Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Pro gradu

Geometriset konstruktiot

Lauri Nissinen

Ohjaaja: Mika Koskenoja

2. marraskuuta 2020

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	**Matematiikan koulutusohjelma, aineenopettajan koulutus**

Tekijä – Författare – Author
Lauri Nissinen

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Geometriset konstruktiot

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu	**Marraskuu 2020**	**74 s.**

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tämä Pro gradu - tutkielma käsittelee harpilla ja viivaimella tehtyjä geometrisiä kuvioita, eli geometrisia konstruktioita. Tutkielma on tehty kirjallisuuskatsauksena ja se tarjoaa syventävää tietoa harpin ja viivaimen taustalla olevasta rikkaasta historiasta sekä moniulotteisesta matematiikasta. Tutkielma on rakennettu alkamaan pohjustavalla historian katsauksella, jonka jälkeen siirrytään tutkimaan matemaattista taustaa.

Tutkielma alkaa historiallisella pohjalla, jossa luodaan katsaus yli 2000 vuoden päähän antiikin Kreikkaan ja sitä edeltäviin kulttuureihin. Tutkielmassa edetään jotakuinkin kronologisessa järjestyksessä antiikin ajoista aina 1800 - luvulle asti. Varhaisimmat harppiin ja viivaimeen liittyvät havainnot ulottuvat antiikin Egyptiin asti, jossa ympyröiden ja suorien viivojen piirtämiseen käytettiin köysiä ja puutikkuja. Egyptiläisten maanmittauksista luotu geometrinen perintö siirtyi antiikin Kreikkaan, jossa matemaatikko Eukleides kokosi kuuluisaan Alkeet - teokseensa geometrian peruskulmakivet. Geometrialle luotiin aksiomaattinen ja todistuksiin perustuva rakenne, joka nojasi hyvin vahvasti harpin ja viivaimen käyttöön. Teoksessa esitettyjen lauseiden rakenne noudatti kaavaa ongelma – todistus – konstruktio, jossa todistukset perustuivat alussa määritettyihin perusolettamuksiin.

Antiikin aikaisen historian jälkeen luodaan katsaus harppiin ja viivaimeen työvälineinä sekä näihin liittyviin klassisiin ongelmiin. Harppi ja viivain työvälineinä mahdollistivat geometrialle ominaisten yksinkertaisten kuvioiden, eli suoran ja ympyrän piirtämisen, joten niiden asettaminen konstruktioiden peruspilareiksi oli loogista. Jo antiikin Kreikan aikana tietyt harppi – viivain – ongelmat osoittautuivat vaikeiksi eikä niitä osattu ratkaista Eukleideen määrittämin keinoin. Näitä siihen aikaan ratkaisemattomia ongelmia kutsutaan myös klassisiksi ongelmiksi ja näitä ovat kuution kahdentaminen, ympyrän neliöiminen sekä kulman jakaminen kolmeen osaan. Tutkielmassa avataan näihin liittyvää antiikin aikaista myyttistä historiaa sekä eritellään lyhyesti erilaisia ratkaisuyrityksiä. Klassiset ongelmat kiinnostivat matemaatikoita ja amatöörejä yli 2000 vuotta, kunnes vasta 1700 - ja 1800 - luvulla oli riittävät matemaattiset työkalut näiden todistamiseen mahdottomiksi harpilla ja viivaimella.

Tässä tutkielmassa lähdetään rakentamaan matemaattista pohjaa harppi – viivain – konstruktioille matemaatikko ja filosofi René Descartesin 1600 - luvulla luoman analyyttisen geometrian avulla. Samalla kuljetetaan rinnalla koko ajan Alkeiden konstruktioiden algoritmista ideologiaa. Tavoitteena on lähteä muodostamaan vastausta kysymykseen: mitkä kaikki tason pisteet ja tarkemmin vielä mitkä luvut voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella? Puhuttaessa konstruoituvuudesta, puhutaan sellaisista karteesisen koordinaatiston pisteistä, joiden koordinaattien luvut voidaan harpin ja viivaimen avulla konstruoida. Joukko-opillisesti konstruoituvat luvut lähdetään rakentamaan rationaaliluvuista neliöllisinä kuntalaajennuksina. Tarkastelun tuloksena huomataan, että harpilla ja viivaimella voidaan konstruoida ainoastaan peruslaskutoimituksilla sekä neliöjuurioperaatioilla saatuja lukuja. Lopuksi osoitetaan teorian valossa antiikin Kreikan kolme klassista ongelmaa mahdottomaksi.

Konstruoituvien lukujen jälkeen palataan tutkimaan harppiin ja viivaimeen liittyviä ekvivalenssiteorioita. Harppeja ja viivaimia on olemassa käyttötarkoituksen mukaan erilaisia. Esimerkiksi antiikin Kreikan aikainen euklidinen harppi ei säilytä pituuttaan samalla tavalla kuin nykyisin kouluissakin käytetty moderni harppi, jonka jalat voidaan lukita tiettyyn pituuteen. Ne ovat kuitenkin konstruktioiden näkökulmasta ekvivalentteja työkaluja, eli niillä voidaan tehdä samat operaatiot. Tämä osoitetaan tutkimalla Alkeiden kirjan 1 kahta ensimmäistä propositiota. Lisäksi 1600 - ja 1700 - luvuilla geometriassa nousi uusi mielenkiintoinen tulos: kaikki, mikä voidaan tehdä harpilla ja viivaimella, voidaan myös tehdä pelkästään harpilla. Tämän lauseen nimi on Mohrin ja Mascheronin teoreema ja siihen tutustutaan tutkielmassa myös tarkemmin.

Lopuksi luodaan teorian valossa vielä lyhyt katsaus säännöllisiin monikulmioihin. Tässä osoitetaan neliö, säännöllinen viisikulmio sekä säännöllinen kahdeksankulmio konstruoituviksi. Keskeiseksi teemaksi nousee säännöllisten monikulmioiden keskuskulma ja sen konstruoitavuus.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Harppi, viivain, suora, ympyrä, geometria, analyyttinen geometria, konstruktiot, kuntateoria, algoritminen ajattelu

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Helsinki, E-thesis

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisältö

1 Historiallinen pohja

Tässä luvussa tutustutaan harppi-viivain-konstruktioiden varhaiseen historiaan. Yleinen käsitys on, että harppi-viivain-konstruktiot tai toiselta nimeltään geometriset konstruktiot ovat saaneet alkunsa antiikin Kreikasta. Tosiasiassa näiden juuret ovat antiikin Egyptissä ja jopa tätä varhaisemmissa kulttuureissa. Antiikin Kreikan aikakaudella harppi ja viivain kuitenkin vakiinnuttivat asemaansa matematiikassa ja erityisesti geometriassa, minkä lisäksi geometristen konstruktioiden suosio ja sovellukset kasvoivat.

1.1 Egypti

Harpin ja viivaimen historia ulottuu aina antiikin Egyptiin asti, jossa geometrian juuret alun perin ovat. Vaikka nykyään geometrian oppien katsotaan kulminoituneen vahvasti antiikin Kreikan aikaiseen Eukleideen *Alkeisiin*, pohjautuu paljon *Alkeiden* sisällöstä egyptiläisten oivalluksiin ja teorioihin. Tutkitaan seuraavaksi, miten Egypti vaikutti geometrian ja siten harpin ja viivaimen kehitykseen.

Egyptissä Niilin vuosittaiset pinnan vaihtelut tekivät rantaosuudet hedelmällisiksi viljelymaiksi. Viljelyä haittasi vuosittaiset kausittaiset nousuvedet, jotka pyyhkivät aina viljelijöiden arvokkaiden maatilkkujen väliset rajat pois. Täten tuli tarve kehittää luotettava tapa mitata viljelijöiden maatilkkujen maaosuuksia, eli kehitettiin maanmittaus. Maanmittauksen avulla voitiin uudelleen piirtää tarkasti maahan arvokkaiden viljelytilkkujen rajat niiden huuhtoutuessa pois. Itse asiassa geometria nimi tulee suoraan kreikan kielen käännöksestä maanmittausta tarkoittavasta sanasta (Fabio & Enrico, 2000). Tämä näkyy suomen kielessäkin geo-etuliitteenä.

Geometriaa harjoittavia henkilöitä kutsuttiin Egyptissä niin sanotuiksi köydenvenyttäjiksi (eng. rope stretchers), kun taas kreikkalaiset kutsuivat heitä vain maanmittaajiksi (Fabio & Enrico, 2000). Nimitys köydenvenyttäjät juontaa juurensa egyptiläisten maanmittauksissa käyttämästä työvälineestä, köydestä. Egyptiläisille köysi oli perustyökalu geometrisissa toimenpiteissä, sillä ne mahdollistivat suorien viivojen sekä ympyröiden piirtämisen (Blasjo, 2016).

Suora viiva saatiin kiristämällä kahden kepin välillä olevaa narua. Ympyrä saatiin piirrettyä köyden avulla pitämällä yhtä keppiä maassa pystyssä paikallaan ja pyörittämällä narun päässä toista keppiä sen ympäri. Keskipisteen ympäri pyörivä keppi piirsi hiekkaan ympyrän (Fabio & Enrico, 2000). Kun keskipisteen kohdalla ollut keppi nostettiin hiekasta, oli hiekkaan jäänyt kuoppa. Valitsemalla mielivaltainen piste kehältä, voitiin edelleen narun avulla piirtää kehän pisteen ja keskipisteen kautta kulkeva ympyrän halkaisija. Itse asiassa tämän avulla egyptiläiset saivat arvioitua luvulle π arvoksi tasan 3 (Beckman, 2000).

Köyden käyttö voidaan nähdä alkeellisena harpin ja viivaimen esi-isänä (Blasjo, 2016). Köysi ei tietysti fyysisiltä muodoiltaan välttämättä suoraan muistuta nykyistä harppia ja viivainta mutta koska köyden avulla voitiin piirtää suoria viivoja sekä ympyröitä, oli se ominaisuuksiltaan harpin ja viivaimen kaltainen. Köysi oli niin kutsuttu euklidinen harppi, josta kerrotaan lisää luvussa 2.

Mitatessaan maatilkkuja egyptiläiset eivät käyttäneet suorakulmaan tekemiseen köysien lisäksi erillistä työvälinettä. He todennäköisesti tiesivät kuitenkin Pythagoraan teoreemasta tai ainakin sen käänteisestä tuloksesta konstruoidessaan suorakulmia: jos kolmion sivut ovat 3, 4 ja 5, niin kahden lyhyimmän sivun välillä on suorakulma ja luvuille pätee Pythagoraan lauseen mukainen yhtälö. Tämä tieto on kuitenkin epävarmaa eikä sille ole riittäviä todisteita (Fabio & Enrico, 2000). Suorakulmat he saivat Carnahan (1932) mukaan aikaiseksi solmittujen köysien avulla. Tämä tarkoittaa sitä, että köysiin tehtiin solmuja samanmittaisten etäisyyksien päähän, jolloin voitiin puhua konkreettisista pituuksista. Suorakulmion konstruoiminen tarkasti luontoon ja sen siirtäminen pienestä mittakaavasta ison rakennuksen mittakaavoihin oli sen aikaisilla alkeellisilla välineillä haastavaa (Fabio & Enrico, 2000).

Suorakulman alkuperäisestä löytämisestä ei ole tarkkaa tietoa mutta sen löytymisen taustalla ovat todennäköisesti olleet juuri edellä mainitut Pythagoraan kolmikot sekä useat muut puhtaasti geometriset löydökset. Esimerkiksi Babylonian historiassa on selviä viitteitä Pythagoraan kolmikon käytöstä, mikä käy ilmi historiallisesti merkittävästä noin 3500-4000 vuotta vanhasta Plimpton 322-savitaulusta (Robson, 2002). Muut geometriset löydokset ovat olleet esimerkiksi seuraavat: suorakulmalla on symmetrisiä ominaisuuksia, eli kun kahden toisiaan leikkaavan suoran väliin muodostuu yhtä suuret kulmat, ovat ne kummatkin 90 astetta. Lisäksi suorankulman pystyy konstruoimaan piirtämällä kaksi saman säteistä ympyrää vierekkäin niin, että kummankin kehä kulkee toisen ympyrän keskipisteen kautta. Ympyröiden leikkauspisteiden kautta kulkeva suora sekä ympyröiden keskipisteiden kautta kulkeva suora leikkaavat toisensa kohtisuorasti (Fabio & Enrico, 2000). Tämä tulos todistetaan vielä myöhemmin luvussa 4.

Mittavälineiden kehittyessä harppi ja viivain alkoivat pikkuhiljaa syrjäyttämään köysien käytön. Harppi ja viivain nähtiin olevan kiinteästi matemaattisten metodien ja matematiikan tarkoituksen ytimessä. Tätä on usein hämmästelty siitä syystä, että harppi ja viivain ovat köyden tapaan varsin yksinkertaisia ja alkeellisia välineitä (Blasjo, 2016).

1.2 Antiikin Kreikka

Ennen antiikin Kreikan aikakautta geometria nähtiin vielä merkityksettömänä ilman koherenttia rakennetta ja usein geometriset ongelmat yritettiin aina palauttaa yksinkertaiseen aritmetiikkaan. Näin oli myös Egyptissä ja Babyloniassa, josta toisaalta myös tuli rakenneosaset Eukleideen geometrian rakentamiseen. (Jones, 2012)

1.2.1 Eukleideen Alkeet

Eukleides oli yksi tunnetuimmista kreikkalaisista matemaatikoista, jonka elämästä tunnetaan hänen ansioihinsa nähden yllättävän vähän. Hän asui elämänsä aikana Aleksandrian kaupungissa ja tutkijat ovat ajoittaneet hänen matemaattisen uransa noin 320-260 eaa. Eukleideen kuuluisin teos *Alkeet* (noin 300 eaa.) loi pohjan koko nykyisen kaltaiselle geometrialle ja matemaattiselle ajattelulle (Richeson, 2019). Tähän Eukleideen luomaan geometriaan viitataan usein euklidisena geometriana.

Eukleideen *Alkeet* on jaettu 13 kirjaan, joita edeltävät määritelmät ja postulaatit, eli perusolettamukset (Martin, 1998). Eukleides halusi kehittää teoksessaan deduktiivisen järjestelmän geometrialle, joka perustuisi mahdollisimman pieneen määrään näitä perusoletuksia (Suzuki, 2008). Jokainen Eukleideen kirjoista sisältää propositioita, joita on kahdenlaisia: teoreemat ja ongelmat. Teoreemat, eli matemaattiset lausumat, ovat todistettu postulaattien ja edellä todistettujen teoreemien avulla (Martin, 1998). Ongelmissa aluksi annetaan joukko geometrisia objekteja, kuten piste tai jana, ja niiden avulla on tehtävä sallituilla operaatioilla uusi geometrinen objekti, esimerkiksi tasasivuinen kolmio (Martin, 1998; Richeson, 2019). Ongelman ratkaisua kutsutaan konstruktioksi.

Suurin osa *Alkeiden* sisällöstä tunnettiin todennäköisesti jo ennen Eukleidesta. *Alkeet* aloitti uuden aikakauden geometriassa formalisoimalla ja aksiomatisoimalla egyptiläisten maanmittaajien tuloksia. Isommissa mittakaavoissa käytetyt köydet vaihtuivat nyt pienemmän mittakaavan viivaimeen ja harppiin. Egyptiläisten maanmittaajien köyden käytön alkuperä näkyy Alkeiden kolmessa ensimmäisessä postulaatissa, jossa suora määritellään kahden pisteen avulla, joiden väliin asetetaan tasainen leveydetön viiva. (Fabio & Enrico, 2000)

Tärkeintä eivät kuitenkaan ole itse teoksessa esiintyvät teoreemat, vaan niissä käytettävät metodit. Sen aikaiset kreikkalaiset ihannoivat kirjassa esiintyvää logiikkaa ja pitivät kirjan sisältöä itsestään selvänä ja totuutena. Ajan saatossa matemaatikot ovat kuitenkin kyseenalaistaneet aksioomien sisältöjä ja tästä on muun muassa saanut alkunsa myös epäeuklidinen geometria. (Beckman, 2000)

Eukleideen kirjan konstruktioiden algoritminen ajattelu tukeutuu sarjaan tapahtumia:

Ongelma – konstruktio – todistus.

Ongelmissa luodaan jotain uusia geometrisia kokonaisuuksia annetuista joukoista. Ongelmien ratkaisuja kutsutaan konstruktioiksi. Konstruktiot ovat itsessään jo teoreemoja, jotka täytyy todistaa. Konstruktiot ovat myös algoritmeja, sillä ne noudattavat reseptiä, jossa tehdään tiettyjä toimenpiteitä tietyssä järjestyksessä ja saadaan haluttu lopputulos. Konstruktio voi siis tarkoittaa kahta asiaa: erityinen teoreema, joka on geometrinen algoritmi tai sitten teoreemaa havainnollistava piirros. Kumpikin silti täydentävät toisiaan. (Martin, 1998)

Esimerkkinä tästä esitellään *Alkeiden* proposito 1 ja tästä Martin (1998) mukainen päättelyketju. *Alkeiden* ongelma 1 todistetaan formaalisti uudestaan vielä luvussa 5.

> **Ongelma**: olkoon annettuna kaksi pistettä A ja B. Konstruoi piste C siten, että ΔABC on tasasivuinen. Esitetään notaatio: olkoon P_q merkintä ympyrälle, jonka keskipiste on P ja sen kehä kulkee pisteen q kautta.

Konstruktio: Jos A ja B ovat kaksi annettua pistettä ja C on ympyröiden A_B ja B_A leikkauspiste, niin ΔABC on tasasivuinen. Konstruktiossa esitetään, että piste C on olemassa ja näytetään, miten se löydetään kuvan avulla.

Todistus: koska $AC = AB$ ja $BC = BA$, niin $AB = BC = CA$.

Harppi-viivain-konstruointeihin liittyy Eukleideen määrittelemät viisi postulaattia hyvin kiinteästi. Eukleideen *Alkeissa* mainitusta viidestä postulaatista kolme ensimmäistä luovat pohjan kaikille harppi-viivain-konstruktioille (Suzuki, 2008; Richeson, 2019). Toisin sanoen nämä kolme postulaattia toimivat sääntöinä, jotka kertovat, mitä voi tehdä ja mihin kaikki monimutkaisemmat konstruktiot loppujen lopuksi palautuvat. Kaikki konstruktiot koostuvat äärellisestä määrästä postulaattien määrittelemistä niin kutsutuista peruskonstruktioita. Tässä yhteydessä konstruktiolla tarkoitetaan operaatioita, jonka voi tehdä harpilla ja viivaimella. (Suzuki, 2008)

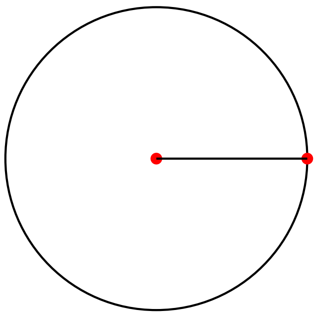
Harpilla ja viivaimella sallitut operaatiot perustuvat Eukleideen kolmeen ensimmäiseen postulaattiin, jotka ovat Fitzpatrick (2008) käännöksen mukaan seuraavat.

Määritelmä 1. (*Alkeet: kolme ensimmäistä postulaattia*)

1. On mahdollista piirtää suora jana mistä hyvänsä pisteestä mihin hyvänsä pisteeseen.

2. On mahdollista jatkaa janaa jatkuvasti suoraksi.

3. On mahdollista piirtää ympyrä, jonka keskipiste on mikä hyvänsä sekä keskipisteen ja kehän etäisyys mikä hyvänsä.



1.2.2 Konstruktioiden ideologiaa

Matematiikan historioitsija H. G. Zeuthen mielestä geometriset konstruktiot olivat antiikin kreikkalaisille ”olemassaolon” todistuksia (Blasjo, 2016). Konstruktioiden tarkoitus oli mahdollistaa ja näyttää siihen aikaan mahdottomienkin lukujen olemassaolo. Mahdottomilla luvuilla viitataan esimerkiksi irrationaalilukuihin, joita ei siihen aikaan täysin ymmärretty. Konstruktiot olivat tavallaan takaamassa, että jokaisella matemaattisella lauseella oli teoriasta riippumaton, hyvin sanoitettu ja perusteltu empiirinen sisältö. Konstruktiot siten pohjustivat geometrian enemmän konkreettiaan, joka oli saatavilla kaikille ja kyseenalaistamatonta (Blasjo, 2016).

Matemaattisten lauseiden todistuksia ei välttämättä tarvinnut ymmärtää: riitti että kaiken pystyi näyttämään konstruktion avulla ja antamaan empiirisesti saadun kuvion perusteella hyväksyttävän perustelun/vakuutuksen. Tämä tulee myös esille Eukleideen määrittelemissä geometrisissa tavoissa, jossa hän pyytää lukijaa tekemään tietyt konstruktiot ja lopuksi saadaan haluttu lopputulos. (Blasjo, 2016)

Empiirinen kuvioon perustuva lähestymistapa mahdollisti oman ammattitaidon näyttämisen ilman todistuksessa käytettävän metodin paljastamista. Tämä oli varsin yleistä matematiikassa ja erityisesti geometriassa aina 1600-luvulle saakka (Blasjo, 2016). Konstruktioita siis julkaistiin ilman formaaleja todistuksia, mikä on nykyajan matematiikan valossa hyvin epäformaalia.

Toisaalta kaikki tieteessä pitää olla mitattavissa ja havaittavissa. Tiede ei ole spekulointia eikä vakuuttavienkaan teorioiden esittämistä, jos niiden takana ei ole empiriaan perustuvia havaintoja ja mittauksia. Kreikkalainen matematiikka nojaa nimenomaan juuri tähän konkretiaan: kreikkalaisessa matematiikassa ei puhuta mistään sellaisesta, mitä ei voisi osoittaa konkreettisesti silmin havainnoimalla. (Blasjo, 2016)

Ajattelussa tulee esille myös Platoninen ideamaailma, varsinkin irrationaalilukuja tarkasteltaessa. Tässä luodaan pesäeroa geometristen konseptien ja fysikaalisen todellisuuden välille. On olemassa jotain, joka voi olla ideamaailmassa, vaikkei sitä voida fysikaalisesti mitata (Jones, 2012). Tällainen luku voisi olla esimerkiksi $\sqrt{7}$. Luvun $\sqrt{7}$ lasku $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$ voidaan ajatella olevan metafyysinen ja epätieteellinen, mutta kun se on tarkasti konstruoitu harpin ja viivaimen avulla, ei kritiikkiä enää ole (Blasjo, 2016). Richeson (2019) mukaan silti esimerkiksi antiikin kreikkalainen matemaatikko Theodorus onnistui todistamaan esimerkiksi lukujen $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$ irrationaalisuuden epäsuorasti. Hän todisti, että neliön, jonka pinta-ala on 2 tai 3, sivua ei voida esittää kahden tunnetun luvun suhteena. Tällöin sitä ei myöskään voisi konstruoida harpilla ja viivaimella. Omasta mielestäni on varsin mielenkiintoista, että harpilla ja viivaimella voitiin sen aikaisen ajattelumallin mukaan tehdä niin vakuuttavia kuvioita, että tuntemattomien lukujenkin uskottiin olevan todellisia.

Konstruktioiden merkittävä asema oli luultavasti tärkein tekijä, joka erotti geometrian muista tieteellisistä ja filosofisista teorioista antiikin kreikassa. Toisin kuin muut sen aikaiset teoriat, geometria konstruoi teoriaansa itse kaikki tarvitsemansa kuviot pelkällä harpilla ja viivaimella. Eli kaikki kuviot, jotka voitiin konstruoida näillä, olivat osa geometriaa. Muut aikakautensa teoriat eivät olleet tähän samaan tapaan konstruktiivisia, kuten esimerkiksi täynnä aukkoja olevat kreikkalaisten teoriat taivaankappaleiden liikkeistä ja teoria kaiken eläväisen koostumisesta neljästä elementistä: maa, vesi, ilma ja tuli. (Blasjo, 2016)

Vasta 1600- ja 1700-luvulla moni antiikin kreikkalaisten kehittämä tieteen teoria onnistuttiin kumoamaan ja selittämään uudelleen. Näitä olivat mm. virheellinen käsitys siitä, että maapallo on aurinkokunnan keskipisteessä ja että planeettojen radat olivat täydellisiä ympyröitä. Geometria pärjäsi paremmin konstruoituvan luonteensa ansiosta, jonka vuoksi yksikään antiikin kreikkalaisten luomista geometrian teoreemoista ei kumoutunut. (Blasjo, 2016)

2 Harppi ja viivain

Tässä luvussa tutkitaan tarkemmin harppia ja viivainta työvälineenä sekä mitkä asiat johtivat juuri näiden välineiden valitsemiseen geometrian perustyövälineiksi. Harpin ja viivaimen mahdollistamat operaatiot ovat säilyneet samana ajan saatossa, vaikkakin antiikin kreikkalaisten määrittelemät harppi ja viivain eroavat toimintaperiaatteeltaan nykypäivänä kouluissakin käytetystä vastaavista välineistä.

2.1 Rajoittuminen harppiin ja viivaimeen

Geometrian rajoittaminen harppiin ja viivaimeen ymmärrettävä mutta varsin jyrkkä rajaus. Tähän rajaukseen liittyviä syitä on historian saatossa esitetty muutamia mutta varmuutta välineiden todellisesta käyttöönoton motiiveista ei vielä täysin ole (Richeson, 2019). Yleinen ajatus nykyään on, että Eukleides kehitti *Alkeiden* yhteydessä harpin ja viivaimen. Tutkijat ovat kuitenkin onnistuneet esittämään riittävän hyviä perusteluja sille, että nämä välineet olisi kehitelty ennen *Alkeita.* Kiistaton tosiasia kuitenkin on, että *Alkeet* vahvisti näiden asemaa ja asetti ne geometrian perustyövälineiksi (Richeson, 2019).

Geometriassa ajatus siitä, että rajoitutaan vain työvälineisiin harppi ja viivain, on nimeltään Platoninen rajoitus. Tämä on peräisin ajalta ennen Eukleidesta. Platonin varsinaisista motiiveista rajoittua juuri näihin ei ole varmuutta. Niillä saatiin kuitenkin aikaan geometriassa tarvittavat perustavanlaatuisimmat kuviot: suora ja ympyrä (Martin, 1998). Antiikin Kreikan aikaisille suurille loogikoille oli selvää, että yksinkertaiset geometriset tehtävät piti voida suorittaa vain suorien ja ympyröiden avulla (Carnahan, 1932).

Matemaatikko Thomas Little Heathin mukaan kuitenkin kreikkalainen astronomi Oenopides (490 eaa - 420 eaa) oli ensimmäinen henkilö, joka identifioi ja määritteli Platonia edeltävän ajan tasogeometrian ja samalla harpin ja viivainten käytön säännöt (O'Connor & Robertson, 1999). Richeson (2019) mukaan Oenopides onnistui ensimmäisenä tekemään kaksi harppi-viivain-konstruktiota: suorakulman konstruointi annetun pisteen kautta annetulle suoralle, sekä kulman kopiointi. Nämä olivat silti vain yksittäisiä konstruktioita, eikä ole riittävästi todisteita siitä, että Oenopides olisi luonut näiden pohjalta *Alkeiden* kaltaista formaalia rakennetta.

Toisaalta on myös esitetty teorioita siitä, että harppi ja viivain tulivat vain sattumalta mukaan kreikkalaisten matematiikkaan. Eukleideen *Alkeiden* myötä ilmeistä oli se, että mikäli konstruktio vaati harpin ja viivaimen lisäksi muitakin apuvälineitä tai piirtotekniikoita, ei sitä voitu palauttaa Eukleideen viiteen aksioomaan. Tällöin sitä ei voitu todistaa antiikin kreikkalaisten vaatimalla tavalla (Beckman, 2000).

Harpin ja viivaimen kielletty käyttö kulminoituu kreikkalaisten kehittämiin niin kutsuttuihin neusis-konstruktioihin. Neusis koostuu tietyn mitan pituisen janan sovituksesta kahden käyrän väliin niin, että jana tai sen jatke kulkee määrätyn pisteen kautta. Käytännössä neusiksen tekemiseen tarvitaan viivain, jossa on kaksi merkkiä (Richeson, 2019). Tämä ei ollut sallittua Eukleideen määräämillä välineillä. Kuuluisin neusis-konstruktio on luultavimmin Arkhimedeen kulman kolmijaon konstruktio.

Lukijalle voisi herätä kysymys, että miksei Eukleides sitten käyttänyt astelevyä tai mitta-asteikkoa? Yksi teoria on se, että kreikkalaiset eivät osanneet aritmetiikkaa kovinkaan hyvin. He tiesivät vain kokonaisluvut ilman nollaa ja negatiivisia lukuja. Tämä tarkoitti, että he eivät voineet suorittaa esimerkiksi jakolaskua 5/2 suoraan, sillä tätä vastaava desimaaliluku 2,5 ei ole kokonaisluku (Richeson, 2019). Eukleides ja kreikkalaiset ratkaisivat ongelmat aina graafisesti ilman aritmetiikkaa.

