Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Reuna-arvo-ongelmien ratkaiseminen reunaintegraaliyhtälöiden avulla

Jenni Tulander

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty
Matemaattis-luonnontieteellinen

Laitos — Institution — Department
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Jenni Tulander

Työn nimi — Arbetets titel — Title
Reuna-arvo-ongelmien ratkaiseminen reunaintegraaliyhtälöiden avulla

Oppiaine — Läroämne — Subject
Soveltava matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Marraskuu 2020	44 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkimme Dirichlet'n ja Neumannin ongelmia Helmholtzin yhtälölle, ja etsimme näille reuna-arvo-ongelmille ratkaisuja reunaintegraaliyhtälöiden avulla. Tutkittavana alueena on $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, joka on rajoitettu, avoin ja yhtenäinen $\mathbb{R}^3$:n osajoukko. Alueen Ω reunan $\partial\Omega$ oletetaan olevan C^2-pinta. Helmholtzin yhtälö on muotoa $\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \ x \in \mathbb{R}^3$, missä lukua k kutsutaan aaltoluvuksi. Helmholtzin yhtälö on aaltoyhtälön aikaharmoninen muoto ja se kuvaa aallon muutosta paikan funktiona.

Luvussa 2 määrittelemme käsiteltävän alueen ja sen reunan sekä käymme läpi muutamia perustuloksia, joita tarvitsemme jatkossa. Lisäksi johdamme aaltoyhtälöstä Helmholtzin yhtälön ja määrittelemme tälle yhtälölle Dirichlet'n ja Neumannin ongelmat sisäalueessa Ω.

Luvussa 3 käsittelemme Hölder-avaruuksia $C^{k,\alpha}(G)$, missä $k \in \mathbb{N}_0$ ja $0 < \alpha \leq 1$, heikosti singulaarisia integraalioperaattoreita ja Fredholmin alternatiivia. Lisäksi määrittelemme kerrospotentiaalit sekä tutkimme niiden jatkuvuusominaisuuksia ja reuna-arvoja. Yksi- ja kaksikerros-potentiaalit toteuttavat Helmholtzin yhtälön joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Kerrospotentiaalit ovat tässä työssä merkittävässä osassa reuna-arvo-ongelmien ratkaisemisessa, sillä niiden avulla voimme muuntaa reuna-arvo-ongelmat reunaintegraaliyhtälöiksi ja näin ollen löytää ratkaisut alkuperäisille ongelmille.

Luvussa 4 muotoilemme sisäalueen Dirichlet'n ja Neumannin ongelmat toisen lajin reunaintegraaliyhtälöinä. Sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö voidaan esittää muodossa $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\psi = -2f$ ja sisäalueen Neumannin ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö muodossa $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*)\phi = 2g$. Integraaliyhtälöissä esiintyvät reunaintegraalioperaattorit $\boldsymbol{K}$ ja $\boldsymbol{K}^*$ ovat kompakteja avaruuksissa $C(\partial\Omega)$ ja $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, kun $0 < \alpha < 1$. Tulemme osoittamaan, että sopivalla tiheysfunktion $\psi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla kaksikerros-potentiaali v on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Vastaavasti sopivalla tiheysfuktion $\phi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla yksikerros-potentiaali u on sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Lopuksi tutkimme näiden reuna-arvo-ongelmien ratkeavuutta. Tyypillisesti sisäalueen reuna-arvo-ongelmille ei löydy yksikäsitteistä ratkaisua. Reuna-arvo-ongelmia vastaavat reunaintegraaliyhtälöt ovat yksikäsitteisesti ratkeavia silloin, kun Helmholtzin yhtälössä esiintyvä aaltoluku k ei ole sisäalueen reuna-arvo-ongelman ominaisarvo. Fredholmin alternatiivin avulla voimme tutkia näiden reunaintegraaliyhtälöiden ratkeavuutta. Jos reunaintegraaliyhtälö on ratkeava, niin myös sitä vastaava sisäalueen reuna-arvo-ongelma on ratkeava.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Helmholtzin yhtälö, Dirichlet'n ongelma, Neumannin ongelma, Hölder-avaruus, kerrospotentiaalit

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkimme Dirichlet'n ja Neumannin ongelmia Helmholtzin yhtälölle, ja etsimme näille reuna-arvo-ongelmille ratkaisuja reunaintegraaliyhtälöiden avulla. Tutkimme näitä reuna-arvo-ongelmia sisäalueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, joka on rajoitettu, avoin ja yhtenäinen $\mathbb{R}^3$:n osajoukko. Alueen Ω reunan $\partial\Omega$ oletetaan olevan C^2-pinta. Helmholtzin yhtälö on muotoa

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

missä lukua k kutsutaan aaltoluvuksi. Helmholtzin yhtälö on aaltoyhtälön aikaharmoninen muoto ja se kuvaa aallon muutosta paikan funktiona. Yhtälö on nimetty saksalaisen lääkärin ja fyysikon Hermann von Helmholtzin (1821-1894) mukaan. Tämä pro gradu -tutkielma seuraa David Coltonin ja Rainer Kressin kirjaa [2], jota on käytetty tutkielman päälähteenä.

Luvun 2 alussa määritellään käsiteltävä alue ja sen reuna sekä käydään läpi muutamia perustuloksia, joita tarvitsemme jatkossa. Tämän jälkeen johdamme aaltoyhtälöstä Helmholtzin yhtälön ja määrittelemme tälle yhtälölle Dirichlet'n ja Neumannin ongelmat sisäalueessa Ω.

Luvussa 3 määritellään tasaisesti Hölder-jatkuvien funktioiden avaruus, eli Hölder-avaruus, $C^{k,\alpha}(G)$, missä $k \in \mathbb{N}_0$ ja $0 < \alpha \leq 1$. Hölder-avaruudet ovat keskeisessä asemassa, kun käsittelemme myöhemmin kerrospotentiaaleja ja tutkimme niiden jatkuvuusominaisuuksia. Tämän jälkeen käsittelemme heikosti singulaarisia integraalioperaattoreita ja käymme läpi muutamia tuloksia näihin liittyen. Ennen kerrospotentiaalien määrittelyä esittelemme Helmholtzin operaattorin perusratkaisun ja esityskaavan Helmholtzin yhtälön ratkaisulle. Tämän jälkeen määrittelemme kerrospotentiaalit sekä tutkimme niiden jatkuvuusominaisuuksia ja reuna-arvoja. Yksi- ja kaksikerros-potentiaalit toteuttavat Helmholtzin yhtälön joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Kerrospotentiaalit ovat tässä työssä merkittävässä osassa reuna-arvo-ongelmien ratkaisemisessa. Niiden avulla voimme muuntaa reuna-arvo-ongelmat reunaintegraaliyhtälöiksi ja täten löytää ratkaisut alkuperäisille ongelmille. Luvun 3 lopussa käsittelemme vielä Fredholmin alternatiivia, jota tarvitsemme, kun tutkimme reuna-arvo-ongelmia vastaavien reunaintegraaliyhtälöiden ratkeavuutta.

Luvussa 4 muotoilemme sisäalueen Dirichlet'n ja Neumannin ongelmat toisen lajin reunaintegraaliyhtälöinä. Sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö voidaan esittää muodossa $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\psi = -2f$ ja sisäalueen Neumannin ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö muodossa $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*)\phi = 2g$. Integraaliyhtälöissä esiintyvät reunaintegraalioperaattorit $\boldsymbol{K}$ ja $\boldsymbol{K}^*$ ovat kompakteja avaruuksissa $C(\partial\Omega)$ ja $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, kun $0 < \alpha < 1$. Tulemme osoittamaan, että sopivalla tiheysfunktion $\psi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla kaksikerros-potentiaali v on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Vastaavasti sopivalla tiheysfuktion $\phi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla yksikerros-potentiaali u on sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Lopuksi tutkimme näiden reuna-arvo-ongelmien ratkeavuutta. Tyypillisesti sisäalueen reuna-arvo-ongelmille ei löydy yksikäsitteistä ratkaisua. Reuna-arvo-ongelmia vastaavat reunaintegraaliyhtälöt ovat yksikäsitteisesti ratkeavia silloin, kun Helmholtzin yhtälössä esiintyvä aaltoluku k ei ole sisäalueen reuna-arvo-ongelman ominaisarvo. Fredholmin alternatiivin avulla voimme tutkia näiden reunaintegraaliyhtälöiden ratkeavuutta. Jos reunaintegraaliyhtälö on ratkeava, niin myös sitä vastaava sisäalueen reuna-arvo-ongelma on ratkeava.

Luku 2

Helmholtzin yhtälön reuna-arvo-ongelmat

2.1 C^2-pinnat ja Greenin kaavat

Olkoon Ω rajoitettu alue, eli rajoitettu, avoin ja yhtenäinen $\mathbb{R}^n$:n osajoukko. Oletetaan, että komplementti $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ on myös yhtenäinen. Oletetaan lisäksi, että joukon Ω reuna $\partial\Omega$ on C^2-pinta seuraavan määritelmän mukaisesti:

Määritelmä 2.1. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja rajoitettu joukko. Sanotaan, että reuna $\partial\Omega$ on C^2-pinta, tai lyhyemmin C^2, jos jokaisella reunan $\partial\Omega$ pisteellä x_0 on olemassa avoin ympäristö $U \subset \mathbb{R}^n$ ja reunan määrittelevä funktio $h \in C^2(U)$ siten, että

(i) Kun $x \in \Omega \cap U$, niin $h(x) < 0$,

(ii) Kun $x \in (\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}) \cap U$, niin $h(x) > 0$,

(iii) $x \in \partial\Omega \cap U$ jos ja vain jos $h(x) = 0$,

(iv) Kun $h(x) = 0$, niin $\nabla h(x) \neq 0$.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2. Reunan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ pisteessä x voidaan esittää Määritelmän 2.1 mukaisella parametrisaatiolla seuraavasti

$$\boldsymbol{\nu}(x) = \frac{\nabla h(x)}{|\nabla h(x)|}.$$

Yksikköulkonormaali $\boldsymbol{\nu}$ osoittaa kohti ulkoaluetta $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$.

Implisiittifunktiolauseen [7] nojalla jokaisen reunapisteen x_0 ympäristössä reuna voidaan esittää C^2-funktion kuvaajana. Nimittäin, Määritelmän 2.1 mukaan on olemassa funktio h, jolle pätee $\nabla h(x_0) \neq 0$ ja $h(x_0) = 0$. Oletetaan esimerkiksi, että

$$\frac{\partial h(x_0)}{\partial x_n} \neq 0.$$

Nyt implisiittifunktiolauseesta seuraa, että on olemassa pisteen x_0' ympäristössä määritelty C^2-funktio $\phi : V \to \mathbb{R}$ siten, että

$$x_{0,n} = \phi(x_0') \iff h(x_0) = h(x_0', \phi(x_0')) = 0,$$

missä $x_0' = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n-1})$ ja $V \subset \mathbb{R}^{n-1}$ on pisteen x_0' ympäristö. Merkitään $\hat{h} = x_{0,n} - \phi(x_0')$, jolloin pätee

$$\begin{aligned} \hat{h} > 0, &\text{ kun } x_{0,n} > \phi(x_0'), \\ \hat{h} < 0, &\text{ kun } x_{0,n} < \phi(x_0'). \end{aligned}$$

Voidaan myös osoittaa, että tällä parametrisaatiolla pintamitta dS voidaan esittää C^2-funktion ϕ avulla seuraavasti

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla \phi(x')|^2} dx',$$

missä $x' \in V$ [12].

Oletetaan jatkossa, että Ω on rajoitettu C^2-alue ja $\boldsymbol{\nu}$ on reunan yksikköulkonormaali.

Lause 2.2. *Olkoon reuna $\partial\Omega$ kahdesti jatkuvasti differentioituva. Tällöin on olemassa positiivinen vakio L siten, että*

$$|\nu(y) \cdot (x - y)| \leq L|x - y|^2 \tag{2.1}$$

ja

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq L|x - y|, \tag{2.2}$$

kaikilla $x, y \in \partial\Omega$.

Todistus. Lauseen yksityiskohtainen todistus löytyy kirjasta [2, s. 35-37]. □

Lause 2.3. *Olkoon $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Tällöin*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} \nu_i u\, dS \qquad (i = 1, \dots, n), \tag{2.3}$$

missä $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ on reunan $\partial\Omega$ yksikköulkonormaali.

