä 20. Olkoon $u = 1/2$ ja $r = 1/10$.Tutki todennäköisyyden p_* ominaisuuksia d:n funktiona.

Tehtävä 21. Osoita, että $d < r < u$ jos ja vain jos $0 < p_* < 1$.

8.2 Martingaali

Yhtälön

$$E(S(n)) = S(0)(1 + E(K(1)))^n,$$

missä $n = 0, 1, 2, \ldots$, perusteella hinnan $S(n)$ odotusarvo riskineutraalilla todennäköisyydellä p_* on

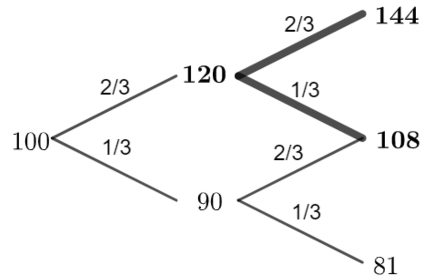
$$E_*(S(n)) = S(0)(1 + r)^n,$$

kun $r = E_*(K(1))$.

Esimerkki 9. Ajatellaan kahden askeleen binomista puuta, missä $S(0) = 100$ euroa, $u = 0.2$, $d = -0.1$ ja $r = 0.1$. $p_* = 2/3$ on riskineutraali todennäköisyys, ja odotettu osakkeen hinta kahden askeleen jälkeen on

$$E_*(S(2)) = S(0)(1 + r)^2 = 121$$

euroa. Yhden aika-askeleen jälkeen, kun on selvinnyt laskeeko vai nouseeko osakkeen hinta, täytyy uudelleen laskea odotus hinnalle $S(2)$. Oleteaan, että osakkeen hinta on noussut ensimmäisen askeleen jälkeen 120 euroon. Näissä olosuhteissa mahdollisten skenaarioiden joukko vähenee niihin joissa $S(1) = 120$ euroa, ja mallia kuvaava puu pienenee kyseiseksi osapuuksi tai ”oksaksi”, joka on esitetty kuvassa 4.

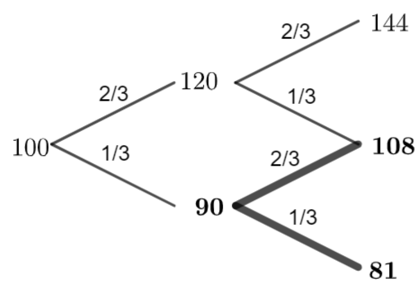


Kuva 4

Riskineutraali odotusarvo hinnalle $S(2)$ on siten $\frac{2}{3} \cdot 144 + \frac{1}{3} \cdot 108 = 132$, joka on yhtäsuuri kuin $120(1+r)$. Formaalisti tämä voidaan kirjoittaa käyttäen $S(2)$:n ehdollista odotusarvoa kun $S(1) = 120$

$$E_*(S(2)|S(1) = 120) = 120(1+r)$$

Vastaavasti, jos osakkeen hinta laskee 90 euroon yhden aika-askeleen jälkeen, mahdollisten skenaarioiden joukko supistuu niihin joissa $S(1) = 90$, ja osakkeidenhintapuu supistuu oksaan joka on esitetty kuvassa 5.



Kuva 5

Kun $S(1) = 90$ euroa, hinnan $S(2)$ riskineutraali odotusarvo on $\frac{2}{3} \cdot 108 + \frac{1}{3} \cdot 81 = 99$ euroa, mikä on yhtä suuri kuin $90(1+r)$. Tämä voidaan kirjoittaa yhtälönä

$$E_*(S(2)|S(1) = 90) = 90(1+r)$$

Kaksi edellistä kaavaa jotka sisältävät ehdollisen todennäköisyyden voidaan kirjoittaa yhdeksi yhtälöksi:

$$E_*(S(2)|S(1)) = S(1)(1+r)$$

Tämä analyysi voidaan laajentaa mille tahansa binomisen puun aika-askeleelle. Oletetaan, että n aika-askeleen kuluttua osakkeen hinta on $S(n)$. Riskineutraali ehdollinen odotusarvo $S(n+1)$ on tällöin

$$E_*(S(n+1)|S(n)) = S(n)(1+r)$$

Kun jaamme tämän yhtälön molemmat puolet $(1+r)^{n+1}$ saamme *diskontatun osakkeen hinnan* $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$: Mille tahansa $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$E_*(\tilde{S}(n+1)|S(n)) = \tilde{S}(n)$$

Sanomme että martingaalin diskontatut osakkeiden hinnat $\tilde{S}(n)$ riskineutraalilla todennäköisyydellä p_*. Todennäköisyyteen p_* viitataan myös *martingaali todennäköisyytenä.*

8.2.1 Tehtäviä

Tehtävä 22. Olkoon $r = 0,2$. Etsi riskineutraali ehdollinen odotusarvo $S(3)$, kun $S(2) = 110$ euroa.