Platonin rajoituksia on kritisoitu ainakin siinä suhteessa, että työvälineiden määrää pitäisi rajoittaa vain harppiin (Carnahan, 1932). Myöhemmin 1600-luvulla ja 1700-luvuilla matemaatikot Mohr ja Mascheroni pureutuivat tähän ongelmaan ja todistivat kuuluisan teoriansa: kaikki mikä voidaan tehdä harpilla ja viivaimella, voidaan myös tehdä vain harpilla. Tämä lause todistetaan luvussa 5. Jos Platon olisi tiennyt, että kaikki mitä voitiin tehdä harpilla ja viivaimella, voitiin myös tehdä vain harpilla, olisi hän todennäköisesti eliminoinut viivaimen rajoituksista (Carnahan, 1932).

Toisaalta on myös tullut konstruktioiden monipuolistamiseen liittyvää kritiikkiä: ranskalainen matematiikko Francois Viéte (1540-1603) väitti Platonisen rajoituksen olevan virheellistä geometriaa ja suositteli neusiksen käytön lisäämistä uudeksi postulaatiksi (Martin, 1998).

Päätös rajoittua harppiin ja viivaimeen oli suuri ja tärkeä askel geometrian historiassa. Rajoitus irrotti geometrian liian mekaanisesta perustasta ja palautti sen takaisin ajattelun, tieteen kauneuden ja logiikan pariin. Matemaatikot hyväksyivät Platon tekemät rajoitukset yli 2000 vuotta (Carnahan, 1932).

2.2 Erilaisia harppeja ja viivaimia

Geometrisissa konstruktioissa on tärkeää spesifioida käytettävät välineet, sillä moni klassisten ongelmien todistaminenkin on kumoutunut väärien välineiden käyttöön. Määritellään seuraavaksi erilaiset harpit ja viivaimet.

2.2.1 Viivain

Viivaimella viitataan arkikielessä usein koulusta tuttuun kuvan 1 mukaiseen muoviseen suoraan kappaleeseen, jonka avulla voi mitata pituuksia ja piirtää suoria viivoja. Viivaimiakin on kuitenkin erilaisia ja niillä on erilaisia käyttökohteita niiden ominaisuuksista riippuen. Viivaimella ja viivoittimella viitataan toistensa synonyymeinä koko tähän joukkoon, ellei välinettä tarkemmin spesifioida.

Kuva 1: Suora viivain (Bon, 2020).

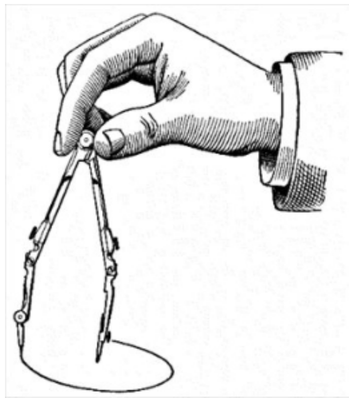
Antiikin aikana käytettiin *euklidista viivainta*, jolla on sallittua piirtää pelkästään suora viiva kahden pisteen välille tai jatkaa janaa äärettömän pitkäksi kumpaankin suuntaan. Euklidinen viivain on normaali viivoitin ilman mitään merkintöjä tai mitta-asteikkoa, eli sillä ei voi mitata (Bon, 2020). Lisäksi siinä missä fyysinen viivoitin on aina äärellisen mittainen on ideaalisella euklidisella viivaimella rajaton pituus (Martin, 1998).

Esimerkiksi edellä mainitut neusis-konstruktiot tehtiin *viivaimella, jossa on kaksi merkintää piirtoreunalla.* Kaksi merkintää antavat skaalan ja mittaa pidetään usein yksikön mittaisena. "Kaksimerkkisellä" viivaimella on historiallisesti merkittävä rooli, sillä sen avulla on voitu ratkaista muun muassa kulman kolmijako. (Martin, 1998)

Modernilla viivaimella puolestaan tarkoitetaan teollisesti valmistettua suoraa viivainta, johon on merkitty mitta-asteikko. Tämän avulla voidaan sekä mitata että piirtää pisteiden välisiä janoja erilaisilla skaaloilla. Tämän kaltainen viivain on nykyään se, minkä käsitämme viivaimena ja käytämme piirto-operaatioissa. *Alkeiden* aikaisten oppien mukaisesti kaikki mitta-asteikolliset viivaimet olivat kuitenkin kiellettyjä.

2.2.2 Harppi

Harppi on yleisesti kuvan 2 mukainen tekninen piirtotyökalu, jonka avulla piirretään ympyröitä ja ympyrän kaaria. Harpin avulla voidaan siirtää mittoja tai esimerkiksi mitata etäisyyksiä kartalla. Harppia käytetään paljon navigoinnissa, matematiikassa tai teknisissä piirustus- ja suunnitteluprosesseissa (History of Pencils, 2020).



Kuva 2: Perinteinen harppi (Bon, 2020).

Antiikin kreikkalaisten käyttämässä *euklidisessa harpissa* ei ollut lukittuvaa saranaa kylkien välillä, jolloin sen avulla ei voitu siirtää mittoja. Kaikki piirrokset tehtiin hiekkalaatikolle tai tasolle, jossa oli hiekkaa levitettynä (Sarhangi ym., 2007). Euklidisesta harpista käytetään myös nimitystä kasaan taittuva harppi (eng. collapsible compass), eli heti kun ne nostettiin piirtotasosta, ne menettivät pituutensa, eli ”romahtivat kasaan”. Niiden avulla ei siis voitu kopioida suoraan ympyröitä tai annettuja janojen pituuksia (Kazarinoff, 2003; Bon, 2020; Richeson, 2019).

Esimerkiksi opetuksessa usein käytetty pelkkä naru on euklidinen harppi. Tässä narun tiettyä kohtaa painetaan (tai sidotaan) halutusta kohdasta ja naruun solmitaan haluttuun kohtaan piirtotyökalu, opetuksessa usein liitu. Painamalla tiukasti narua keskipisteessä ja pitämällä naru kireänä, voidaan piirtää ympyrä. Tällä tietysti voi epäformaalisti siirtää pituuksia mutta matemaattisesti katsoen tämä ei ole eksaktia. Sormien tai käsien käyttäminen merkkauskohtina ei siis ole *Alkeiden* oppien mukaan sallittua. Harpin kuuluu itsenäisesti ilman ulkoista apumerkkausta säilyttää pituutensa tai olla säilyttämättä sitä.

Yleisin harpin malli ja nykyään *moderniksi harpiksi* tituleerattu harppi on V:n mallinen piirtotyökalu, jossa kaksi kylkeä on kiinnitetty toisiinsa saranalla. Kylkien välistä kulmaa voi vaihdella ja sen voi myös lukita. Toisessa kyljessä on terävä kärki ja toisessa lyijykynä tai muu vastaava piirtojälkeä jättävä väline (Bon, 2020). Terävä kärki asetetaan haluttuun pisteeseen, joka toimi ympyrän keskipisteenä. Tämän ympäri pyörähätävä piirtoväline piirtää ympyrän kaaren.

Tämä nykyään kouluissakin käytetty harppi säilyttää säteensä ja sen avulla voidaan siirtää mittoja (Kazarinoff, 2003). Kaikki mitä voidaan tehdä modernilla harpilla ja viivaimella, voidaan myös tehdä antiikin kreikkalaisten kasaan taittuvalla harpilla (Kazarinoff, 2003). Tämä vahva lause juontaa juurensa *Alkeiden* kirjan 1 kahteen ensimmäiseen propositioon, jotka todistetaan luvussa 5.

Muita harpin kaltaisia välineitä olivat jakajat (eng. divider, dividing compasses) ja vakioharppi (eng. rusty compass). Jakajat ovat työkaluja, joiden avulla voidaan siirtää ja mitata etäisyyksiä (Martin, 1998). Näissä on kaksi neulakärkeä yhden sijaan. Mittaus voidaan tehdä vain tarkastelemalla, kuinka monta kertaa harpin tietty mitta menee tutkittavaan pituuteen. Jakaja on yhtä voimakas työvälineenä kuin moderni harppi paitsi, että jakajalla voidaan piirtää ainoastaan ympyrän uria piirtovälineen puutteen johdosta. Täten ne eivät soveltuneet varsinkaan paperilla piirtämiseen. (Martin, 1998)

Vakioharppi on harppi, jonka säde on määrätty/asetettu, eli sen avulla voi piirtää vain ympyröitä, joilla kaikilla on sama säde. Tämän kehitteli alun perin bagdadilainen matemaatikko ja astronomi Abúl-Wefá (940-998). Antiikin kreikkalaisilla oli silti myös osuutensa vakioharpin historiassa, sillä siitä on mainintoja Pappus Alexandrialaisen teoksissa. Pappuksen (noin 320 jaa.) jälkeen myös Descartes (noin 1637) mainitsi teoksissaan vakioharpin käytön (Martin, 1998; Sarhangi ym., 2007). Italialainen matematiikko Ludovico Ferrari (1522-1565) näytti, että kaikki Eukleideen *Alkeen* konstruktiot voidaan tehdä myös viivaimella ja vakioharpin avulla (Martin, 1998).

3 Klassiset ongelmat

Eukleideen konstruktioiden ohella kreikkalaista geometriaa dominoi kolme klassista ongelmaa: kuution kahdentaminen, ympyrän neliöinti sekä kulman kolmijako. Ongelmien tarkkaa syntymisajankohtaa ja paikkaa on vaikea määritellä historiallisten lähteiden ristiriitaisuuden ja puutteiden takia. Ensimmäiset vakavat yritykset niiden ratkaisemiseen ajoittuvat historioitsijoiden mukaan noin 450-400 eaa., kun kreikkalainen geometria kehittyi nopeasti (Kazarinoff, 2003; Suzuki, 2008).

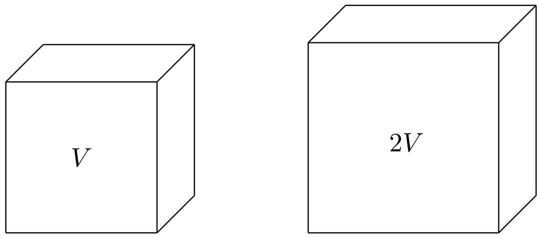
Nämä kolme pulmaa nähtiin perustavanlaatuisina ongelmina, sillä ne ovat puhtaita, prototyyppisiä ongelmia, jossa käsiteltiin geometrialle perustavanlaatuisia käsitteitä: suhde, pinta-ala ja kulma. Oli siis luonnollista, että näiden haasteellisuus vaivasi mutta samalla motivoi sen ajan tieteentekijöitä. (Blasjo, 2016)

Ilmeisesti antiikin Kreikan matemaatikot tajusivat, että konstruktioilla saadut ympyrät ja suorat eivät olleet tarpeeksi ”rikkaita” klassisten ongelmien ratkaisuun, joten he keksivät useampia erilaisia monimutkaisempia käyriä, joiden avulla voitaisiin ratkaista kyseiset ongelmat. Tunnetuin ja ensimmäinen ei-ympyrämäinen käyrä on todennäköisesti kreikkalaisen Hippiaksen kehittämä quadratrix. (Kazarinoff, 2003; Francis ym., 1996; Richeson, 2019)

Tässä luvussa esitellään kaikkien näiden kolmen ongelman lyhyt historiallinen tausta sekä valoitetaan hieman ratkaisuyrityksiä historian saatossa. Luvussa 4.3 nämä ongelmat todistetaan matemaattisesti mahdottomiksi toteuttaa harpin ja viivaimen avulla.

3.1 Kuution kahdentaminen

Ongelma 1. *Olkoon annettuna kuutio, jonka tilavuus on V ja yhden särmän pituus a. Konstruoi harpin ja viivaimen avulla sellainen kuutio (tai sen sivu), jonka tilavuus on $2V$.*



3.1.1 Ongelman alkuperä

Kuution kahdentamisen ongelma tunnettiin myös Deloksen ongelmana, johon liittyy antiikin Kreikasta kirjeen muodossa säilynyt seuraava tarina. Kirjeen sisältö on hieman väritetty, mutta se perustuu matematiikko Eutociuksen kirjoituksiin Arkhimedeen työstä. (Martin, 1998)

Matematiikko ja Arkhimedeen vertainen Eratosthenes kirjoitti romanttisen kirjeen sen aikaiselle Egyptin kuninkaalle Ptolemy Evergetekselle. Eutociuksen kirjoituksissa Minos, legendaarinen Kreetan kuningas ja lainsäätäjä, rakennutti kuution mallisen hautakammion kreikkalaiselle jumalalle, Galaucukseen. Pian rakennuksen valmistumisen jälkeen Minos kuitenkin pettyi kammion kokoon ja määräsi uuden kammion rakennettavaksi, jonka tilavuus olisi kaksinkertainen alkuperäiseen verrattuna. (Kazarinoff, 2003)

Väritetyn tarinan mukaan kulkutauti vaivasi Deloksen kylän asukkaita. Kylän oraakkeli välitti viestin jumalalta, jonka mukaan kyläläisten olisi rakennettava alttari, joka on tilavuudeltaan kaksinkertainen alkuperäiseen nähden, mikäli he haluaisivat eroon kulkutaudista. Kylän rakennusmiehet joutuivat pulaan miettiessään tehtävää. (Kazarinoff, 2003)

Asukkaat kysyivät Platonilta (429 eaa.- 348 eaa.) neuvoa tehtävään. Platonin mukaan oraakkelin kehotus oli ehkä väärin tulkittu, eli jumala ei välttämättä halunnutkaan, että kreikkalaiset vain rakentaisivat tuplasti suuremman kuution. Pikemminkin syy sille, miksi jumala asetti kyseisen tehtävän oli se, että sillä hän toivoi kreikkalaisten häpeävän omaa välinpitämättömyyttään ja halveksuntaa matematiikkaa sekä erityisesti geometriaa kohtaan (Kazarinoff, 2003; Martin, 1998). Kyse ei ollut siitä, etteivätkö kreikkalaiset osanneet konstruoida halutun mittaista janaa. He eivät vain osanneet tehdä sitä harpilla ja viivaimella. Kreikkalaiset itsekin pian todennäköisesti huomasivat ongelman olevan mahdotonta ratkaista. Heiltä vain puuttui riittävä algebran tuntemus sen ratkaisemiseen (Martin, 1998).

3.1.2 Matemaattinen perusta ja ratkaisuyritykset

Kuution kahdentamisessa ydinongelmana on konstruoida jana, jonka pituus on $\sqrt[3]{2}a$, missä a on alkuperäisen kuution särmän pituus (Kazarinoff, 2003; Martin, 1998). Tämän geometrisen ratkaisun löytämisen historia alkaa kartioleikkauksista. Kreikkalaiset tutkivat ahkerasti kartioleikkauksia sekä niiden avulla aikaansaatuja käyriä. Kartioleikkausten alkuperä on todennäköisesti tullut vain tutkimalla tason ja kartion leikkauspisteiden muodostamia käyriä (Blasjo, 2016). Kreikkalaiset onnistuivat määrittelemään esimerkiksi ellipsin ja hyperbelin tällä tavalla (Richeson, 2019). Paraabelia ja hyperbeliä ei voida konstruoida harpilla ja viivaimella, joten ratkaisuun ei siten Platonisilla rajoituksilla päästä (Kazarinoff, 2003).

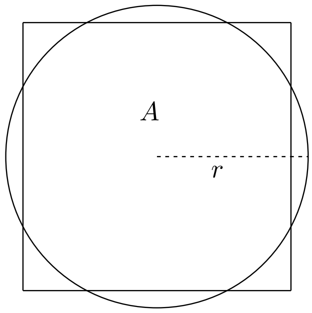
Kreikkalainen matemaatikko Menaechmus löysi ongelmalle noin 350 eaa. yksinkertaisen ratkaisun kartioleikkausten avulla, jossa tutkitaan paraabelin $ay = x^2$ ja hyperbelin $xy = 2a^2$ leikkauspisteitä (Kazarinoff, 2003; Martin, 1998; Richeson, 2019). Käyrät leikkaavat pisteessä $(\sqrt[3]{2}a,\ \sqrt[3]{4}a)$. Toinen vaihtoehto on jättää vakio a pois ja tutkia yhtälöiden $xy = 1$ ja $y = \frac{x^2}{2}$ avulla ratkaisua yhtälölle $x^3 = 2$ (Blasjo, 2016). Siihen aikaan tämän tyyppistä analyyttistä geometriaa ei vielä tunnettu ollenkaan ja kyseisten käyrien leikkauspisteet voitiin määrittää vain alkeellisen aritmetiikan ja konkretian avulla ilman symboleita. Koska antiikin Kreikan aikainen ratkaisutapa oli nykymatematiikan valossa varsin alkeellista, on mielekkäämpää tässä kohtaa puhua tutuin analyyttisen geometrian termein (Richeson, 2019). Analyyttisen geometrian tarkempaan kehitykseen ja merkitykseen konstruktioiden kannalta palataan vielä myöhemmin luvussa 4.

Ensimmäinen todiste ongelman mahdottomuudesta julkaistiin vuonna 1837 siihen aikaan vain 23-vuotiaan ranskalaisen matemaatikon Pierre Wantzelin toimesta. Wantzel näytti kaksi antiikin ongelmista mahdottomiksi sekä esitti myös kontribuutionsa säännöllisiin n- monikulmioihin (Martin, 1998), joihin palataan luvussa 6. Wantzelin mukaan, jos algebrallisella kolmannen asteen yhtälöllä ei ole rationaalisia juuria, niin mikään sen juurista ei ole konstruoituva (Francis ym., 1996).

Wantzelin kanssa samoihin aikoihin kehittynyt kuntateoria toi matematiikkaan ja varsinkin klassisiin ongelmiin uusia työkaluja, joiden avulla ne voitiin ratkaista. Tässä tutkielmassa myöhemmin esitetyt klassisten ongelmien mahdottomuustodistukset pohjautuvat juuri tähän kuntateoriaan ja niihin liittyviin kuntalaajennuksiin.

3.2 Ympyrän neliöinti

Ongelma 2. *Olkoon annettuna r-säteinen ympyrä, jonka pinta-ala on A. Konstruoi harpin ja viivaimen avulla sellainen neliö, jonka pinta-ala on A.*



3.2.1 Ongelman alkuperä

Ympyrän neliöimiseen liittyy hyvin vahvasti luvun π etsiminen. Ympyrän neliöimiseen liittyvän ongelman alkuperään on selviä historiallisia viitteitä mutta varsinaista tarkkaa syntymisajankohtaa on vaikea määritellä. Ongelma saattaa Richeson (2019) mukaan palautua aina Egyptin ja Babylonian aikoihin, jolloin ihminen oppi piirtämään ympyröitä köydellä ja kahdella puukepillä. Tästä lähtien on pohdittu, mikä on ympyrän pinta-ala ja kuinka pitkä on sen kehä. Suuresta kiinnostuksesta johtuen ympyrän alalle ja kehän pituudelle saatiin karkeita arvioita muttei niitä osattu yhdistää sen aikaisiin yksiköihin ja mittoihin.

Ongelman todistettavana esi-isänä voidaan pitää yhtä vanhimmista matematiikasta säilyneistä kirjoituksia, Rhindin papyrusta. Papyrus on nimetty skottilaisen egyptologi Henry Rhindin mukaan, joka osti papyruksen Luxorista 1858. Papyrus löytyi Thebesistä, nykyiseltä Luxorin alueelta pienen rakennuksen raunioista lähellä Ramesseumia. Nykyisin teos sijaitsee British Museumissa. Rhindin Papyruksen kirjoitus on Ahmes- kirjurin kirjoittama ja tutkijat ovat onnistuneet arvioimaan sen kirjoitusajankohdaksi noin 1850 eaa., varhaisimmat arviot jopa 3400 eaa. (O'Connor & Robertson, 1999; Beckman, 2000; Szyszkowicz, 2017; Richeson, 2019)

Käärön 87:stä ongelmasta tärkein on nro 50: ympyrän mallisen pellon halkaisija on noin 9 khet. Mikä on sen pinta-ala? (khet on pituuden mitta, 1 khet on noin 50 m). Ahmesin näkemyksen mukaan, jos ympyrän halkaisijasta leikkaa noin $1/9$ pois ja konstruoi jäljelle jäävästä osasta neliön (sivuina $8/9$ ympyrän halkaisijasta), saa neliön, jonka ala on (lähes) sama kuin alkuperäisen ympyrän. Ahmesin ongelma voidaan määritellä myös hieman eri sanoin: ympyrän halkaisijasta otetaan ensin pois $1/9$, ja tehtävänä on konstruoida neliö jäljelle jäävästä halkaisijasta (Szyszkowicz, 2017). Miten kuitenkin Ahmes tiesi ottaa juuri $1/9$ pois halkaisijasta? Olisiko jollain toisella janan jaolla saanut paremman tuloksen?

Kun Ahmesin tehtävä yhdistetään nykyiseen tietoon ympyrän pinta-alasta sekä luvun π arvosta, saadaan

$$A = \pi r^2 \approx \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}2r\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$$

Täten luvulle π onnistuttiin saamaan melko hyvä arvio:

$$\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3{,}16049382716049\ldots$$

Tehtävässä ei suoraan mainita harppia ja viivainta ja tehtävän ikäkin ajoittaa sen ennen *Alkeita*. Välineiden kehittyessä geometrian ajateltiin palautuvan aina harppiin ja viivaimeen, jolloin ongelman ajateltiin ratkeavan niillä. Ainoaksi ongelmaksi jäi nyt konstruoida harpilla ja viivaimella ympyrän halkaisija yhdeksään yhtä suureen osaan, jotta saadaan haluttu 8/9 pituus (Szyszkowicz, 2017). Richeson (2019) mukaan ensimmäinen virallinen maininta ympyrän neliöimisongelmasta harpilla ja viivaimella oli kreikkalaisen filosofin Anaxagoras (500-428 eaa.) toimesta. Anaxagoras joutui vankilaan vääräoppisuuden vuoksi ja yritti vankilassa neliöidä ympyrää.

Nykyisen kaltaiseksi ympyrän neliöimisongelma tuli vasta antiikin kreikkalaisten toimesta. Ongelman popularisoitumista auttoi antiikin Kreikan komediakirjailija Aristofanes näytelmällään Birds 414 eaa., jossa mainitaan kyseinen ongelma. Metodit, joita saatiin käyttää ongelman ratkaisuun, eivät olleet aikalaisille aluksi täysin selviä. Kreikkalaiset kehittivätkin useita erilaisia matemaattisia metodeja ongelman ratkaisemiseksi. Nykyisin ympyrän neliöiminen kuitenkin kulminoituu harppiin ja viivaimeen (O'Connor & Robertson, 1999).

Antiikin kreikkalainen matemaatikko Hippokrates Kioslainen (470- 400 eaa.) oli ensimmäisiä, joka käytti harppi-viivain-geometrian oletuksia ympyrän neliöintiin (Richeson, 2019). Hän esitti konstruktioita neliöistä, joilla on yhtä suuri pinta-ala kuin puolikuilla, niiden summilla ja kokonaisella ympyrällä. Hippokratees kuitenkin epäonnistui ympyrän neliöimisessä, minkä hän tiesi itsekin. Hippokrates sai silti onnistuneesti konstruoitua monikulmioita, joiden ala on yhtä suuri kuin tiettyjen puolikuun muotoisten sirppien ala (O'Connor & Robertson, 1999). Samoin antiikin kreikkalainen kirjailija Antiphon sekä matemaatikko Bryson onnistuivat ongelman siivittämänä konstruoimaan monikulmioita sekä ympyrän sisälle että ulkopuolelle. Sivujen määrän kasvaessa monikulmion piirin ajateltiin yhtyvän ympyrän kehään. Tämä havainto johti myöhemmin integraalilaskennan kehittymiseen (O'Connor & Robertson, 1999; Beckman, 2000).

3.2.2 Ratkaisuyritykset antiikin Kreikasta eteenpäin

Mielenkiintoista on se, että kreikkalaiset matemaatikot siihen aikaan eivät tuottaneet "virheellisiä tuloksia" siitä, että ympyrä voitaisiin neliöidä. Oikeasti virheelliset todistukset kumottiin aina kirjoittajan matemaattisen tiedon tai ymmärryksen puutteesta johtuen. Moni antiikin kreikkalaisten jälkeinenkin matemaatikko on virheellisesti todistanut ympyrän neliöinnin mahdolliseksi, koska ei ole ottanut huomioon tiettyjä matemaattisia lähtökohtia tai on käyttänyt sääntöihin sopimattomia konstruointivälineitä (O'Connor & Robertson, 1999).

Edellä mainitsin kvadratrix-nimisen käyrän. Tämä käyrä mahdollistaa ympyrän neliöimisongelman ratkaisemisen mutta se ei ole harpilla ja viivaimella konstruoitavissa, eli se rikkoo Platonisia rajoituksia. Kvadratrix-käyrä keksittiin noin 400 eaa. ja sen keksijöinä pidetään kreikkalaista sofistia Hippiasta. Ympyrän neliöimisongelmaan sitä todistettavasti hyödynsi ensimmäisen kerran kreikkalainen matemaatikko Dinostratus. Myös kreikkalainen matemaatikko Nicomedes käytti kvadratrix-käyrää noi 250 eaa. (O'Connor & Robertson, 1999; Beckman, 2000; Richeson, 2019)

Muitakin monimutkaisempia käyriä kehiteltiin ongelman innostamana. Esimerkiksi kuuluisa kreikkalainen fyysikko ja filosofi Arkhimedes esitteli spiraaliset käyrät, joiden keksimisen taustalla oli todennäköisesti piin arvon etsiminen sekä ympyrän neliöiminen ja sen ratkaisun löytäminen. (O'Connor & Robertson, 1999)

Kreikkalaiset eivät olleet ainoita, jotka pohtivat ympyrän neliöimisen ongelmaa. Heidän aikanansa ja heidän jälkeen muun muassa intialaiset, kiinalaiset ja arabialaiset kansakunnat olivat myös hyvin kiinnostuneita ongelmasta. Esimerkiksi noin 1000 jaa. irakilainen matemaatikko ja fyysikko Alhazen yritti todistaa ympyrän neliöimistä mahdolliseksi harppi-viivainkonstruktiona, mutta lopulta suurempi erittely todistuksesta jäi julkaisematta. Tämä johtaa epäilyyn, että hän luultavasti itsekin ymmärsi, ettei voi ratkaista ongelmaa. (O'Connor & Robertson, 1999)

Belgialaisesta Liegen kaupungista kotoisin oleva matemaatikka Franco kirjoitti vuonna 1050 teoksen *De quadratura circuli*, jossa hän käytännössä kumoaa tarpeeksi riittävillä perusteluilla kolme aikaisempaa yritystä ongelmaan liittyen. Näissä kolmessa aikaisemmassa ongelmassa piin arvoksi oli arvioitu 25/8, 49/16 tai 4. Franco käyttää omassa metodissaan piille lukuarvoa 22/7. Tämä vain osoittaa eurooppalaisten olleen kaukana matemaattisessa kehityksessä sekä ymmärryksessä kreikkalaisiin verrattuna (O'Connor & Robertson, 1999). Vaikka kreikkalaisetkaan eivät osanneet todistaa mahdottomuutta formaalisti, he ainakin suurilta osin ymmärsivät ongelman mahdottomuuden.

Siirryttäessä keskiajalta 1400-luvulle, oli ympyrän neliöimisehtävän lähtöasetelma mielenkiintoinen: ratkaisua ei oltu löydetty eikä sen laatua vielä tiedetty. Ratkaisemattoman ja mahdottoman ongelman välillä on huomattava ero. Ratkaisematonta tehtävää on mielekkäämpää lähteä ratkaisemaan, kun on toivoa löytää ratkaisuja. Toisin taas mahdottomaksi todistetun ongelman kunnollinen ratkaiseminen ei ole mielekästä. Koska ongelmaa ei oltu osattu todistaa mahdottomaksi tai mahdolliseksi, oli kaikki vielä auki (Martin, 1998).

Seuraava yritys ongelman mahdolliseksi todistamisesta tuli saksalaisen filosofi Cusan toimesta vuonna 1450. Cusan yritystä voidaan pitää ensimmäisenä keskiajan jälkeisenä vakavana eurooppalaisena yrityksenä todistaa ongelma. Saksalainen matemaatikko Regiomontanus onnistui todistamaan Cusan virheelliset päätelmät 1400–luvun lopulla (O'Connor & Robertson, 1999).

Leonardo da Vinci puolestaan ajatteli matematiikan olevan hyvin mekaanista ja kehitteli useita mekaanisia metodeja ympyrän neliöimisen ratkaisuun. Moni muu matemaatikko pohti myös 1500- ja 1600-luvulla ongelmaa (O'Connor & Robertson, 1999; Richeson, 2019). Näitä olivat muun muassa Oronce Fine, Giambattista della Porta, Pedro Nunes sekä Saint- Vincent. Kaikki päätyivät ratkaisuihin, jotka kumottiin muiden matemaatikoiden toimesta (O'Connor & Robertson, 1999).