Todistus. Katso esimerkiksi [6, s. 60]. □

Määritelmä 2.4. Vektoriarvoisen differentioituvan funktion, eli vektorikentän $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ divergenssi on

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}.$$

Lause 2.5 (Gaussin divergenssilause)**.** *Olkoon $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektoriarvoinen funktio, missä $f_k \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ kaikilla $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tällöin pätee*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{F}\, dS. \tag{2.4}$$

Todistus. Tarkastellaan yhtälön (2.4) vasenta puolta ja esitetään $\boldsymbol{F}$:n divergenssi summamuodossa

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \int_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx.$$

Nyt yhtälön (2.3) nojalla saadaan

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial f_k}{\partial x_k}\, dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \nu_k f_k\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{F}\, dS.$$

□

Huomautus 2.6. Olkoon $u \in C^2(\Omega)$. Tällöin pätee

$$\nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \Delta u.$$

Lause 2.7 (Gaussin kaava)**.** *Olkoon $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Tällöin*

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS, \tag{2.5}$$

missä $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u$ on funktion u derivaatta ulkonormaalin suuntaan.

Todistus. Sijoitetaan Gaussin divergenssilauseeseen (2.4) $\boldsymbol{F} = \nabla u$. Tällöin saadaan

$$\int_\Omega \Delta u \; dx =: \int_\Omega \nabla \cdot \nabla u \; dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u \; dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS.$$

□

Lause 2.8 (Greenin kaavat)**.** *Olkoot* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$*. Tällöin*

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \; dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx, \tag{2.6}$$

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS. \tag{2.7}$$

Todistus. Todistetaan ensin yhtälö (2.6) lähtemällä liikkeelle yhtälön vasemmasta puolesta seuraavasti

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \; dx.$$

Sijoitetaan edellä olevaan

$$u \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

jolloin saadaan

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) \; dx - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx.$$

Nyt yhtälön (2.3) nojalla saadaan

$$\int_\Omega u\Delta v \; dx = \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \nu_i \frac{\partial v}{\partial x_i} u \; dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} \cdot u \; dS - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx.$$

Todistetaan seuraavaksi yhtälö (2.7). Yhtälö (2.6) pätee myös siinä tapauksessa, kun funktioiden u ja v paikkaa vaihdetaan. Näin ollen pätee

$$\int_\Omega v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx. \tag{2.8}$$

Seuraavaksi vähennetään yhtälöt (2.6) ja (2.8) puolittain keskenään, jolloin saadaan

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS.$$

□

2.2 Helmholtzin yhtälö

Tutkitaan aaltoyhtälöä

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \Delta v(x,t) = 0, \tag{2.9}$$

missä $x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t \in \mathbb{R}$ ja

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

on Laplacen operaattori muuttujan x suhteen. Edellä $v(x,t)$ kuvaa pisteessä x tapahtuvaa poikkeamaa ajanhetkellä $t > 0$ ja $0 < c \in \mathbb{R}$ on aallon etenemisnopeus, joka nyt oletetaan vakioksi. Aaltoyhtälö on tärkeä toisen kertaluvun lineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö, jonka avulla voidaan kuvata erilaista aaltoliikettä. Etsitään ratkaisuja aikaharmoniselle aallolle eli aallolle, jolla on vain yksi kulmataajuus ω. Aaltoyhtälön (2.9) aikaharmoniset ratkaisut voidaan esittää muodossa

$$v(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}. \tag{2.10}$$

Kun sijoitetaan funktio (2.10) aaltoyhtälöön (2.9), niin saadaan

$$-\omega^2 u(x)e^{-i\omega t} - c^2 e^{-i\omega t}\Delta u(x) = 0.$$

Seuraavaksi jaetaan termeillä $e^{-i\omega t}$ ja $-c^2$, jolloin saadaan yhtälö

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0, \tag{2.11}$$

missä lukua $k = \omega/c$ kutsutaan aaltoluvuksi, ja u on aikaharmonisten ratkaisujen amplitudi.

Yhtälöä (2.11) kutsutaan Helmholtzin yhtälöksi ja se on nimetty saksalaisen lääkärin ja fyysikon Hermann von Helmholtzin (1821–1894) mukaan. Helmholtzin yhtälö on siis aaltoyhtälön (2.9) aikaharmoninen muoto ja se kuvaa aallon muutosta paikan funktiona.

2.3 Dirichlet'n ongelma sisäalueessa

Edellä olemme käsitelleet yleisesti avaruutta $\mathbb{R}^n$, mutta jatkossa rajoitutaan avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Tutkitaan seuraavaksi Dirichlet'n ongelmaa Helmholtzin yhtälölle sisäalueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2 Määritelmän 2.1 mukaisesti. Olkoot $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ja $k \in \mathbb{C}$ mielivaltainen kompleksiluku. Dirichlet'n ongelma Helmholtzin yhtälölle on muotoa

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{alueessa } \Omega \\ u = f & \text{reunalla } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

missä f on reunalla annettu jatkuva funktio.

Sisäalueen Dirichlet'n ongelma (2.12) ei ole yksikäsitteisesti ratkeava sisäalueen ominaisarvoissa $0 < \lambda_j \in \mathbb{R},\ j \in \{1, 2, \dots\}$. Nämä sisäalueen Dirichlet'n ominaisarvot ovat reaalisia, positiivisia ja ne kasvavat rajatta ($0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, ja $\lambda_j \to \infty$, kun $j \to \infty$) [1]. Jos Im $(k^2) \neq 0$, $k^2 < 0$ tai $k = 0$, niin pätee kuitenkin seuraava yksikäsitteisyystulos:

Lause 2.9. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2. Olkoot $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ja $k \in \mathbb{C}$ siten, että pätee jokin seuraavista: Im $(k^2) \neq 0$, $k^2 < 0$ tai $k = 0$. Tällöin Dirichlet'n ongelmalla*

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \textit{alueessa } \Omega \\ u = 0 & \textit{reunalla } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $u = 0$.

Todistus. Olkoon Im $(k^2) \neq 0$. Oletetaan, että u on Dirichlet'n ongelman (2.13) ratkaisu. Greenin kaavasta (2.6) seuraa, että

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{u}\ dx = \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx = -\int_\Omega \bar{u}\Delta u\ dx + \int_{\partial\Omega} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\ dS.$$

Koska $\Delta u = -k^2 u$ sisäalueessa Ω ja $u = 0$ reunalla $\partial\Omega$, niin pätee

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx = \int_\Omega k^2 \cdot \bar{u} \cdot u\ dx = k^2 \int_\Omega |u|^2 dx. \tag{2.14}$$

Tarkastellaan yhtälön imaginääriosia. Yhtälön vasen puoli on reaalinen, joten tästä seuraa

$$\mathrm{Im}(k^2) \int_\Omega |u|^2\ dx = 0.$$

Koska oletuksen mukaan Im $(k^2) \neq 0$, niin pätee

$$\int_\Omega |u|^2\ dx = 0 \text{ eli } u \equiv 0.$$

Dirichlet'n ongelmalla (2.13) on yksikäsitteinen ratkaisu $u = 0$, kun oletetaan Im $(k^2) \neq 0$.

Entä löytyykö Dirichlet'n ongelmalle (2.13) yksikäsitteistä ratkaisua oletuksella $k^2 < 0$? Tällä oletuksella yhtälön (2.14) vasemmalle ja oikealle puolelle pätee

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq 0 \qquad \text{ja} \qquad k^2 \int_\Omega |u|^2 dx \leq 0.$$

Tällöin täytyy olla

$$0 = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = k^2 \int_\Omega |u|^2 dx = 0$$

ja tästä seuraa, että $u \equiv 0$. Dirichlet'n ongelmalla (2.13) on yksikäsitteinen ratkaisu $u = 0$ myös oletuksella $k^2 < 0$.

Oletetaan vielä, että $k = 0$. Tällä oletuksella yhtälö (2.14) saa muodon

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = 0.$$

Tästä seuraa, että funktion u gradientti $\nabla u = 0$ eli u on vakio. Dirichlet'n ongelman (2.13) reunaehdon mukaan $u = 0$ alueen Ω reunalla, jolloin myös koko alueessa pätee $u = 0$. Yksikäsitteisyystulos pätee myös oletuksella $k = 0$. $\square$

2.4 Neumannin ongelma sisäalueessa

Tässä luvussa käsittelemme Neumannin ongelmaa Helmholtzin yhtälölle sisäalueessa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Edellä Dirichlet'n ongelman tapauksessa riitti, että funktio u on reunalla $\partial\Omega$ jatkuva. Tämä ei riitä Neumannin ongelman tapauksessa, joten määritellään seuraavanlainen lineaariavaruus

$$\mathcal{S}(\Omega) := \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0+} \{\nu(x) \cdot \nabla u(x - h\nu(x))\}, \ x \in \partial\Omega, \ \text{tasaisesti } \partial\Omega\text{:lla} \right\}.$$

Lineaariavaruus $\mathcal{S}(\Omega)$ koostuu siis sellaisista funktioista $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, joiden derivaatta ulkonormaalin suuntaan reunalla $\partial\Omega$ on olemassa tasaisesti.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2 Määritelmän 2.1 mukaisesti. Olkoot $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ ja $k \in \mathbb{C}$ mielivaltainen kompleksiluku. Neumannin ongelma Helmholtzin yhtälölle on muotoa

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{alueessa } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{reunalla } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.15}$$

missä g on reunalla annettu jatkuva funktio.

Kuten Dirichlet'n ongelma (2.12) myöskään Neumannin ongelma (2.15) ei ole yksikäsitteisesti ratkeava sisäalueen ominaisarvoissa $0 \leq \lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2, \dots\}$. Nämä sisäalueen Neumannin ominaisarvot ovat reaalisia, ei-negatiivisia ja ne kasvavat rajatta ($0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$, ja $\lambda_j \to \infty$, kun $j \to \infty$). Jos Im $(k^2) \neq 0$ tai $k^2 < 0$, niin pätee kuitenkin seuraava yksikäsitteisyystulos:

Lause 2.10. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2. Olkoot $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ ja $k \in \mathbb{C}$ siten, että Im $(k^2) \neq 0$ tai $k^2 < 0$. Tällöin Neumannin ongelmalla*

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{alueessa } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{reunalla } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.16}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $u = 0$.

Todistus. Lause todistetaan Greenin kaavan (2.6) avulla vastaavasti kuin Lauseessa 2.9. □

Luku 3

Kerrospotentiaalit ja esityskaavat

3.1 Hölder-avaruudet

Määritellään tässä luvussa tasaisesti Hölder-jatkuvien funktioiden avaruus, eli Hölder-avaruus, joka on perustana, kun tarkastellaan kerrospotentiaaleja jatkossa. Ensimmäiseksi selvitämme, milloin funktio u on tasaisesti Hölder-jatkuva, ja käymme läpi Hölder-seminormin ja Hölder-normin käsitteet. Näiden jälkeen määrittelemme Hölder-avaruudet ja osoitamme, että ne ovat Banachin avaruuksia.

Määritelmä 3.1. Olkoon $G \subset \mathbb{R}^3$ suljettu ja rajoitettu joukko sekä $0 < \alpha \leq 1$. Funktio $u : G \to \mathbb{C}$, $u \in C(G)$, on tasaisesti Hölder-jatkuva eksponentin α suhteen, jos on olemassa positiivinen vakio C siten, että

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha, \tag{3.1}$$

kaikilla $x, y \in G$. Jos (3.1) pätee eksponentilla $\alpha = 1$, niin sanotaan, että funktio u on Lipschitz-jatkuva.

Määritelmä 3.2. (i) Jos funktio $u : G \to \mathbb{C}$ on jatkuva, niin normi määritellään seuraavasti

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{\infty,G} := \sup_{x \in G} |u(x)|.$$

(ii) Funktion $u : G \to \mathbb{C}$ Hölder-seminormi eksponentin α suhteen on

$$[u]_{C^{0,\alpha}(G)} := \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

ja vastaavasti Hölder-normi eksponentin α suhteen on edellä olevien summa

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(G)} := \|u\|_\infty + [u]_{C^{0,\alpha}(G)}.$$

Huomautus 3.3. Kokonaislukua $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ kutsutaan multi-indeksiksi, missä $\beta_j \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ kaikilla $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jos β on multi-indeksi, niin käytämme merkintää D^β osittaisdifferentiaalioperaattorista

$$D^\beta := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\beta_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\beta_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\beta_n},$$

jonka kertaluku on $|\beta| := \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \in \mathbb{N}_0$.