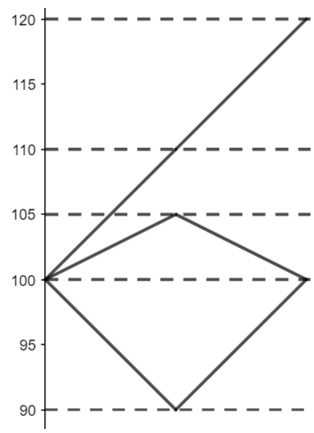
Tehtävä 23. Laske edellisen tehtävän mallissa diskontatun osakkeenhinnan $\tilde{S}(3)$ odotusarvo.

9 Ratkaisut

Ratkaisu 1.

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
1	10	12	10
2	10	11	13
3	10	7	12

Ratkaisu 2. Puu joka esittää taulukon tilannetta:



Ratkaisu 3.

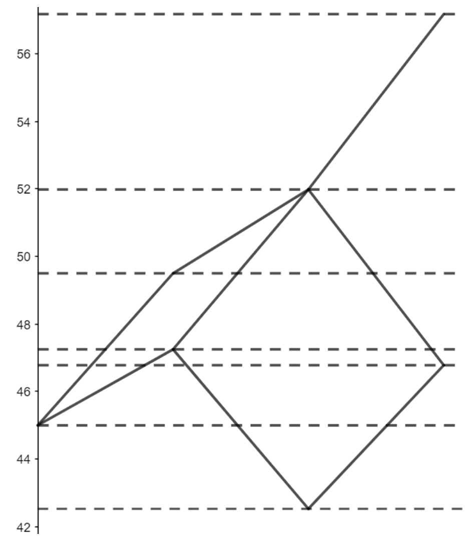
skenaario	$K(1)$
1	$17,14\%$
2	$-8,57\%$
3	$-20,00\%$

Ratkaisu 4.

skenaario	$K(1)$
1	$22,86\%$
2	$-2,86\%$
3	$-14,29\%$

Ratkaisu 5. Kaavalla $S(n) = S(n-1)(1 + K(n))$ saadaan:

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
1	45,00	49,50	51,98	46,78
2	45,00	47,25	51,98	57,17
3	45,00	47,25	42,53	46,78



Ratkaisu 6. Kun lisätään osingot kaava tulee muotoon

$$S(n) = S(n-1)(1 + K(n)) - div(n)$$

mistä saadaan

skenaario	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
1	$45,00$	$48,50$	$49,98$	$43,93$
2	$45,00$	$46,25$	$49,88$	$53,86$
3	$45,00$	$46,25$	$40,63$	$43,69$

Ratkaisu 7. Kahden askeleen tuotto verrattuna yhden askeleen tuottojen summaan voivat saada seuraavat arvot:

skenaario	$K(0,2)$	$K(1)+K(2)$
1	$15,50\%$	$15,00\%$
2	$15,50\%$	$15,00\%$
3	$-5,50\%$	$-5,00\%$

Vastaava kolmella aika-askeleella:

skenaario	$K(0,3)$	$K(1)+K(2)+K(3)$
1	$3,95\%$	$5,00\%$
2	$27,05\%$	$25,00\%$
3	$3,95\%$	$5,00\%$

Yhden askeleen tuottojen summa on usein suurempi, kuin koko intervallin tuotto, jos yhden askeleen tuoton merkki vaihtelee.

Ratkaisu 8. Kaavaa

$$1 + K(0,2) = (1 + K(1))(1 + K(2))$$

voidaan käyttää $K(2)$:n ratkaisuun. Esimerkiksi seuraavat skenaariot ja $K(2)$:n arvot ovat mahdollisia

skenaario	$K(0,2)$	$K(1)$	$K(2)$
1	$21,00\%$	$10,00\%$	$10,00\%$
2	$10,00\%$	$10,00\%$	0%
3	$-1,00\%$	$-10,00\%$	$10,00\%$

Tämä ei ole ainoa mahdollinen ratkaisu. Toinen vaihtoehto on ylläolevaa vastaava, vaihtamalla skenaario 2

skenaario	$K(0)$	$K(1)$	$K(2)$
2	$10,00\%$	$-10,00\%$	$22,22\%$

ja pitämällä muut skenaariot ennallaan.