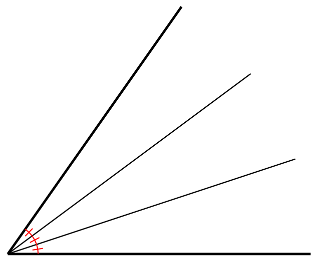
Differentiaali- ja integraalilaskennan syntyvaiheiden alussa 1600-luvulla kiinnostus ympyrän neliöinnistä kiehtoi yhä enemmän ihmisiä. Skottilainen matemaatikko James Gregory (1638-1675) tutki äärettömiä joukkoja ja suppenemista. Hän sovelsi ideoitaan monikulmioihin ympyrän sisällä ja niiden ulkopuolella ja yritti täten todistaa ympyrän neliöimisen mahdottomaksi. Käytännössä hän yritti näyttää piin olevan transkendenttiluku. Vaikka Gregory oli oikeilla jäljillä, ei hän kuitenkaan onnistunut todistuksessaan. Matemaatikko Huygens taas uskoi piin olevan algebrallinen luku (O'Connor & Robertson, 1999). Algebrallinen luku on rationaalikertoimisen polynomiyhtälön juuri ja transkendenttiluku on luku, joka ei ole algebrallinen. Tähän palataan vielä tarkemmin luvussa 4.

Suuri harppaus eteenpäin oli vuonna 1761, kun saksalais-ranskalainen matemaatikko Johann Heinrich Lambert todisti piin olevan irrationaalinen (O'Connor & Robertson, 1999; Richeson, 2019). Tämä ei riittänyt vielä ympyrän neliöinnin todistamiseen mahdottomaksi, sillä joitain irrationaalisia algebrallisia lukuja voitiin myös konstruoida harpilla ja viivaimella, kuten $\sqrt{2}$. Tämä kiihdytti matemaatikkoja kuten myös amatöörejäkin kehittelemään mitä erilaisempia ratkaisuja ongelmaan, kunnes vuonna 1775 Pariisin Academy of Science päätti, ettei enää hyväksy tutkittavakseen enempää ehdotettuja ratkaisuja. Muutama vuosi myöhemmin myös Lontoon Royal Society kielsi ratkaisujen lähettämisen (O'Connor & Robertson, 1999). Matemaatikko De Morgan kuvaili tätä sata vuotta myöhemmin viralliseksi ympyrän neliöimisongelman räjähdykseksi. Hän kertoo teoksessa *Budget of Paradoxes* (1872) useita huvittavia tarinoita ongelman tiimoilta. De Morgan jopa ehdotti morbus cyclometricus-termin käyttöä, joka kuvaisi ympyrän neliöimis-tautia, eli pakonomaista tarvetta saada ongelma ratkaistuksi (O'Connor & Robertson, 1999; Richeson, 2019).

Viimeinen todistus ongelman mahdottomuudesta tuli vuonna 1880 saksalaiselta matemaatikolta Carl Louis Ferdinand von Lindemannilta (O'Connor & Robertson, 1999; Richeson, 2019). Lindemann onnistui todistamaan piin olevan transkendenttiluku, eli se ei ole minkään rationaalitermisen polynomifunktion juuri. Piin transkendenttinen ominaisuus paljasti lopulta, ettei sitä voida konstruoida harpilla ja viivaimella. Tämä ei kuitenkaan ollut viimeinen niitti ympyrän neliöimisessä, sillä virheellisten todistusten tulva jatkui jatkumistaan. Osa yritti vielä todistaa alkuperäistä väitettä todeksi, osa yritti kumota Lindemannin todistuksen väittämällä piitä rationaaliseksi luvuksi. Muun muassa vuodelta 1892 on säilynyt kirje, jossa väitetään löytyneen suuri salaisuus historiasta ajoittuen aina non 250 eaa. kreikkalaisen Nicomedeksen todistukseen siitä, että pii on $3{,}2$. Moni uskoi vielä tosissaan tähän vuoden 1892 kirjeen jälkeen (O'Connor & Robertson, 1999).

3.3 Kulman kolmijako

Ongelma 3. *Olkoon annettuna kulma α. Tehtävänä on harpin ja viivaimen avulla jakaa tämä kulma kolmeen yhtä suureen osaan, eli konstruoida kulma $\frac{\alpha}{3}$.*



3.3.1 Ongelman alkuperä ja ratkaisuyritykset

Kulman kolmijaolla ei ole samanlaista tarinallista historiaa kuin kahdella muulla ongelmalla. Vaikka sillä ei todennäköisesti ollut käytännön sovelluksia, osoittautui se geometrian harjoittajien keskuudessa hyvin kiinnostavaksi ja haastavaksi pulmaksi (Carnahan, 1932). Todennäköisesti ongelma on syntynyt antiikin matemaatikoiden keskuudessa kulman puolittamisen siivittämänä. Eräs ensimmäisiä ongelmaa pohtineita oli antiikin Kreikan suuri matemaatikko Pappus, jonka tärkein teos oli vuonna 320 jaa. kirjoitettu *Collection*. Teoksessaan hän ratkaisee kulman kolmijaon mutta käyttää tässä Platonisista rajoituksista poiketein viivainta, jossa on kaksi merkintää. (Martin, 1998).

Jo antiikin Kreikan aikana kulman kolmijaon ratkaisun yrittämisessä oli kovaa kilpailua. Äärimmäisyydessään kreikkalaiset keksivät uusia mittavälineitä kulman kolmijakamiseen ja olivat täten ylpeitä tieteen ja geometrisen kehityksen mennessä eteenpäin. Tämä aiheutti paheksuntaa, sillä sen ajateltiin alentavan jalo tiede mekaniikan tasolle. (Carnahan, 1932)

Kulman kolmijakoa varten kreikkalainen matematiikko Nicomedes keksi uuden käyrän ja piirtotyökalun. Käyrä on korkeamman asteen funktio nimeltään konkoidi, jolla on mahdollista jakaa kulma kolmeen osaan. Yleisesti konkoidilla saadut tulokset eivät ole konkreettisesti käsin tehtynä läheskään niin tarkkoja kuin kreikkalaisten tyypillisten työvälineiden kanssa (harppi ja viivain) saadut tulokset. Vaikka kummatkin ovat välineellisiä konstruktioita, oli kreikkalaisten mielessä enemmän filosofinen perusta konstruoida asioita harpilla ja viivaimella (Blasjo, 2016).

Hippiaksen kvadratrix-käyrä puolestaan muuntaa kulman jako-ongelmat janan jako - ongelmiksi, jossa jana on jaettava kolmeen osaan. Todennäköisesti silti kuuluisin Eukleideen sääntöjen vastainen harppi - viivain - konstruktio on Arkhimedeen kulman kolmijako (Martin, 1998). Pappuksen tapaan Arkhimedes onnistui tekemään kulman kolmijaon viivaimella, jossa on kaksi merkkiä. Näin saatu tulos on neusis-konstruktio eikä sitä voida tehdä harpilla ja euklidisella viivaimella.

Ei-platoninen piirtotyökalu oli myös esimerkiksi niin kutsuttu tomahawk, jonka keksijää ei täysin tunneta. Ranskalainen merivoimien upseeri Pierre-Joseph Glotin kuitenkin kuvasi vuonna 1863 laitetta, jolla voitiin jakaa kulma kolmeen osaan. Hän nimesi laitteen trisector-nimiseksi. Vasta 1877 Henri Brocard toi tämän työkalun suuremman matemaattisen yhteisön tietoisuuteen ja tätä trisector-työkalua alettiin kutsua myös nimellä tomahawk (Martin, 1998). Mielenkiintoista tomahawkissa on se, että sen muoto voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella eikä se ole ristiriidassa Pierre Wantzelin vuoden 1837 mahdottomuustodistuksen kanssa. Tomahawk ei kuitenkaan sovi kulman kolmijakajaksi, sillä konstruoituna ja asetettuna oikeaan kohtaan siitä tulee eräänlainen neusis, joka sovitetaan liikuttelemalla alkuperäiseen kuvioon.

4 Konstruoituvuus

Eukleideen *Alkeet* määritteli harppi-viivain-konstruktioiden perusidean ja ne innoittivat klassisten ongelmien siivittämänä monia matemaattikkoja satojen vuosien ajan. Pitkään harppiin ja viivaimeen liittyvästä geometriasta puuttui kuitenkin vankka matemaattinen pohja. Mistä voitiin tietää, mitkä luvut voidaan konstruoida harpin ja viivaimen avulla ja mitkä ongelmat ovat ratkaistavissa näillä välineillä? Tässä tärkeä kehitys oli karteesisen koordinaatiston kehittäminen ja Eukleideen *Alkeiden* geometrian yhdistäminen analyyttiseen geometriaan sekä algebraan. Differentiaali- ja integraalilaskennan sekä abstraktin algebran kehittyessä oli riittävät työkalut alkaa puhumaan konstruoituvista luvuista, eli sellaisista karteesisen koordinaatiston pisteistä, jotka voidaan konstruoida harpin ja viivaimen avulla. Lähdetään tutkimaan aluksi historiallisesti, mitkä tekijät vaikuttivat taustalla.

4.1 Analyyttinen geometria työvälineenä

Antiikin kreikkalaisten matematiikka oli vielä alkeellisella tasolla harppi-viivain ongelmien ratkaisemiseen. Heille ainoastaan positiiviset luonnolliset luvut olivat "oikeita lukuja"ja muita lukuja ei edes ajateltu kuuluvan tähän oikeiden lukujen joukkoon. Esimerkiksi rationaaliluvut, jotka kreikkalaiset jo tunsivat käsitteenä, ei sijoitettu luonnollisten lukujen joukkoon lukusuoralle, vaan ne ymmärrettiin pikemminkin vain kahden asian suhteina. Koska antiikin geometriassa ei käytetty mitään numeerisia mittoja, ei siten voitu puhua esimerkiksi kahden janan pituuksien suhteesta. Ainoa, mistä kreikkalaiset osasivat puhua tässä tapauksessa, oli suuruusjärjestys, eli ovatko janat yhtä suuret vai onko toinen pidempi kuin toinen (Richeson, 2019). Rationaalilukuihin liittyen antiikin kreikkalaisille tuotti hankaluuksia konstruoida kahden luvun tuloja. Laskuopillisesti janojen pituuksiin liittyvä aritmetiikka ei ollut suljettu kertolaskun suhteen, jolloin jakolaskustakin tulisi mahdotonta. (Suzuki, 2008)

Tarvittiin jokin numeerinen ja laskuopillisesti eheä ratkaisu geometriaan. Tässä kuvioihin astuu ranskalainen matematiikko ja filosofi René Descartes (1596-1650). Descartes julkaisi vuonna 1637 kuuluisan *Geometry*- kirjan (ransk. *La géométrie*), jossa hän määritteli geometrian aivan uudesta näkökulmasta. Aikaisemmat matemaatikot, kuten Francois Viéte, olivat luoneet Descartesille teoriapohjan, joita hän vielä yhdisteli ja laajensi teoksessaan. Alkuperäinen tavoite Descartesilla oli voida ratkaista kaikki geometriset ongelmat harpin ja viivaimen tai monimutkaisempien käyrien avulla. (Richeson, 2019)

Descartesin suurin oivallus oli yhdistää geometristen janojen pituudet reaalilukuihin ja sitä kautta yhdistää geometria algebran kanssa (Suzuki, 2008). Esimerkiksi janan pituutta voitiin nyt merkitä symbolilla a, jossa luku a viittaa puhtaaseen lukuun. Tämä tuntuu itsestään selvältä nykyään mutta 1600-luvulla tulos oli mullistava. Uudesta merkintätavasta johtuen erilaisten laskuoperaatioidenkin kirjoittaminen helpottui, kun janojen pituudet voitiin laskea yhteen sievästi muodossa $a + b$ eikä esim. $AB + CD$ tai muussa sanallisessa muodossa. Huomattavaa on siis se, että geometristen objektien laskut voitiin muuntaa aritmetiikan muotoon. Esimerkiksi Descartes ymmärsi käyttää suhteisiin liittyviä teorioita, kuten kolmioiden yhdenmuotoisuus, jossa kahden janan tulo saataisiin piirrettyä toiseksi janaksi (Suzuki, 2008). Descartesin ansiosta myös tuntemattomille muuttujille otettiin käyttöön aakkosten loppupään kirjaimisto, eli x, y ja z, jotka ovat vakiinnuttaneet asemansa nykypäivänäkin muuttujia merkatessa (Ostermann & Wanner, 2012).

Descartes yhdisti mittayksiköt geometriaan aritmetiikan yhteydessä. Tämä tarkoittaa sitä, että jokaisen geometrisen tehtävän yhteydessä aluksi sovitaan mittayksikkö, esimerkiksi senttimetrit tai tuumat. Käytännössä konstruktioiden yhteydessä tämä tarkoittaa niin kutsutun yksikköjanan antamista alkuun. Yksikköjana on sovitussa mitta-asteikossa yhden yksikön mittainen ja se skaalaa automaattisesti tehtävän tulokset oikeisiin mittayksiköihin (Richeson, 2019).

Symboliikan ja aritmetiikan lisäksi Descartes kehitteli analyyttisen geometrian, jossa geometriset objektit voidaan sijoittaa niin kutsuttuun karteesiseen koordinaatistoon (Blasjo, 2016; Richeson, 2019). Lukijalle tämä on varmasti ennestään tuttu mutta kertauksen vuoksi kaksiulotteinen karteesinen koordinaatisto koostuu kahdesta toisiaan vastaan kohtisuorasta x- ja y-akseleista, jotka muodostavat (x, y)-tason. Tästä tasosta voidaan tunnistaa pisteitä (x, y), missä x ja y ilmaisevat lukuja. Täten esimerkiksi janan alku- ja päätepisteet voitiin etsiä tarkasti koordinaatistosta.

Descartes ei kokenut uuden ”algebrallisen geometrian” korvaavan kreikkalaisten geometriaa, vaan ajatteli uuden matematiikan sisältyvän klassiseen käsitykseen geometriasta. Hän itse asiassa yhdisti nämä kaksi geometriaa luomalla algebrallisten käyrien joukon, joka liittyy olennaisesti klassisten ongelmien mahdottomuustodistuksiin (Blasjo, 2016).

4.2 Konstruoituvat luvut

Rakennetaan nyt pohja geometrisille konstruktioille analyyttisen geometrian työvälineillä. Kaiken lähtökohtana on Descartesin luoma pohja, jossa tutkinta aloitetaan karteesisesta xy-koordinaatistosta. Konstruktiot samaistetaan koordinaatiston pisteisiin ja siellä laskettaviin pituuksiin. Puhuttaessa jonkin luvun konstruoituvuudesta, pitää tutkia onko tähän liittyvä koordinaatiston tietty piste (x, y) konstruoituva. Toisin sanoen tutkittavana on luvut x ja y sekä niiden luonne. Analyyttisen geometrian pohjustuksen jälkeen siirrytään muodostamaan synteesiä konstruoituvien lukujen joukosta, jossa määritellään mitä lukuja loppujen lopuksi voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella. Tässä tulee algebraan ja kuntateoriaan liittyviä käsitteitä.

Tämän luvun lauseet ja todistukset pohjautuvat teoksiin Richeson (2019), Martin (1998), Kazarinoff (2003), Rosenthal ym. (2014), Lee (2018) sekä Hadlock (2018). Käsittelytapa rakentuu Eukleideen *Alkeiden* mukaiseen esitystapaan, eli ongelma/lause - konstruktio - todistus. Klassiset ongelmat sekä puhtaasti geometriset tärkeät konstruktiolauseet on nimetty ongelmiksi ja näihin rinnastettavat ongelmia tukevat konstruktiolauseet on nimetty lauseiksi. Lemmat ja apulauseet tukevat ongelmien ja lauseiden todistuksia. Konstruktioissa kuvien selkeyden ja turhan tilan viemisen kannalta ympyröistä on paikoitellen piirrettynä vain osa niiden kehän kaarista.

4.2.1 Peruskäsitteitä

Konstruktiotehtävien alussa on aina oltava vähintään kahdesta pisteestä koostuva alkujoukko, jonka avulla konstruoidaan kaikki tarvittava. Näiden kahden pisteen välinen jana on usein yksikön mittainen, eli yksikköjana (Kazarinoff, 2003). Toinen vaihtoehto on, että on annettu kaksi konstruoituvaa pistettä sekä näiden lisäksi erikseen yksikön mittainen jana. Alkujoukon avulla edelleen voidaan luoda muita konstruktioita, joiden avulla löydetään konstruoitujen suorien ja ympyröiden leikkauspisteistä uusia konstruoituvia pisteitä (Martin, 1998).

Tästä eteenpäin käytetään seuraavia merkintöjä:

AB	Pisteiden A ja B välinen suora jana.
$\lvert AB \rvert$	Pisteiden A ja B välisen janan pituus. Huom. kahden janan päätepisteiden ollessa samoja, pätee $\lvert AB \rvert = \lvert BA \rvert$.
A_r	Ympyrä, jonka keskipiste on pisteessä A ja säde pituudeltaan r.
A_B	Ympyrä, jonka keskipiste on pisteessä A ja sen kehä kulkee pisteen B kautta. Tällöin ympyrän säde on $\lvert AB \rvert$.
A_{BC}	Ympyrä, jonka keskipiste on pisteessä A ja sen säde on pisteiden B ja C välisen janan pituus.

Moni konstruktio vaatii todistuksissaan yhdenmuotoisten kolmioiden tutkimista ja yhdenmuotoisuuden osoittamista. Yhtenevyyden todistamisessa käytetään Väisälän (1959) mukaisia merkintöjä. Merkintä s tarkoittaa kolmion sivua ja k tarkoittaa kulmaa. Mikäli kolmion kulmista ja sivuista kolme, joista ainakin yksi on sivu, ovat yhtä suuria kuin vastaavat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät. Eli esimerkiksi merkintä sks tarkoittaa, että kolmiot ovat yhteneviä, jos niiden kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret. Mikäli kolmiot eivät ole yhtenevät voivat ne silti olla yhdenmuotoisia. Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuria kuin niitä vastaavat kulmat toisessa kolmiossa, ovat kolmiot yhdenmuotoiset. Tätä merkitään lyhenteellä kk.

Määritellään seuraavaksi konstruoituvuuteen liittyviä peruskäsitteitä. Alkuoletuksen mukaan aluksi on annettuna aina vähintään kaksi pistettä valmiiksi, jotka ovat lähtökohtaisesti konstruoituvia. Tämä on myös määritelmän 1 ehtojen lähtökohtana. Näistä kahdesta pisteestä voidaan rakentaa janoja, suoria sekä ympyröitä.

Määritelmä 2. Jana, jonka päätepisteet ovat konstruoituvia, on **konstruoituva jana**.

Määritelmä 3. Kaikki ympyrät, jotka ovat tehty määritelmän 1 mukaan kahdesta konstruoidusta pisteestä, ovat **konstruoituvia ympyröitä**.

Määritelmä 4. **Konstruoituva piste** on:

1. Alussa annetut kaksi pistettä A ja O.
2. Kahden konstruoidun janan välinen leikkauspiste.
3. Kahden konstruoidun ympyrän leikkauspiste.
4. Konstruoidun janan ja ympyrän välinen leikkauspiste.

Huomautus 1. Konstruoituva piste on aina tulos äärellisestä määrästä määritelmän 1 mukaisia perusoperaatioita: ääretön määrä operaatioita ei ole sallittua.

Huomautus 2. Jos kaksi janaa eivät ole yhdensuuntaisia eivätkä leikkaa, niitä voidaan jatkaa, kunnes ne leikkaavat.

Huomautus 3. Janaa voidaan jatkaa päätepisteistään suoraksi, jotta se leikkaa ympyrän (mikäli leikkauspisteet ovat olemassa).

Määritelmä 5. **Konstruoituva kulma** on kahden konstruoituvan janan väliin jäävä kulma.

Määritelmä 6. **Konstruoituva luku** on konstruoituvan pisteen koordinaatti.

Määritelmä 7. **Konstruoituva suora** on mikä tahansa suora, joka koostuu vähintään kahdesta konstruoituvasta pisteestä.

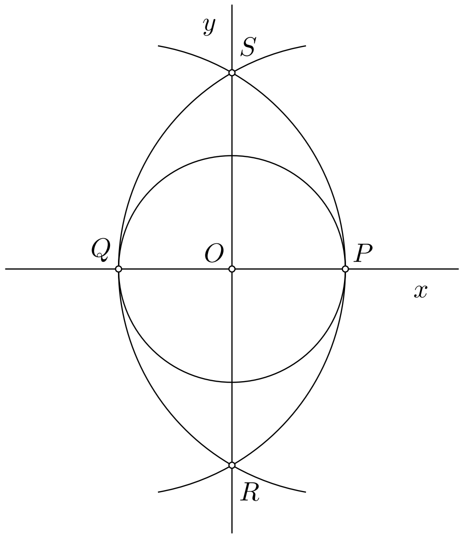
Jos on annettuna jana AB, niin se tarkoittaa vain, että sen kaksi päätepistettä A ja B ovat määritelty. Kaikki pisteet konstruoidulla janalla eivät ole konstruoituvia. Myöskään kaikki konstruoituvan ympyrän kehäpisteen eivät ole automaattisesti konstruoituvia pisteitä (Martin, 1998). Eli puhuttaessa konstruoituvista janoista, suorista ja ympyröistä viitataan ainoastaan siihen, että ne voidaan konstruoida harpilla ja viivaimella eikä siihen, että välttämättä kaikki näiden kuvioiden sisältämät pisteet olisivat konstruoituvia. Tähän palataan vielä tarkemmin luvuissa 4.2.3. ja 4.2.4.

Satunnaisesti valittu piste ei ole suhteessa alussa annettuihin pisteisiin eikä ole konstruktioiden hengen mukaista käyttää niitä. Sovitaan siis heti alkuun, että mielivaltaista pistettä ei saa valita konstruktiossa: jokainen valittu piste on oltava konstruoituva tai se on jo valmiiksi konstruoitu (Martin, 1998). Jos satunnaisesti valittu piste mahdollistaa konstruktion, niin silloin spesifisti valitun pisteen on myös mahdollistettava se. Joskus sattumanvarainen valinta voi silti myös onnistaa vastauksen löytämisessä. Jos konstruktiot ovat riippumattomia pisteen tai janan valinnasta, silloin mielivaltainen/spesifioitu valinta ei vaikuta konstruktion onnistuvuuteen (Kazarinoff, 2003).

Koska konstruoituvien lukujen määritteleminen pohjautuu karteesiseen koordinaatistoon, on aluksi mielekästä osoittaa koordinaatistoakselit konstruoituviksi.

Lause 1. *Karteesisen koordinaatiston koordinaattiakselit ovat konstruoituvia (suoria).*

Konstruktio. Olkoon annettuna konstruoituvat pisteet O ja P. Muodostetaan niiden kautta kulkeva määritelmän 7 mukainen konstruoituva suora x sekä konstruoidaan ympyrä O_P. Ympyrän O_P ja suoran x leikkauspisteet ovat määritelmän 3 mukaan konstruoituvia pisteitä. Toinen leikkauspiste on piste P ja nimetään toinen pisteeksi Q. Piirretään nyt ympyrät Q_P ja P_Q ja nimetään näiden leikkauspisteet kuvan mukaisesti S ja R. Muodostetaan pisteiden S ja R kautta määritelmän 7 mukainen suora ja nimetään se y. Koska suora x ja y ovat määritelmien 4 ja 7 valossa konstruoituva, riittää vain osoittaa, että $x \perp y$.



Todistus. Riittää osoittaa, että janat QP ja SR ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. $|PS| = |PQ| = |PR|$, sillä ne ovat kaikki ympyrän P_Q säteitä. Toisaalta $|QP| = |QS| = |QR|$, sillä ne ovat kaikki ympyrän Q_P säteitä. Toisin sanoen $|PS| = |PR| = |PQ| = |QP| = |QS| = |QR|$. Nyt $\triangle QRS \cong \triangle PRS$ (sss), sillä kolmioilla on kolme yhtä suurta sivua jana SR yhteisenä sivunaan.

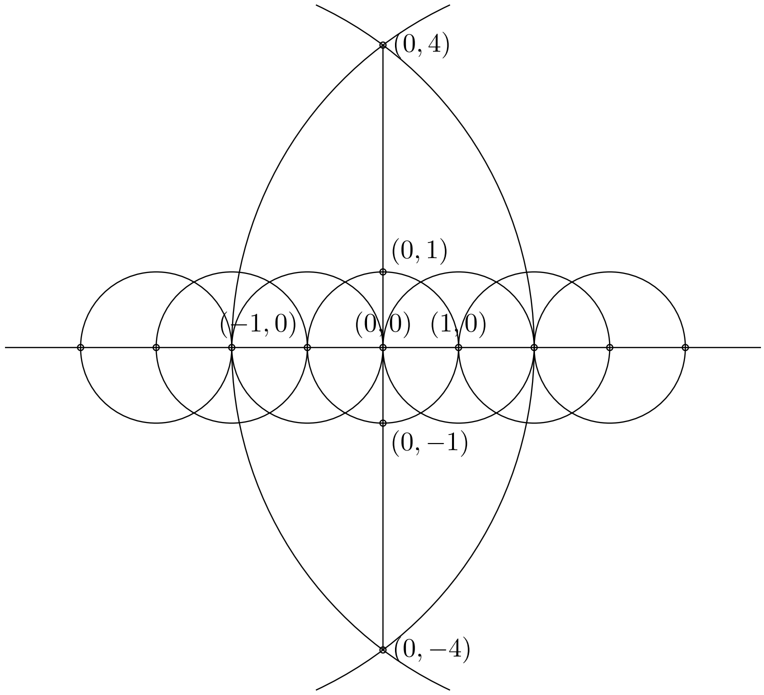
Tästä voidaan todeta, että $\angle QSR = \angle RSP$. Kulmille pätee $\angle QSR = \angle QSO$ ja $\angle RSP = \angle OSP$. Tällöin $\triangle OQS \cong \triangle OPS(sks)$ yhteisenä sivunaan jana OS. Koska kolmiot ovat yhtenevät, niin $\angle SOQ = \angle POS$. Toisaalta kulmat $\angle SOQ$ ja $\angle POS$ ovat myös toistensa suplementtikulmia. Mikäli kolmioiden kulmat ovat yhteneviä sekä toistensa suplementtikulmia, ovat ne suorakulmia. Täten $QP \perp RS \iff x \perp y$. $\square$

Huomautus 4. Lauseella 1 on myös toinen sivutulos: kuvassa $|OQ| = |OP|$, jolloin $|PQ| = 2|OQ| = 2|OP|$. Tämän ja yhdenmuotoisuustodistuksien nojalla jana SR puolittaa janan PQ. Koska pisteet P, Q, R ja S ovat konstruoituvia, on mahdollista konstruoida annetulle janalle sellainen piste O, joka puolittaa alkuperäisen janan.

Tästä lähtien oletetaan, että koordinaattiakselit ovat konstruoituvia. Tästä seuraa määritelmän 4 mukaan, että niiden leikkauspistekin on konstruoituva. Täten jos alkuoletuksena on, että koordinaattiakselit ovat konstruoituvia, on myös niiden leikkauspiste, eli origo $O = (0, 0)$ konstruoituva.

4.2.2 Laskutoimitusten konstruoituvuus

Olkoon nyt annettuna pisteet origo $O = (0, 0)$ ja piste $A = (1, 0)$. Nopeasti huomataan, että kaikki muotoa $(n, 0)$ pisteet, missä n on positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku, ovat konstruoituvia. Tämä voidaan tehdä piirtämällä harpilla yksikköympyröitä eteenpäin vaihtamalla keskipistettä. Uudet ympyrän keskipisteet saadaan määritelmän 4 ehdon 4 mukaisista pisteistä, eli edellisen ympyrän ja koordinaattiakselin leikkauspisteistä.



Piirtämällä pisteisiin $(-3, 0)$ ja $(3, 0)$ ympyrät, joiden säde on 5, saadaan konstruoitua pisteet $(0, 4)$ ja $(0, -4)$. Tämä on helppo näyttää todeksi Pythagoraan kolmikon avulla. Tästä voidaan vielä jatkaa ja näyttää, että kaikki muotoa $(0, m)$ olevat luvut, missä m on positiivinen tai negatiivinen kokonaisluku, ovat konstruoituvia.

Lähdetään seuraavaksi osoittamaan yleisesti, että kaikki muotoa (n, m) olevat luvut, missä n ja m ovat kokonaislukuja, ovat konstruoituvia. Samoin kaikki pisteet muotoa (r, s), missä r ja s ovat rationaalilukuja, eli muotoa p/q, missä p ja q ovat kokonaislukuja ($q \neq 0$), voidaan osoittaa konstruoituviksi.

Todistetaan seuraavaksi pisteeseen ja sen symmetrisyyden konstruoituvuuteen liittyvä hyödyllinen lemma.