Määritelmä 3.4. Hölder-avaruus $C^{k,\alpha}(G)$, missä $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ja $0 < \alpha \leq 1$, koostuu funktioista $u \in C^k(G)$, joiden normi

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(G)} := \sum_{|\beta| \leq k} \|D^\beta u\|_\infty + \sum_{|\beta| = k} [D^\beta u]_{C^{0,\alpha}(G)} \tag{3.2}$$

on äärellinen.

Hölder-avaruus $C^{k,\alpha}(G)$ koostuu siis sellaisista funktioista u, jotka ovat k-kertaa jatkuvasti differentioituvia ja joiden k. kertaluvun derivaatat ovat tasaisesti Hölder-jatkuvia eksponentin α suhteen. Todistetaan seuraavaksi, että Hölder-avaruus on Banachin avaruus eli täydellinen normiavaruus. Meidän tulee siis osoittaa, että pari $(C^{k,\alpha}(G), \|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(G)})$ on normiavaruus ja jokainen avaruuden $C^{k,\alpha}(G)$ Cauchyn jono suppenee avaruudessa $C^{k,\alpha}(G)$.

Lause 3.5. *Hölder-avaruus $C^{k,\alpha}(G)$ varustettuna normilla $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(G)}$ on Banachin avaruus, eli täydellinen normiavaruus, kaikilla $k \in \mathbb{N}_0$ ja $0 < \alpha \leq 1$.*

Todistus. Lauseen todistus löytyy kirjoista [2, s. 38] ja [10, s. 34]. Tässä esitettävä todistus pohjautuu näistä ensimmäiseen. Todistetaan ensin, että $C^{0,\alpha}(G)$ on Banachin avaruus, minkä jälkeen todistus avaruudelle $C^{k,\alpha}(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$, seuraa iteroimalla. Tiedämme, että $(C(G), \|\cdot\|_\infty)$ on Banachin avaruus [8]. Koska $[\cdot]_{C^{0,\alpha}(G)}$ määrittelee seminormin avaruudessa $C^{0,\alpha}(G)$ ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi, niin myös $\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(G)}$ on normi.

Osoitetaan seuraavaksi, että $C^{0,\alpha}(G)$ on täydellinen. Oletetaan, että $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa $C^{0,\alpha}(G)$. Tällöin jono $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono myös avaruudessa $C(G)$ ja täten on olemassa funktio $u \in C(G)$ siten, että $\|u_n - u\|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$. Koska $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono avaruudessa $C^{0,\alpha}(G)$, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $N \in \mathbb{N}$, että

$$[u_n - u_m]_{C^{0,\alpha}(G)} < \varepsilon, \quad \text{kun } n, m \geq N.$$

Eli

$$\sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|(u_n(x)-u_m(x))-(u_n(y)-u_m(y))|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon,$$

kaikilla $n, m \geq N$. Koska funktio $u_n \to u$, kun $n \to \infty$, joukossa G, niin voimme antaa indeksin $m \to \infty$ ja näin ollen saadaan

$$\frac{|(u_n(x)-u(x))-(u_n(y)-u(y))|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon,$$

kaikilla $n \geq N$ ja $x, y \in G$. Nyt

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \varepsilon + \frac{|u_n(x)-u_n(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty,$$

josta seuraa, että $u \in C^{0,\alpha}(G)$ ja $\|u_n - u\|_{C^{0,\alpha}(G)} \to 0$, kun $n \to \infty$. Olemme siis osoittaneet, että $C^{0,\alpha}(G)$ on täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus. Todistus voidaan yleistää avaruuteen $C^{k,\alpha}(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$, kun oletetaan, että $u_n \to u$ avaruudessa $C^k(G)$ ja tehdään vastaavat päättelyt jokaiselle kertaluvun derivaatalle. $\square$

Lause 3.6. *Olkoot* $0 < \alpha < \beta \leq 1$ *ja* $G \subset \mathbb{R}^n$ *kompakti joukko. Tällöin upotusoperaattorit*

$$\boldsymbol{I}^\beta : C^{0,\beta}(G) \to C(G) \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{I}^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \to C^{0,\alpha}(G) \tag{3.4}$$

ovat kompakteja.

Todistus. Olkoot $K \subset C^{0,\beta}(G)$ rajoitettu joukko ja $C > 0$ sellainen, että $\|u\|_{C^{0,\beta}(G)} \leq C$ kaikilla $u \in K$. Kaikille funktioille $u \in K$ siis pätee

$$|u(x)| \leq C, \quad x \in G,$$

ja

$$|u(x)-u(y)| \leq C|x-y|^\beta, \quad x, y \in G. \tag{3.5}$$

Tästä seuraa, että joukko K on yhtäjatkuva ja rajoitettu. Nyt Arzela-Ascolin lauseen [2] nojalla joukko K on prekompakti avaruudessa $C(G)$ ja näin ollen upotus $\boldsymbol{I}^\beta : C^{0,\beta}(G) \to C(G)$ on kompakti.

Näytetään vielä, että K on prekompakti avaruudessa $C^{0,\alpha}(G)$. Epäyhtälön (3.5) nojalla voimme arvioida

$$\begin{aligned}
&|(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))| \\
&= |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{\alpha/\beta} \cdot |(u(x)-v(x))-(u(y)-v(y))|^{1-\alpha/\beta} \\
&\leq (2C)^{\alpha/\beta}|x-y|^\alpha (2\|u-v\|_\infty)^{1-\alpha/\beta},
\end{aligned}$$

kaikilla $x, y \in G$ ja $u, v \in K$. Nyt jakamalla puolittain termillä $|x-y|^\alpha$ ja arvioimalla ylöspäin saadaan

$$[u-v]_{C^{0,\alpha}(G)} \leq (2C)^{\alpha/\beta} 2^{1-\alpha/\beta} \|u-v\|_\infty^{1-\alpha/\beta}.$$

Tästä voimme päätellä, että jokainen joukon K jono, joka suppenee avaruudessa $C(G)$, suppenee myös avaruudessa $C^{0,\alpha}(G)$. Täten olemme todistaneet myös upotuksen (3.4) kompaktisuuden. □

3.2 Heikosti singulaariset integraalioperaattorit

Käydään tässä luvussa läpi muutamia tuloksia liittyen heikosti singulaarisiin integraalioperaattoreihin. Näitä tuloksia tulemme tarvitsemaan jatkossa, kun tarkastelemme kerrospotentiaalien jatkuvuusominaisuuksia ja reuna-arvoja. Seuraavat tulokset löytyvät kirjasta [2] ja todistuksien osalta viittaamme tähän lähteeseen. Oletetaan jatkossa, että $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ on rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2.

Määritelmä 3.7. (i) Ydin K on heikosti singulaarinen, jos K on määritelty ja jatkuva kaikilla $x, y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, ja on olemassa positiiviset vakiot M ja $\alpha \in (0, 2]$ siten, että kaikilla $x, y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, pätee

$$|K(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha-2}. \tag{3.6}$$

(ii) Olkoon $\phi : \partial\Omega \to \mathbb{C},\ \phi \in C(\partial\Omega)$, annettu funktio, jonka normi määritellään seuraavasti $\|\phi\|_\infty := \max_{x\in\partial\Omega} |\phi(x)|$. Integraalioperaattorin $\boldsymbol{A} : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ määrittelee integraali

$$(\boldsymbol{A}\phi)(x) := \int_{\partial\Omega} K(x,y)\phi(y)\, dS(y), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.7}$$

missä K on jatkuva tai heikosti singulaarinen ydin.

Lause 3.8. *Integraalioperaattori $\boldsymbol{A}$ on kompakti operaattori avaruudessa $C(\partial\Omega)$, kun ydin K on jatkuva tai heikosti singulaarinen.*

Todistus. Ensimmäiseksi tulee tarkistaa, että integraalioperaattorin $\boldsymbol{A}$ määrittelevän lausekkeen (3.7) integraali on olemassa epäoleellisena integraalina siinä tapauksessa, kun ydin K on heikosti singulaarinen. Ytimen K ollessa jatkuva integraalioperaattorin $\boldsymbol{A}$ kompaktisuus avaruudessa $C(\partial\Omega)$ seuraa Arzela-Ascolin lauseesta [1, 2]. Kun ydin K on heikosti singulaarinen, niin muodostamme ytimen K avulla jonon jatkuvia ytimiä $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, joita vastaavat integraalioperaattorit $\boldsymbol{A}_n,\ n \in \mathbb{N}$, ovat kompakteja edellisen nojalla. Huomataan, että jono $(\boldsymbol{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompakteja operaattoreita suppenee tasaisesti kohti integraalioperaattoria $\boldsymbol{A}$ eli $\|\boldsymbol{A}_n - \boldsymbol{A}\|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$. Tämän nojalla myös integraalioperaattori $\boldsymbol{A}$ on kompakti. Lauseen tarkempi todistus löytyy kirjasta [2, s. 40-41]. □

Lause 3.9. *Olkoon G suljettu joukko siten, että reuna $\partial\Omega$ sisältyy tähän joukkoon. Oletetaan, että funktio K on määritelty ja jatkuva kaikilla $x \in G,\ y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, ja on olemassa positiiviset vakiot M ja $\alpha \in (0, 2]$ siten, että*

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-2}, \tag{3.8}$$

kaikilla $x \in G,\ y \in \partial\Omega,\ x \neq y$.

Lisäksi oletetaan, että on olemassa vakio $m \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{\alpha-2-j} |x_1 - x_2|^j, \tag{3.9}$$

kaikilla $x_1, x_2 \in G$ ja $y \in \partial\Omega$ sekä oletuksella $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Tällöin yleinen potentiaali

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} K(x, y)\phi(y)\ dS(y), \quad x \in G, \tag{3.10}$$

tiheydellä $\phi \in C(\partial\Omega)$ kuuluu Hölder-avaruuteen $C^{0,\beta}(G)$ kaikilla $\beta \in (0, \alpha]$, jos $0 < \alpha < 1$, kaikilla $\beta \in (0, 1)$, jos $\alpha = 1$ ja kaikilla $\beta \in (0, 1]$, jos $1 < \alpha \leq 2$. Lisäksi pätee

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(G)} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial\Omega}\ , \tag{3.11}$$

missä C_β on eksponentista β riippuva vakio.

Todistus. Todistus lähtee liikkeelle siitä, että todetaan funktion u olevan hyvin määritelty epäoleellisena integraalina, kun $x \in \partial\Omega$. Tämän jälkeen määritellään pinnan $\partial\Omega$ kanssa olevat yhdensuuntaiset pinnat $\partial\Omega_h$ siten, että

$$x = z + h\nu(z), \quad z \in \partial\Omega.$$

Edellä h kuvastaa pinnan $\partial\Omega_h$ etäisyyttä pinnasta $\partial\Omega$. Määritellään nyt näiden edellä mainittujen yhdensuuntaisten pintojen muodostama joukko $\Omega_{h_0} := \{x = z + h\nu(z) : z \in \partial\Omega,\ |h| \leq h_0\}$, missä h_0 on positiivinen vakio. Selvittääksemme, onko potentiaali u tasaisesti Hölder-jatkuva eksponentin β suhteen, niin valitaan pisteet $x_1, x_2 \in \Omega_{h_0}$ sopivasti ja lähdetään tutkimaan erotusta $u(x_1) - u(x_2)$. Tarkastelut jaetaan useampaan osaan ja arvioissa käytetään hyväksi ehtoja (3.8) sekä (3.9). Näiden avulla saadaan arvio erotukselle $u(x_1) - u(x_2)$, mistä seuraa triviaalisti epäyhtälön (3.11) voimassaolo. Lauseen yksityiskohtainen todistus löytyy kirjasta [2, s. 41-44] ja se jätetään lukijalle. □

Huomautus 3.10. Olkoon ydin K määritelty ja jatkuva kaikilla $x, y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, siten, että ehdot (3.8) ja (3.9) pätevät reunalla $\partial\Omega$. Tällöin potentiaali u, joka on määritelty kuten kohdassa (3.10) tiheydellä $\phi \in C(\partial\Omega)$ kuuluu Hölder-avaruuteen $C^{0,\beta}(\partial\Omega)$ ja lisäksi pätee

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\partial\Omega)} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial\Omega}. \tag{3.12}$$

Korollaari 3.11. *Olkoon K heikosti singulaarinen ydin, joka toteuttaa ehdon* (3.9) *kaikilla $x_1, x_2 \in \partial\Omega$ ja $y \in \partial\Omega$ sekä oletuksella $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Tällöin muotoa* (3.7) *oleva integraalioperaattori $\boldsymbol{A} : C^{0,\beta}(\partial\Omega) \to C^{0,\beta}(\partial\Omega)$ on kompakti kaikilla $\beta \in (0, \alpha]$, jos $0 < \alpha < 1$, kaikilla $\beta \in (0, 1)$, jos $\alpha = 1$ ja kaikilla $\beta \in (0, 1]$, jos $1 < \alpha \leq 2$.*