Ratkaisu 9. Olkoon K tuotto kolmannessa skenaariossa. Jos odotettu tuotto on 6%, niin

$$\frac{1}{2} \cdot (-5\%) + \frac{1}{4} \cdot 6\% + \frac{1}{4} \cdot K = 6\%$$

Ratkaisemalla K saadaan, että kolmannen skenaarion tuoton täytyy olla 28%

Ratkaisu 10. Lasketaan ensin tuotot $K(1), K(2)$ ja $K(3)$ kaikille skenaarioille.

skenaario	$K(1)$	$K(2)$	$K(0.2)$
1	$10,00\%$	$9,09\%$	$20,00\%$
2	$5,00\%$	$-4,76\%$	$0,00\%$
3	$-10,00\%$	$11,11\%$	$0,00\%$

Tästä seuraa että

$$\begin{aligned} E(K(1)) &\approx 0.25 \cdot 10.00\% + 0.25 \cdot 5.00\% - 0.5 \cdot 10.00, \% \approx -1.25\%, \\ E(K(2)) &\approx 0.25 \cdot 9.09\% - 0.25 \cdot 4.76\% + 0.5\dot{\text{I}}11.11\% \approx 6.64\%, \\ E(K(0,2)) &\approx 0.25 \cdot 20.00\% + 0.25 \cdot 0.00\% + 0.5 \cdot 0.00\% \approx 5.00\%. \end{aligned}$$

Selvästi

$$(1 + E(K(1)))(1 + E(K(2))) \approx 1.0530 \neq 1.0500 \approx 1 + E(K(0,2)).$$

Ratkaisu 11. Koska kvarttaalituotot $K(1), K(2), K(3), K(4)$ ovat riippumattomia ja identtisesti jakautuneita,

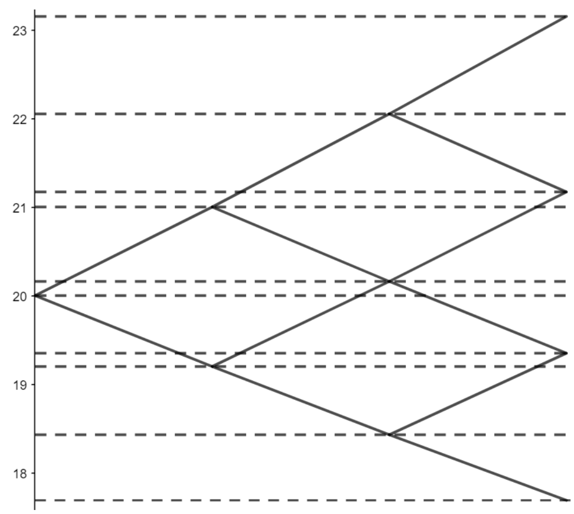
$$E(K(1)) = E(K(2)) = E(K(3)) = E(K(4))$$

ja

$$1 + E(K(0,3)) = (1 + E(K(1))^3,$$
$$1 + E(K(0,4)) = (1 + E(K(1))^4.$$

Täten jos $E(K(0,3)) = 12\%$, niin odotettu kvarttaalinentuotto on $E(K(1)) \approx 3,85\%$ ja odotettu vuotuinentuotto on $E(K(0,4)) \approx 16.31\%$.

Ratkaisu 12. Yhteensä löytyy 8 skenaariota, eli reittiä puun läpi juuresta oksien kärkiin.