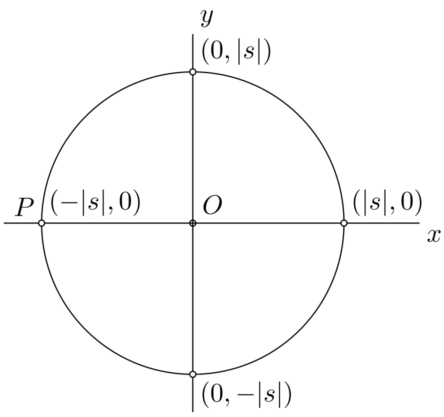
Lemma 1. *Jos s on konstruoituva luku, niin $-s$ on konstruoituva luku ja pisteet $(|s|\,,\,0),\ (-\,|s|\,,\,0),\ (0,\ |s|)$ ja $(0,\ \ -|s|)$ ovat konstruoituvia pisteitä.*

Konstruktio. Olkoon annettuna konstruoituvat pisteet P ja $O = (0,0)$. Olkoon s konstruoituva luku, joka määritelmän 6 mukaan on konstruoituvan pisteen P koordinaatti. Konstruoidaan ympyrä O_P. Piirretään tälle ympyrälle halkaisija PP' jatkamalla janaa OP siten, että se leikkaa ympyrän O_P kahdessa pisteessä (P ja P'). Piste P' on määritelmän 4 ehdon 4 mukaan konstruoituva piste. Itseisarvon määritelmän mukaan

$$|s| = \begin{cases} s, & \text{jos } s \geq 0 \\ -s, & \text{jos } s < 0. \end{cases}$$

Nyt piste P sijaitsee joko koordinaattiakselilla tai sen ulkopuolella. Kuvassa $P = (s, 0)$, missä $s < 0$. Mikäli P ei ole koordinaattiakselilla, konstruoidaan ensin pisteestä P kohtisuora jana joko x- tai y-akselille riippuen siitä onko s pisteen P x vai y koordinaatti. Merkitään tämän kohtisuoran janan ja koordinaattiakselin leikkauspistettä Q. Konstruoidaan tämän jälkeen ympyrä O_Q, missä $\overline{OQ} = |s|$.

Tutkitaan tapaukset erikseen ja osoitetaan, että kummassakin tapauksessa piste P on konstruoituva.



Todistus. Mikäli piste P sijaitsee koordinaattiakselilla, voidaan suoraan todeta kuvaan merkittyjen pisteiden olevien konstruoituvia määritelmän 4 mukaan. Symmetrian perusteella harpilla piirretty ympyrä jakaa halkaisijan kahteen osaan ympyrän keskipisteestä katsottuna. Jos origo sijaitsee keskipisteessä, niin itseisarvon sekä konstruoituvuuden määritelmien mukaan pisteet $(|s|\ ,\ 0)$, $(-\,|s|\ , 0)$, $(0,\ |s|)$ ja $(0,\ \ -|s|)$ ovat konstruoituvia.

Toisessa tapauksessa konstruoitu ympyrä Q_P leikkaa koordinaattiakselit neljässä pisteessä, jotka ovat myös määritelmien 4 sekä ympyrän symmetrisyyden perusteella konstruoituvia. □

Lähdetään nyt tutkimaan peruslaskutoimituksia, eli yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskua. Seuraavan lauseen avulla voidaan osoittaa yhteen- ja vähennyslaskun konstruoituvuus.

Vähennyslasku palautuu muotoon $p+(-q)$. Lauseen tulos seuraa suoraan edellisestä lemmasta, joten erillinen konstruktio ei tässä tapauksessa ole välttämätöntä.

Lause 2. *Jos p ja q ovat konstruoituvia lukuja, niin myös $p+q$ on konstruoituva.*

Todistus. Lemman 1 mukaan pisteen $P=(p,0)$ koordinaatti p on konstruoituva luku ja se on muotoa $(|p|,0)$ tai $(-|p|,0)$, missä

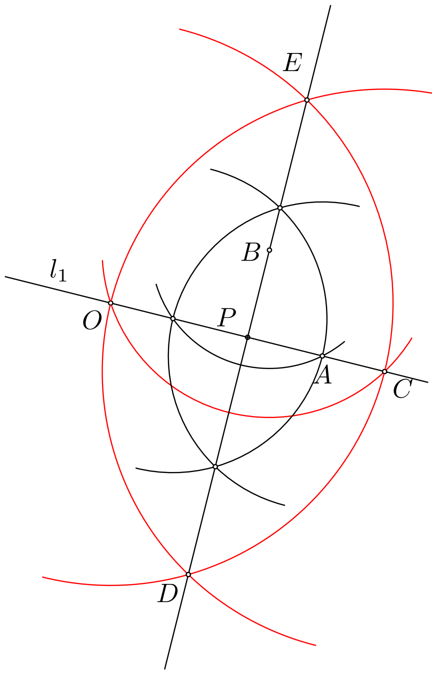
$$p = \begin{cases} |p|, & \text{jos } p \geq 0 \\ -|p|, & \text{jos } p < 0. \end{cases}$$

Lemman 1 mukaan $|q|$ on kahden konstruoituvan pisteen välinen etäisyys. Täten pisteeseen P voidaan konstruoida ympyrä P_q. Jos $q=0$, niin tällöin ympyrä on vain piste ja $p+q$ on konstruoituva, sillä p on konstruoituva. Jos $q>0$, niin piste $(p+q,0)$ sijaitsee pisteen P oikealla puolella, missä ympyrä leikkaa x-akselin. Jos $q<0$, niin $(p+q,0)$ sijaitsee pisteen P vasemmalla puolella. Kummassakin tapauksessa pisteiden konstruoituvuus palautuu määritelmään 3. Täten $p+q$ on konstruoituva luku. □

Näytetään tähän kohtaan kohtisuoran konstruoiminen annettuun pisteeseen tietylle suoralle sekä yhdensuuntaisen janan konstruoiminen tiettyyn pisteeseen, eli toisin sanoen kulman kopioiminen.

Ongelma 4. *Olkoon annettuna pisteiden O ja A kautta kulkeva konstruoituva suora l_1 sekä piste B. Konstruoi pisteen B kautta kulkeva kohtisuora suoralle l_1.*

Konstruktio. Aluksi on konstruoitavana ympyrät B_O ja B_A. Periaatteessa jompikumpi ympyröistä vain riittää mutta konstruktion luonteen vuoksi tehdään kummatkin kuvaan. Valitaan todistukseen kuitenkin ympyrän B_O kautta saatu konstruktio, joka on kuvassa punaisella. Mustalla on merkitty ympyrän B_A kautta saadut urat. Merkitään kuvan mukaisesti ympyrän B_O ja suoran l_1 leikkauspisteitä O ja C. Konstruoidaan nyt ympyrät O_C ja C_O. Merkitään ympyröiden O_C ja C_O leikkauspisteitä D ja E. Näiden pisteiden kautta piirretty suora kulkee pisteen B kautta ja on kohtisuorassa suoraa l_1 vastaan. Merkitään tämän suoran ja suoran l_1 leikkauspistettä P.



Todistus. Todistus on hyvin samankaltainen kuin lauseen 1 todistus. Konstruktiosta voidaan silmin havaita, että valittiinpa alussa ympyröiden B_O tai B_A konstruointi, niin päästään samaan tulokseen. Todistetaan tämä vain toiselle tapaukselle, tässä tapauksessa pisteen O kautta piirretyn ympyrän tapaus, joka on kuvaan merkitty punaisella.

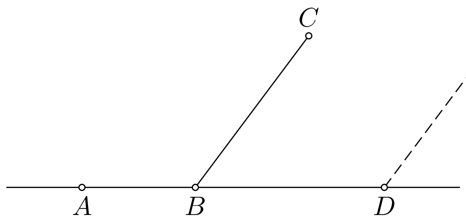
Osoitetaan, että janat BP ja OA ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Kuvassa $|OC| = |OE| = |OD|$, sillä ne ovat kaikki ympyrän O_C säteitä. Myös $|CO| = |CE| = |CD|$, sillä ne ovat kaikki ympyrän C_O säteitä. Yhtäsuuruuksista $|OE| = |OD| = |OC| = |CO| = |CE| = |CD|$ seuraa, että $\triangle DEO \cong \triangle CED$ (sss), sillä kolmioilla on kolme yhtä suurta sivua jana DE yhteisenä sivunaan.

Nyt $\angle OED = \angle DEC$, josta voidaan päätellä, että $\angle OED = \angle OEP$ ja $\angle DEC = \angle PEC$. Tällöin $\triangle EOP \cong \triangle CEP(sks)$ yhteisenä sivunaan jana PE. Koska kolmiot ovat yhtenevät, niin $\angle EPO = \angle CPE$. Koska kulmat ovat yhteneviä ja toistensa suplementtikulmia, pätee $OA \perp EP$. Koska $|BO| = |BC|$, on piste B yhtä kaukana pisteistä O ja C. Tällöin sen on pakko olla pisteiden E ja D kautta kulkevalla suoralla. $\square$

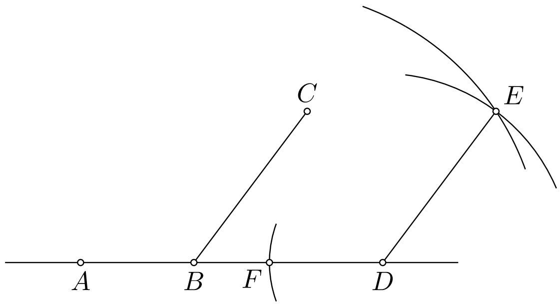
Huomautus 5. Ongelman 4 poikkeustapaus on se, että annettu piste B onkin jompikumpi janan päätepisteistä, jolloin edellisen konstruktion merkinnöillä ympyrän B_O ja janan AO leikkauspisteet ovat alkuperäiset pisteet A ja O. Tällöin konstruoitu jana EP puolittaa kannan AO ja $AO \perp EP$.

Ongelma 5. *Olkoon annettuna neljä pistettä A, B, C ja D kuvan mukaisesti siten, että A, B ja D ovat samalla suoralla. Konstruoi pisteeseen D kulma $\angle CBA$, eli toisin sanoen etsi piste E*

siten, että $\angle EDA = \angle CBA$.



Konstruktio. Piirretään ympyrä D_{AB} ja merkitään janan AB jatkeen sekä tämän ympyrän D_{AB} leikkauspistettä F. Konstruoidaan nyt ympyrä D_E. Tämän jälkeen piirretään ympyrä F_{AC}. Merkitään ympyröiden F_{AC} sekä D_E leikkauspistettä E.



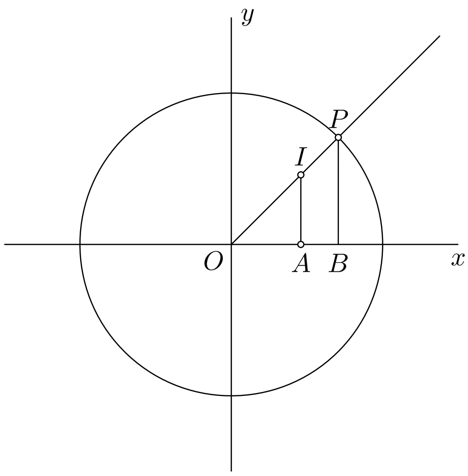
Piste E toteuttaa ehdon $\angle EDA = \angle CBA$.

Todistus. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhtenevät, eli $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (sss), sillä konstruktiossa piirrettyjen ympyröiden säteiden perusteella $|AB| = |FD|$, $|BC| = |DE|$ ja $|AC| = |FE|$. Koska alkuoletuksen mukaan pisteet A, B ja D ovat samalla suoralla seuraa tästä se, että janat BC sekä DE (ja niiden kautta kulkevat suorat) ovat yhdensuuntaiset, eli $BC \parallel DE$. $\square$

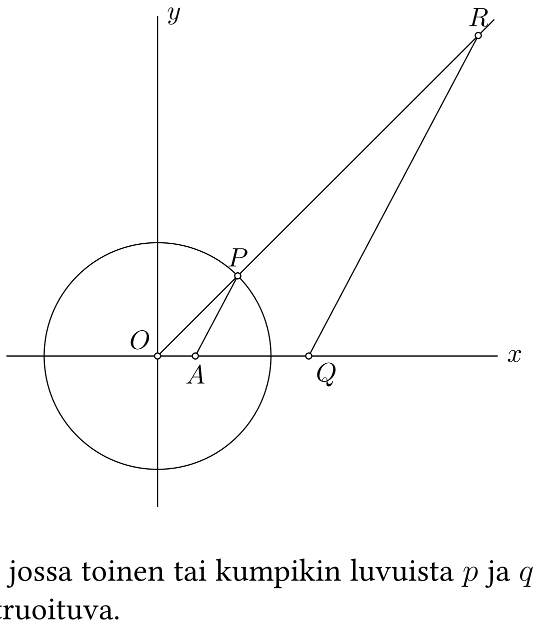
Osoitetaan seuraavaksi kerto- ja jakolaskun konstruoituvuus. Kummatkin ovat mahdollista suorittaa vain, jos tunnetaan yksikköjana. Tätä varten on tunnettava piste A, jossa jana OA on yksikön mittainen.

Lause 3. *Jos p ja q ovat konstruoituvia lukuja, niin pq on konstruoituva.*

Konstruktio. Olkoon annettuna pisteet $O = (0, 0)$ sekä $A = (1, 0)$, missä OA on yksikköjana. Oletetaan, että $p \neq 0$ ja $q \neq 0$. Konstruoidaan ympyrä O_p lemman 1 avulla pisteestä $(p, 0)$. Yksikköjanan avulla voidaan löytää piste $I = (1, 1)$ seuraavasti: konstruoidaan koordinaattiakselien ja ympyrän O_A leikkauspisteisiin ympyrät, joiden säde on $|OA|$. Näiden leikkauspiste on pisteessä $I = (1, 1)$. Yhdistetään pisteet O ja I janaksi OI ja mikäli $p < 1$, niin jatketaan janaa OI puolisuoraksi, jolloin se leikkaa ympyrän O_p pisteessä $P = (|p|/\sqrt{2}, |p|/\sqrt{2})$. Pisteestä P voidaan konstruoida kohtisuora akselille x ongelman 4 mukaisesti. Merkitään näiden leikkauspistettä B.



Seuraavaksi konstruoidaan $Q = (|q|, 0)$ lemman 1 mahdollistamana ja piirretään jana $\overline{AP}$. Konstruoidaan ongelman 5 mukaan pisteeseen Q janan AP kanssa yhdensuuntainen jana siten, että se leikkaa janan OP jatkeen pisteessä R. Kuvassa jana $|OR| = |p| \cdot |q|$.



Todistus. Triviaali tapaus, jossa toinen tai kumpikin luvuista p ja q ovat arvoltaan 0, on konstruoituva sillä 0 on konstruoituva.

Pythagoraan lauseella $|IO| = \sqrt{2}$, ja kuviossa $\triangle AIO \sim \triangle BOP$ (kk). Täten saadaan yhdenmuotoisuuden verranto

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|IO|}{|OP|},$$

josta saadaan $|OP| = |p|/\sqrt{2}$ ja symmetrisyyden perusteella $P = (|p|/\sqrt{2}, |p|/\sqrt{2})$. Tämän nojalla piste P on varmasti samalla suoralla kuin pisteiden O ja I kautta piirretty suora, sillä sen piste on muotoa (a, a), missä a on konstruoituva luku.

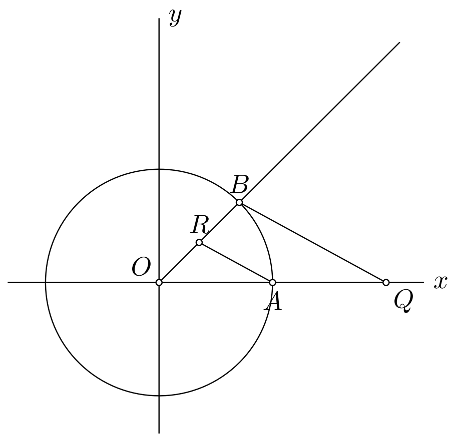
Kuviosta voidaan päätellä yhdenmuotoisuus $\triangle AOP \sim \triangle OQR$ (kk), sillä kummallakin kolmiolla on sama kulma $\angle AOP = \angle QOR$ ja yhdensuuntaisten suorien määritelmän mukaan myös $\angle PAO = \angle RQO$. Tällöin

$$\frac{|OP|}{|OR|} = \frac{|OA|}{|OQ|} \leftrightarrow \frac{|p|}{|OR|} = \frac{1}{|q|} \leftrightarrow |OR| = |p| \cdot |q|.$$

□

Lause 4. *Jos p ja q ovat konstruoituvia, niin p/q on konstruoituva, kun $q \neq 0$.*

Konstruktio. Tehdään konstruktio, jonka avulla voidaan osoittaa luvun $1/q$ konstruoituvuus. Olkoon taas annettuna pisteet O ja A, joiden välinen mitta on yksikön mittainen. Aloitetaan konstruoimalla ympyrä O_A ja samaan tapaan kuin lauseessa 3, konstruoidaan piste $I = (1, 1)$. Jatketaan janaa OI kunnes se leikkaa ympyrän O_A pisteessä B. Olkoon taas $Q = (|q|, 0)$. Konstruoidaan ongelman 5 tapaan piste R janalle OB siten, että $AR \parallel BQ$.



Todistus. Kuviosta huomataan yhdenmuotoisuus $\triangle AOR \sim \triangle BOQ$ (kk), sillä $\angle AOR = \angle QOB$ ja $\angle ORA = OBQ$. Tällöin

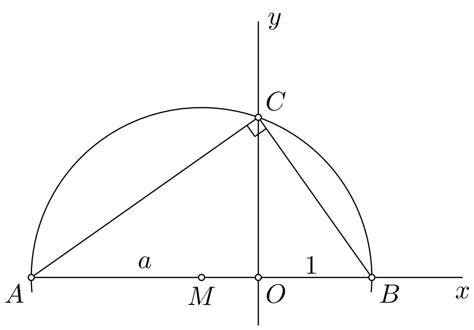
$$\frac{|OB|}{|OQ|} = \frac{|OR|}{|OA|} \leftrightarrow \frac{1}{|q|} = \frac{|OR|}{1} \leftrightarrow |OR| = \frac{1}{|q|}.$$

Koska saatiin, että luku $\frac{1}{|q|}$ ja alkuoletuksen mukaan myös luku p ovat konstruoituvia, niin lauseen 3 tuloksen nojalla voidaan konstruoida jana $p \cdot 1/q$, eli p/q. □

Näytetään seuraavaksi, että neliöjuurioperaatio on konstruoituva. Vaikkei neliöjuurioperaatiota lueta peruslaskutoimituksiin, kuuluu se olennaisena osana konstruoituvien lukujen joukkoa, joka määritellään seuraavassa luvussa.

Lause 5. *Jos luku a ($a > 0$) on konstruoituva, niin myös $\sqrt{a}$ on konstruoituva.*

Konstruktio. Olkoon annettuna pisteet $O = (0, 0)$ ja $B = (1, 0)$, joiden välinen jana OB on yksikön mittainen. Koska luku a on konstruoituva, voidaan lemman 1 nojalla konstruoida piste $A = (-a, 0)$. Yhdistetään pisteet A ja B janaksi ja etsitään lauseen 1 mukainen janan AB keskipiste M. Konstruoidaan ympyrä M_A, joka leikkaa y-akselin pisteissä $C = (0, c)$ ja $-C = (0, -c)$ (kuvassa vain C) sekä piirretään samalla ongelman 4 mukainen kohtisuora korkeusjana pisteestä C kannalle AB. Merkitään tätä pistettä O, jolloin $|CO| = \sqrt{a}$. Origo on lähtökohtaisesti konstruoituva mutta edellä tehty konstruktio ei välttämättä aina sijaitse origon suhteen suotuisasti, jolloin pisteen O konstruoituvuus on hyvä tarkistaa.



Todistus. Pisteet A, M ja B muodostavat oikokulman $\angle AMB$. Kehäkulmalauseen mukaan $\angle ACB = \angle AMB/2 = 90°$ (Väisälä, 1959). Kuviosta huomataan yhdenmuotoisuus $\triangle ACO \sim \triangle BCO$ (kk), sillä kuvassa $\angle COA = \angle BOC$, minkä lisäksi tutkimalla kehäkulmaa ja kolmion $\triangle BCO$ kulmien summaa saadaan seuraavat yhtäpitävyydet:

$$\angle ACB = \angle ACO + \angle OCB \qquad \angle COB + \angle CBO + \angle OCB = 180°$$
$$\angle OCB = 90° - \angle ACO \qquad \angle OCB = 90° - \angle CBO.$$

Yhdistetään tulokset, jolloin saadaan $\angle ACO = \angle CBO$. Koska kolmiot ovat yhdenmuotoisia, voidaan muodostaa verranto

$$\frac{|AO|}{|CO|} = \frac{|CO|}{|BO|} \Longleftrightarrow \frac{a}{|CO|} = \frac{|CO|}{1} \Longleftrightarrow |CO| = \sqrt{a}.$$

Kuvassa janan CO pituus on siis $\sqrt{a}$, jolloin myös piste $C = (0, c) = (0, \sqrt{a})$ on konstruoituva. □

4.2.3 Konstruoituvien lukujen joukko

Edellisessä alaluvussa näytettiin mitä laskutoimituksia ja operaatioita voidaan konstruoida mutta tutkittaessa mitä geometrisia kuvioita voidaan loppujen lopuksi konstruoida, on täsmällisempää puhua lukujoukoista. Tämän sekä seuraavan alaluvun tarkoituksena on yleistää edellisen luvun tulokset yleispäteviksi määritelmiksi. Tutkitaan seuraavaksi, millaisen lukujoukon konstruoituvat luvut muodostavat. Joukon voidaan ajatella muodostuvan kokoelmasta lukuja, jotka ovat konstruoituvia. Tätä varten määritellään joukkoihin liittyvä käsite kunta.

Määritelmä 8. Olkoon F epätyhjä joukko. Joukko F on kunta jos, seuraavat ehdot toteutuvat.

1. $1 \in F$
2. jos $a, b \in F$, niin $a \pm b \in F$
3. jos $a, b \in F$ ja $b \neq 0$, niin $a/b \in F$.

Reaaliluvut sekä rationaaliluvut muodostavat kunnan (Häsä & Rämö, 2015; Martin, 1998). Olkoon annettuna kaksi kuntaa S ja K. Jos S on K:n osajoukko ja kunnassa S on voimassa määritelmän 8 mukaiset ehdot, niin S on kunnan K alikunta. **Alikunta** on siis itsessään kunta mutta joukkona pienempi, kuin sen alkuperäinen kunta.

Merkitään konstruoituvien lukujen joukkoa $\mathbb{F}$ ja osoitetaan se kunnaksi määritelmän 8 mukaisesti. Määritelmän 8 ehto siitä, että alkio 1 kuuluu joukkoon poissulkee kaksi epäsuotuisaa tapausta: $\mathbb{F} = \emptyset$ ja $\mathbb{F} = \{0\}$. Edellisessä luvussa tehtyjen tarkastelujen puolesta voisi olettaa, että $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}$.

Palautetaan edellisestä aliluvusta mieleen, mitä operaatioita sisältyy konstruoituviin lukuihin: ainakin yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskut sisältyvät tähän mutta myös neliöjuuret. Koska jakolasku ja erityisesti kokonaislukujen jakolasku kuuluu konstruoituviin lukuihin, ovat ainakin kaikki rationaaliluvut $\mathbb{Q}$ konstruoituvia. Tämän lisäksi lauseen 5 mukaan neliöjuuret ovat konstruoituvia. Matemaattisessa mielessä kyseessä on siis rationaalilukuja suuremmasta mutta reaalilukuja pienemmästä joukosta. Rationaalilukujen joukkoa pitää siis jotenkin laajentaa. Määritellään tätä varten neliöllinen kuntalaajennus.

Määritelmä 9. Olkoon F kunta ja $d \in F$ mutta $\sqrt{d} \neq F$. Tällöin merkintä $F\left(\sqrt{d}\right)$ tarkoittaa joukkoa $\{p + q \cdot \sqrt{d} \mid p, q \in F\}$. Joukkoa $F\left(\sqrt{d}\right)$ kutsutaan kunnan F neliölliseksi kuntalaajennukseksi.

Lauseiden 2, 3, 4, 5 sekä määritelmän 9 nojalla, jos kunta $\mathbb{F}$ on konstruoituva, niin silloin myös kaikki luvut muotoa $a + b\sqrt{k}$, $a, b, k \in \mathbb{F}$ $(k > 0)$ ovat konstruoituvia. Osoitetaan vielä, että näin saatu joukko on määritelmän 8 mukainen kunta.

Lemma 2. *Jos F on kunta ja $k \in F$ ($k > 0$), niin silloin $F(\sqrt{k})$ on myös kunta.*

Todistus. Näytetään, että määritelmän 8 ehdot toteutuvat joukossa $F(\sqrt{k})$. Koska $1 \in F$, niin tällöin myös $1 \in F(\sqrt{k})$. Näytetään nyt, että joukko $F(\sqrt{k})$ on suljettu peruslaskutoimitusten suhteen. Toisin sanoen, mikäli a ja b kuuluvat joukkoon $F(\sqrt{k})$, niin tällöin myös $a+b$, $a-b$, ab ja a/b kuuluvat joukkoon $F(\sqrt{k})$. Tämä tarkoittaa sitä, että peruslaskutoimitusten tulosten on oltava muotoa $A + B\sqrt{k}$, missä $A, B \in F$.

Olkoon $a, b, c, d \in F$, jolloin $(a + b\sqrt{k}) \in F(\sqrt{k})$ ja $c + d\sqrt{k} \in F(\sqrt{k})$. Oletetaan myös, että $c \pm d\sqrt{k} \neq 0$. Näytetään kaikki tapaukset erikseen.

$$(a + b\sqrt{k}) \pm (c + d\sqrt{k}) = (a \pm c) + (b \pm d)\sqrt{k} \quad \in F(\sqrt{k})$$

$$(a + b\sqrt{k})(c + d\sqrt{k}) = (ac + bdk) + (ad + bc)\sqrt{k} \quad \in F(\sqrt{k})$$

$$\frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} = \frac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} \cdot \frac{c - d\sqrt{k}}{c - d\sqrt{k}} = \left(\frac{ac - bdk}{c^2 - d^2k}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 - d^2k}\sqrt{k}\right) \quad \in F(\sqrt{k}).$$

□

Lemman 2 perusteella jos k on kiinnitetty vakio, niin pelkästään joukko $a + b\sqrt{k}$, $k \in \mathbb{F}$ ($k > 0$) on kunta kaikilla luvuilla a, b. Mikäli $\sqrt{k}$ sisältyy jo kuntaan $\mathbb{F}$, niin silloin luonnollisesti $\mathbb{F} = \mathbb{F}(\sqrt{k})$. Jos taas $\sqrt{k}$ ei sisälly kuntaan $\mathbb{F}$, niin silloin $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}(\sqrt{k})$.

Jo laajennettua kuntaa voidaan laajentaa vielä pidemmälle, jolloin laajennukset yhdistetään osajoukkojen koon mukaan kasvavaan järjestykseen. Tätä voidaan kuvata merkinnällä $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_n$, missä aina seuraava kunta F_n saadaan kunnasta F_{n-1} tekemällä uusi kuntalaajennus.

Lemma 3. *Luku a on konstruoituva, jos on olemassa äärellinen määrä kuntia $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n$, missä $a \in F_n$ ja jokaiselle indeksille j pätee $0 \leq j \leq n-1$, F_{j+1} on neliöllinen kuntalaajennus kunnasta F_j.*

Todistus. Todistetaan väite induktiolla indeksin N suhteen. Mikäli $n = 0$, niin $F_0 = \mathbb{Q}$ ja täten $a \in \mathbb{Q}$, jolloin se on konstruoituva.

Oletetaan, että väite pätee indeksille $n = k$, mikä tarkoittaa sitä, että indeksillä k kunnan F_k alkiot ovat konstruoituvia. Näytetään, että väite pätee myös indeksille $n = k+1$. Jos $a \in F_{k+1}$, niin silloin a voidaan ilmoittaa muodossa $a_k + b_k\sqrt{k_k}$, missä $a_k, b_k, k_k \in F_k$. Induktio-oletuksen mukaan väite siis pätee indeksille $n = k$, sillä a_k, b_k ja k_k ovat konstruoituvia, jolloin lauseiden 2, 3, 4 ja 5 mukaan $a = a_k + b_k\sqrt{k_k}$ on myös konstruoituva. □

Usein monimutkaisemmista lausekkeista luvun konstruoituvuutta on vaikea nähdä. Mistä esimerkiksi tietää onko vaikka luku $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ tai $\sqrt[4]{3}$ konstruoituva? Ennen kuin mennään teoriassa pidemmälle, havainnollistetaan asiaa konkreettisella esimerkillä.

Esimerkki 1. Osoita, että seuraavat luvut ovat konstruoituvia.

a) $1+\sqrt{5}$

b) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$

c) $\sqrt[4]{13}+\dfrac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{1+2\sqrt{7}}}$.