Todistus. Epäyhtälön (3.12) nojalla integraalioperaattori $\boldsymbol{A} : C(\partial\Omega) \to C^{0,\beta}(\partial\Omega)$ on rajoitettu. Lauseen 3.6 nojalla upotusoperaattori $\boldsymbol{I}^\beta : C^{0,\beta}(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ on kompakti ja näin ollen myös rajoitettu. Nyt operaattoritulo $\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}^\beta : C^{0,\beta}(\partial\Omega) \to C^{0,\beta}(\partial\Omega)$ on kompakti, sillä upotusoperaattori $\boldsymbol{I}^\beta$ on kompakti. $\square$

Lause 3.12. *Olkoot $S_{z,r} := \{y \in \partial\Omega : |y - z| < r\}$ ja $\Omega_{h_0} := \{x = z + h\nu(z) : z \in \partial\Omega,\ |h| \leq h_0\}$. Oletetaan, että funktio K on määritelty ja jatkuva kaikilla $x \in \Omega_{h_0},\ y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, ja on olemassa positiivinen vakio M siten, että kaikilla $x \in \Omega_{h_0},\ y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, pätee*

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{-2}. \tag{3.13}$$

Lisäksi oletetaan, että on olemassa vakio $m \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{-2-j} |x_1 - x_2|^j, \tag{3.14}$$

kaikilla $x_1, x_2 \in \Omega_{h_0},\ y \in \partial\Omega$ ja oletuksella $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$ sekä

$$\left| \int_{\partial\Omega \setminus S_{z,r}} K(x, y)\ dS(y) \right| \leq M \tag{3.15}$$

kaikilla $z \in \partial\Omega,\ x = z + h\nu(z) \in \Omega_{h_0}$ ja $0 < r < R$. Määritellään

$$u(x) := \int_{\partial\Omega} K(x, y)[\phi(y) - \phi(z)]\ dS(y), \quad x \in \Omega_{h_0}, \tag{3.16}$$

missä tiheys $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega),\ 0 < \alpha < 1$. Tällöin $u \in C^{0,\alpha}(\Omega_{h_0})$ ja pätee

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\Omega_{h_0})} \leq C\|\phi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \tag{3.17}$$

missä C on vakio.

Todistus. Lauseen todistus etenee vastaavalla tavalla kuin Lauseessa 3.9 ja se löytyy kirjasta [2, s. 45]. □

Huomautus 3.13. Olkoon ydin K määritelty ja jatkuva kaikilla $x, y \in \partial\Omega,\ x \neq y$, siten, että ehdot (3.13), (3.14) ja (3.15) pätevät reunalla $\partial\Omega$. Tällöin potentiaali u, joka on määritelty kuten kohdassa (3.16) tiheydellä $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega),\ 0 < \alpha < 1$, kuuluu Hölder-avaruuteen $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ja lisäksi pätee

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)} \leq C\|\phi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}. \tag{3.18}$$

3.3 Kerrospotentiaalit

Määritellään tässä luvussa kerrospotentiaalit, jotka ovat tässä työssä merkittävässä osassa reuna-arvo-ongelmien ratkaisemisessa. Kerrospotentiaalien avulla voimme muuntaa reuna-arvo-ongelman reunaintegraaliyhtälöksi ja näin ollen löytää ratkaisun alkuperäiselle ongelmalle. Tulemme myöhemmin Luvussa 4.2 osoittamaan, että sopivalla tiheysfunktion $\psi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla kaksikerros-potentiaali $D_\Omega\psi$ on sisäalueen Dirichlet'n ongelman (2.12) ratkaisu. Vastaavasti sopivalla tiheysfunktion $\phi \in C(\partial\Omega)$ valinnalla yksikerros-potentiaali $S_\Omega\phi$ on sisäalueen Neumannin ongelman (2.15) ratkaisu. Ennen kerrospotentiaalien määrittelyä esitetään Helmholtzin operaattorin perusratkaisu ja esityskaava Helmholtzin yhtälön ratkaisulle u.

Määritelmä 3.14. Olkoon $k \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\operatorname{Im} k \geq 0.$$

Funktio

$$\Phi(x) := \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad x \neq 0, \tag{3.19}$$

on Helmholtzin operaattorin $\Delta + k^2$ (säteilevä) perusratkaisu muuttujan x suhteen.

Perusratkaisu (3.19) kuvaa lähteestä poispäin etenevää aaltoa, kun taas säteittäisesti symmetrinen ratkaisu

$$\Phi(x) := \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-ik|x|}}{|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad x \neq 0,$$

kuvaa sisäänpäin etenevää aaltoa. Tässä työssä kuitenkin rajoitetaan tarkastelut poispäin eteneviin aaltoihin. Näytetään seuraavaksi esityskaava Helmholtzin yhtälön ratkaisulle u.

Lause 3.15. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2. Olkoon $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ Helmholtzin yhtälön*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{3.20}$$

ratkaisu alueessa Ω. Tällöin

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)} - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y) = u(x), \quad \text{kun } x \in \Omega, \tag{3.21}$$

tai

$$\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y) = 0, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \tag{3.22}$$

Todistus. Oletetaan, että $u \in \mathcal{S}(\Omega)$ on Helmholtzin yhtälön (3.20) ratkaisu alueessa Ω. Olkoon $x \in \Omega$ mielivaltainen piste ja $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| = r\}$ pistettä x ympäröivä pallokuori siten, että $S(x,r) \subset \Omega$. Olkoon ν pallon $S(x,r)$ yksikkönormaali, joka osoittaa kohti pallon sisäosaa.

Sovelletaan Greenin kaavaa (2.7) funktioihin $u(y)$ ja $\Phi(x-y)$ alueessa $\Omega_r = \{y \in \Omega : |x-y| > r\}$, jonka reuna $\partial\Omega_r = \partial\Omega \cup S(x,r)$. Tällöin saadaan

$$\int_{\Omega_r} u(y)\Delta\Phi(x-y) - \Phi(x-y)\Delta u(y)\ dy = \int_{\partial\Omega_r} u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y). \tag{3.23}$$

Koska funktio $\Phi(x-y)$ toteuttaa Helmholtzin yhtälön, kun $x \neq y$, niin pätee

$$\Delta\Phi(x-y) = -k^2\Phi(x-y). \tag{3.24}$$

Sijoitetaan (3.24) yhtälöön (3.23), jolloin saadaan

$$-\int_{\Omega_r} (\Delta u(y) + k^2 u(y))\Phi(x-y)\ dy = \int_{\partial\Omega_r} u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y).$$

Oletimme alussa, että u on Helmholtzin yhtälön ratkaisu, joten pätee

$$\int_{\partial\Omega_r} \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)} - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y) = 0. \tag{3.25}$$

Olemme kiinnostuneet, mitä yhtälölle (3.25) tapahtuu, kun pallon $S(x,r)$ säde $r \to 0$. Tarkastellaan siis raja-arvoa

$$\lim_{r\to 0}\int_{S(x,r)} \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial\nu(y)} - u(y)\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\ dS(y), \tag{3.26}$$

missä integrointi tapahtuu pallon $S(x,r)$ yli ja säde $r = |x-y| \to 0$. Lähdetään liikkeelle lausekkeen (3.26) vasemmanpuoleisesta termistä. Voidaan arvioida, että $|\Phi(x-y)| \leq \frac{C}{r}$, missä C on vakio. Lisäksi $\frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)}$ on rajoitettu ja pinnan $S(x,r)$ rajaama ala on verrannollinen arvoon r^2. Tällöin pätee

$$\left| \int_{S(x,r)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \, dS(y) \right| \leq \frac{C}{r} r^2 = Cr \longrightarrow 0, \quad \text{kun } r \to 0.$$

Tarkastellaan seuraavaksi lausekkeen (3.26) oikeanpuoleista termiä. Ensinnäkin funktion $\Phi(x-y)$ derivaatta ulkonormaalin suuntaan on

$$\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} = \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_y \Phi(x-y), \tag{3.27}$$

missä funktion $\Phi(x-y)$ gradientti muuttujan y suhteen on

$$\nabla_y \Phi(x-y) = \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \boldsymbol{\nu}(y).$$

Nyt sijoitetaan (3.27) lausekkeen (3.26) oikeanpuoleiseen termiin, jolloin saadaan

$$\int_{S(x,r)} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} u(y) \, dS(y) = \int_{S(x,r)} \left(\frac{1}{r} - ik \right) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} u(y) \, dS(y). \tag{3.28}$$

Tiedämme, että u on jatkuva funktio, $4\pi r^2$ on pallon $S(x,r)$ pinta-ala ja eksponenttifunktio $e^{ikr} \to 1$, kun $r \to 0$. Näiden nojalla yhtälöstä (3.28) seuraa

$$\begin{aligned}
&= \int_{S(x,r)} \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} u(y) \, dS(y) \;-\; \int_{S(x,r)} ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r} u(y) \, dS(y) \\
&= \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \int_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) \;-\; r \cdot ik \frac{e^{ikr}}{4\pi r^2} \int_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) \\
&= ⨍_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) \;-\; r \cdot ik ⨍_{S(x,r)} u(y) \, dS(y) \longrightarrow u(x), \quad \text{kun } r \to 0.
\end{aligned}$$

Edellä olevan tarkastelun nojalla lausekkeen (3.26) raja-arvo on

$$\lim_{r \to 0} \int_{S(x,r)} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \, dS(y) = -u(x). \tag{3.29}$$

Nyt yhtälöistä (3.25) ja (3.29) seuraa, että

$$\int_{\partial \Omega} \Phi(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} - u(y) \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \, dS(y) = u(x), \text{ kaikilla } x \in \Omega.$$

Kun $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, niin sovellamme Greenin kaavaa funktioihin $u(y)$ ja $\Phi(x-y)$ alueessa Ω, ja tästä seuraa yhtälö (3.22). $\square$

Helmholtzin yhtälön ratkaisulle u määritelty esityskaava (3.21) voidaan muotoilla myös niin kutsuttujen kerrospotentiaalien avulla, jotka määritellään seuraavaksi. Niillä on tärkeä rooli jatkossa, kun muunnamme reuna-arvo-ongelman reunaintegraaliyhtälöksi ja haemme sille ratkaisua. Kerrospotentiaalien määrittelyn jälkeen tarkastelemme niiden reuna-arvoja.

Määritelmä 3.16 (Yksikerros-potentiaali)**.** Olkoon $\phi \in C(\partial\Omega)$ annettu funktio. Funktiota

$$(S_\Omega\phi)(x) := \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\phi(y)\, dS(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \tag{3.30}$$

kutsutaan yksikerros-potentiaaliksi tiheydellä ϕ.

Määritelmä 3.17 (Kaksikerros-potentiaali)**.** Olkoot $\psi \in C(\partial\Omega)$ annettu funktio ja ν alueen Ω yksikköulkonormaali. Funktiota

$$(D_\Omega\psi)(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)\, dS(y), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \tag{3.31}$$

kutsutaan kaksikerros-potentiaaliksi tiheydellä ψ.

Huomautus 3.18. Kerrospotentiaalit $S_\Omega\phi, D_\Omega\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$ toteuttavat Helmholtzin yhtälöt

$$(\Delta + k^2)S_\Omega\phi = 0,$$
$$(\Delta + k^2)D_\Omega\psi = 0$$

joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Tämä seuraa siitä, että voimme derivoida integraalin sisällä, kun $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$.

3.4 Kerrospotentiaalien reuna-arvot ja Hölder-estimaatit

Tässä alaluvussa tarkastellaan kerrospotentiaalien reuna-arvoja ja Hölder-estimaatteja.

Lause 3.19. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\phi \in C(\partial\Omega)$. Yksikerros-potentiaali $u := S_\Omega\phi$ on tasaisesti Hölder-jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja lisäksi kaikilla $0 < \alpha < 1$ pätee*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)} \leq C_\alpha \|\phi\|_{\infty,\partial\Omega}\ , \tag{3.32}$$

missä C_α on reunasta $\partial\Omega$ ja eksponentista α riippuva vakio.