Ratkaisu 13. Ehdon 8.0.1 perusteella satunnaismuuttujat

$$\frac{S(1)}{S(0)} = 1 + K(1), \qquad \frac{S(2)}{S(1)} = 1 + K(2), \qquad \frac{S(3)}{S(2)} = 1 + K(3),$$

ovat riippumattomia, jokainen ottaa kaksi arvoa $1+d$ ja $1+u$ todennäköisyyksillä p ja $1-p$

Hinta $S(2)$, joka on $S(0)$:n ja kahden ensimmäisen näistä satunnaismuuttujista tulo, ottaa neljä arvoa neljää hinnanmuutosskenaariota vastaavasti, eli Näiden $S(2)$:n neljän arvon joukossa on oikeastaan vain kolme erilaista

$$S(2) = \begin{cases} \mathrm{S(0)(1 + u)^2} & \text{todennäköisyydellä } p^2 \\ \mathrm{S(0)(1 + u)(1 + d)} & \text{todennäköisyydellä } 2p(1-p) \\ \mathrm{S(0)(1 + d)^2} & \text{todennäköisyydellä } (1-p)^2, \end{cases}$$

Hinta $S(3)$, joka on $S(0)$:n ja kolmen satunnaismuuttujan tulo, saa kahdeksan arvoa vastaten kahdeksaa hinnamuutosskenaariota Näiden $S(3)$:n kahdeksan mahdollisen arvon joukossa on vain neljä erilaista.

$$S(3) = \begin{cases} \mathrm{S}(0)(1 + \mathrm{u})^3 & \text{todennäköisyydellä } p^3 \\ \mathrm{S}(0)(1 + \mathrm{u})^2(1 + d) & \text{todennäköisyydellä } 3p^2(1-p) \\ \mathrm{S}(0)(1 + \mathrm{u})(1 + \mathrm{d})^2 & \text{todennäköisyydellä } 3p(1-p)^2, \\ \mathrm{S}(0)(1 + \mathrm{d})^3 & \text{todennäköisyydellä } (1-p)^3. \end{cases}$$

Ratkaisu 14. $S(1)$:n ja $S(2)$:n korkeimpia arvoja voidaan käyttää u:n määrittämiseen

$$u = \frac{92 - 87}{87} \approx 0,0575.$$

Seuraavaksi u:sta ja $S(1)$:n korkeimmasta arvosta saadaan $S(0)$:

$$S(0) \approx \frac{87}{1 + 0,0575} \approx 82,27$$

euroa. Lopuksi d määritellään $S(0)$:n ja $S(1)$:n matalimman arvon avulla.

$$d \approx \frac{76 - 82,27}{82,27} \approx -0,0762.$$

Ratkaisu 15. Yhtälöistä

$$S(0)(1+u)^2 = 32,$$
$$S(0)(1+u)(1+d) = 28,$$
$$S(0)(1+d)^2 = x.$$

seuraa että

$$\frac{32}{28} = \frac{1+u}{1+d} = \frac{28}{x}$$

ja $x = 28^2/32 = 24,50$ euroa. Puuta ei kuitenkaan voida täydentää yksiselitteisesti. Mille tahansa arvolle $S(0) > 0$ voidaan löytää u ja d dataa vastaavasti.

Ratkaisu 16. Arvot u ja d voidaan löytää ratkaisemma yhtälöt

$$S(0)(1+u)^2 = 121,$$
$$S(0)(1+d)^2 = 100,$$

ja valitsemme ratkaisut jotka toteuttavat $1+u > 0$ ja $1+d > 0$. Jos $S(0) = 100$, niin $u = 0,1$ ja $d = 0$. Jos $S(0) = 104$ niin $u \approx 0,0786$ ja $d \approx -0,0194$.

Ratkaisu 17. Lasketaan ensin $E(K(1)) = pu + (1-p)d$. Tehtävässä 14 selvitettiin, että $u \approx 0,0575$ ja $d \approx -0,0762$:

$$E(K(1)) = 0,55 \cdot 0,0575 + (1 - 0,55) \cdot (-0,0762) \approx -0,002665$$

Tehtävässä 14 selvitettiin myös $S(0) \approx 82,27$, joten nyt voidaan laskea $E(S(n)) = S(0)(1 + E(K(1)))^n$, eli

$$E(S(3)) \approx 82,27(1 - 0,002665)^3 \approx 81,61$$

Ratkaisu 18. Selvittääksemme onko markkina riskineutraali, tutkimme onko $E(K(1)) = r$. Selvittääksemme tämän laskemme $E(K(1)) = pu + (1-p)d = r$ eli

$$E(K(1)) \approx 0,55 \cdot 0,0575 + (1-0,55) \cdot (-0,0726) \approx -0,0024$$

Kun $r = -0,0024$, niin vaikuttaa siltä, että $E(K(1)) = r$. Täytyy kuitenkin huomioida, että $E(K(1))$:n arvo on likiarvo, joten ei voi täysin varmasti sanoa että markkinat ovat täysin riskineutraalit.