Esitetään kukin luvuista lemman 3 mukaisena rakennelmana lähtien rationaaliluvuista. Merkintä $F_1=F_0(\sqrt{d})$ kertoo, että kunta F_1 on kunnan F_0 neliöllinen kuntalaajennus ja kunnan F_1 alkiot ovat muotoa $a+b\sqrt{d}$, missä $a,b,d\in F_0$ määritelmän 8 mukaisesti.

a) $1\in F_0=\mathbb{Q}\subset F_1=F_0\left(\sqrt{5}\right)$. Koska $1+\sqrt{5}\in F_1$ ja F_1 on lemman 3 mukainen neliöllinen kuntalaajennus rationaaliluvuista, niin luku $1+\sqrt{5}$ on konstruoituva.

b) Luvussa esiintyy kuutiojuuri, jota ei suoraan saada neliöllisellä kuntalaajennuksella. Ilmaistaan luku $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}$ toisessa muodossa. Tutkitaan juurrettavaa $7+5\sqrt{2}$ ja muokataan sitä.

$$7+5\sqrt{2}=1+3\sqrt{2}+6+2\sqrt{2}=1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+\left(\sqrt{2}\right)^3.$$

Käytetään kaavaa $(a+b)^3=a^3+3ab^2+3a^2b+b^3$, jolloin edellä saatu lauseke voidaan kirjoittaa muotoon $1+3\sqrt{2}\cdot 1^2+3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot 1+\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(1+\sqrt{2}\right)^3$. Kun tämä yhdistetään alkuperäiseen lausekkeen saadaan $7+5\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^3 \iff \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$. Tämä on jo helpompi osoitta konstruoituvaksi.

$1\in F_0=\mathbb{Q}\subset F_1=F_0\left(\sqrt{2}\right)$. Koska $1+\sqrt{2}\in F_1$ ja F_1 on lemman 3 mukainen neliöllinen kuntalaajennus rationaaliluvuista, niin luku $1+\sqrt{2}$ on konstruoituva.

c) Lähdetään liikkeelle alkiosta $7\in\mathbb{Q}$ ja lisätään siihen aina jokin neliöjuurioperaatio. Sivussa maininta siitä, miksi kyseinen alkio voidaan lisätä.

$$\begin{aligned}
7\in F_0=\mathbb{Q}\subset F_1=F_0\left(\sqrt{7}\right)&\subset^* F_2=F_1\left(\sqrt{1+2\sqrt{7}}\right) && \mid {}^*1+2\sqrt{7}\in F_1\\
\subset F_3=F_2\left(\sqrt{6}\right)&\subset^* F_4=F_3\left(\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{1+2\sqrt{7}}}\right) && \mid {}^*\sqrt{6}+\sqrt{1+2\sqrt{7}}\in F_3\\
\subset F_5=F_4\left(\sqrt{13}\right)&\subset F_6=F_5\left(\sqrt{\sqrt{13}}\right).
\end{aligned}$$

Koska neliöllisiä kuntalaajennuksia yhdistämällä saatiin kunta, joka on lemman 3 mukainen laajennus rationaaliluvuista, on luku $\sqrt[4]{13}+\frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{1+2\sqrt{7}}}$ konstruoituva.

Se, miten edellä oleva luvut konstruoidaan, palautuu lauseiden 2, 3, 4 ja 5 toistuvaan hyödyntämiseen.

4.2.4 Koordinaatiston suorien ja ympyröiden konstruoituvuus

Tässä luvussa rinnastetaan konstruoituvuus tason käyriin ja kootaan lopuksi yhteenvetona edellisistä alaluvuista tärkein konstruoituvuuteen liittyvä lause. Yhdistetään ensin tähänastiset tiedot karteesisen koordinaatiston jokaiselle pisteelle (a, b) ja siirrytään tämän jälkeen tutkimaan suoran sekä ympyrän yhtälöitä.

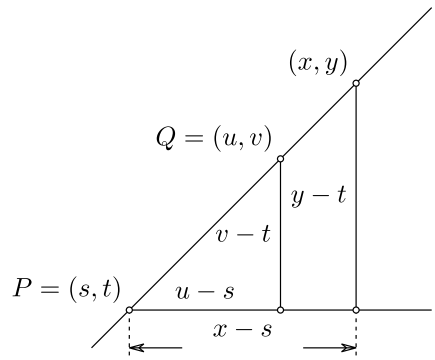
Lemma 4. *Olkoon $a, b \in \mathbb{F}$, missä $\mathbb{F}$ on konstruoituvien lukujen kunta. Piste (a, b) on konstruoituva jos ja vain jos numerot a ja b ovat konstruoituvia.*

Todistus. $\Longrightarrow$ Oletetaan, että a ja b ovat konstruoituvia lukuja, jolloin ne kuuluvat lemman 3 mukaiseen neliölliseen kuntalaajennukseen. Tällöin pisteet $(a, 0)$ ja $(0, b)$ ovat myös konstruoituvia lemman 1 mukaan. Konstruoidaan kohtisuora ongelman 4 mukaisesti x-akselille pisteeseen $(a, 0)$ sekä kohtisuora y-akselille pisteeseen $(0, b)$. Suorat ovat konstruoituvia, jolloin niiden leikkauspistekin on konstruoituva määritelmän 4 perusteella. Suorat leikkaavat toisensa pisteessä (a, b).

$\Longleftarrow$ Oletetaan, että piste (a, b) on konstruoituva. Konstruoidaan tämän pisteen kautta kulkeva kohtisuora x-akselille ongelman 4 mukaisesti. Kohtisuora leikkaa x-akselin pisteessä $(a, 0)$, joka on lauseen 1 ja lemman 1 mukaan konstruoituva. Täten a on konstruoituva luku. Samoin konstruoidaan pisteen (a, b) kautta kulkeva kohtisuora y-akselille. Tämä kohtisuora leikkaa y-akselin pisteessä $(0, b)$, jolloin b on konstruoituva. Koska luvut a ja b ovat konstruoituvia, kuuluvat ne lemman 3 mukaisesti johonkin rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ neliölliseen kuntalaajennukseen F_n. □

Lause 6. *Olkoon annettuna suora l ja sekä pisteet $O = (0, 0)$ sekä $A = (1, 0)$, joiden välinen jana OA on yksikön mittainen. Suora $l : y = ax + b$ on konstruoituva jos ja vain jos luvut a ja b ovat konstruoituvia.*

Todistus. $\Longrightarrow$ Olkoon l konstruoituva suora. Tämä tarkoittaa määritelmän 7 mukaan sitä, että se koostuu vähintään kahdesta konstruoituvasta pisteestä. Olkoon nämä pisteet $P = (s, t)$ ja $Q = (u, v)$ sekä niistä muodostuva konstruoituva jana PQ.



Pisteet P ja Q sijaitsevat samalla konstruoidulla suoralla l, jolloin suhde

$$k = \frac{v - t}{u - s}$$

pysyy aina vakiona. Koska s, t, u ja v ovat konstruoituvia lukuja sekä $u \neq s$, niin m' on lauseiden 2, 3 ja 4 mukaan myös konstruoituva luku. Tämä voidaan toisaalta myös kirjoittaa muodossa

$$k = \frac{y - t}{x - s}$$

missä x ja y ovat mitä tahansa pisteitä suoralla l. Yhtälö voidaan sieventää muotoon

$$k = \frac{y - t}{x - s} \longleftrightarrow y = kx - ks + t.$$

Merkitään $a = k$ ja $b = -ks + t$, jolloin yhtälö sievenee vielä muotoon $y = ax + b$. Suoran l kulmakerroin k on riippumaton pisteiden valinnasta, jolloin a on vakio ja yksikäsitteisesti määritelty suoralle l. Piste $(b, 0) = (-ks + t, 0)$ on piste, jossa suora l leikkaa y-akselin. Koska koordinaattiakseli ja suora l ovat konstruoituvia, on myös määritelmän 4 mukaan niiden leikkauspiste konstruoituva. Toisaalta koska k, s ja t ovat konstruoituvia lukuja, ovat myös lauseiden 2, 3 ja 4 mukaan luvut a ja b konstruoituvia.

$\Longleftarrow$ Olkoon annettuna konstruoituvat luvut a ja b ja suoran yhtälö muotoa $y = ax + b$. Päättelemällä nähdään, että pisteet $(b, 0)$ ja $(a + b, 1)$ toteuttavat edellä mainitun suoran yhtälön. Luvut $0, 1, a, b$ ovat konstruoituvia lukuja, jolloin lauseiden 2,3 ja 4 mukaan $a + b$ on konstruoituva luku ja täten pisteet $(b, 0)$ ja $(a+b, 1)$ ovat konstruoituvia. Kaksi konstruoituvaa pistettä määrittelevät määritelmän 7 mukaan konstruoituvan suoran, joten edellä mainitut luvut määrittelevät suoran $y = ax + b$. □

Tutkitaan nyt koordinaatistossa olevia ympyröitä samalla periaatteella.

Lause 7. *Ympyrä $c : (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$ on konstruoituva jos ja vain jos a, b ja r $(r > 0)$ ovat konstruoituvia lukuja.*

Todistus. $\Longrightarrow$ Olkoon ympyrä c konstruoituva.

Tällöin määritelmän 3 mukaan sen keskipiste $P = (a, b)$ sekä jokin kehäpiste ovat konstruoituvia. Merkitään tätä toista pistettä $P_1 = (a_1, b_1)$ ja sijoitetaan ympyrän yhtälöön. Saadaan $(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 = (a_1 - a) \cdot (a_1 - a) + (b_1 - b) \cdot (b_1 - b)$. Lauseiden 2 ja 3 mukaan tämä luku on konstruoituva, jolloin sen neliöjuurikin on konstruoituva. Eli

$$(a_1 - a) + (b_1 - b) \cdot (b_1 - b) = r^2 \Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a) + (b_1 - b) \cdot (b_1 - b)} = r,$$

missä r on konstruoituva luku. Tällöin yhtälö esittää konstruoituvan ympyrän yhtälöä.

$\Longleftarrow$ Olkoon $P = (a, b)$ konstruoituva piste, missä a ja b ovat konstruoituvia lukuja sekä r konstruoituva luku. Lemman 4 mukaan jos luku r on konstruoituva, niin myös piste (r, r) on konstruoituva. Nyt määritelmän 4 mukaan kaksi konstruoituvaa pistettä määrittelevät ympyrän. Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$. $\square$

Yhdistetään seuraavaksi määritelmä 4 lauseisiin 6 ja 7. Tutkitaan erikseen määritelmän 4 ehtoja 2-4. Jokainen uusi konstruoituva piste saadaan määritelmän 4 mukaan suorien ja ympyröiden välisistä leikkauspisteistä. Rinnastetaan tämä koskemaan vastaavien algebrallisten yhtälöiden ratkaisujen laskemiseen. Merkitään tuttuun tapaan konstruoituvia lukuja $\mathbb{F}$. Todistuksissa käytetään seuraavaa merkintää: jos F_n on kunta, niin tasolla F_n tarkoitetaan kaikkia karteesisen koordinaatiston pisteitä (a, b), jossa $a, b \in \mathbb{F}_n$.

Lemma 5. *Olkoon $\mathbb{F}$ reaalilukujen $\mathbb{R}$ alikunta. Olkoon annettuna kaksi konstruoituvaa suoraa $ax + by = c$ ja $dx + ey = f$, missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$. Suorat leikkaavat yhdessä pisteessä $P = (x_1, y_1)$ ja tälle pisteelle pätee $x_1, y_1 \in \mathbb{F}$.*

Todistus. Oletetaan, että suorilla on olemassa leikkauspiste. Tämä tarkoittaa, että $ae \neq bd$, jotta suorat eivät olisi yhdensuuntaisia. Yhtälöparilla

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

on ratkaisu

$$P = (x_1, y_1) = \left(\frac{ce - bf}{ae - bd}, \frac{af - cd}{ae - bd} \right).$$

Nämä koordinaatit ovat lauseiden 2, 3 ja 4 mukaan konstruoituva ja siten $x_1, y_1 \in \mathbb{F}$. $\square$

Lemma 6. *Olkoon $\mathbb{F}$ reaalilukujen $\mathbb{R}$ alikunta. Olkoon annettuna konstruoituva suora $ax + by = c$ ja konstruoituva ympyrä $(x - d)^2 + (y - e)^2 = f$, missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$. Mikäli suora ja ympyrä leikkaavat toisensa, on olemassa ei-negatiivinen luku $g \in \mathbb{F}$ siten että leikkauspisteen/-pisteiden koordinaatti kuuluu kuntalaajennukseen $\mathbb{F}(\sqrt{g})$.*

Todistus. Kummatkin luvut a ja b eivät voi olla nollia mutta oletetaan, että $a \neq 0$. Tutkittavaksi tulee yhtälöpari

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (x-d)^2 + (y-e)^2 = f \end{cases}.$$

Ratkaisemalla ylemmästä yhtälöstä x, saadaan $x = (c - by)/a$. Sijoitetaan tämä alempaan ympyrän yhtälöön, jolloin saadaan $\left((c-by)/a - d\right)^2 + (y-e)^2 = f$. Yhtälö sievenee muotoon $uy^2 + vy + w = 0$, missä kertoimet $u = 1 + b/a^2$, $v = 2db/a - 2cb/a^2 - 2e$ ja $w = c^2/a^2 - 2cd/a + d^2 + e^2 - f$. Lauseiden 2, 3 ja 4 perusteella $u, v, w \in \mathbb{F}$. Mikäli $u > 0$, niin tällöin yleinen ratkaisu yhtälölle on $y = \left(-v \pm \sqrt{v^2 - 4uw}\right)/2u$. Mikäli tämän diskriminantti, eli $v^2 - 4uw < 0$, niin suoralla ja ympyrällä ei ole ollenkaan leikkauspisteitä. Täten on mielekästä olettaa, että $v^2 - 4uw \geq 0$. Merkitään $g = v^2 - 4uw$, jolloin $y = -v/2u \pm \sqrt{g}$. Lauseiden 2, 3 ja 4 sekä lemman 3 mukaan $y \in F(\sqrt{g})$. Samoin myös ratkaisulle $x = (c - by)/a$ huomataan, että $x \in \mathbb{F}(\sqrt{g})$. Täten leikkauspiste (x, y) kuuluu tasoon $\mathbb{F}(\sqrt{g})$. □

Lemma 7. *Olkoon $\mathbb{F}$ reaalilukujen $\mathbb{R}$ alikunta. Olkoon annettuna konstruoituvat ympyrät $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c$ ja $(x - d)^2 + (y - e)^2 = f$, missä $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$. Mikäli ympyrät leikkaavat toisensa, on olemassa ei-negatiivinen luku $g \in F$ siten että leikkauspisteen/-pisteiden koordinaatti kuuluu kuntalaajennukseen $\mathbb{F}\left(\sqrt{g}\right)$.*

Todistus. Tarkastellaan yhtälöparin

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = c \\ (x-d)^2 + (y-e)^2 = f \end{cases}$$

ratkaisuja. Vähennetään yhtälöt puolittain ja sievennetään, jolloin saadaan

$$(2a - 2d)x + (2b - 2e)y = f - c + a^2 + b^2 - d^2 - e^2.$$

Tämä esittää suoran yhtälöä, mikäli $2a - 2d \neq 0 \neq 2b - 2e$. Jos näin ei olisi, eli $2a - 2d = 0 = 2b - 2e$, niin ympyröillä olisi sama keskipiste ja täten olisivat joko identtisiä tai eivät leikkaisi toisiaan. Oletetaan kuitenkin, ettei näin ole.

Tutkittaessa suoran yhtälöä, voidaan heti päätellä lauseen 6 tuloksen avulla, että jos luvut a, b, c, d, e ja f ovat konstruoituvia, niin yhtälö $(2a-2d)x+(2b-2e)y = f-c+a^2+b^2-d^2-e^2$ esittää konstruoituvan suoran yhtälöä. Suora kulkee ympyröiden leikkauspisteiden kautta, jolloin, jolloin suoran ja yhtälöparissa olevien ympyröiden leikkauspisteet ovat samalla kummankin ympyrän leikkauspisteitä. Merkitään leikkauspisteitä (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Mikäli leikkauspisteitä on vain yksi, niin $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$ ja ympyrät vain sivuavat toisiaan. Lemma 6 soveltamalla voidaan nyt etsiä suoran ja ympyrän leikkauspisteet. Leikkauspisteiden koordinaatit kuuluvat lemman 6 mukaan kuntalaajennukseen $\mathbb{F}\left(\sqrt{g}\right)$. Täten ympyröiden leikkauspisteet ovat konstruoituvia pisteitä. □

Kootaan nyt tässä luvussa tulleet matemaattiset käsitteet yhteen ja muotoillaan konstruoituvuuteen liittyvä tärkeä lause.

Lause 8. *Seuraavat väittämät ovat ekvivalentteja keskenään.*

i) Luku $a \in \mathbb{R}$ on konstruoituva.

ii) On olemassa äärellinen määrä reaalilukujen $\mathbb{R}$ alikuntia F siten, että $Q = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_k$, missä $a \in F_k$ jokaiselle indeksille j $(0 \leq j \leq k-1)$ F_{j+1} on neliöllinen kuntalaajennus kunnasta F_j.

Todistus. $i) \implies ii)$ Tämä on suoraan lemma 8.

$ii) \implies i)$ Olkoon annettuna pisteet $(0,0)$ ja $(1,0)$, jolloin on mahdollista alkuoletuksen mukaan konstruoida jana pituudeltaan $|a|$. Nyt voidaan käyttää tätä tietoa ja pistettä $(0,0)$ sekä pisteiden $(0,0)$ ja $(1,0)$ kautta kulkevaa suoraa konstruoitaessa pistettä $P = (a,0)$. Piste P on nyt kohdan $ii)$-mukaisessa kuntalaajennus tasossa F_k . Näytetään, että tämä kuntalaajennuksen taso F_k on saavutettavissa rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$. Mikäli taso F_k on konstruoituva ja oletuksen mukaan $P \in \mathbb{F}_k$, niin tällöin luku a on myös konstruoituva.

Piste P saadaan konstruoitua äärellisestä määrästä määritelmän 1 mukaisia konstruktioita, joista jokaisesta saadaan uusi konstruoituva piste määritelmän 4 mukaisilla leikkauspisteillä. Listataan kaikki näin saadut pisteet konstruktiojärjestyksessä, missä kaikki samasta konstruktiosta saadut pisteet voivat olla mielivaltaisessa järjestyksessä. Olkoon tutkittava piste P indeksin kohdassa j. Konstruoituvat pisteet ovat siten $P_1, P_2, \ldots, P_{j-1}, P_j$,. Jätetään listauksesta kaikki indeksin j jälkeiset mahdolliset konstruktiot, eli samasta konstruktiosta saadut pisteet, joiden tarkastelu ei ole tarpeen.

Näytetään induktiolla, että on mahdollista löytää rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ neliöllinen kuntalaajennus F siten, että pisteet $P_1, P_2, \ldots, P_j$ kuuluvat tasoon F. Pisteet P_1 ja P_2 ovat välttämättä alkuoletuksen kaksi pistettä $(0,0)$ ja $(1,0)$, jotka ovat tasossa $\mathbb{Q}$. Täten väite pätee indekseille $j = 1$ ja $j = 2$.

Tutkitaan sitten tapausta P_j, joka on konstruktion määritelmän mukaan konstruoitu pisteiden $P_1, P_2, \ldots, P_{j-1}$ tai jonkun niiden osajoukon avulla. Induktion alkuoletuksen mukaan näiden konstruktioiden pisteet ovat jossain kunnassa $\tilde{F}$, joka on saatu tietyllä määrällä neliöllisiä kuntalaajennuksia rationaaliluvuista $\mathbb{Q}$. Mutta nyt lemmojen 10, 11 ja 12 mukaan piste P_j on joko kunnassa $\tilde{F}$ tai $\tilde{F}(\sqrt{k})$, missä $k \in \tilde{\mathbb{F}}$ mutta $\sqrt{k} \notin \tilde{\mathbb{F}}$. Kummassakin tapauksessa P_j ja sitä edeltävät pisteet $P_1, P_2, \ldots, P_{j-1}$ kuuluvat kaikki kohdan $ii)$ mukaisiin neliöllisiin kuntalaajennuksiin. □

4.3 Klassisten ongelmien mahdottomuus

Palataan luvun 3 klassisiin ongelmiin. Nyt edellisten alalukujen teoreettinen pohja mahdollistaa antiikin ongelmien todistamisen mahdottomiksi. Mahdottomuus todistuksia löytyy kirjallisuudesta useita erilaisia ja erityyppisiä mutta tämän luvun todistukset pohjautuvat Hadlock (2018) todistuksiin. Todistusten idea pohjautuu lukujen irrationaalisuuteen, transkendenttisuuteen sekä polynomiyhtälön juurien laatuun.

4.3.1 Kuution kahdentaminen

Lemma 8. *Olkoon $\mathbb{F}(\sqrt{k})$ neliöllinen kuntalaajennus kunnasta $\mathbb{F}$. Jos $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{F}(\sqrt{k})$, niin $\sqrt[3]{2}$ on kuuluttava alkuperäiseen kuntaan $\mathbb{F}$.*

Todistus. Ks. Hadlock (2018) s. 25. □

Palataan nyt ongelmaan 1 ja muotoillaan se matemaattisesti uudestaan. Tässä kohtaa oletetaan lukijan tietävän, että luku $\sqrt[3]{2}$ on irrationaaliluku, eli sitä ei voida esittää muodossa n/m, missä n ja m ovat kokonaislukuja.

Lause 9. *Harpilla ja viivaimella on mahdotonta kahdentaa kuutiota, eli ts. konstruoida janaa, jonka pituus on $\sqrt[3]{2}$.*

Todistus. Todistetaan epäsuorasti kuution kahdentamisen mahdottomuus. Kuution kahdentaminen on ekvivalentti sen kanssa, että konstruoidaan jana pituudeltaan $\sqrt[3]{2}$. Oletetaan, että luku $\sqrt[3]{2}$ on konstruoituva ja päätellään tästä ristiriita.

Jos luku $\sqrt[3]{2}$ on konstruoituva, on lauseen 8 mukaan olemassa kuntalaajennukset $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{F}_j$, missä F_{i+1} on neliöllinen kuntalaajennus kunnasta F_i. Mikäli luku $\sqrt[3]{2}$ olisi konstruoituva, olisi pädettävä $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{F}_j$. Käytettäessä toistuvasti lemmaa 8 ja lausetta 5 päästään tulokseen, että $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$. Luku $\sqrt[3]{2}$ on kuitenkin irrationaaliluku eikä täten kuulu rationaalilukujen joukkoon. Koska päästiin ristiriitaan, pätee alkuperäinen väite, eli lukua $\sqrt[3]{2}$ ei voida konstruoida. □

4.3.2 Ympyrän neliöiminen

Palataan tutkimaan ongelmaa 2. Ympyrän neliöiminen perustuu polynomeihin ja niiden juuriin sekä luvun pii ominaisuuteen tähän liittyen.

Lemma 9. *Olkoon $\mathbb{F}(\sqrt{k})$ kunnan $\mathbb{F}$ neliöllinen kuntalaajennus. Jos a on sellaisen n asteisen polynomin juuri, jonka kertoimet ovat kunnan $\mathbb{F}(\sqrt{k})$ alkioita, niin a on myös sellaisen $2n$ asteisen polynomin juuri, jonka kertoimet ovat kunnan $\mathbb{F}$ alkioita.*

Todistus. Ks. Hadlock (2018) s.32. □

Lause 10. *Jokainen konstruoituva luku on jonkin rationaalikertoimisen polynomiyhtälön juuri.*

Todistus. Mikäli luku a on konstruoituva, niin lauseen 8 mukaan $a \in \mathbb{F}_j$, missä $\mathbb{F}_j$ on neliöllinen kuntalaajennus rationaaliluvuista $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2 \subset \ldots \subset \mathbb{F}_j$. Yksinkertaisimmassa tapauksessa luku a on ainakin juuri sellaiselle ensimmäisen asteen polynomille, jonka kertoimet ovat kunnassa $\mathbb{F}_j$. Tällainen polynomi voisi olla esimerkiksi $x - a = 0$. Käyttämällä toistuvasti lemman 10 sekä lauseen 8 tulosta saadaan, että luku a on sellaisen polynomin juuri, jonka aste 2^i ja kertoimet ovat kunnan $\mathbb{F}_{i-1}$ alkioita. Täten, kun $i = n$, on luku a sellaisen polynomin juuri, jonka asteluku on 2^n ja sen kertoimet ovat rationaalilukuja. □

Tiedetään, että jokaisella n-asteisella polynomilla on maksimissan n kappaletta juuria. Sanotaan, että luku a on algebrallinen kunnassa F, mikäli se on jonkin sellaisen polynomin juuri, jonka kertoimet ovat joukon F alkioita. Konstruoituvilla luvuilla käytännössä kertoimien on oltava rationaalilukuja tai neliöjuurilukuja. Esimerkiksi luku 5 on algebrallinen rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ kunnassa, sillä se on polynomin $x - 5$ juuri ja sen kertoimet kuuluvat rationaalilukuihin. Kaikki luvut, jotka eivät ole algebrallisia, ovat nimeltään transkendenttilukuja.

Lause 11. *Luku π on transkendenttiluku.*

Todistus. Ks. Hadlock (2018) s. 48. □

Palataan nyt ongelmaan 2 ja muotoillaan se uudestaan.

Lause 12. *Harpilla ja viivaimella on mahdotonta neliöidä ympyrää, eli konstruoida janaa pituudeltaan $\sqrt{\pi}$.*

Todistus. Lauseen 10 mukaan jokainen konstruoituva luku on rationaalikeroimisen polynomin juuri. Lauseen 11 mukaan luku π (ja täten sen neliöjuuri $\sqrt{\pi}$) ovat transkendentteja lukuja. Transkendenttiluvut eivät kuulu algebrallisiin sekä lauseen 10 mukaisiin lukuihin. Koska π ei voi olla lauseen 10 mukainen rationaalikertoimisen polynomiyhtälön juuri, ei se ole konstruoituva. Täten luku $\sqrt{\pi}$ ei ole myöskään konstruoituva eikä ympyrää voida siten neliöidä. □

4.3.3 Kulman kolmijako

Kulman kolmijako on mahdollista tietyille kulmille mutta yleisesti kaikkia kulmia ei voida harpin ja viivaimen avulla jakaa kolmeen yhtä suureen osaan. Esimerkiksi kulma $90°$ voidaan jakaa kolmeen osaan mutta kulmaa $60°$ ei voida. Mielenkiintoisen tästä tekee se, että kulma $60°$ on kyllä konstruoituvissa. Jos se olisi jaettavissa kolmeen osaan, niin tällöin kulma $20°$ olisi myös konstruoituvissa. Näin ei kuitenkaan ole ja näytetään tämä samaan tapaan kuin edellä epäsuoran todistuksen avulla.

Olkoon $\theta = 20°$, jolloin $3\theta = 60°$. Taulukkokirjasta voidaan poimia trigonometrinen yhtälö $\cos(3\theta) = 4(\cos(\theta))^3 - 3\cos(\theta)$ sekä yhtäpitävyys $\cos(60°) = \frac{1}{2}$. Kun merkitään $x = \cos(\theta)$, niin yhtälö sievenee muotoon $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Mikäli $\cos(20°) = x$ olisi konstruoituva, niin yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ juurien on myös oltava konstruoituva.

Lemma 10. *Olkoon $\mathbb{F}(\sqrt{k})$ neliöllinen kuntalaajennus kunnasta $\mathbb{F}$, missä $k \in \mathbb{F}$. Jos yhtälöllä $8x^3 - 6x - 1 = 0$ on juuri kunnassa $\mathbb{F}(\sqrt{k})$, on juuren kuuluttava tällöin alkuperäiseen kuntaan $\mathbb{F}$.*

Todistus. Ks. Hadlock (2018) s. 28. □

Palataan ongelmaan 3 ja muotoillaan se uudestaan.

Lause 13. *Mielivaltaista kulmaa α on mahdotonta jakaa kolmeen yhtä suureen osaan $\frac{\alpha}{3}$ harpin ja viivaimen avulla.*

Todistus. Osoitetaan epäsuoralla todistuksella väite epätodeksi. Kuten edellä todettiin, mikäli kulma $60°$ voitaisiin jakaa kolmeen osaan, olisi tällöin yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ $(x = 20°)$ juuri olisi konstruoituva. Lauseen 8 mukaan, mikäli x on konstruoituva, niin $x \in \mathbb{F}_j$ ja se saadaan neliöllisten kuntalaajennusten avulla $\mathbb{Q} = \mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}_1 \ldots \subset \mathbb{F}_j$ rationaaliluvuista. Käyttämällä toistuvasti lemman 10 sekä lauseen 8 tulosta päästään tulokseen, jonka mukaan yhtälön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ juuren on oltava rationaalilukujen $\mathbb{Q}$ joukossa.