Todistus. Tarkastellaan yksikerros-potentiaalin u ydintä Φ. Koska

$$|\Phi(x-y)| \leq \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x \neq y,$$

niin Määritelmän 3.7 nojalla ydin Φ on heikosti singulaarinen, kun $\alpha = 1$, ja täten yksikerros-potentiaali on hyvin määritelty kaikilla $x \in \partial\Omega$. Voimme arvioida, että

$$\left|\frac{1}{|x_1-y|} - \frac{1}{|x_2-y|}\right| \leq \frac{|x_1-x_2|}{|x_1-y||x_2-y|} \leq \frac{2|x_1-x_2|}{|x_1-y|^2},$$

missä $2|x_1-x_2| \leq |x_1-y|$ sekä

$$|e^{ik|x_1-y|} - e^{ik|x_2-y|}| \leq k|x_1-x_2|.$$

Täten ydin Φ toteuttaa ehdon (3.9), kun $m = 1$. Nyt Lauseesta 3.9 seuraa, että $u \in C^{0,\beta}(\mathbb{R}^3),\ 0 < \beta < 1$, ja epäyhtälö (3.32) pätee. $\square$

Lause 3.20. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\phi \in C(\partial\Omega)$. Reunalla $\partial\Omega$ yksikerros-potentiaali u on*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\phi(y)\ dS(y), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.33}$$

missä integraali on epäoleellinen integraali.

Todistus. Lauseen 3.19 todistuksen nojalla yksikerros-potentiaali u on hyvin määritelty kaikilla $x \in \partial\Omega$ ja se on tasaisesti Hölder-jatkuva koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$ eksponentin $0 < \alpha < 1$ suhteen. Näin ollen yksikerros-potentiaali u on jatkuva myös reunalla $\partial\Omega$ ja yhtälö (3.33) pätee. $\square$

Lause 3.21. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\psi \in C(\partial\Omega)$. Kaksikerros-potentiaali $v := D_\Omega\psi$ voidaan jatkuvasti laajentaa joukosta Ω joukkoon $\bar{\Omega}$ ja joukosta $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ joukkoon $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ raja-arvojen ollessa seuraavat*

$$v_\pm(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)\ dS(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.34}$$

missä integraali on epäoleellinen integraali.

Edellä merkinnät $+$ ja $-$ osoittavat, mistä suunnasta reunaa $\partial\Omega$ lähestytään. Eli

$$v_+(x) = \lim_{\substack{y\to x \\ y \in \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}} v(y) \quad \textit{ja} \quad v_-(x) = \lim_{\substack{y\to x \\ y\in\Omega}} v(y), \quad \textit{kun } x \in \partial\Omega. \tag{3.35}$$

Todistus. Seuraavaksi esitettävä todistus löytyy kirjasta [2, s. 48-50]. Riittää, että todistamme lauseen tapauksessa $k = 0$, jolloin perusratkaisu on muotoa

$$\Phi_0(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y. \tag{3.36}$$

Tämä voidaan perustella seuraavasti:
Tarkastellaan ytimien Φ ja Φ_0 erotusfunktiota. Funktio

$$K(x,y) := \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} = \frac{\nu(y)\cdot(x-y)}{4\pi|x-y|^3}\left[e^{ik|x-y|} - ik|x-y|e^{ik|x-y|} - 1\right]$$

toteuttaa ehdot (3.8) ja (3.9) avaruudessa $\mathbb{R}^3$, kun $\alpha = 2$ ja $m = 1$. Nyt Lauseen 3.9 nojalla ytimillä Φ ja Φ_0 varustettujen kaksikerros-potentiaalien erotus on tasaisesti Hölder-jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tiheydellä $\psi \in C(\partial\Omega)$.

Yhtälön (3.34) integraali on olemassa epäoleellisena integraalina, sillä ytimelle Φ_0 pätee

$$\frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} = \frac{\nu(y)\cdot(x-y)}{4\pi|x-y|^3} \tag{3.37}$$

ja Lauseen 2.2 nojalla voidaan arvioida

$$\left|\frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)}\right| \leq \frac{L}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in \partial\Omega, \quad x \neq y. \tag{3.38}$$

Lähdetään liikkeelle todistamalla Lause 3.21, kun kaksikerros-potentiaali on muotoa

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \backslash \partial\Omega, \tag{3.39}$$

missä tiheys on vakio $\psi = 1$.

Gaussin kaavan (2.5) ja esityskaavan (3.21) nojalla pätee

$$w(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \\ -1, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Edelleen Gaussin kaavan nojalla voimme näyttää, että

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y) = \lim_{r\to 0} \int_{H_{x,r}} \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y) = \lim_{r\to 0} \frac{-1}{4\pi r^2} \int_{H_{x,r}} dS(y), \quad x \in \partial\Omega,$$

missä $H_{x,r}$ määrittelee pallokuoren $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |x-y| = r\}$ sitä osaa, joka sisältyy alueeseen Ω ja ν on tämän pinnan yksikköulkonormaali.

Koska

$$\int_{H_{x,r}} dS(y) = 2\pi r^2 + O(r^3)$$

tasaisesti reunalla $\partial\Omega$, niin pätee

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial\nu(y)}\, dS(y) = -\frac{1}{2}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.40}$$

Näin olemme todistaneet lauseen tapauksessa, jossa tiheys on vakio $\psi = 1$.

Oletetaan seuraavaksi, että tiheys $\psi \in C(\partial\Omega)$ on mielivaltainen. Joukossa $\Omega_{h_0} \setminus \partial\Omega$ määrittelemme kaksikerros-potentiaalin v muodossa

$$v(x) = \psi(z)w(x) + u(x), \quad x = z + h\nu(z), \quad x \in \Omega_{h_0} \setminus \partial\Omega, \tag{3.41}$$

missä

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial\nu(y)} [\psi(y) - \psi(z)]\, dS(y). \tag{3.42}$$

Meidän tulee osoittaa, että u on jatkuva joukossa Ω_{h_0}. Nyt epäyhtälön (3.38) ja Lauseen 3.8 nojalla yhtälön (3.42) integraali on olemassa epäoleellisena integraalina, kun $x \in \partial\Omega$. Lisäksi funktio u on jatkuva reunalla $\partial\Omega$. Riittää siis osoittaa, että

$$\lim_{x\to z} u(x) = \lim_{h\to 0} u(z + h\nu(z)) = u(z), \quad z \in \partial\Omega,$$

tasaisesti reunalla $\partial\Omega$.

Lauseen 2.2 nojalla pätee arvio

$$|x-y|^2 = |z-y|^2 + 2(z-y)\cdot(x-z) + |x-z|^2 \geq \frac{1}{2}\Big(|z-y|^2 + |x-z|^2\Big)$$

edellyttäen, että h_0 on suhteellisen pieni. Oletetaan, että $r < R$ ja merkitään

$$4\pi \frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial\nu(y)} = \frac{\nu(y)\cdot(z-y)}{|x-y|^3} + \frac{\nu(y)\cdot(x-z)}{|x-y|^3} \ .$$

Kun projektoidaan tangenttitasolle, niin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{S_{z,r}} \left|\frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial\nu(y)}\right| dS(y) &\leq C_1\left(\int_0^r d\rho + |x-z|\int_0^r \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + |x-z|^2)^{3/2}}\right) \\ &= C_1(r+1) \leq C_1(R+1), \end{aligned} \tag{3.43}$$

missä C_1 on reunasta $\partial\Omega$ riippuvainen vakio. Voidaan arvioida, että

$$\left| \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z-y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq C_2 \frac{|x-z|}{|z-y|^3} \ ,$$

kun $2|x-y| \leq |z-y|$ ja näin ollen

$$\int_{\partial\Omega \setminus S_{z,r}} \left| \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z-y)}{\partial \nu(y)} \right| dS(y) \leq C_3 \frac{|x-z|}{r^3}, \tag{3.44}$$

missä C_2 ja C_3 ovat vakioita. Kun yhdistämme (3.43) ja (3.44), niin saamme

$$|u(x) - u(z)| \leq C \left\{ \sup_{|y-z| \leq r} |\psi(y) - \psi(z)| + \frac{|x-z|}{r^3} \right\},$$

missä C on vakio. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\psi \in C(\partial\Omega)$, niin voimme valita $r > 0$ siten, että

$$|\psi(y) - \psi(z)| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

kaikilla $y, z \in \partial\Omega$, kun $|y - z| < r$. Valitaan $\delta < (\varepsilon/2C)r^3$, jolloin pätee

$$|u(x) - u(z)| < \varepsilon$$

kaikilla $|x - z| < \delta$, ja täten olemme todistaneet lauseen. □

Korollaari 3.22. *Olkoon $\psi \in C(\partial\Omega)$. Kaksikerros-potentiaalille v pätee seuraava hyppyrelaatio*

$$v_+ - v_- = \psi \quad \textit{reunalla } \partial\Omega. \tag{3.45}$$

Lause 3.23. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2. Olkoon $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, tasaisesti Hölder-jatkuva funktio. Tällöin kaksikerros-potentiaali v on tasaisesti Hölder-jatkuva joukoissa $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ja $\bar{\Omega}$ siten, että pätee*

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)} \leq C_\alpha \|\psi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)} \tag{3.46}$$

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_\alpha \|\psi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \tag{3.47}$$

missä C_α on reunasta $\partial\Omega$ ja eksponentista α riippuva vakio.

Todistus. Tässä todistuksessa viittaamme Lauseen 3.21 todistukseen. Tutkitaan kaksikerros-potentiaalia v, joka on yhtälön (3.41) muotoa, ja osoitetaan, että se on tasaisesti Hölder-jatkuva. Koska yhtälön (3.41) ensimmäinen termi $\psi(z)w(x)$ toteuttaa lauseen mukaiset ominaisuudet joukossa Ω_{h_0}, niin riittää osoittaa, että toinen termi $u(x)$ on tasaisesti Hölder-jatkuva joukossa Ω_{h_0}. Yhtälön (3.42) ydin

$$\frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} = \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{4\pi|x-y|^3}$$

toteuttaa Lauseen 3.12 ehdot (3.13) ja (3.14), kun $m = 1$, $x \in \mathbb{R}^3$ ja $y \in \partial\Omega$. Edelleen epäyhtälöstä (3.43) nähdään, että ehto (3.15) on myös voimassa. Nyt Lauseen 3.12 nojalla myös yhtälön (3.41) toinen termi

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)} [\psi(y) - \psi(z)] \; dS(y)$$

on tasaisesti Hölder-jatkuva joukossa Ω_{h_0}. Koska kaksikerros-potentiaali v toteuttaa Helmholtzin yhtälön, niin se on analyyttinen joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Kaksikerros-potentiaalin analyyttisyyden nojalla voimme laajentaa edellä olevan koko avaruuteen $\mathbb{R}^3$ ja näin ollen olemme todistaneet lauseen. □

Lause 3.24. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\phi \in C(\partial\Omega)$. Reunalla $\partial\Omega$ yksikerros-potentiaalin u derivaatta ulkonormaalin suuntaan on*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) \; dS(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.48}$$

missä integraali on epäoleellinen integraali. Edellä merkinnät + ja − osoittavat, mistä suunnasta reunaa $\partial\Omega$ lähestytään. Eli

$$u_+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}} u(y), \quad u_-(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \Omega}} u(y), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.49}$$

ja

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \to 0+} \frac{\partial u(x \pm h\nu(x))}{\partial \nu(x)}, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3.50}$$

Todistus. Seuraavaksi esitettävä todistus mukailee todistusta, joka löytyy kirjasta [2, s. 54]. Olkoon v kaksikerros-potentiaali tiheydellä $\phi \in C(\partial\Omega)$. Olkoot $\Omega_{h_0} := \{w = z + h\nu(z) : z \in \partial\Omega, \ |h| \leq h_0\}$, missä $h_0 \geq 0$, ja $x \in \Omega_{h_0} \setminus \partial\Omega$ siten, että $x = z + h\nu(z)$. Nyt voimme kirjoittaa

$$(\nu(z) \cdot \nabla u(x)) + v(x) = \nu(z) \cdot \int_{\partial\Omega} \nabla_x \Phi(x-y)\phi(y) \; dS(y) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \phi(y) \; dS(y).$$