Vaihtoehtoisesti voimme tutkia kaavaa $p_* = \frac{r-d}{u-d}$. Kun $r = -0,0024$, $u \approx 0,0575$ ja $d \approx -0,0762$ saadaan

$$p_* \approx \frac{-0,0024 - (-0,0762)}{0,0575 - (-0,0762)} \approx 0,55$$

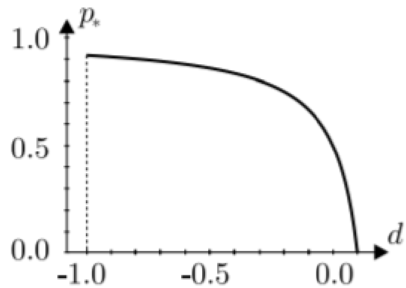
Kun tehtävässä 17 on annettu $p = 0,55$, niin vaikuttaa siltä, että $p = p_*$, eli että markkinat ovat riskineutraalit. Täytyy kuitenkin huomioida, että laskettu p_* on likiarvo, joten emme voi tehdä täysin yksiselitteisiä johtopäätöksiä.

Ratkaisu 19. Selvittääksemme sijoittaisiko riskiä välttävä investoija markkinoille, haluamme verrata arvoja $E(K(1)$ ja r. Kun $u = 0,03$, $d = -0,01$, $p = 0,50$ ja $r = 0,005$, saamme

$$E(K(1)) = 0,50 \cdot 0,03 + (1-0,50) \cdot (-0,01) = 0,01$$

Nyt $0,01 > 0,005$, eli $E(K(1)) > r$, eli investoija, joka on riskin välttäjä sijoittaisi markkinoille.

Ratkaisu 20. Meidän täytyy tarkastella d:n arvoja vain välillä -1 ja r, eli $1 < d < 1/10$. Koska d kasvaa tällä välillä, p_* pienenee 11/13:sta nollaan. Tämä p_*:n riippuvuus d:stä on esitetty kuvassa.



Ratkaisu 21. Tiedetään että koska yhden askeleen tuotto riskittömässä investoinnissa on sama jokaisella aika-askeleella ja $d < r < u$, ehto $d < r < u$ on ekvivalentti ehdon $d < p_* u + (1-p_*)d < u$ kanssa. Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $0 < p_*(u-d) < u-d$, tai yhtäläisesti $0 < p_* < 1$.

Ratkaisu 22. Laskeaksemme riskineutraalin odotusarvon, käytämme kaavaa $E_*(S(n+1)|S(n)) = S(n)(1+r)$. Kun $r = 0,2$ ja $S(2) = 110$ euroa, saamme:

$$E_*(S(3)|S(2) = 110) = 110(1+r) = 110(1+0,2) = 132$$

euroa.

Ratkaisu 23. Diskontatun osakkeen hinta on $\tilde{S}(n) = S(n)(1+r)^{-n}$. Edellisen tehtävän perusteella $r = 0,2$ ja $S(2) = 110$, joten

$$\tilde{S}(2) = 110(1+0,2)^{-2} \approx 76,389$$

Koska diskontatun osakkeen hinnan odotusarvo on $E_*(\tilde{S}(n+1)|S(n)) = \tilde{S}(n)$, niin

$$E_*(\tilde{S}(3)|S(2)) = \tilde{S}(2) \approx 76.389$$

euroa.

Viitteet

[1] Marek Capiński, Tomasz Zastawniak. *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer Undergraduate Mathematics Series, November 25, 2010

[2] Moshe Levy, Nathan Persky and Sorin Solom. *The Complex Dynamics of a Simple Stock Market Model*, Racah Institute of Physics Hebrew University Jerusalem I, July 1995

[3] Wilmott, P., Howison, S. and Dewynne, J. *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995

[4] Baxter, M. W. and Rennie, A. J. O. *Financial Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996

[5] Elliott, R. J. and Kopp, P. E. *Mathematics of Financial Markets* Springer-Verlag, New York, 1998

[6] Marno Verbeek *A guide to modern econometrics, fourth edition* Rotterdam School of Management, Erasmus University, Rotterdam, 2012

[7] Capiński, M. and Zastawniak, T. *Probability Through Problems* Springer-Verlag, New York, 2001

[8] Opetushallitus *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019* Helsinki, 2019