Merkitään $x = \frac{a}{b}$ ja oletetaan, että rationaaliluku on supistetuimmassa muodossaan, eli luvuilla a ja b ei ole yhteisiä tekijöitä. Sijoitetaan tämä alkuperäiseen yhtälöön ja sievennetään.

$$
\begin{aligned}
8\left(\frac{a}{b}\right)^3 - 6 \cdot \frac{a}{b} - 1 = 0 \\
8a^3 - 6ab^2 - b^3 = 0
\end{aligned}
$$

Viimeisimmästä muodosta saadaan muodostettua kaksi yhtälöä luvuille a ja b.

$$
\begin{cases}
a^3 & = b\left(\dfrac{3}{4}ab + \dfrac{1}{8}b^2\right) \\
b^3 & = a\left(8a^2 - 6b^2\right)
\end{cases}
$$

Jokainen luku voidaan kirjoittaa alkulukujen tulona. Itse alkuluvuilla tulon tekijöinä on vain luku itse ja luku 1. Ensimmäisestä yhtälöstä voidaan päätellä, että mikäli luvulla b on alkulukutekijä p, niin luku p jakaa myös luvun a^3 ja täten luvun a. Samoin toisessa yhtälössä, mikäli luvulla a on alkulukutekijä q, niin luku q jakaa luvun b^3 ja täten luvun b. Koska luvuilla a ja b ei alkuoletuksen mukaan kuulunut olla yhteisiä tekijöitä, niin ainoat mahdolliset arvot luvuille a ja b ovat ± 1. Täten ainoat mahdolliset rationaaliset arvot $\frac{a}{b}$ ovat ± 1. Sijoittamalla yhtälöön $8x^3 - 6x - 1 = 0$ arvot ± 1, saadaan ristiriidat $8 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 - 1 = 1 = 0$ sekä $8 \cdot (-1)^3 - 6 \cdot (-1) - 1 = -3 = 0$. Tämä ristiriita todistaa alkuperäisen väitteen oikeaksi, eli luku x ei kuulu rationaalilukuihin tai siitä johdettuihin kuntalaajennuksiin eikä täten ole konstruoituva. □

5 Välineiden ekvivalenssit

Tässä luvussa palataan luvun 2 välineisiin ja tutkitaan, miten eri harpit ja viivaimet eroavat matemaattisessa mielessä toisistaan. Toisin sanoen näytetään, että euklidisella harpilla voidaan tehdä kaikki se, mitä modernilla harpillakin. Lisäksi näytetään toinen luvussa 2 esiintynyt mielenkiintoinen tulos: kaikki mitä voidaan tehdä harpilla ja viivaimella voidaan myös tehdä vain harpilla.

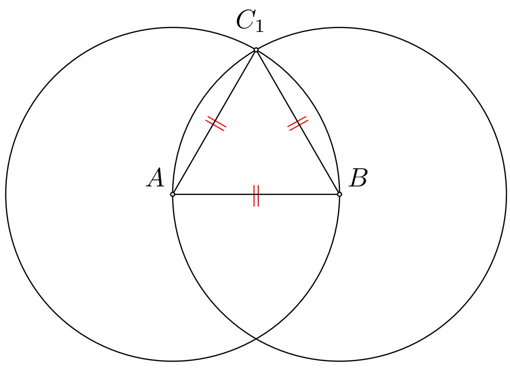
5.1 Harpin ekvivalenssiteoreema

Tämän lauseen ideana on todistaa, että Eukleideen aikainen harppi on yhtä voimakas työvälineenä kuin nykyisin käytetty moderni harppi. Kummallakin voidaan konstruoida ympyröitä mutta ongelmia tulee mittojen siirtämisessä ja kopioimisessa. Modernilla harpilla tämä on suhteellisen helppoa, sillä sen jalat voidaan lukittaa tiettyyn mittaan ja siirtää mittoja sen avulla. Euklidinen harppi "romahtaa kasaan" heti, kun sen nostaa paperista. Tämän takia mittojen siirtäminen ei onnistu samalla tavalla kuin modernilla harpilla.

Mittojen siirtäminen on kuitenkin mahdollista ja sen on todistanut itse Eukleides teoksessaan *Alkeet*. *Alkeiden* aikaan ei tietenkään ollut tietoakaan modernista harpista mutta *Alkeissa* esiintyvistä tuloksista voidaan päätellä sen aikaiseen, eli euklidiseen harppiin liittyviä ominaisuuksia. Tarkalleen ottaen tämä löytyy *Alkeiden* kirjasta 1 ja on propositio 2 Fitzpatrick (2008). Ennen kuin todistetaan tämä, niin näytetään tätä edeltävä propositio 1.

Ongelma 6. *(Alkeet: Propositio 1.) Olkoon annettuna konstruoituva jana AB. Konstruoi tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on janan AB pituus.*

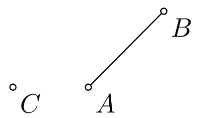
Konstruktio. Konstruoidaan pisteeseen A ympyrä A_B. Konstruoidaan samoin pisteeseen B ympyrä B_A. Kyseiset ympyrät on mahdollista piirtää euklidisella harpilla. Merkitään ympyröiden leikkauspisteitä C_1 ja C_2 (kuvaan merkitty vain C_1). Koska nämä pisteet saatiin kahden konstruoituvan ympyrän leikkauspisteistä, ovat C_1 ja C_2 määritelmän 4 konstruoituvia pisteitä. Yhdistetään janat AC_1 ja BC_1. Nyt kolmio $\triangle ABC_1$ (kuin myös $\triangle ABC_2$) on tasasivuinen.



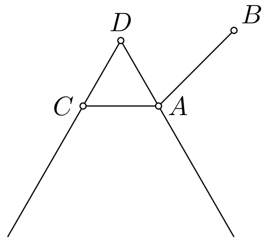
Todistus. Piste A on ympyrän A_B keskipiste ja pisteet B ja C_1 ovat ympyrän A_B kehällä, jolloin etäisyys niiden ja keskipisteen välillä on sama. Toisin sanoen $|AB| = |AC_1|$. Samoin piste B on ympyrän B_A keskipiste ja pisteet A ja B sijaitsevat ympyrän B_{AB} kehällä. Täten $|AB| = |BC_1|$.

Yhdistämällä tulokset saadaan, että $|AB| = |AC_1| = |BC_1|$. Koska kolmion kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, on se tasasivuinen. □

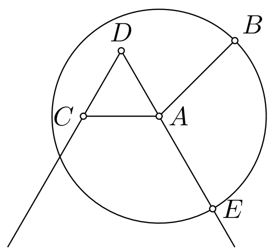
Ongelma 7. *(Alkeet: Propositio 2.) Olkoon annettuna konstruoituva jana AB ja konstruoituva piste C. Käyttämällä euklidista harppia ja viivainta, pisteeseen C on mahdollista konstruoida jana, joka on pituudeltaan yhtä suuri kuin janan AB pituus.*



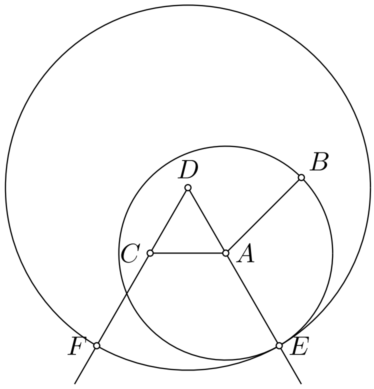
Konstruktio. Yhdistetään pisteet A ja C janaksi AC. Konstruoidaan ongelman 6 mukainen tasasivuinen kolmio (euklidisella harpilla), jonka yhden sivun pituus on $|CA|$ ja kolmio kulkee näiden pisteiden kautta. Nimetään kolmas kulma kuvan mukaisesti D. Jatketaan samalla sivuja CD ja DA määritelmän 1 sallimalla tavalla.



Konstruoidaan nyt ympyrä A_B. Merkitään ympyrän A_B ja janan DA jatkeen leikkauspistettä E.



Konstruoidaan ympyrä D_E ja merkitään tämän ja janan CD jatkeen leikkauspistettä kuvan mukaisesti F. Nyt $|CF| = |AB|$, eli annettu mitta on kopioitu pisteeseen C.



Todistus. Selvästi $|DC| = |DA|$, sillä $\triangle ACD$ on tasasivuinen ongelman 6 mukaan. Kuviosta $|AB| = |AE|$, sillä niillä on yhteinen piste A ja pisteet B ja E ovat ympyrän A_B kehällä, jolloin ne ovat kyseisen ympyrän säteitä. Samoin $|DE| = |DF|$, sillä ne ovat ympyrän D_E säteitä. Saatujen havaintojen perusteella janan CF pituudelle voidaan muodostaa yhtäpitävyys

$$|CF| = |DF| - |DC| = |DE| - |DC| = |DE| - |DA| = |AE| = |AB|.$$

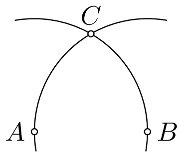
□

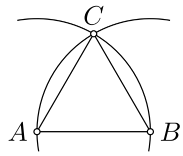
Ongelma 7 siis todisti, että euklidinen harppi on työvälineenä ekvivalentti modernin harpin kanssa. Toki janan siirtäminen haluttuun pisteeseen on työläämpää euklidisella harpilla ongelman 7 mukaisilla konstruktioilla mutta se on silti mahdollsita.

5.2 Mohrin ja Mascheronin teoreema

George Mohr (1640-1697) oli ensimmäinen matemaatikko, joka työskenteli konstruktioiden kanssa, joissa vaaditaan vain harppia. Vuonna 1672 hänen julkaisemassaan *Euclides Danicus* - kirjassa on 78 harppi-konstruktiota (Carnahan, 1932). Vuosisata myöhemmin italialainen matemaatikko Lorenzo Mascheroni puolusti vuonna 1797 julkaistussa teoksessaan *Geometria del Compasso* harpin asemaa sanoen sen olevan viivainta paljon tärkeämpi väline (Carnahan, 1932). Teoksessaan hän esittää konstruktioita pelkästään euklidista harppia käyttäen. Mohr ja Mascheroni pääsivät siten eri vuosisadoilla toisistaan riippumattomasti samaan tulokseen (Martin, 1998): kaikki mikä voidaan tehdä harpilla ja viivaimella, voidaan myös tehdä vain harpilla.

Viivaimen poisjättäminen geometriasta ei ole kuitenkaan välttämätöntä, sillä sen käyttö helpottaa konstruktioiden tekoa ja hahmottamista. Pelkän harpin avulla konstruktiot monimutkaistuvat tarpeettomasti (Carnahan, 1932). Tämä on kuitenkin mahdollista ja mielestäni erittäin kiinnostava tulos. Mutta mitä sitten käytännössä tarkoittaa konstruktio ilman viivainta? Alla oleva konstruktio tasasivuisesta kolmiosta valaisee asiaa;





Keskeinen teema on, että miten voidaan piirtää suora viiva ilman viivainta, esimerkiksi kuvan tapauksessa janat AB, BC ja AC? Harppi-konstruktioiden ideana on, että viivoja ei tarvitse nähdä, jotta ne olisivat konstruoitu. Viiva on aina määritelty, kun kaksi konstruoituvaa pistettä on määritelty. Viiva täytyy siis "kuvitella" konstruoiduksi. Viivaimen tarkoituksena on siten ainoastaan selkeyttää ja valoittaa konstruktion ideaa ja oikeellisuutta.

Jotta voimme osoittaa, että harppi on yhtä voimakas työväline kuin harppi ja viivain, on tutkittava määritelmiä 1 ja 4, eli konstruktioissa sallittuja operaatioita ja konstruoituvia pisteitä. Suoran konstruointi viivaimella voidaan heti alkuun sivuuttaa sillä kahden pisteen ollessa määriteltyjä on suorakin määritelty. Samoin määritelmän 1 mukainen ympyrän piirtäminen on triviaali, joten se onnistuu aina. Tarkastellaan nyt harppi-viivain-konstruktioiden sallittuja operaatioita, eli määritelmän 4 ehtoja 2-4. Yleistetään janat suoraksi, mikä on sallittua jatkamalla janoja sen päätepisteistä. Suora on siis määritelty, jos on annettuna kaksi konstruoituvaa pistettä.

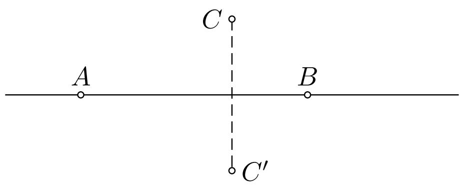
Määritelmän 4 mukaan tutkittavana on suorien välinen leikkauspiste, ympyröiden välinen leikkauspiste sekä suoran ja ympyrän välinen leikkauspiste. Tässä kohtaa tiedetään saman tien ympyröiden leikkauspisteiden olevan mahdollista konstruoida pelkästään harpin avulla, sillä käytössähän on pelkkä harppi, jolla voi piirtää vain ympyröitä. Todistettavaksi jää siis suorien välisen leikkauspisteen löytäminen sekä suoran ja ympyrän välisen leikkauspisteen löytäminen.

Huomautus 6. Vaikka teoreeman mukaan viivoja ei ole sallittua piirtää viivainta käyttäen, on ne konstruktioihin merkattu todistuksia varten matemaattisen selkeyden vuoksi. Todellisuudessa ainoastaan ympyrän kaaret ja pisteet ovat "näkyvillä"konstruktioissa.

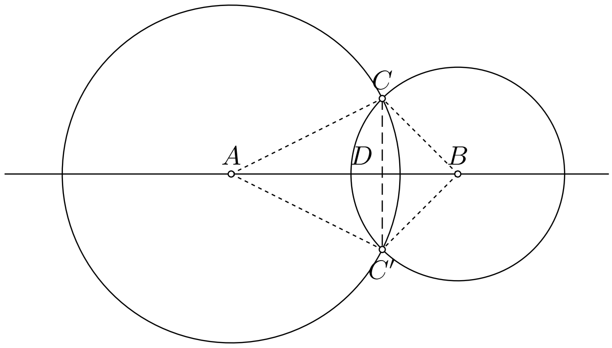
5.2.1 Aputuloksia

Johdetaan muutama aputulos ennen varsinaisen ongelman todistamista.

Lemma 11. *(Pisteen peilaus.) Olkoon annettuna konstruoituvat pisteet A, B ja C. Konstruoi harpilla piste C' siten, että se on pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suhteen peilikuva pisteestä C.*



Konstruktio. Konstruoidaan ympyrät A_C ja B_C. Ympyröiden toinen leikkauspiste on C ja merkitään toista C'. Piste C' on nyt pisteen C peilikuva pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran suhteen.



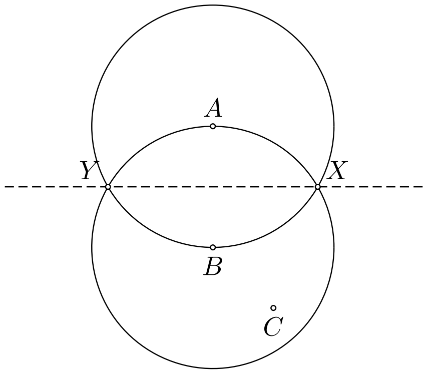
Todistus. Piste C' on pisteen C peilikuvapiste, jos janat AB ja CC' (tai niiden jatkeet) leikkaavat toisensa kohtisuorasti ja täten kummankin etäisyys suorasta AB on yhtä suuri. Näytetään tämä konstruktiokuvion avulla.

Nyt $\triangle ABC \cong \triangle ABC'$ (sss), sillä pisteet C ja C' ovat ympyrän A_C kehällä, jolloin $|AC| = |AC'|$. Samoin pisteet C ja C' ovat ympyrän B_C kehällä, jolloin $|BC| = |BC'|$. Kolmas sivu AB on kummallekin yhteinen. Koska kolmioilla on kolme yhtä pitkää sivua, ovat ne yhtenevät. Yhtenevyydestä seuraa $\angle CAB = \angle C'AB$, jolloin jana AB puolittaa kulman $C'AC$. Myös koska $|AC| = |AC'|$ on kolmio $\triangle ACC'$ tasakylkinen, jolloin jana AB puolittaa kannan CC' kohtisuorasti. Merkitään tätä pistettä D. Koska janat AB ja CC' leikkaavat toisensa kohtisuorasti, on piste C' pisteen C peilikuvapiste. Puolituksesta seuraa myös, että $|CD| = |C'D|$. $\square$

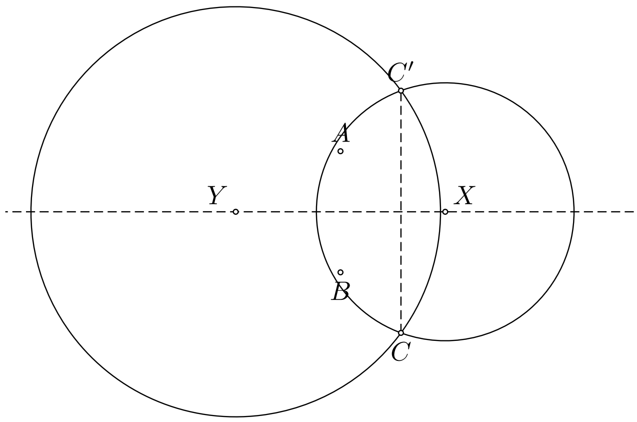
Seuraava lemma on sisällöltään ongelma 7, eli *Alkeiden* propositio 2. Propositio 2 tehtävänannossa piti kopioida jana tiettyyn pisteeseen. Seuraavassa lemmassa tehdään periaatteessa sama operaatio mutta siirretyn janan ympäri piirretään vielä ympyrä, jonka säde on tuon janan pituus. Ongelman 7 tulosta ei voida kuitenkaan suoraan hyödyntää, sillä sen ratkaisussa käytettiin viivainta.

Lemma 12. *Olkoon annettuna konstruoituvat pisteet A, B ja C. Konstruoi harpilla pisteeseen A ympyrä, jonka säde on $|BC|$.*

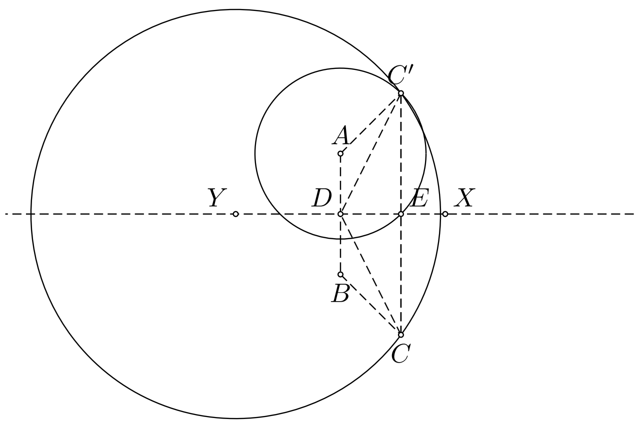
Konstruktio. Konstruoidaan ensin ympyrät A_B ja B_A ja nimetään näiden leikkauspisteet X ja Y. Lauseen 1 mukaan $AB \perp XY$.



Tehdään pisteelle C lemman 11 mukainen peilaus pisteiden X ja Y kautta kulkevan suoran suhteen ja nimetään peilauspiste C'.

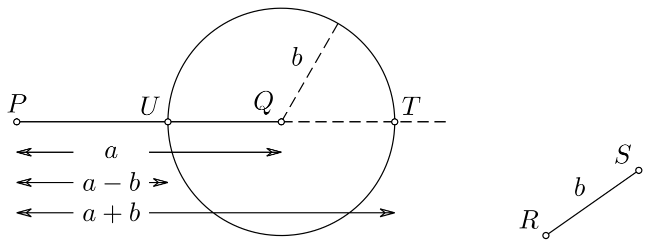


Konstruoidaan ympyrä A'_C. Ympyrä A'_C on kysytty ympyrä



Todistus. Piste A on pisteen B peilauspiste suoran XY suhteen samoin kuin piste C' on pisteen C peilauspiste suoran XY suhteen. Lemman 11 mukaan XY on kohtisuora kannanpuolittaja janalle CC' sekä samalla myös janalle AB. Merkitään näitä puolituspisteitä kuvan mukaisesti D ja E. Lemman 11 nojalla $|C'E| = |CE|$, $|AD| = |BD|$ sekä $\angle C'ED = \angle DEC = 90°$. Tarkastelujen perusteella $\triangle C'DE \cong \triangle CDE$ (ssk), jonka johdosta voidaan todeta, että $|DC| = |DC'|$. Lisäksi, koska $\angle EDA = \angle BDE = 90°$, niin $\angle C'DA = 90° - \angle EDC' = 90° - \angle CDE = \angle BDC$. Tämän perusteella $\triangle AC'D \cong \triangle BCD$ (ssk), jolloin $|AC'| = |BC|$. Täten ympyrän A'_C säde on $|BC|$ ja se on tehtävänannon mukainen ympyrä. □

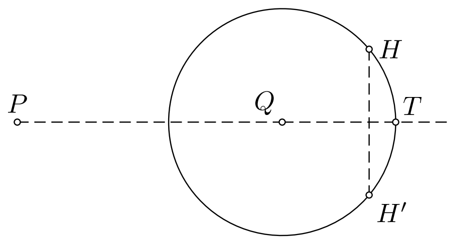
Lemma 13. *Olkoon annettuna konstruoituvat janat PQ ja RS, joiden pituudet ovat a ja b. Konstruoi harpilla pisteet U ja T siten, että $PU = a - b$ ja $PT = a + b$ sekä pisteet U ja T ovat janasta PQ jatketulla suoralla.*



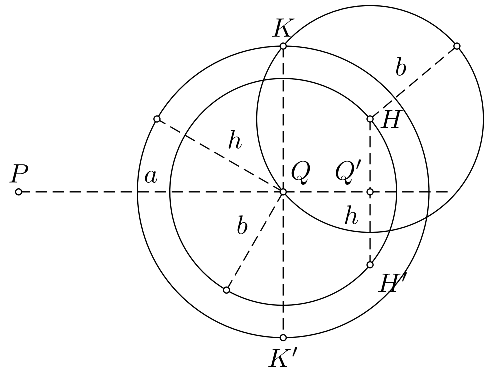
Ennen lemman varsinaista todistusta, esitetään muutama hyödyllinen aputulos.

Apulause 1. *Olkoon annettuna konstruoituvat janat PQ ja RS, joiden pituudet ovat a ja b. On mahdollista pelkällä harpilla konstruoida tasakylkinen puolisuunnikas, jossa erisuuntaisten sivujen pituus on b ja yhdensuuntaisten sivujen suhde on $1 : 2$.*

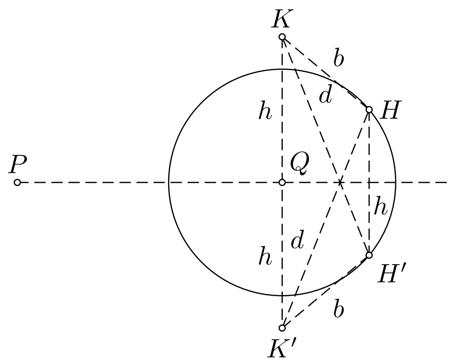
Konstruktio. Konstruoidaan ympyrä Q_b ja valitaan piste H ympyrän kehältä. Pisteen valinnalla ei ole konstruktion kannalta väliä, mutta konstruktion hengen mukaisesti on viisasta valita varmuudella konstruoituva piste. Tämä saadaan esimerkiksi tutkimalla ympyröiden P_Q ja Q_b leikkauspisteitä. Kahden ympyrän leikkauspiste on tehtävissä pelkällä harpilla. Toiseen näistä leikkauspisteistä tehdään vielä ympyrä, jonka säde on b ja merkataan tämän ja ympyrän Q_b oikeanpuoleista leikkauspistettä H. Konstruoidaan nyt lemman 11 mukainen peilauspiste H' janan jatkeen PQ suhteen. Merkitään $h = |HH'|$.



Konstruoidaan ympyrät H_b ja Q_h. Olkoon K kuvan mukaisesti näiden ympyröiden toinen leikkauspiste. Konstruoidaan tämän jälkeen piste K', joka on lemman 11 mukainen peilauspiste janan PQ suhteen.



Pisteet K, K', H ja H' muodostavat tasakylkisen puolisuunnikkaan $KK'HH'$, jossa $|HH'| : |KK'| = 1 : 2$. Merkitään vielä puolisuunnikkaan lävistäjiä kuvan mukaisesti $H'K = HK' = d$.



Todistus. Lemman 11 mukaan jana PQ ja sen jatke toimivat kohtisuorina puolittajina janoille KK' ja HH', joten janat KK ja HH' ovat yhdensuuntaiset. K' ja H' ovat pisteiden K ja H peilauspisteitä. Huomataan, että $\triangle HQQ' \cong \triangle H'QQ'$ (ssk) ja samoin $\triangle HKQ \cong H'K'Q$ (ssk). Koska $|KH| = b$, niin myös $|K'H'| = b$. Johtopäätöksenä pisteistä H, H', K ja K' muodostuva monikulmio on tasakylkinen puolisuunnikas, jossa yhdensuuntaisina sivuina ovat janat KK' ja HH'. Koska $|HH'| = h$, niin konstruktion mukaan $|KK'| = 2h$. Yhdensuuntaisten sivujen suhde $|HH'| : |KK'| = h : 2h = 1 : 2$. Täten nelikulmio $HH'KK'$ on kysytty tasakylkinen puolisuunnikas. □

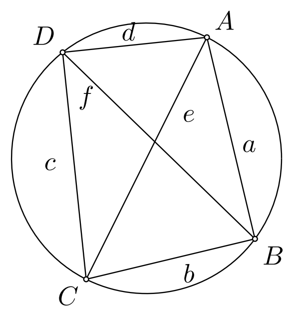
Näytetään seuraavaksi, että saadun puolisuunnikkaan $HH'KK'$ ympäri voidaan piirtää ympyrä. Toisin sanoen puolisuunnikas on mahdollista konstruoida ympyrän sisään. Tätä varten hyödynnetään tulosta, jonka mukaan nelikulmion vastakkaisten kulmien on oltava toistensa suplementtikulmia, jotta sen neljän kulmapisteen ympäri voidaan piirtää ympyrä.

Apulause 2. *Nelikulmio voidaan konstruoida ympyrän sisään, jos nelikulmion vastakkaiset kulmat ovat toistensa suplementtikulmia.*

Todistus. Ks. Ben-Ari (2019). □

Apulause 3. *(Ptolemaioksen lause.) Ympyrän sisään piirretyllä nelikulmiolle $ABCD$ pätee kuvan merkinnöillä*

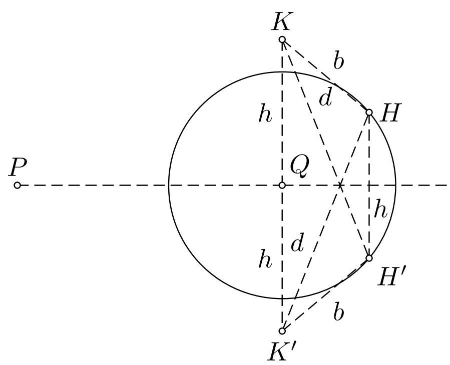
$$ef = ac + bd.$$



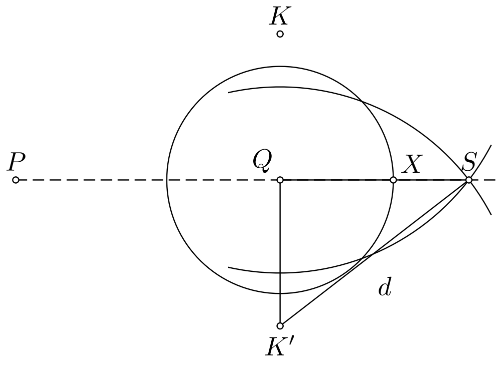
Todistus. Ks. Ben-Ari (2019). □

Nyt on tarpeeksi työkaluja lemman 13 todistamiseen, joten jatketaan konstruktiota apulauseen 1 mukaisesta konstruktiosta. Käytetään apulauseiden merkintöjä, jossa puolisuunnikkaan lävistäjät ovat pituudeltaan d, erisuuntaiset sivut b ja yhdensuuntaiset sivut h ja $2h$.

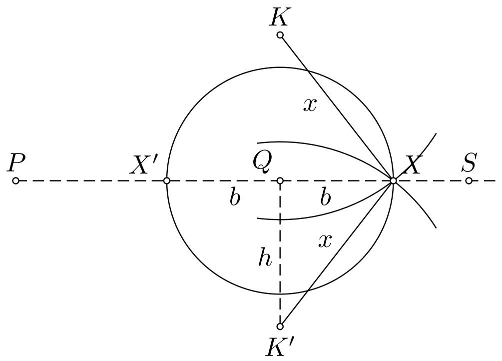
Konstruktio. (Lemma 13) Aloitetaan tarkastelu apulauseen 1 mukaisella konstruktiolla.



Konstruoidaan piste S ympyröiden K'_d ja K_d leikkauspisteeseen.



Konstruoidaan nyt ympyrät K_{QS} ja K'_{QS} ja merkitään niiden leikkauspistettä X. Piste X on nyt ympyrän Q_b kehällä ja sijaitsee pisteiden P ja Q kautta kulkevalla suoralla. Kuvassa $|PX| = a + b$.



Todistus. Merkitään $|K'X| = x$. Konstruktion mukaan X toteuttaa lemman 13 ehdot ja se saadaan konstruoitua ympyrän K_X ja K'_X leikkauspisteistä. Alun perin kuitenkin $|QS| = x$. Riittää siis osoittaa, että $|QS| = x$, jolloin piste X saadaan tämän avulla konstruoitua.