Symmetriarelaation

$$\nabla_x \Phi(x-y) = -\nabla_y \Phi(x-y) \tag{3.51}$$

nojalla pätee

$$\begin{aligned}(\nu(z) \cdot \nabla u(x)) + v(x) &= \nu(z) \cdot \int_{\partial\Omega} -\nabla_y \Phi(x-y)\phi(y) \; dS(y) + \int_{\partial\Omega} \nu(y) \cdot \nabla_y \Phi(x-y)\phi(y) \; dS(y) \\ &= \int_{\partial\Omega} (\nu(y) - \nu(z)) \cdot \nabla_y \Phi(x-y)\phi(y) \; dS(y). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Nyt Lauseen 3.9 nojalla yhtälön (3.52) oikea puoli on jatkuva sekä ehdot (3.8) ja (3.9) toteutuvat, kun $\alpha = 1$ ja $m = 1$. Sovelletaan nyt Lausetta 3.21 kaksikerros-potentiaaliin v, jolloin saadaan

$$(\nu(z)\cdot\nabla u(x))+\left(\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\phi(y)\,dS(y)\pm\frac{1}{2}\phi(x)\right)=\int_{\partial\Omega}(\nu(y)-\nu(z))\cdot\nabla_y\Phi(x-y)\phi(y)\,dS(y)$$

$$\nu(z)\cdot\nabla u(x)=\int_{\partial\Omega}-\nu(z)\cdot\nabla_y\Phi(x-y)\phi(y)\;dS(y)\mp\frac{1}{2}\phi(x). \tag{3.53}$$

Käytetään symmetriarelaatiota (3.51) uudelleen yhtälöön (3.53), jolloin saadaan

$$\nu(z)\cdot\nabla u(x)=\int_{\partial\Omega}\nu(z)\cdot\nabla_x\Phi(x-y)\phi(y)\;dS(y)\mp\frac{1}{2}\phi(x).$$

Sijoitetaan yllä olevaan yhtälöön $x = z + h\nu(z)$ ja käytetään hyväksi tietoa $\frac{\partial u}{\partial \nu} := \nu \cdot \nabla u$, jolloin saadaan

$$\frac{\partial u(z+h\nu(z))}{\partial\nu(z)}=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi(z+h\nu(z)-y)}{\partial\nu(z)}\phi(y)\;dS(y)\mp\frac{1}{2}\phi(z+h\nu(z)).$$

Kun $h \to 0$, niin saadaan

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial\nu}(z)=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi(z-y)}{\partial\nu(z)}\phi(y)\;dS(y)\mp\frac{1}{2}\phi(z),$$

missä $z \in \partial\Omega$, ja täten olemme todistaneet lauseen. □

Korollaari 3.25. *Olkoon $\phi \in C(\partial\Omega)$. Yksikerros-potentiaalille u pätee seuraava hyppy-relaatio*

$$\frac{\partial u_+}{\partial\nu}-\frac{\partial u_-}{\partial\nu}=-\phi \quad \textit{reunalla } \partial\Omega. \tag{3.54}$$

Lause 3.26. *Olkoon $\psi \in C(\partial\Omega)$. Kaksikerros-potentiaalille v pätee*

$$\frac{\partial v_+}{\partial\nu}=\frac{\partial v_-}{\partial\nu} \quad \textit{reunalla } \partial\Omega \textit{ siten, että}$$

$$\lim_{h\to 0+}\left\{\frac{\partial v(x+h\nu(x))}{\partial\nu(x)}-\frac{\partial v(x-h\nu(x))}{\partial\nu(x)}\right\}=0,\quad x\in\partial\Omega,$$

tasaisesti reunalla $\partial\Omega$.

Todistus. Todistuksessa lähdetään liikkeelle siitä, että muodostetaan lauseke erotukselle

$$\frac{\partial v(x+h\nu(x))}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial v(x-h\nu(x))}{\partial \nu(x)}$$

ja arvioidaan saadun lausekkeen termejä. Raja-arvon olemassaolo voidaan todentaa vastaavalla tavalla kuin Lauseen 3.21 todistuksessa. Lauseen tarkempi todistus löytyy kirjasta [2, s. 55]. □

Lause 3.27. *Olkoon $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, tasaisesti Hölder-jatkuva funktio. Kun kaksikerros-potentiaalin v suorat arvot ovat*

$$v(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, dS(y), \quad x \in \partial\Omega,$$

niin kaksikerros-potentiaali $v \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ eli se on tasaisesti Hölder-jatkuvasti differentioituva funktio reunalla $\partial\Omega$. Lisäksi pätee

$$\|\nabla_s v\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)} \leq C_\alpha \|\psi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)}, \tag{3.55}$$

missä C_α on reunasta $\partial\Omega$ ja eksponentista α riippuva vakio.

Todistus. Kuten aiemmissa todistuksissa, niin myös tässä riittää tutkia tapausta $k = 0$. Voidaan osoittaa, että ytimillä Φ ja Φ_0 varustettujen kaksikerros-potentiaalien gradienttien erotus on tasaisesti Hölder-jatkuva avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tiheydellä $\psi \in C(\partial\Omega)$. Epäyhtälössä (3.55) esiintyvä merkintä ∇_s tarkoittaa pintagradienttia [2]. Seuraavassa luonnostelemme todistusta, joka löytyy yksityiskohtaisemmin kirjasta [2, s. 56-57].

Olkoon $x \in \partial\Omega$ mielivaltainen reunan piste siten, että $\tau(x)$ on pisteen x kautta kulkevan tangenttitason yksikkövektori. Valitaan reunalta $\partial\Omega$ sellainen C^2 -käyrä C, että se kulkee pisteen x kautta. Olkoon x_h käyrän C piste siten, että pisteiden x ja x_h välinen kaari on pituudeltaan h. Tällöin x_h on muotoa

$$x_h = x + h\tau(x) + O(h^2).$$

Seuraavaksi tarkastellaan ytimien

$$\frac{\partial \Phi_0(x_h - y)}{\partial \nu(y)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial \nu(y)}$$

erotusosamäärää ja muodostetaan tämän nojalla lauseke potentiaalille u, joka on muotoa

$$u(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega} (\psi(y) - \psi(x)) \cdot \left(\frac{\tau(x)\cdot\nu(y)}{|x-y|^3} - 3\frac{(\nu(y)\cdot(x-y))(\tau(x)\cdot(x-y))}{|x-y|^5} \right) dS(y). \tag{3.56}$$

Oletamme, että yhtälö (3.56) kuvaa derivaattaa $\tau(x) \cdot \nabla_s v(x)$. Ensimmäiseksi osoitetaan, että yhtälön (3.56) integraali on olemassa epäoleellisena integraalina. Tämän jälkeen nähdään, että u on tasaisesti Hölder-jatkuva funktio toteuttaen ehdon

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)} \leq C\|\psi\|_{C^{0,\alpha}(\partial\Omega)},$$

missä $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega),\ 0 < \alpha < 1$. Lopuksi osoitetaan, että yhtälö (3.56) todellakin määrittelee kaksikerros-potentiaalin v derivaatan pinnalla $\partial\Omega$. □

3.5 Fredholmin alternatiivi

Luvussa 4 käsittelemme reunaintegraaliyhtälöitä, joiden avulla etsimme ratkaisuja reuna-arvo-ongelmille. Tulemme myös näyttämään, että sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö voidaan esittää muodossa $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\psi = -2f$ ja vastaavasti sisäalueen Neumannin ongelmaa vastaava reunaintegraaliyhtälö muodossa $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*)\phi = 2g$. Näihin yhtälöihin voimme soveltaa Fredholmin alternatiivia, joka esitellään tässä luvussa.

Määritelmä 3.28. Olkoot X ja Y normiavaruuksia sekä $\langle .,. \rangle : X \times Y \to \mathbb{C}$ bilineaarimuoto, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(i) Kaikilla $\phi \in X$, $\phi \neq 0$, on olemassa $\psi \in Y$ siten, että $\langle \phi, \psi \rangle \neq 0$ sekä kaikilla $\psi \in Y$, $\psi \neq 0$, on olemassa $\phi \in X$ siten, että $\langle \phi, \psi \rangle \neq 0$.

(ii) Kaikilla $\phi_1, \phi_2, \phi \in X$, $\psi_1, \psi_2, \psi \in Y$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ pätee

$$\langle \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2, \psi \rangle = \alpha_1\langle \phi_1, \psi \rangle + \alpha_2\langle \phi_2, \psi \rangle,$$
$$\langle \phi, \beta_1\psi_1 + \beta_2\psi_2 \rangle = \beta_1\langle \phi, \psi_1 \rangle + \beta_2\langle \phi, \psi_2 \rangle.$$

Kutsumme normiavaruuksia X ja Y, jotka on varustettu bilineaarimuodolla, duaalipariksi ja käytämme tästä merkintää $\langle X, Y \rangle$.

Määritelmä 3.29. Olkoon $\langle X, Y \rangle$ duaalipari. Operaattoreita $\boldsymbol{A} : X \to X$ ja $\boldsymbol{B} : Y \to Y$ kutsutaan adjungaateiksi, jos kaikilla $\phi \in X,\ \psi \in Y$ pätee

$$\langle \boldsymbol{A}\phi, \psi \rangle = \langle \phi, \boldsymbol{B}\psi \rangle.$$

Määritelmä 3.30. Olkoon X normiavaruus ja $\boldsymbol{A} : X \to X$ lineaarinen kuvaus. Operaattorin $\boldsymbol{A}$ nolla-avaruus eli ydin on

$$ker\boldsymbol{A} = \{\phi \in X \mid \boldsymbol{A}\phi = 0\} \tag{3.57}$$

ja kuva-avaruus

$$im\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{A}\phi \mid \phi \in X\}. \tag{3.58}$$

Lause 3.31. *Olkoot X normiavaruus, $\boldsymbol{A} : X \to X$ kompakti lineaarioperaattori ja $\boldsymbol{I}$ identtinen kuvaus. Operaattorin $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ nolla-avaruus on äärellisulotteinen eli $dim\ ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) < \infty$.*

Todistus. Lauseen todistus löytyy muun muassa kirjasta [11, s. 34]. Rajoitetun lineaarioperaattorin $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ nolla-avaruus $ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ on normiavaruuden X suljettu lineaarinen aliavaruus. Koska kaikilla $\phi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ pätee $\boldsymbol{A}\phi = \phi$, niin operaattorin $\boldsymbol{A}$ rajoittuma nolla-avaruuteen $ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ vastaa identtistä kuvausta $\boldsymbol{I} : ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \to ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$. Koska $\boldsymbol{A}$ on kompakti avaruudessa X, niin se on kompakti myös X:n suljetuissa lineaarisissa aliavaruuksissa. Edellä mainittu identtinen kuvaus on puolestaan kompakti, jos ja vain jos $dim\ ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) < \infty$ ja tämä todistaa lauseen väittämän. □

Lause 3.32. *Olkoot X normiavaruus, $\boldsymbol{A} : X \to X$ kompakti lineaarioperaattori ja $\boldsymbol{I}$ identtinen kuvaus. Operaattorin $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ kuva-avaruus $im(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \subset X$ on suljettu lineaarinen aliavaruus.*

Todistus. Lauseen todistus löytyy muun muassa kirjasta [11, s. 34-35]. □

Lause 3.33 (Fredholmin alternatiivi)**.** *Olkoot $\langle X, Y \rangle$ duaalipari sekä $\boldsymbol{A} : X \to X$ ja $\boldsymbol{B} : Y \to Y$ kompaktit operaattorit siten, että ne ovat toistensa adjungaatteja. Tällöin joko*

$$\begin{aligned} ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \{0\} \quad &ja \quad ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \{0\} \\ sekä \quad im(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = X \quad &ja \quad im(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = Y \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned} &dim\ ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = dim\ ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) \in \mathbb{N} \\ &ja \quad im(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \{f \in X : \langle f, \psi \rangle = 0, \quad \psi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})\} \\ &ja \quad im(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \{g \in Y : \langle \phi, g \rangle = 0, \quad \phi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\}. \end{aligned}$$

Todistus. Lauseen yksityiskohtainen todistus löytyy kirjoista [2, s. 19-21] ja [9, s. 72-73]. □

Luku 4

Sisäalueen reuna-arvo-ongelmista

4.1 Reunaintegraalioperaattorit

Käsitellään tässä luvussa lyhyesti reunaintegraalioperaattorit, joita käytämme myöhemmin, kun tarkastelemme reuna-arvo-ongelmia ja tutkimme niiden ratkeavuutta. Huomaamme, että seuraavaksi määriteltävät reunaintegraalioperaattorit liittyvät läheisesti kerrospotentiaaleihin $u := S_\Omega \phi$ ja $v := D_\Omega \psi$.

