Pro gradu -tutkielma

# Lineaaristen operaattoreiden invariantit aliavaruudet

*Otto Mäkinen*

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Matematiikan ja tilastotieteen osasto

16. elokuuta 2021

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty | Laitos — Institution — Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |


Tekijä — Författare — Author

Otto Mäkinen


Työn nimi — Arbetets titel — Title

Lineaaristen operaattoreiden invariantit aliavaruudet

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

| Työn laji — Arbetets art — Level | Aika — Datum — Month and year | Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu -tutkielma | Kesäkuu 2021 | 68 sivua |


Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tutkielma käsittelee invariantin aliavaruuden ongelmaa. Päälähteenä toimii Isabelle Chalendarin ja Jonathan Partingtonin kirja *Modern Approaches to the Invariant-Subspace Problem*.

Invariantin aliavaruuden ongelmassa kysytään, onko kompleksisessa Banachin avaruudessa $X$ jokaisella jatkuvalla lineaarisella operaattorilla $T$ olemassa suljettu aliavaruus $A$, joka on invariantti ($T(A) \subset A$) ja ei-triviaali ($A \neq \{0\}$ ja $A \neq X$). Invariantin aliavaruuden ongelma on vielä avoin kompleksiselle ääretönulotteiselle separoituvalle Hilbertin avaruudelle.

Tutkielma koostuu neljästä luvusta. Ensimmäisessä luvussa käydään läpi tarvittavia määritelmiä ja teorioita sekä pohjustetaan tulevia kappaleita.

Toisessa luvussa määritellään Banachin algebra ja kompaktit operaattorit sekä esitetään Schauderin kiintopistelause ja päätuloksena Lomonosovin lause, jonka korollaarina saadaan, että kompaktilla operaattorilla, joka ei ole nollaoperaattori, on ei-triviaali invariantti aliavaruus. Lomonosovin lause on esitetty Chalendarin ja Partingtonin kirjan luvussa 6.

Kolmannessa luvussa siirrytään Hilbertin avaruuksiin ja tutkitaan normaaleja operaattoreita. Päätuloksena todistetaan, että normaalilla operaattorilla, joka ei ole nollaoperaattori, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. Tätä varten määritellään spektraalisäteen ja spektraalimitan käsitteet sekä näihin liittyviä tuloksia. Normaalit operaattorit löytyvät Chalendarin ja Partingtonin kirjan luvusta 3.

Neljäs luku käsittelee minimaalisia vektoreita. Luvussa esitetään Hahn-Banachin, Eberlein-Šmulyan ja Banach-Alaoglun lauseet sekä sovelletaan minimaalisia vektoreita invariantin aliavaruuden ongelmaan. Minimaalisten vektoreiden avulla saadaan esimerkiksi uusi ja erilainen todistus sille, että kompaktilla operaattorilla, joka ei ole nollaoperaattori, on ei-triviaali invariantti aliavaruus. Chalendarin ja Partingtonin kirja käsittelee minimaalisia vektoreita luvussa 7.



Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Invariantti aliavaruus, minimaaliset vektorit, Lomonosovin lause, kompakti operaattori

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

# Sisältö

# Johdanto

Tämä tutkielma käsittelee invariantin aliavaruuden ongelmaa lineaarisille operaattoreille. Ongelmassa kysytään, onko kompleksisessa Banachin avaruudessa $X$ jatkuvalle lineaariselle operaattorille $T$ aina olemassa ei-triviaali suljettu aliavaruus $A \subset X$, jolle pätee $T(A) \subset A$. Keskeinen avoin ongelma on vielä se, että onko kompleksisessa ääretönulotteisessa separoituvassa Hilbertin avaruudessa jokaisella lineaarisella jatkuvalla operaattorilla ei-triviaali suljettu invariantti aliavaruus. Sen sijaan tiedetään, että on olemassa Banachin avaruus sekä jatkuva lineaarinen operaattori, jolla ei ole ei-triviaaleja suljettuja aliavaruuksia. Esimerkkejä tällaisistä Banachin avaruuksista ja operaattoreista kehittivät Per Enflo ja Charles Read 1980-luvulla. Nämä esimerkit jäävät laajuutensa takia tutkielman ulkopuolelle.

Tutkielmassa on käytetty päälähteenä Chalendarin ja Partingtonin kirjaa *Modern Approaches to the Invariant-Subspace Problem* [6]. Tutkielma on jaettu neljään lukuun. Ensimmäisessä luvussa määritellään ja palautetaan mieliin peruskäsitteitä ja todistetaan myöhemmin tarvittavia tuloksia.