Sovelletaan konstruktion ensimmäiseen vaiheeseen apulausetta 3, jolloin saadaan:

$$d \cdot d = b \cdot b + h \cdot 2h \iff d^2 = b^2 + 2h^2.$$

Kolmio $\triangle K'QX$ on suorakulmainen, sillä lemman 11 mukaan $K'Q \perp QX$. Sovelletaan kolmioon $\triangle K'QX$ Pythagoraan lausetta, jolloin saadaan $x^2 = h^2 + b^2$ ja josta edelleen $b^2 = x^2 - h^2$. Sijoitetaan tämä tulos apulauseen 3 mukaiseen kaavaan $d^2 = b^2 + 2h^2$, jolloin saadaan $d^2 = (x^2 - h^2) + 2h^2 = x^2 + h^2$.

Kuvan kolmio $\triangle K'QS$ on suorakulmainen kolmio, sillä $QS \perp K'Q$. Pythagoraan lauseen mukaan $|QS|^2 + h^2 = d^2$, josta $|QS|^2 = d^2 - h^2$. Yhdistetään tämä edellä saatuun tulokseen $d^2 = x^2 + h^2$, jolloin saadaan $|QS|^2 = x^2 \iff |QS| = x$.

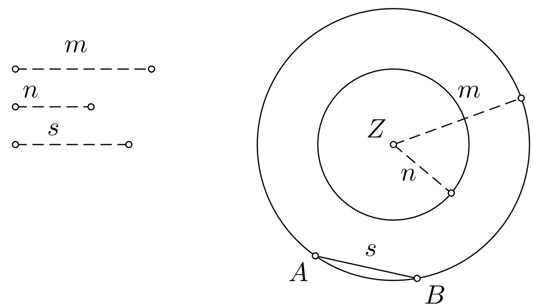
Koska lemman 11 mukaan $\angle XQK = \angle KQP = 90°$, niin $\angle XQP = 180°$. Oikokulman määritelmän mukaan sen kaikki pisteet sijaitsevat samalla suoralla, joten pisteet X, Q ja P ovat samalla suoralla.

On siis mahdollista konstruoida pituus x, jonka avulla voidaan löytää kuvan mukainen piste X. Tämän avulla voidaan konstruoida ympyrä Q_X. Nyt piste X' voidaan löytää lemman 11 mukaan peilaamalla piste X janan KK' suhteen.

Alkupäräinen tavoite oli konstruoida janat $a + b$ ja $a - b$. Koska $|QX| = b$ ja $|PQ| = a$, niin tällöin $|PX| = a + b$ ja $|PX'| = a - b$. $\square$

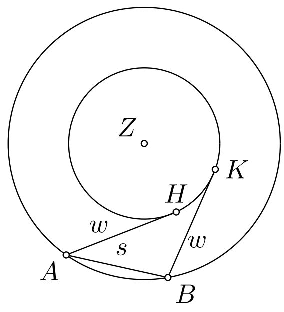
Lemma 14. *Olkoon annettuna konstruoituvat janat, joiden pituudet ovat n, m ja s. Konstruoi harpilla jana, jonka pituus on $x = \frac{n}{m}s$.*

Konstruktio. Oletetaan, että $m > n$. Tällä ei ole laskujen kannalta väliä, sillä suuruusjärjestys voidaan myös kääntää toisinpäin. Konstruoidaan nyt yhden annetuista janoista päätepisteeseen Z ympyrät Z_n ja Z_m sekä ympyrälle Z_m jänne AB pituudeltaan s. Sattumanvaraisuuden välttämäiseksi pisteet A ja B voidaan konstruoida piirtämällä annettujen mittojen säteisiä ympyröitä ja tutkimalla niiden leikkauspisteitä. Oletetaan kuitenkin, että jänne AB ei leikkaa ympyrää Z_n. Jos se kuitenkin leikkaa, niin voidaan konstruoida lemman 13 mukainen skaalaus ympyrän säteille n ja m, jolloin ympyrä suurenevat. Esimerkiksi lemman 13 mukaiset konstruktiot $n + n = 2n$ ja $m + m = 2m$ antavat ympyrät Z_{2n} ja Z_{2m}. Kun kumpaakin lukua n ja m skaalataan samalla luvulla, pysyy tavoiteltu tulos $x = \frac{kn}{km}s = \frac{n}{m}s$ samana, jollakin kokonaisluvulle k. Saadaan lopulta kuvan mukainen konstruktio.

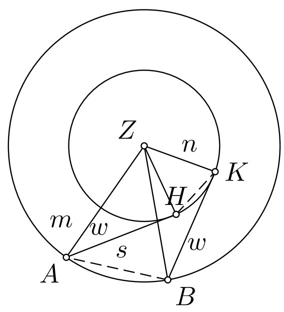


Valitaan mikä tahansa piste ympyrän Z_n kehältä ja merkitään sitä H. Jälleen satunnaisuuden välttämiseksi tämä piste voidaan myös valita esimerkiksi ympyröiden A_s ja Z_n leikkauspisteiden avulla, sillä pisteen valinnalla ei ole väliä lopputuloksen kannalta, kunhan se vain sijaitsee ympyrällä Z_n.

Merkitään $|AH| = w$ ja konstruoidaan ympyrä B_w. Merkitään tämän sekä ympyrän Z_n toista leikkauspistettä K kuvan mukaisesti.



Tehdään kuvan mukaiset apumerkinnät, jolloin $|HK| = \frac{n}{m}s$ on kysytty jana.



Todistus. Kuviosta voidaan todeta, että $\triangle AHZ \cong \triangle BKZ$ (sss: $|AZ| = |BZ| = m, |AH| = |BK| = w, |HZ| = |KZ| = n$). Olkoon $\alpha = \angle AZB$, jolloin yhdenmuotoisuuden mukaan myös $\alpha = \angle BZK$ ja olkoon $\beta = \angle BZH$. Nyt huomataan, että $\angle AZB = \angle AZH - \angle BZH = \alpha - \beta = \angle BZK - \angle BZH = \angle HZK$, eli toisin sanoen $\angle AZB = \angle HZK$.

Kolmiot $\triangle ABZ$ ja $\triangle HKZ$ ovat kummatkin tasakylkisiä ja niillä on yhtä suuret huippukulmat ($\angle AZB = \angle HZK$), jolloin $\triangle ABZ \sim \triangle HKZ$ (kk). Merkitään $|HK| = x$, jolloin yhdenmuotoisuuden perusteella saadaan

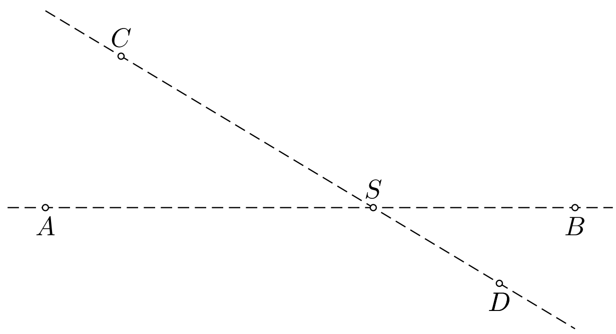
$$\begin{aligned} \frac{|AZ|}{|AB|} &= \frac{|ZK|}{|HK|} \\ \frac{m}{s} &= \frac{n}{x} \\ x &= \frac{n}{m}s. \end{aligned}$$

$\square$

5.2.2 Suorien välinen leikkauspiste

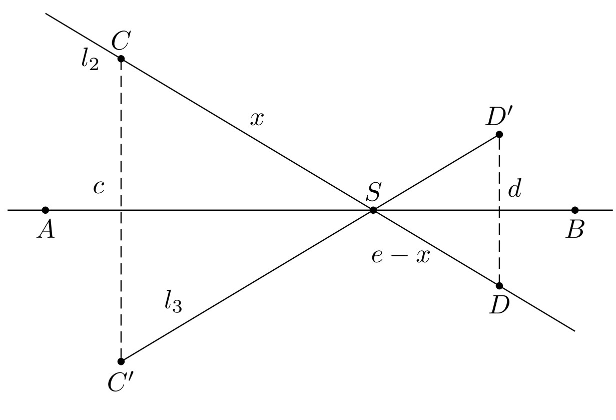
Edellisen luvun aputuloksien avulla voidaan nyt näyttää kahden suoran sekä suoran välisen leikkauspisteen olevan mahdollista löytää pelkän harpin avulla. Seuraavassa lauseessa suorat ovat piirretty visuaalisen selkeyden vuoksi mutta oikeasti harppi-konstruktioissa ne eivät ole näkyvillä.

Ongelma 8. *Olkoon l_1 pisteiden A ja B kautta kulkeva suora sekä l_2 pisteiden C ja D kautta kulkeva suora. On mahdollista löytää harpin avulla suorien l_1 ja l_2 leikkauspiste.*

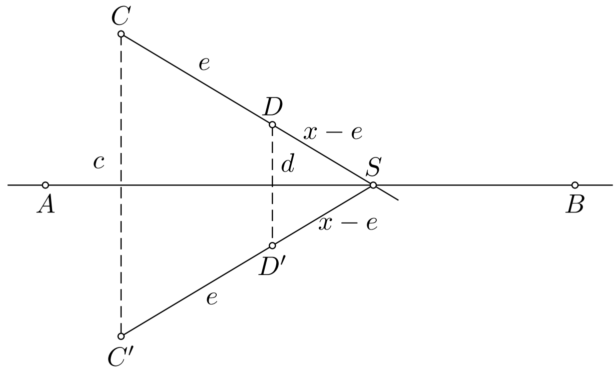


Konstruktio. Peilataan lemman 11 mukaan pisteet C ja D pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran l_1 suhteen pisteiksi C' ja D' ja merkitään näiden pisteiden kautta kulkevaa suoraa l_3. Pisteet C ja D voivat sijaita joko suoran l_1 samalla puolella tai eri puolella, jolloin mahdollisia tapauksia on kaksi. Merkitään suorien l_2 ja l_3 leikkauspistettä S. Tavoitteena on saada konstruoitua seuraavat pituudet $|CS| = x, |CC'| = c, |DD'| = d, |CD| = e$ sekä $c \pm d$. Näiden avulla voidaan konstruoida haluttu piste S.

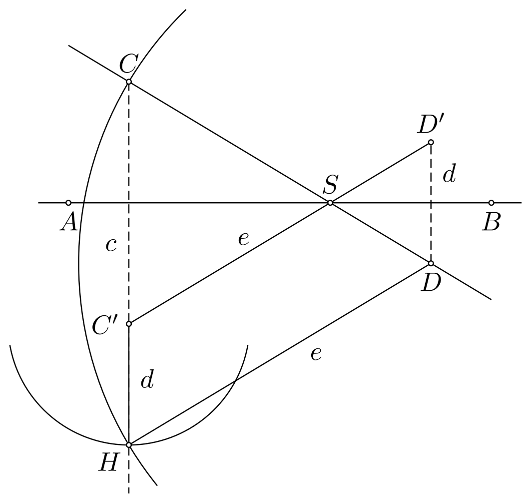
Pisteet voivat sijaita suoran suhteen siis kahdella eri taavalla. Ensimmäisessä tapauksessa pisteet C ja D sijaitsevat suoran eri puolilla.



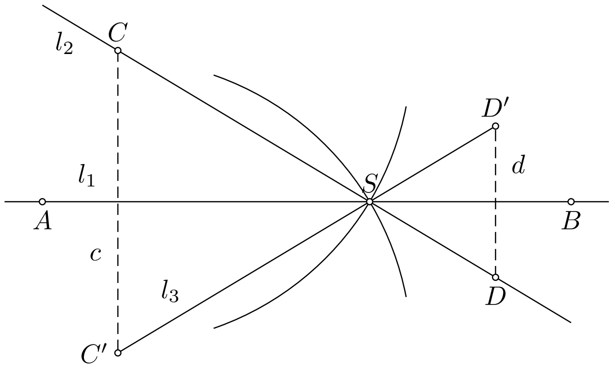
Toisessa tapauksessa pisteet C ja D ovat suoran samalla puolella.



Piirretään konstruktiot vain ensimmäiseen tapaukseen mutta todistetaan myöhemmin tulos kummallekin tapaukselle. Konstruoidaan nyt ympyrät C'_d ja D_e ja merkitään näiden leikkauspistettä H.



Kuvassa $|CH| = c + d$. Tämän avulla voidaan lemmaa 14 hyödyntäen konstruoida pituus $|CS| = x = \frac{c}{c+d} \cdot e$, sillä kaikki tässä esiintyvät mitat tiedetään. Piste S saadaan x:n avulla piirtämällä ympyrät C_x ja C'_x, jolloin niiden leikkauspiste on haluttu piste S. Piste S on siten alkuperäisten suoren leikkauspiste.



Todistus. Osoitetaan, että piste S on löydettävissä. Piste S sijaitsee pisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla l_1, joka voidaan osoittaa tunnistamalla kuvasta yhdenmuotoisia kolmioita.

Tutkitaan tapausta, jossa pisteet ovat suoran l_1 eri puolilla. Merkitään janan CC' ja suoran l_1 leikkauspistettä Z. Nyt $\triangle CZS \cong \triangle C'ZS$ (sss), sillä $|CZ| = |C'Z|$, $\angle SZC = 90° = \angle C'ZS$ ja SZ on yhteinen sivu kolmioille. Tästä voidaan päätellä, että $|CS| = |C'S|$. Samaa päättelyketjua soveltamalla voidaan näyttää, että $|D'S| = |DS|$.

Lisäksi kuviosta huomataan yhdenmuotoisuus $\triangle CSC' \sim \triangle DSD'$ (kk), sillä $\angle DSD' = \angle CSC'$ sekä lemman 11 tuloksen nojalla janat CC' ja DD' leikkaavat kohtisuorasti janan AB, jolloin on pädettävä $\angle C'CS = \angle SD'D$. Yhdenmuotoisuuden verrannon mukaan, kun $|CS| = |C'S| = x$ niin saadaan

$$\frac{|CS|}{|SD'|} = \frac{|CC'|}{|DD'|} \iff \frac{x}{e-x} = \frac{c}{d},$$

josta ratkaisemalla x saadaan $x = \frac{c}{c+d}e$.

Mikäli pisteet C ja D ovat suoran l_1 samalla puolella, voidaan yhdenmuotoisuuden verranto muotoilla eri tavalla. Selvästi konstruktion kuviosta $\triangle CSC' \cong DSD'$ (kk) samaan tapaan kuin edellä. Kun käytetään edellisen kohdan merkintöjä, niin $\dfrac{x}{x-e} = \dfrac{c}{d}$ ja tästä ratkaistaan x, jolloin saadaan $x = \dfrac{c}{c-d}e$.

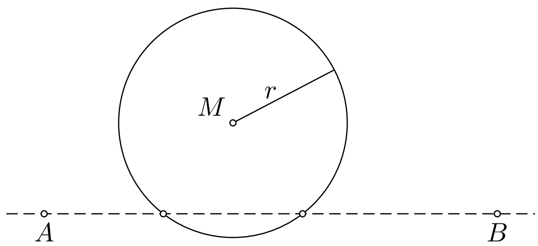
Kun yhdistetään kaksi tapausta, niin yleisesti $x = \dfrac{c}{c \pm d}e$. Lähdetään etsimään tässä kaavassa esiintyviä mittoja. Näytetään, että konstruktiossa saatu piste H on pisteiden C ja C' kautta kulkevalla suoralla, jolloin voitaisiin suoraan laskea $|CH| = |CC'| + |C'H| = c + d$. Mikäli C ja D ovat suoran l_1 samalla puolella, pätee $|CH| = c - d$.

Pisteen H määrittelyn perusteella saadaan, että $|CD| = |DH| = e$ ja lemman 11 peilauksen perusteella myös $|C'D'| = e$. Lisäksi $|C'H| = |DD'| = d$. Koska nelikulmion $C'DD'H$ vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkiä, on se suunnikas. Lemman 11 peilauksen määritelmän mukaan janat CC' ja DD' ovat yhdensuuntaisia keskenään ja suunnikkaan määritelmän mukaan myös DD' ja $C'H$ ovat keskenään yhdensuuntaisia. Täten myös janat CC' ja $C'H$ ovat yhdensuuntaisia keskenään. Koska kummallakin janalla on yksi yhteinen piste ja ne ovat yhdensuuntaisia, on niiden pakko olla samalla suoralla. Siis janat CC' ja $C'H$ ovat samalla suoralla.

Pituudet c, d ja e ovat annettuja ja edellisen tarkastelun perusteella pituus $|CH| = c \pm d$ on myös löydettävissä. Nyt lemman 14 mukaan on mahdollista konstruoida jana $x = \frac{c}{c \pm d} e$. Eli kun saadaan selville pituudet c, d ja e on mahdollista konstruoida harpilla piste S, joka on haettu suorien leikkauspiste. Tämä saatiin konstruoimalla ympyrät C_x ja C_x', joiden leikkauspiste piste S on. Piste S on siis alkuperäisten suorien leikkauspiste, joka on mahdollista löytää vain harpin avulla. □

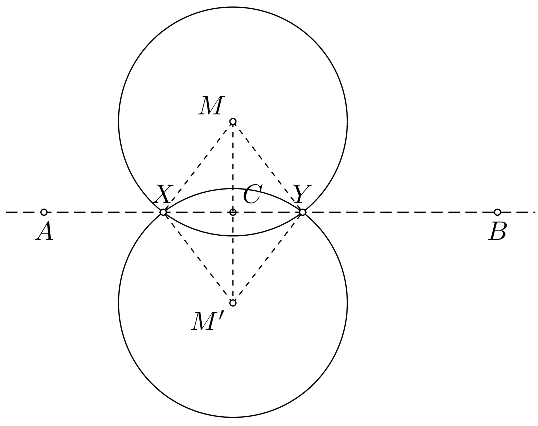
5.2.3 Suoran ja ympyrän väliset leikkauspisteet

Ongelma 9. *Olkoon annettuna ympyrä M_r ja pisteiden A ja B kautta kulkeva suora l_1. On mahdollsita löytää harpin avulla suoran ja ympyrän leikkauspiste(/-pisteet).*



Konstruktio. Tässä on kolme mahdollisuutta: suoralla ja ympyrällä ei ole yhtään yhteisiä leikkauspisteitä tai sitten niillä on yksi tai kaksi leikkauspistettä. Aloitetaan tutkimus kahdesta leikkauspisteestä.

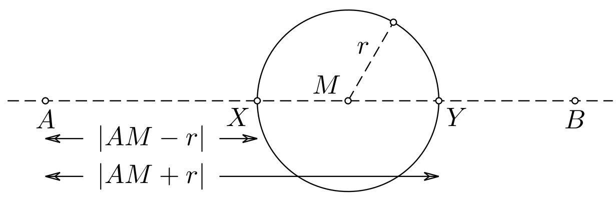
Konstruoidaan ensin lemman 11 nojalla pisteen M peilauspiste suoran l_1 suhteen ja merkitään tätä M'. Piirretään ympyrä M_r'. Ympyröiden M_r ja M_r' leikkauspisteet X ja Y ovat ympyrän M_r sekä suoran l_1 leikkauspisteet.



Todistus. Tehdään kuvaan apumerkinnät, missä C on janojen MM' ja AB leikkauspiste. Yhdistetään myös kuvan pisteet M, M', X, Y ja C kolmioiksi. Kuvan merkinnöillä voidaan päätellä $\triangle CMX \cong \triangle CMY$ (sks) sekä $\triangle CM'X \cong \triangle CM'Y$ (sks). Myös $\triangle CMX \cong \triangle CM'X$ (sks) sekä $\triangle CMY \cong \triangle CM'Y$ (sks), jolloin kaikki kuvan neljä kolmiota ovat yhdenmuotoiset keskenään. Peilauksen määritelmän mukaan $|MC| = |M'C|$ ja piste C jakaa janan MM' kahtia sekä $MM' \perp AB$. Yhdenmuotoisten kolmioiden perusteella pisteet X, C ja Y sijaitsevat samalla suoralla. Toisaalta lemman 11 mukaan piste C on samalla suoralla pisteiden A ja B kanssa, jolloin pisteet X ja Y ovat myöspisteiden A ja B kautta kulkevalla suoralla l_1.

Mikäli ympyröillä M_r ja M_r' on yksi yhteinen leikkauspiste, leikkaavat suorat l_1 ja ympyrä M_r toisensa tasan kerran. Mikäli ympyröillä M_r ja M_r' ei ole yhteisiä leikkauspisteitä, eivät alkuperäinen suora ja ympyräkään leikkaa toisiaan.

Erityistapaus on se, että piste M sijaitsee jo valmiiksi suoralla l_1. Tätä ei luonnollisesti voi täsmällisesti havaita suoraan silmin mutta sen voi peilauksen yhteydessä huomata: mikäli piste M peilattaisiin suoran l_1 suhteen, tulisi aluksi piirtää ympyrät A_M sekä B_M. Mikäli nämä ympyrät leikkaavat toisensa vain kerran, eli sivuavat toisaan, sijaitsee piste M valmiiksi jo samalla suoralla pisteiden A ja B kanssa. Mikäli M sijaitsee suoralla l_1, ei edellä näytettyä konstruktiota voi sellaisenaan toteuttaa. Tällöin pitää tehdä lemman 13 mukainen konstruktio ja etsiä pisteet X ja Y siten, että $|AX| = |AM - r|$ ja $|AY| = |AM + r|$ kuvan mukaisesti. Tämä osoitettiin edellä mahdolliseksi, joten pisteet ovat konstruoituvia pelkällä harpilla.



□

Lukujen 5.2.2. ja 5.2.3. mukaan on mahdollista löytää vain harppia käyttämällä suorien välinen leikkauspiste sekä suoran ja ympyrän väliset leikkauspisteet. Tämä täydentää määritelmän 4 ehdot konstruoituvista pisteistä. Tulosten perusteella harppilla voidaan tehdä tasan kaikki ne operaatiot, mitä voidaan tehdä harpilla ja viivaimellakin.

6 Säännöllinen monikulmio

Säännöllisten monikulmioiden konstruoituvuus tuo harppi - viivain - konstruktioihin uutta näkökulmaa ja siihen liittyy paljon mielenkiintoista historiaa sekä monia historiallisesti merkittäviä lauseita. Monikulmioiden konstruoituvuus palautuu antiikin Kreikkaan mutta samoin kuin konstruoituvien lukujen yhteydessä, selvisi matemaattiset työkalut näiden käsittelemiseen vasta myöhemmin 1600- ja 1700-lluvulla (Richeson, 2019). Monikulmioihin liittyvän moniulotteisen matematiikan vuoksi esittelen vain lyhyesti historiaa sekä tässä tutkielmassa esiintyvän teorian valossa kolme monikulmion konstruktiota.

6.1 Lyhyt historia

Eukleides itse näytti *Alkeet*-teoksessaan konstruktiot säännöllisille monikulmioille, joiden sivujen lukumäärä oli 3, 4 ja 5 (Jones, 2012). Antiikin kreikkalaiset osasivat konstruoida myös sellaiset monikulmiot, joiden sivujen lukumäärä on kaksinkertainen verrattuna aikaisempiin konstruoituviin monikulmioihin (Sarhangi ym., 2007). Täten esimerkiksi säännölliset monikulmiot, joiden sivujen lukumäärä on 6, 8, 10, 12, 24, 48, … ovat konstruoituvia. Tämä palautuu kulmanpuolittamisen lauseeseen (Jones, 2012). Konstruoituva kulma on aina mahdollista puolittaa.

Tietyt monikulmiot olivat kuitenkin sellaisia, mitä antiikin kreikkalaiset eivät osanneet konstruoida tai todistaa mahdottomiksi. Kaikki muuttui vuonna 1796, kun vain 18-vuotias saksalainen matematiikan opiskelija Carl Friederick Gauss julkaisi teoksensa *Disquisitiones arithmeticae*. Tässä Gauss onnistui vakuuttavasti konstruoimaan harpilla ja viivaimella 17-sivuisen säännöllisen monikulmion. Hän käytti todistuksessaan puhtaan geometrian sijasta algebran ja aritmetiikan metodeja. (Kazarinoff, 2003; Richeson, 2019)

Gaussin mukaan kaikki säännölliset monikulmiot, joiden kulmien lukumäärä on pariton, ovat konstruoituvia, jos ja vain jos luku on niin kutsuttu Fermat'n alkuluku $2^k + 1$ (missä $k = 2^n$) tai luku on konstruoituvien lukujen jokin tulo, joissa esiintyy luvun 2 toinen potenssi. Toisin sanoen, mikäli säännöllinen n-monikulmio on konstruoituva, niin se voidaan esittää muodossa $n = 2^j p_1 p_2 \dots p_k$, missä $j \geq 0$ ja kullekin indeksille i $(1 < i < k)$ p_i on Fermat'n alkuluku. Täten esimerkiksi luvut 7 ja 9 eivät ole konstruoituvia mutta esimerkiksi luku 204 on, sillä $3 \cdot 17 \cdot 2^2 = 204$, missä luvut 3 ja 17 ovat Fermat'n alkulukuja. (Sarhangi ym., 2007; Jones, 2012; Richeson, 2019)

Gauss julkaisi teoksensa *Disquisitiones Arithmeticae* lopussa kuuluisan jakson lukuja, jotka vastasivat antiikin kreikkalaisia kauan vaivanneeseen kysymykseen: mitkä n-kulmaiset säännölliset monikulmiot ovat konstruoituvia ja mitkä eivät? Vaikka kreikkalaiset osasivat konstruoida tiettyjä tapauksia, eivät he osanneet muodostaa yleistä algebrallista mallia monikulmioiden konstruoituvuudelle. Gauss rajoittui alle 300-sivuisiin monikulmioihin laatiessaan teokseensa seuraavan listauksen. Lihavoidut luvut viittaavat sellaisiin monikulmioihin, jotka jo antiikin kreikkalaiset tiesivät olevan konstruoituvia. Luvut, jotka kuuluvat listauksen ulkopuolelle voidaan konstruoida Platonisen rajoituksen kieltämillä tavoilla esimerkiksi kartioleikkauksilla tai neusis-konstruktioilla. (Richeson, 2019)

$$\mathbf{3, 4, 5, 6, 8, 10, 12}, 15, \mathbf{16}, 17, \mathbf{20, 24, 30}, \mathbf{32}, 34, \mathbf{40}, \mathbf{48}, 51, \mathbf{60}, \mathbf{64}, \mathbf{68}, \mathbf{80},$$
$$85, \mathbf{96}, 102, \mathbf{120}, \mathbf{128}, 136, \mathbf{160}, 170, \mathbf{192}, 204, \mathbf{240}, 255, \mathbf{256}, 257, 272.$$

6.2 Monikulmion konstruointi

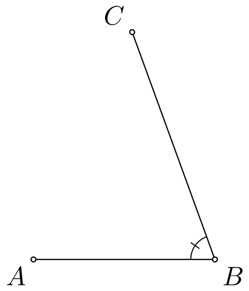
Näytetään kolme monikulmion konstruointia: neliö, säännöllinen viisikulmio sekä säännöllinen kahdeksankulmio. Tasasivuisen kolmion konstruointi on esitetty ongelman 6 yhteydessä, joka on *Alkeiden* propositio 1.

Säännöllinen monikulmio voidaan aina konstruoida ympyrän sisään, sillä jokainen monikulmion kärjistä on ympyrän kehällä. Tällöin kärkien etäisyys ympyrän ja samalla monikulmion keskipisteeseen on vakio. Kun kahdesta vierekkäisestä kärjestä piirretään jana ympyrän keskipisteeseen, saadaan ympyrän keskipisteeseen aukeava keskuskulma. Monikulmio on konstruoituva tasan silloin, kun sen keskuskulma on konstruoituva. Esimerkiksi neliölle keskuskulma on $90°$, ja kuten konstruoituvien lukujen osiossa on osoitettu, voidaan suorakulma konstruoida. Esimerkiksi viisikulmion tapauksessa tulisi konstruoitavaksi keskuskulma α, jolle pätee $\sin(\alpha) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)}\right)$. Toki tämä α- kulma on mahdollista löytää konstruoimalla suorakulmainen kolmio, josta löytyy sivut 4 ja $\sqrt{2\left(\sqrt{5}+5\right)}$. Tämän jälkeen tulisi kulman kyljistä rajata oikean mittaiset osat (monikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde) ja kopioida kulma viiteen kertaan. Toisinaan monikulmioiden konstruointi on helpompi tehdä vaiheittain sivu kerrallaan, jolloin keskuskulmaa ei tarvitse suoraan konstruoida.

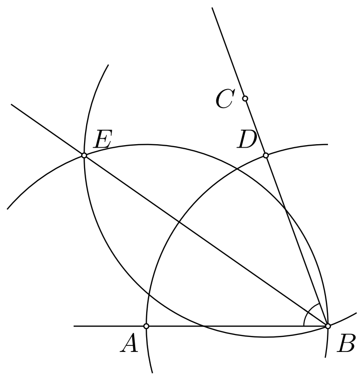
Aina, kun löydetään yksi konstruoituva n-kulmainen säännöllinen monikulmio, on mahdollista löytää $2n$- kulmainen säännöllinen monikulmio. Tämä perustuu edellä mainittuun keskuskulman puolitukseen, jonka jo Antiikin kreikkalaisetkin hoksasivat. Näytetään sitä varten kulmanpuolitus harpilla ja viivaimella.