Integraalioperaattorit $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^* : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ muotoillaan seuraavasti

$$(\boldsymbol{K}\psi)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} \psi(y)\ dS(y), \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.1}$$

$$(\boldsymbol{K}^*\phi)(x) := 2 \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(x)} \phi(y)\ dS(y), \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.2}$$

Integraalioperaattorit $\boldsymbol{K}$ ja $\boldsymbol{K}^*$ ovat toistensa adjungaatteja, kun duaaliparina on $\langle C(\partial\Omega), C(\partial\Omega)\rangle$ ja bilineaarimuoto määritellään seuraavasti

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_{\partial\Omega} \psi\phi\ dS, \quad \psi, \phi \in C(\partial\Omega).$$

Lause 4.1. *Operaattorit* $\boldsymbol{K}$ *ja* $\boldsymbol{K}^*$ *ovat kompakteja avaruuksissa* $C(\partial\Omega)$ *ja* $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$*, kun* $0 < \alpha < 1$*. Lisäksi pätee* $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^* : C(\partial\Omega) \to C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ *ja* $\boldsymbol{K} : C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \to C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$.

Todistus. Olkoot $\boldsymbol{K}$ ja $\boldsymbol{K}^*$ reunaintegraalioperaattorit, jotka ovat määritelty kuten kohdissa (4.1) ja (4.2). Tutkitaan näiden integraalioperaattoreiden ytimiä

$$\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} = \frac{\nu(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^2}(1 - ik|x-y|)\Phi(x-y)$$

ja

$$\frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(x)} = \frac{\nu(x)\cdot(y-x)}{|x-y|^2}(1-ik|x-y|)\Phi(x-y).$$

Lauseen 2.2 nojalla nähdään, että ytimet ovat heikosti singulaarisia toteuttaen ehdon (3.9), kun $m = 2$. Nyt Lauseesta 3.8 ja Korollaarista 3.11 seuraa, että integraalioperaattorit $\boldsymbol{K}$ ja $\boldsymbol{K}^*$ ovat kompakteja sekä avaruudessa $C(\partial\Omega)$ että avaruudessa $C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$, kun $0 < \alpha < 1$. Lauseen 3.9 nojalla pätee, että $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}^* : C(\partial\Omega) \to C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ja Lauseesta 3.27 puolestaan seuraa, että $\boldsymbol{K} : C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \to C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. □

4.2 Dirichlet'n ja Neumannin ongelmien muotoilu reunaintegraaliyhtälöinä

Tässä luvussa muotoilemme sisäalueen Dirichlet'n ja Neumannin ongelmat reunaintegraaliyhtälöinä. Tulemme osoittamaan, että sopivalla tiheysfunktion ψ valinnalla kaksikerros-potentiaali v on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Vastaavasti sopivalla tiheysfunktion ϕ valinnalla yksikerros-potentiaali u on sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Käsitellään ensin sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa ja tämän jälkeen sisäalueen Neumannin ongelmaa.

Lause 4.2. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\psi \in C(\partial\Omega)$. Kaksikerros-potentiaali*

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)\; dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \tag{4.3}$$

on sisäalueen Dirichlet'n ongelman (2.12) *ratkaisu joukossa Ω sillä edellytyksellä, että ψ on integraaliyhtälön*

$$\psi(x) - 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)}\psi(y)\; dS(y) = -2f(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.4}$$

ratkaisu.

Todistus. Huomautuksessa 3.18 jo totesimme, että kaksikerros-potentiaali v toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$. Lauseesta 3.21 seuraa, että kaksikerros-potentiaali v toteuttaa myös ehdon

$$v = f$$

reunalla $\partial\Omega$, jos tiheysfunktio ψ on yhtälön (4.4) ratkaisu. Täten olemme osoittaneet, että kaksikerros-potentiaali v on sisäalueen Dirichlet'n ongelman (2.12) ratkaisu sopivalla tiheysfunktion ψ valinnalla. $\square$

Sisäalueen Dirichlet'n ongelman tapauksessa integraaliyhtälö (4.4) voidaan esittää myös muodossa

$$\psi - \boldsymbol{K}\psi = -2f, \tag{4.5}$$

missä $\boldsymbol{K} : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ on kompakti reunaintegraalioperaattori ja määritelty kuten kohdassa (4.1). Nyt voimme soveltaa integraaliyhtälöön (4.5) Fredholmin alternatiivia selvittääksemme, milloin integraaliyhtälö on ratkeava. Jos pystymme osoittamaan, että integraaliyhtälö (4.5) on ratkeava, niin kaksikerros-potentiaali v on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu.

Lause 4.3. *Olkoot $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ rajoitettu alue, jonka reuna $\partial\Omega$ on C^2, ja $\phi \in C(\partial\Omega)$. Yksikerros-potentiaali*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\phi(y)\ dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \tag{4.6}$$

on sisäalueen Neumannin ongelman (2.15) *ratkaisu joukossa Ω sillä edellytyksellä, että ϕ on integraaliyhtälön*

$$\phi(x) + 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(x)}\phi(y)\ dS(y) = 2g(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{4.7}$$

ratkaisu.

Todistus. Yksikerros-potentiaali u toteuttaa Helmholtzin yhtälön

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$, mikä todettiin Huomautuksessa 3.18. Lauseesta 3.24 seuraa, että yksikerros-potentiaali u toteuttaa myös ehdon

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$$

reunalla $\partial\Omega$, jos tiheysfunktio ϕ on yhtälön (4.7) ratkaisu. Täten olemme osoittaneet, että yksikerros-potentiaali u on sisäalueen Neumannin ongelman (2.15) ratkaisu sopivalla tiheysfunktion ϕ valinnalla. $\square$

Sisäalueen Neumannin ongelman tapauksessa integraaliyhtälö (4.7) voidaan esittää myös muodossa

$$\phi + \boldsymbol{K}^*\phi = 2g, \tag{4.8}$$

missä $\boldsymbol{K}^* : C(\partial\Omega) \to C(\partial\Omega)$ on kompakti reunaintegraalioperaattori ja määritelty kuten kohdassa (4.2). Integraaliyhtälöön (4.8) voimme soveltaa Fredholmin alternatiivia tutkiaksemme sen ratkeavuutta. Jos integraaliyhtälö (4.8) on ratkeava, niin yksikerros-potentiaali u on sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu.

4.3 Reuna-arvo-ongelman ratkeavuus

Tutkitaan tässä luvussa reuna-arvo-ongelmien ratkeavuutta. Tulemme huomaamaan, että sisäalueen reuna-arvo-ongelmat eivät yleisesti ole yksikäsitteisesti ratkeavia. Ensimmäiseksi käsittelemme sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa tutkimalla, milloin reunaintegraaliyhtälö $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\psi = -2f$ on ratkeava. Tämän jälkeen käsittelemme sisäalueen Neumannin ongelmaa ja tutkimme sitä vastaavan reunaintegraaliyhtälön $(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*)\phi = 2g$ ratkeavuutta.

Tulemme seuraavaksi osoittamaan, että operaattorin $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*$ nolla-avaruus $ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*)$ vastaa homogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)v = 0 & \text{alueessa } \Omega \\ v = 0 & \text{reunalla } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

ratkaisuja. Määritellään jatkoa ajatellen seuraavanlainen lineaariavaruus

$$V := \left\{ \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} : v \in \mathcal{S}(\Omega),\ \Delta v + k^2 v = 0 \text{ joukossa } \Omega,\ v = 0 \text{ reunalla } \partial\Omega \right\}.$$

Jos Helmholtzin yhtälössä esiintyvä aaltoluku k ei ole sisäalueen Dirichlet'n ominaisarvo, niin pätee $V = \{0\}$.

Lause 4.4. *$ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*) = V$.*

Todistus. Olkoot $\phi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*)$ ja

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x-y)\phi(y)\ dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega,$$

yksikerros-potentiaali. Oletuksesta $\phi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*)$ seuraa suoraan, että

$$\phi(x) - 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(x)}\phi(y)\ dS(y) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.10}$$

Nyt Lauseen 3.24 nojalla yhtälö (4.10) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.11}$$

Tässä työssä olemme tarkastelleet sisäaluetta Ω, mutta nyt tarvitsemme tietoa myös ulkoalueen $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ Neumannin ongelman ratkeavuudesta. Tiedetään, että Neumannin ongelmalla on enintään yksi ratkaisu ulkoalueessa $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ja tämän tiedon osalta viittaamme lähteeseen [2]. Yhtälöstä (4.11) seuraa, että u on homogeenisen ulkoalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Koska ulkoalueessa Neumannin ongelma on yksikäsitteisesti ratkeava, niin $u = 0$ joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Tiedetään, että yksikerros-potentiaali u on jatkuva yli reunan $\partial\Omega$. Koska yksikerros-potentiaali u toteuttaa Helmholtzin yhtälön sisäalueessa Ω ja reunalla $u = 0$, niin u on homogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Hyppyrelaation (3.54) nojalla

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu} - \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = -\phi$$

reunalla $\partial\Omega$. Edelleen yhtälön (4.11) nojalla pätee

$$\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = \phi$$

reunalla $\partial\Omega$ ja täten $\phi \in V$.

Oletetaan nyt, että $\phi \in V$ eli $\phi = \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$, missä v on homogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Lauseen 3.15 nojalla

$$\int_{\partial\Omega} v(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial v(y)}{\partial \nu(y)}\ dS(y) = 0, \tag{4.12}$$

kun $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Koska $v = 0$ reunalla $\partial\Omega$ ja oletuksen mukaan $\phi = \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$, niin yhtälöstä (4.12) seuraa, että

$$\int_{\partial\Omega} -\Phi(x-y)\phi(y)\ dS(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega},$$

eli

$$u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Kun derivoidaan u:ta ulkonormaalin suuntaan ja annetaan $x \to \partial\Omega$, niin saadaan

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(x)}\phi(y)\ dS(y) - \frac{1}{2}\phi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Eli

$$\phi(x) - (\boldsymbol{K}^*\phi)(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

ja näin ollen $\phi \in ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}^*)$. □

Jos operaattorin $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*$ nolla-avaruus $ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*)=\{0\}$ eli $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*$ on injektio, niin reunaintegraaliyhtälölle (4.5) löytyy yksikäsitteinen ratkaisu $\psi \in C(\partial\Omega)$ kaikilla $f \in C(\partial\Omega)$. Jos operaattori $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*$ ei ole injektio eli $ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*) \neq \{0\}$, niin Fredholmin alternatiivin nojalla $dim\ ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*) = dim\ ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}) = m < \infty,\ m \in \mathbb{N}$, eikä reunaintegraaliyhtälölle (4.5) löydy yksikäsitteistä ratkaisua. Fredholmin alternatiivi antaa kuitenkin ehdon, jonka toteutuessa reunaintegraaliyhtälöllä on ratkaisu. Tämä ratkaisu ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Tämän ehdon toteutuminen takaa myös sen, että sisäalueen Dirichlet'n ongelma on ratkeava. Ennen tätä tarkastelua esitämme seuraavan aputuloksen, jota hyödynnämme sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkeavuusehdon todistuksessa. Tämän seuraavan lauseen todistuksen osalta viittaamme lähteeseen.

Lause 4.5. *Olkoon u sisäalueen tai ulkoalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu siten, että reuna-arvo $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $0<\alpha<1$. Tällöin vastaavasti $u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ tai $u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \backslash \Omega)$.*

Todistus. Lauseen yksityiskohtainen todistus löytyy kirjasta [2, s. 87]. □

Lause 4.6. *Sisäalueen Dirichlet'n ongelma* (2.12) *on ratkeava, jos ja vain jos*

$$\int_{\partial\Omega} f \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS = 0 \tag{4.13}$$

kaikilla homogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman (4.9) *ratkaisuilla v.*

Todistus. Jos aaltoluku k ei ole sisäalueen Dirichlet'n ominaisarvo, niin $V=\{0\}$. Nyt Lauseen 4.4 ja Fredholmin alternatiivin 3.33 nojalla pätee, että $ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})=\{0\}$ ja epähomogeenista sisäalueen Dirichlet'n ongelmaa (2.12) vastaava reunaintegraaliyhtälö $\psi - \boldsymbol{K}\psi = -2f$ on yksikäsitteisesti ratkeava kaikilla $f \in C(\partial\Omega)$.

Jos k on sisäalueen Dirichlet'n ominaisarvo, niin Lauseen 4.4 nojalla $ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}) \neq \{0\}$. Nyt Fredholmin alternatiivin 3.33 nojalla reunaintegraaliyhtälö $\psi - \boldsymbol{K}\psi = -2f$ on ratkeava, jos ja vain jos pätee ehto

$$\langle f, \phi \rangle := \int_{\partial\Omega} f\phi\, dS = 0, \tag{4.14}$$

missä $\phi \in ker(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*)$. Tämä Fredholmin alternatiivin antama ehto (4.14) vastaa lauseen ehtoa (4.13) ja näin ollen reunaintegraaliyhtälölle $\psi - \boldsymbol{K}\psi = -2f$ löytyy ratkaisu. Koska reunaintegraaliyhtälö on ratkeava, niin myös alkuperäinen sisäalueen Dirichlet'n ongelma (2.12) on ratkeava.