Ongelma 10. *Olkoon annettuna konstruoituva kulma. Kulma on mahdollista puolittaa harpilla ja viivaimella.*

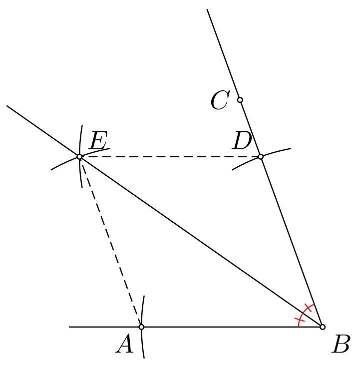
Konstruktio. Konstruoituva kulma tarkoittaa määritelmän 5 mukaan sitä, että se koostuu kahdesta konstruoidusta janasta. Olkoon konstruoitu kulma kuvan mukainen kulma $\angle CBA$.



Jatketaan janoja AB ja BC puolisuoriksi ja konstruoidaan ympyrä B_A. Ympyrä leikkaa kulman kyljet pisteissä A ja D. Konstruoidaan nyt ympyrät A_B ja D_B. Kummatkin ympyrät kulkevat pisteen B kautta. Merkitään toista leikkauspistettä E. Pisteiden B ja E kautta kulkeva jana puolittaa nyt kulman $\angle CBA$.



Todistus. Konstruktion perusteella $|AB| = |BD|$, sillä ne ovat kummatkin saman ympyrän B_A säteitä. Samoin $|AE| = |DE|$, sillä ne ovat samansäteisten ympyröiden säteitä. Kun nämä yhdistetään, saadaan yhdenmuotoisuus $\triangle ABE \cong \triangle BDE$ (sss), sillä kolmioilla on myös kolmas yhteinen sivu BE. Täten kulmat $\angle EBA$ ja $\angle DBE$ ovat yhtä suuria ja jana EB puolittaa kulman $\angle DBA = \angle CBA$.



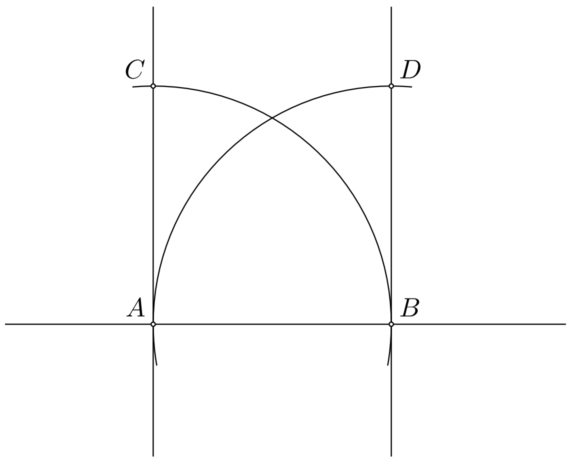
□

6.2.1 Neliö

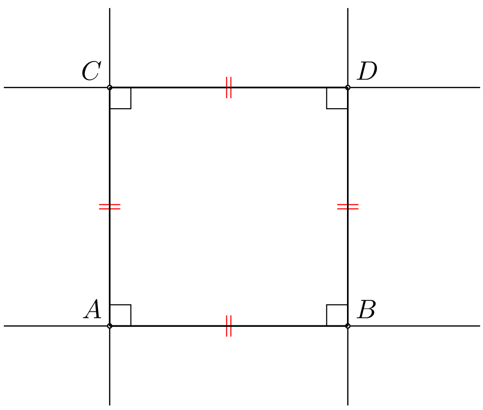
Ongelma 11. *Olkoon annettuna kaksi konstruoituvaa pistettä A ja B sekä yksikköjana. On mahdollista konstruoida neliö, jonka sivun pituus on $|AB|$.*

Konstruktio. Yhdistetään pisteet A ja B janaksi ja jatketaan tätä kumpaankin suuntaan suoraksi. Neliössä sivujen väliset kulmat ovat suorakulmia ja jokainen sivu on yhtä pitkä. Konstruoidaan ensin suorakulmat pisteisiin A ja B lemman 1 mukaisesti yksikköjanan I avulla.

Piirretään nyt ympyrä A_B sekä B_A ja merkitään näiden ympyröiden sekä lemman 1 mukaisten kohtisuorien yläpuolisia leikkauspisteitä kuvan mukaisesti C ja D.



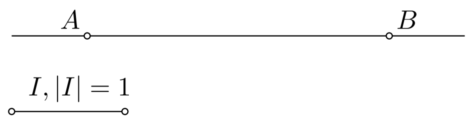
Nelikulmio $ABCD$ on neliö.



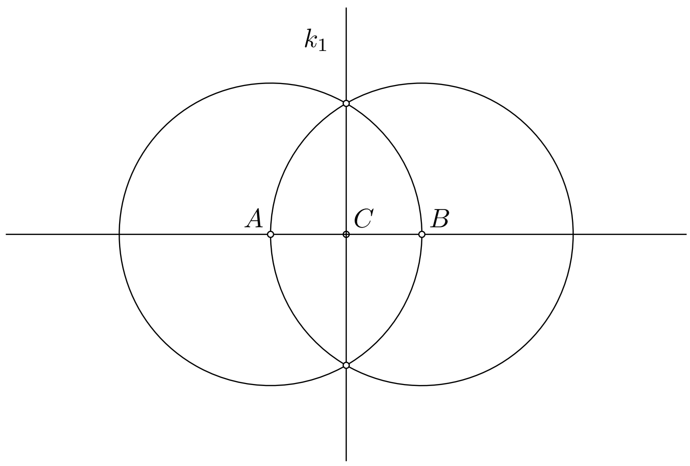
Todistus. Lemman 1 mukaan $\angle BAC = \angle ABC = 90°$. Nyt $|AB| = |AC|$, sillä ne ovat ympyrän A_B säteitä. Samoin $= |AB| = |BD|$, sillä ne ovat ympyrän B_A säteitä. Koska pisteiden A ja C sekä pisteiden B ja D kautta kulkevat suorat ovat yhdensuuntaisia, niin $|AB| = |CD|$. Tästä voidaan päätellä, että $\angle ACD = \angle CDB = 90°$. Täten nelikulmio $ABCD$ on neliö. $\square$

6.2.2 Säännöllinen viisikulmio

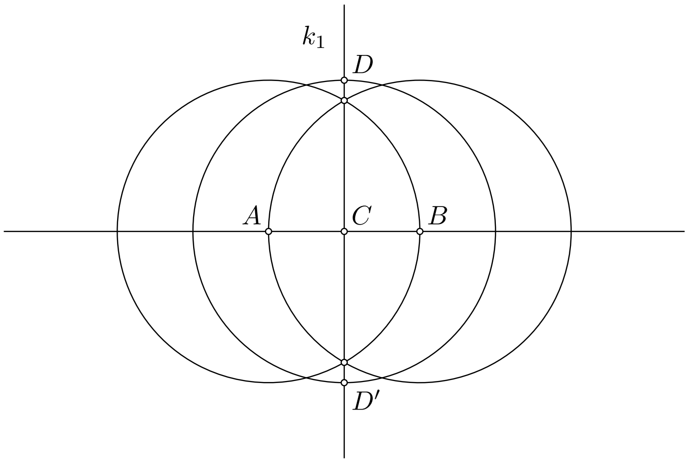
Ongelma 12. *Olkoon annettuna kaksi pistettä A ja B sekä yksikköjana I. On mahdollista konstruoida säännöllinen viisikulmio, jonka sivun pituus on $|AB|$.*



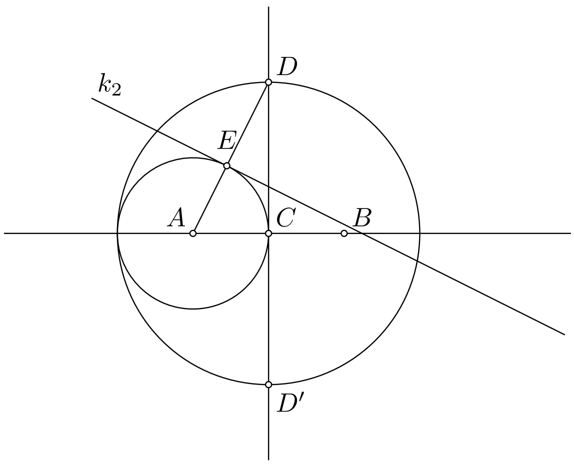
Konstruktio. Seuraava konstruktio perustuu Kuh (2013) esittämään konstruktioon. Aloitetaan konstruoimalla janalle AB lemman 1 mukainen kohtisuora k_1, joka puolittaa kannan AB pisteessä C.



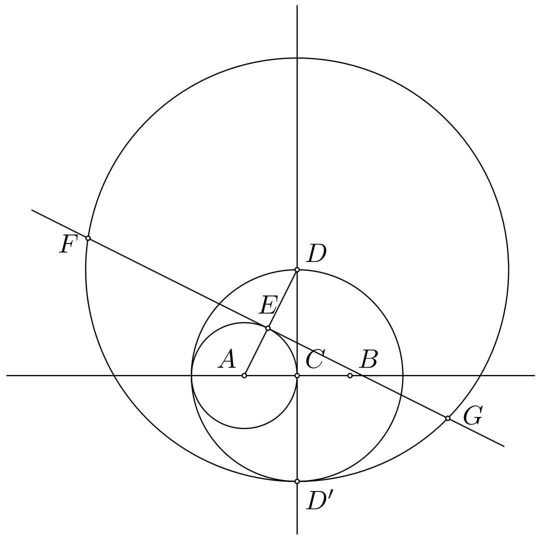
Konstruoidaa seuraavaksi ympyrä C_{AB} ja merkitään tämän ympyrän sekä k_1:n leikkauspisteitä D ja D'. Tavoitteena on saada konstruoitua säännöllinen viisikulmio ympyrän C_{AB} sisään.



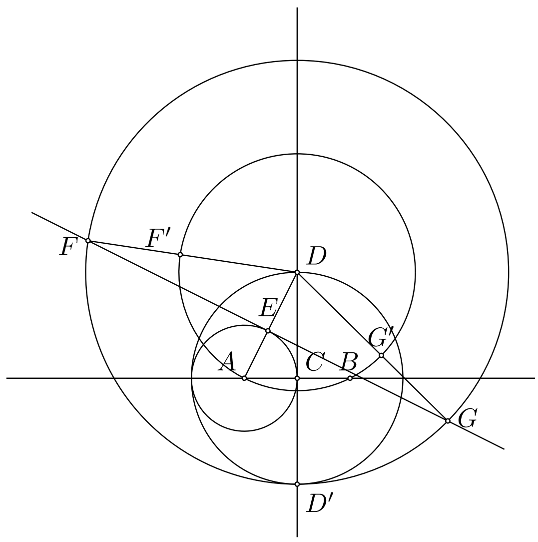
Konstruoidaan nyt ympyrä A_C. Yhdistetään pisteet A ja D janaksi ja merkitään janan AD sekä ympyrän A_C leikkauspistettä E. Konstruoidaan pisteeseen E ongelman 4 mukainen kohtisuora k_2.



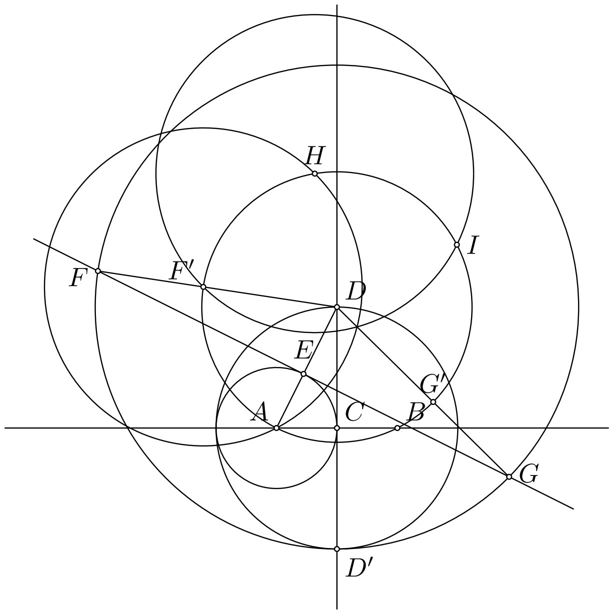
Konstruoidaan nyt ympyrä $D_{D'}$ ja merkitään tämän ympyrän sekä k_2:n leikkauspisteitä F ja G.



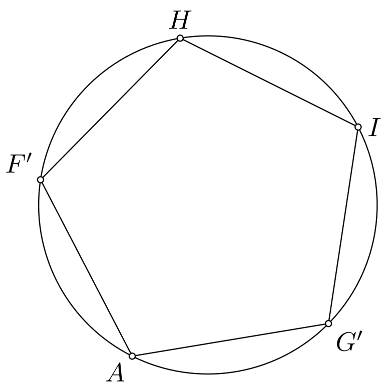
Yhdistetään pisteet F ja D sekä G ja D janoiksi FD ja DG. Konstruoidaan ympyrä D_A. Merkitään ympyrän D_A sekä janojen FD ja DG leikkauspisteitä F' ja G' kuvan mukaisesti.



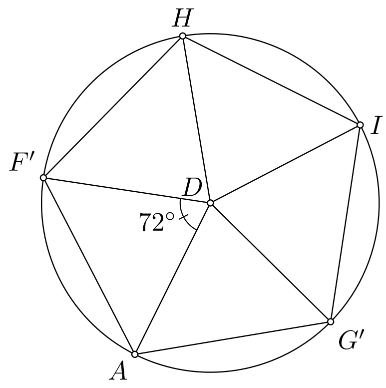
Konstruoidaan ympyrä F'_A ja merkataan tämän sekä ympyrän D_A ylempää leikkauspistettä kuvan mukaisesti H. Piirretään seuraavaksi tähän pisteeseen H ympyrä $H_{F'}$ ja merkitään ympyröiden $H_{F'}$ ja D_A oikeanpuoleista leikkauspistettä I kuvan mukaisesti.



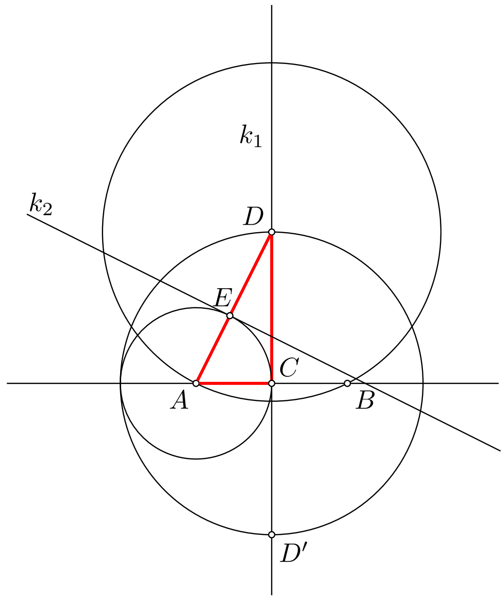
Yhdistetään pisteet A, G', I, H ja F' monikulmioksi ja siistitään kuvaa poistamalla konstruktion välivaiheet. Saatu monikulmio $AF'HIG'$ on säännöllinen viisikulmio.



Todistus. Todistuksessa riittää osoittaa, että keskuskulmille $\angle ADG = \angle G'DI = \angle IDH = \angle HDF' = \angle F'DA = \left(\dfrac{360}{5}\right)^{\circ} = 72^{\circ}$.



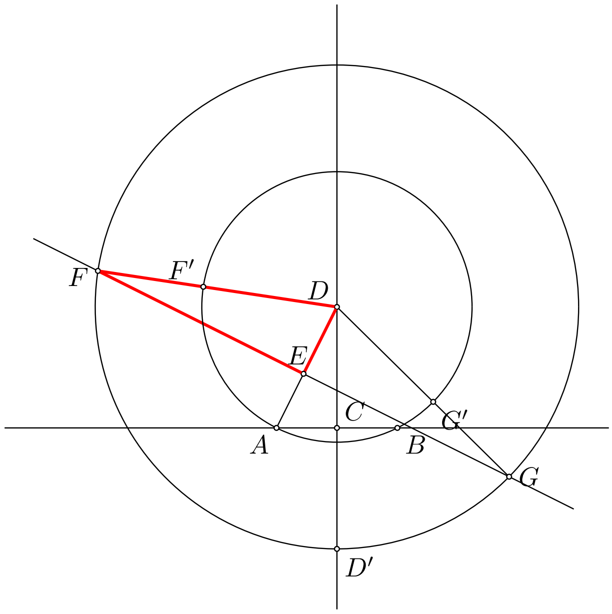
Tutkitaan kulmaa $\angle ADF'$ ja hyödynnetään edellä tehdyn konstruktion välivaiheita.



Merkitään $|AB| = a$. Konstruktion perusteella $|CD| = |AB|$, sillä $|CD|$ on ympyrän C_{AB} säde. Kohtisuora k_1 puolittaa janan AB, joten $|AC| = \dfrac{1}{2}a$. Tarkastellaan nyt kolmiota $\triangle ACD$ ja sovelletaan tähän Pythagoraan lausetta.

$$
\begin{aligned}
|AC|^2 + |DC|^2 &= |AD|^2 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2 &= |AD|^2 \\
|AD| &= \overset{+}{(-)}\frac{\sqrt{5}}{2}a
\end{aligned}
$$

Koska pisteet E ja C ovat saman ympyrän A_C kehäpisteitä, pätee $|AC| = |AE| = \frac{1}{2}a$. Tällöin $|DE| = |AD| - |AE| = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) a$. Tarkastellaan nyt kolmiota $\triangle DEF$.



$|DF| = 2a$, sillä se on ympyrän $D_{DD'}$ säde (DD' on konstruktion mukaan ympyrän C_D halkaisija, jolloin $|DD'| = 2|CD| = 2a$). Konstruktion perusteella $\angle DEF = 90°$. Nyt voidaan suorakulmaiselle kolmiolle $\triangle DEF$ muodostaa trigonometrinen yhtäpitävyys:

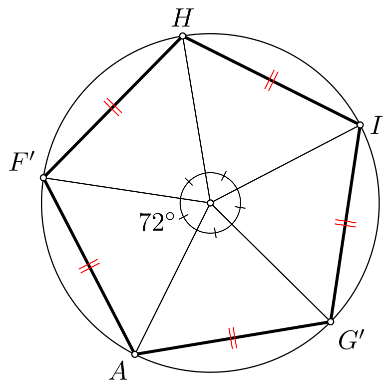
$$\sin(\angle EFD) = \frac{|DE|}{|DF|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}\right) a}{2a} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Tälle saadaan taulukkokirjasta tarkka-arvo: $\arcsin\left(\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right) = 18°$. Koska $\angle DEF = 90°$, niin $\angle FDE = 180° - 90° - 18° = 72° = \angle F'DA$.

Lisäksi soveltamalla kosinilausetta tasakylkiseen kolmioon $\triangle ADF'$ päästään tulokseen, että $|AF'| = |AB|$.

Samanlainen päättelyketju voidaan muodostaa kaikille keskuskulmille tekemällä edellä olevat apukonstruktiot. Kaikissa tarkasteluissa päästään samaan lopputulokseen, eli keskuskulmille pätee $\angle ADG = \angle G'DI = \angle IDH = \angle HDF' = 72°$.

Koska kaikki keskuskulmat ovat yhtä suuria ja jokainen sen sivuista on pituudeltaan $|AB|$, niin viisikulmio on säännöllinen.

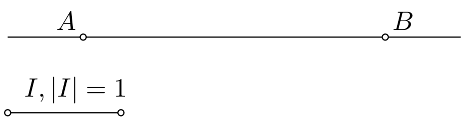


□

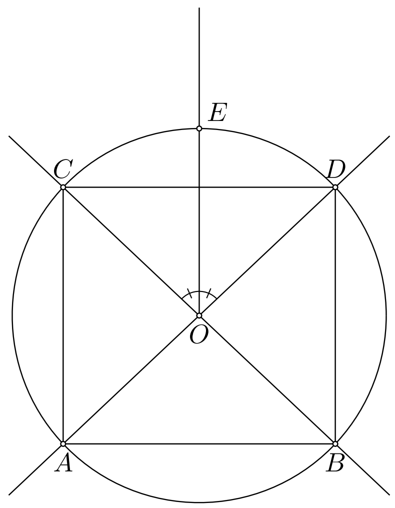
6.2.3 Säännöllinen kahdeksankulmio

Säännöllisen kahdeksankulmion konstruointi pohjautuu suoraan neliön konstruointiin. Kahdeksankulmiossa kulmien lukumäärä on kaksi kertaa niin suuri kuin neliöllä, jolloin keskuskulman suuruus on puolet neliöön verrattuna. Neliöllä keskuskulma on $90°$, jolloin kahdeksankulmiolla se on $45°$. Tämän saa konstruoitua joko konstruoimalla sopivan kokoinen suorakulmainen kolmio tai käyttämällä jo konstruoitua neliötä hyväksi.

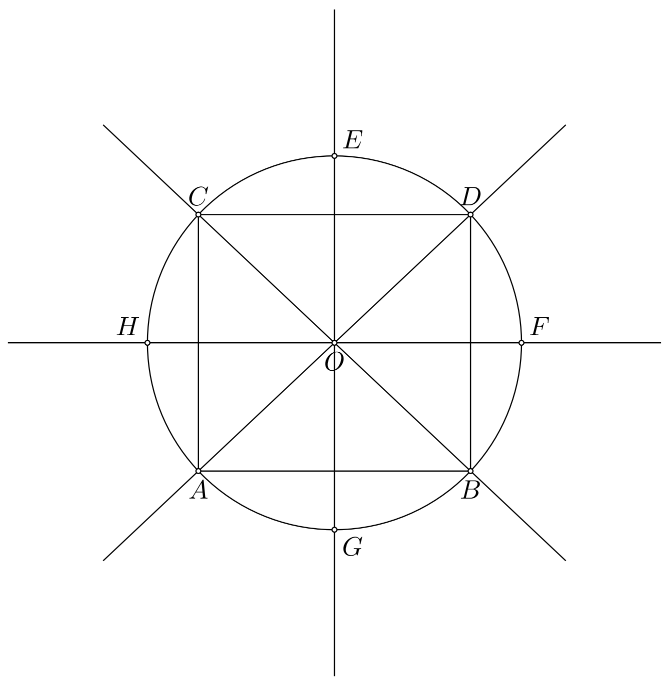
Ongelma 13. *Olkoon annettuna kaksi pistettä A ja B sekä yksikköjana I. On mahdollista konstruoida säännöllinen kahdeksankulmio, jonka sivun pituus on $|AB|$.*



Konstruktio. Konstruoidaan ongelman 11 mukainen neliö ja suoritetaan sen keskuskulmalle ongelman 10 mukainen kulmanpuolitus. Konstruoidaan pisteiden C ja B sekä A ja D kautta kulkevat suorat ja merkitään näiden leikkauspistettä O. Konstruoidaan ympyrä O_A, joka neliön symmetrisyyden vuoksi kulkee kaikkien kärkipisteiden kautta. Merkitään kulmanpuolittajan ja ympyrän O_A leikkauspistettä E.



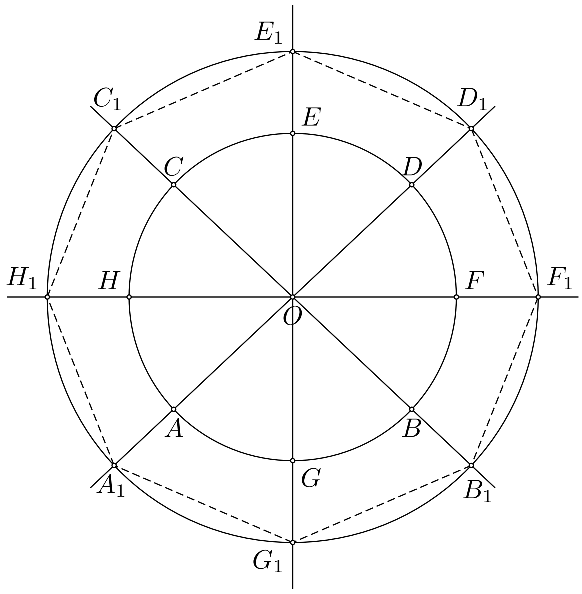
Tehdään sama kulmanpuolitus kaikille neliön keskuskulmille ja merkitään kulmanpuolittajien ja ympyrän O_A leikkauspisteitä kuvan mukaisesti E, F, G ja H.



Lauseiden 2, 3, 4, 5 ja 8 perusteella on mahdollista konstruoida pituus

$$r = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}|AB|.$$

Konstruoidaan ympyrä O_r. Yhdistetään ympyrän O_r ja kulmanpuolittajien leikkauspisteet, jolloin saadaan säännöllinen kahdeksankulmio $A_1H_1C_1E_1D_1F_1B_1G_1$, jonka yhden sivun pituus on $|AB|$.



Todistus. Kahdeksankulmiolla keskuskulman suuruus on $45°$. Ongelman 10 perusteella saadaan $\angle D_1OE_1 = \angle F_1OD_1 = \angle B_1OF_1 = \angle G_1OB_1 = \angle A_1OG_1 = \angle H_1OA_1 = \angle C_1OH_1 = \angle E_1OC_1 = 45°$.

Luku $r = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}|AB|$ on konstruoituva lauseen 8 mukaan sillä

$$F_0 = \mathbb{Q} \subset F_1 = F_0(\sqrt{2}) \subset^* F_2 = F_1\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \qquad |^*\ 2-\sqrt{2} \in F_1$$

Luku r voidaan siis konstruoida lauseita 2, 3, 4 ja 5 soveltamalla. Kuvassa $|E_1O| = |D_1O| = r$, sillä ne ovat ympyrän O_r säteitä. Sovelletaan kosinilausetta kolmioon $\triangle D_1E_1O$:

$$|E_1D_1|^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(45°).$$

Kun tästä yhtälöstä ratkaistaan $|E_1D_1|$, saadaan $|E_1D_1| = \overset{+}{(-)}\sqrt{2-\sqrt{2}}r$. Sijoitetaan tähän luvun r arvo, jolloin $|E_1D_1|$ sievenee muotoon $|E_1D_1| = \sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}|AB| = |AB|$. Siis konstruoidussa kahdeksankulmiossa $|E_1D_1| = |AB|$. Kosinilausetta voidaan soveltaa kaikkiin kolmioihin, jolloin päästään samaan tulokseen. Koska jokainen kahdeksankulmioin sivuista on pituudeltaan $|AB|$ ja keskusulmat $45°$, täyttää se alkuperäisen ongelman ehdot. $\square$

Viitteet

Beckman, P. (2000). π *erään luvun tarina.* Terra Cognita.

Ben-Ari, M. (2019). Surprising geometric constructions.

Blasjo, V. (2016). The how and why of constructions in classical geometry. *Nieuw archief voor wiskunde. Serie 5*, 17(4):283–291.

Bon, K. Y. (2020). Straightedge and compass. `https://www.geogebra.org/m/NDWRz5nG`. (Luettu 31.10.2020).

Carnahan, W. H. (1932). Compass geometry. *School Science and Mathematics*, 32(4):384–390.

Fabio, C. & Enrico, G. (2000). Oltre il compasso. la geometria delle curve.

Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry.*

Francis, R. L. ym. (1996). A renaissance of geometric constructions. *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, 8(3):113–124.

Hadlock, C. R. (2018). *Field theory and its classical problems*, volume 35. American Mathematical Soc.

Häsä, J. I. A. & Rämö, J. (2015). Johdatus abstraktiin algebraan.

Jones, M. (2012). Regular polygons and the place of geometry in mathematics. *Mathematics in School*, 41(3):14–19.

Kazarinoff, N. D. (2003). *Ruler and the round: Classic problems in geometric constructions.* Courier Corporation.

Kuh, D. (2013). Constructible regular n-gons. *Senior Project Archive*, pages 1–36.

Lee, G. T. (2018). *Abstract Algebra: An Introductory Course.* Springer.

Martin, G. E. (1998). *Geometric constructions.* Springer Science & Business Media.

Ostermann, A. & Wanner, G. (2012). *Geometry by its history.* Springer Science & Business Media.

O'Connor, J. & Robertson, E. (1999). Squaring the circle. *The Mac tutor history of.*

Richeson, D. S. (2019). *Tales of Impossibility: The 2000-Year Quest to Solve the Mathematical Problems of Antiquity.* Princeton University Press.

Robson, E. (2002). Words and pictures: New light on plimpton 322. *The American mathematical monthly*, 109(2):105–120.

Rosenthal, D., Rosenthal, D., & Rosenthal, P. (2014). *A readable introduction to real mathematics.* Springer.

Sarhangi, R. ym. (2007). Geometric constructions and their arts in historical perspective. In *Bridges Donostia, Conference Proceedings, The University of the Basque County, San s Sebastian, Spain, Reza Sarhangi and Javier Barrallo, eds. London: Tarquin Publications*, pages 233–240.

Suzuki, J. (2008). A brief history of impossibility. *Mathematics magazine*, 81(1):27–38.

Szyszkowicz, M. (2017). Ahmes'method to squaring the circle. *European Journal of Mathematics and Computer Science Vol*, 4(1).

History of Pencils (2020). Drawing Compass - History and Types of Compasses. `http://www.historyofpencils.com/drawing-tools/drawing-compass/`. (Luettu 24.10.2020).

Väisälä, K. (1959). Geometria. 5. painos. *Helsinki: WSOY*.