Meidän tulee vielä todistaa ehdon (4.13) välttämättömyys sisäalueen Dirichlet'n ongelman (2.12) ratkeavuudelle. Olkoon u epähomogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu ja v homogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Greenin kaavan (2.7) mukaan

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS. \tag{4.15}$$

Koska u ja v toteuttavat Helmholtzin yhtälön, niin pätee $\Delta u = -k^2 u$ ja $\Delta v = -k^2 v$ alueessa Ω. Lisäksi $u = f$ ja $v = 0$ reunalla $\partial\Omega$. Kun nämä sijoitetaan Greenin kaavaan (4.15), niin saadaan

$$0 = \int_\Omega u(-k^2 v) - v(-k^2 u) \; dx = \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial v}{\partial \nu} \; dS.$$

Eli täytyy olla

$$\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial v}{\partial \nu} \; dS = 0,$$

jotta Greenin kaava pätee. Jotta ehdon (4.13) välttämättömyys voidaan todistaa suoraan Greenin kaavan avulla, niin epähomogeenisen ongelman ratkaisun u tulee olla jatkuvasti differentioituva myös reunalla $\partial\Omega$. Tämä on totta Lauseen 4.5 nojalla, jos $f \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$, $0 < \alpha < 1$.

Entä, jos $f \in C(\partial\Omega)$? Tämä seuraavaksi esitettävä tarkastelu löytyy kirjasta [2, s. 85]. Olkoon $\delta_1, \ldots, \delta_m$ nolla-avaruuden $ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})$ kanta ja

$$v_j(x) := \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \delta_j(y) \; dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Nyt

$$\delta_j = v_{j+} \quad \text{reunalla } \partial\Omega,$$

missä $j = 1, \ldots, m$, ja

$$\chi_{j+} := \frac{\partial \bar{v}_{j+}}{\partial \nu} \quad \text{reunalla } \partial\Omega,$$

missä $j = 1, \ldots, m$.

Olkoon $f \in C(\partial\Omega)$ ja määritellään funktio

$$\gamma_j := \int_{\partial\Omega} f\chi_j \; dS, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Olkoon α_l, $l = 1, \ldots, m$, yhtälön

$$\sum_{l=1}^m \alpha_l \langle \chi_j, \delta_l \rangle = \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m,$$

yksikäsitteinen ratkaisu. Nyt funktio

$$\tilde{f} := f - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \delta_l$$

toteuttaa ehdon (4.13). Koska (4.13) on riittävä ehto sille, että sisäalueen Dirichlet'n ongelma on ratkeava, niin on olemassa ratkaisu $\tilde{u}$, joka myös toteuttaa sisäalueen Dirichlet'n ongelman reunaehdolla $\tilde{u} = \tilde{f}$. Aiemmin oletimme, että u on epähomogeenisen sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu. Tällöin myös erotusfunktio $u^* := u - \tilde{u}$ on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu siten, että reunalla $\partial\Omega$ pätee

$$u^* = f - (f - \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \delta_l) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \delta_l.$$

Lauseen 4.1 nojalla operaattori $\boldsymbol{K} : C(\partial\Omega) \to C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ ja edelleen $\boldsymbol{K} : C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \to C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. Tällöin nolla-avaruuden $ker(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})$ alkiot $\delta_1, \ldots, \delta_m$ kuuluvat Hölder-avaruuteen $C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$. Koska u^* on sisäalueen Dirichlet'n ongelman ratkaisu, niin ehdon (4.13) tulee olla voimassa eli

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_l \langle \chi_j, \delta_l \rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Tästä seuraa, että

$$\gamma_j = \int_{\partial\Omega} f \chi_j \, dS = 0,$$

kun $j = 1, \ldots, m$, ja näin olemme todistaneet ehdon (4.13) välttämättömyyden. $\square$

Kuten edellä Dirichlet'n ongelman tapauksessa, niin vastaavasti operaattorin $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}$ nolla-avaruus $ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})$ vastaa homogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0 & \text{alueessa } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{reunalla } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

ratkaisuja. Määritellään seuraavanlainen lineaariavaruus

$$U := \left\{ u\Big|_{\partial\Omega} : u \in \mathcal{S}(\Omega),\ \Delta u + k^2 u = 0 \text{ joukossa } \Omega,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ reunalla } \partial\Omega \right\}.$$

Jos Helmholtzin yhtälössä esiintyvä aaltoluku k ei ole sisäalueen Neumannin ominaisarvo, niin pätee $U = \{0\}$.

Lause 4.7. *$ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}) = U$.*

Todistus. Seuraava todistus löytyy myös kirjasta [2, s. 81]. Olkoot $\psi \in ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})$ ja

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, dS(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega,$$

kaksikerros-potentiaali. Oletuksesta $\psi \in ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})$ seuraa suoraan, että

$$\psi(x) + 2\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, dS(y) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{4.17}$$

Nyt Lauseen 3.21 nojalla yhtälö (4.17) voidaan kirjoittaa muodossa

$$v_+(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Tässä työssä olemme tarkastelleet sisäaluetta Ω, mutta nyt tarvitsemme tietoa myös ulkoalueen $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ Dirichlet'n ongelman ratkeavuudesta. Tiedetään, että Dirichlet'n ongelmalla on enintään yksi ratkaisu ulkoalueessa $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ja tämän tiedon osalta viittaamme lähteeseen [2]. Ratkaisun yksikäsitteisyydestä puolestaan seuraa, että $v = 0$ joukossa $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Lauseen 3.26 nojalla

$$\frac{\partial v_-}{\partial \nu} = \frac{\partial v_+}{\partial \nu} = 0 \tag{4.18}$$

reunalla $\partial\Omega$. Koska kaksikerros-potentiaali v toteuttaa Helmholtzin yhtälön sisäalueessa Ω, niin kohdan (4.18) nojalla v on homogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Hyppyrelaatiosta (3.45) seuraa, että

$$\psi = v_+ - v_- = -v_-$$

reunalla $\partial\Omega$ ja täten $\psi \in U$.

Lähdetään nyt liikkeelle siitä, että $\psi \in U$ eli $\psi = u\big|_{\partial\Omega}$, missä u on homogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Lauseen 3.15 nojalla

$$\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)} - \Phi(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y) = 0, \tag{4.19}$$

kun $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Koska $\partial u/\partial \nu = 0$ reunalla $\partial\Omega$ ja oletuksen mukaan $\psi = u\big|_{\partial\Omega}$, niin yhtälöstä (4.19) seuraa, että

$$\int_{\partial\Omega} \psi(y)\frac{\partial \Phi(x-y)}{\partial \nu(y)}\, dS(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega},$$

eli

$$v(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Kun $x \to \partial\Omega$, niin saadaan

$$v_+(x) := \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}} v(y) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Eli Lauseen 3.21 nojalla

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial\Phi(x-y)}{\partial\nu(y)} \psi(y)\, dS(y) + \frac{1}{2}\psi(x) = 0$$
$$\psi(x) + (\boldsymbol{K}\psi)(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

ja näin ollen $\psi \in ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})$. □

Jos operaattori $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}$ on injektio eli $ker(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}) = \{0\}$, niin reunaintegraaliyhtälölle (4.8) löytyy yksikäsitteinen ratkaisu $\phi \in C(\partial\Omega)$ kaikilla $g \in C(\partial\Omega)$. Jos sen sijaan operaattori $\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}$ ei ole injektio, niin Fredholmin alternatiivin nojalla $dim\ ker(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}) = dim\ ker(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{K}^*) = m < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, eikä reunaintegraaliyhtälö (4.8) ole yksikäsitteisesti ratkeava. Fredholmin alternatiivi antaa kuitenkin ehdon, jonka toteutuessa reunaintegraaliyhtälöllä on ratkaisu. Tämä ratkaisu ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Jos pystymme osoittamaan, että reunaintegraaliyhtälöllä on ratkaisu, niin myös sitä vastaava sisäalueen Neumannin ongelma on ratkeava. Seuraava lause määrittelee tämän ehdon, joka takaa sisäalueen Neumannin ongelman ratkeavuuden.

Lause 4.8. *Sisäalueen Neumannin ongelma* (2.15) *on ratkeava, jos ja vain jos*

$$\int_{\partial\Omega} gu\, dS = 0 \tag{4.20}$$

kaikilla homogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman (4.16) *ratkaisuilla u.*

Todistus. Seuraavaksi esitettävä todistus mukailee kirjan [2, s. 83] todistusta. Jos aaltoluku k ei ole sisäalueen Neumannin ominaisarvo, niin $U = \{0\}$. Lauseen 4.7 ja Fredholmin alternatiivin 3.33 nojalla pätee, että $ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*) = \{0\}$ ja epähomogeenista sisäalueen Neumannin ongelmaa (2.15) vastaava reunaintegraaliyhtälö $\phi + \boldsymbol{K}^*\phi = 2g$ on yksikäsitteisesti ratkeava kaikilla $g \in C(\partial\Omega)$.

Jos k on sisäalueen Neumannin ominaisarvo, niin $U \neq \{0\}$ ja näin ollen Lauseen 4.7 nojalla $ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*) \neq \{0\}$. Operaattori $\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K}^*$ ei siis ole injektio ja täten Fredholmin alternatiivin 3.33 nojalla reunaintegraaliyhtälö $\phi + \boldsymbol{K}^*\phi = 2g$ on ratkeava, jos ja vain jos pätee ehto

$$\langle \psi, g \rangle := \int_{\partial\Omega} \psi g\, dS = 0, \tag{4.21}$$

missä $\psi \in ker(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})$. Tämä Fredholmin alternatiivin antama ehto (4.21) vastaa lauseen ehtoa (4.20) ja näin ollen reunaintegraaliyhtälölle $\phi + \boldsymbol{K}^*\phi = 2g$ löytyy ratkaisu. Koska reunaintegraaliyhtälö on ratkeava, niin myös alkuperäinen sisäalueen Neumannin ongelma (2.15) on ratkeava.

Ehdon (4.20) välttämättömyys sisäalueen Neumannin ongelman (2.15) ratkeavuudelle seuraa Greenin kaavasta (2.7). Olkoon v epähomogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu ja u homogeenisen sisäalueen Neumannin ongelman ratkaisu. Greenin kaavan (2.7) mukaan

$$\int_\Omega u\Delta v - v\Delta u \; dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \; dS. \tag{4.22}$$

Koska u ja v molemmat toteuttavat Helmholtzin yhtälön, niin pätee $\Delta u = -k^2 u$ ja $\Delta v = -k^2 v$ alueessa Ω. Lisäksi pätee $\partial v/\partial\nu = g$ ja $\partial u/\partial\nu = 0$ reunalla $\partial\Omega$. Sijoitetaan nämä Greenin kaavaan (4.22), jolloin saadaan

$$0 = \int_\Omega u(-k^2 v) - v(-k^2 u) \; dx = \int_{\partial\Omega} ug \; dS.$$

Nyt täytyy olla

$$\int_{\partial\Omega} gu \; dS = 0,$$

jotta Greenin kaava pätee, ja tämä todistaa ehdon (4.20) välttämättömyyden. □

Kirjallisuutta

[1] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics Volume 19, the American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[2] David L. Colton ja Rainer Kress. *Integral equation methods in scattering theory*, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.

[3] David Colton ja Rainer Kress. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Applied Mathematical Sciences Volume 93, Springer Science+Business Media New York, third edition, 2013.

[4] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill series in higher mathematics, McGraw-Hill, Inc., second edition, 1974.

[5] William McLean. *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, 2000.

[6] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Distribution Theory and Fourier Analysis, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, second edition, 1990.

[7] Olli Lehto. *Differentiaali- ja integraalilaskenta III*, Limes ry, Helsinki, 1979.

[8] Kari Astala, Petteri Piiroinen, Hans-Olav Tylli ja Jani Lukkarinen. *Funktionaalianalyysin peruskurssi*, luentomoniste, Helsingin yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos, 2018.

[9] D. Gilbarg ja N. S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 224, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.

[10] N. V. Krylov. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*, Graduate Studies in Mathematics Volume 12, the American Mathematical Society, 1996.

[11] Rainer Kress. *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences Volume 82, Springer Science+Business Media New York, third edition, 2014.

[12] Arne Persson ja Lars-Christer Böiers. *Analys i flera variabler*, Studentlitteratur, 1988.

[13] Walter Rudin. *Functional Analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., second edition, 1991.