Toisen luvun päätuloksena todistetaan Lomonosovin lause, joka löytyy Chalendarin ja Partingtonin kirjan luvusta 6. Lomonosovin lauseessa osoitetaan, että kompleksisessa Banachin avaruudessa jatkuvalla lineaarisella operaattorilla, joka ei ole skalaarilla kerrottu identiteettioperaattori, on hyperinvariantti aliavaruus, jos operaattori kommutoi sellaisen kompaktin operaattorin kanssa, joka ei ole nollaoperaattori. Tästä korollaarina saadaan, että kompleksisessa Banachin avaruudessa jatkuvalla kompaktilla operaattorilla, joka ei ole nollakuvaus, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.

Kolmannessa luvussa tutkitaan invariantin aliavaruuden ongelmaa Hilbertin avaruudessa. Päätuloksessa osoitetaan, että normaalilla operaattorilla, joka ei ole skalaarilla kerrottu identiteettioperaattori, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. Chalendarin ja Partingtonin kirja käsittelee tätä luvussa 3.

Neljännessä luvussa palataan Banachin avaruuksiin ja määritellään 1990-luvulla esityt minimaaliset vektorit, joita sovelletaan invariantin aliavaruuden ongelmaan. Sovelluksena minimaalisista vektoreista on lause 4.15, jonka avulla saadaan uusi ja erilainen todistus kuin luvussa 2 sille, että jatkuvalla kompaktilla operaattorilla, joka ei ole nollakuvaus, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. Tämä löytyy Chalendarin ja Partingtonin kirjan luvusta 7.

Kiitokset vielä ohjaajalleni Hans-Olav Tyllille ja muille, jotka ovat tukeneet minua graduprosessini aikana.

# Luku 1

# Määritelmiä

Tässä luvussa määritellään funktionaalianalyysin peruskäsitteitä tulevia lukuja varten ja todistetaan jatkossa tarvittavia tuloksia. Määritelmät ovat lähteistä [1], [3], [12], [13] ja [15].

## 1.1 Banachin avaruus

Tässä alaluvussa palautetaan mieliin käsite Banachin avaruus, joka on nimetty puolalaisen matemaatikon Stefan Banachin (1892-1945) mukaan, ja siihen oleellisesti liittyvät käsitteet. Aloitetaan kuitenkin määrittelemällä jonon suppenemisen käsite.

**Määritelmä 1.1.** Olkoon $(X, ||\cdot||)$ normiavaruus ja $(x_n)$ jono avaruudessa $X$. Tällöin sanotaan, että jono $(x_n)$ suppenee kohti pistettä $x \in X$, jos

$$||x_n - x|| = 0,$$

kun $n \to \infty$. Voidaan myös merkitä

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Seuraavaksi määritellään Cauchyn jono, joka on nimetty ranskalaisen matemaatikon Augustin Louis Cauchyn (1789-1857) mukaan.

**Määritelmä 1.2.** Normiavaruuden $(X, ||\cdot||)$ jono $(x_n)$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\epsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\epsilon \in \mathbb{N}$, että

$$||x_k - x_j|| < \epsilon$$

aina, kun $k \geq m_\epsilon$ ja $j \geq m_\epsilon$.

Seuraavaksi määritellään täydellisyyden käsite. Käsite yleistyy myös metrisille avaruuksille, mutta tässä tutkielmassa tarvitaan vain normiavaruuksia.

**Määritelmä 1.3.** Normiavaruus $(X, ||\cdot||)$ on *täydellinen*, jos avaruuden $X$ jokainen Cauchyn jono $(x_n)$ suppenee avaruudessa $X$ (siis on olemassa sellainen $y \in X$, että $\lim_{n\to\infty} x_n = y$).

Täydellisiä normiavaruuksia ovat esimerkiksi $\mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{C}^m$ kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$. Seuraavassa esimerkissä näytetään, että kaikki normiavaruudet eivät ole täydellisiä.

**Esimerkki 1.4.** Joukko $\mathbb{Q}$ varustettuna euklidisella normilla on tunnetusti normiavaruus. Näytetään nyt, että se ei ole täydellinen. Valitaan jono $(x_n)$ niin, että $x_n$ on rationaaliluku välillä $(\pi, \pi + \frac{1}{n})$. Jono on hyvin määritelty, koska kahden irrationaaliluvun välissä on aina rationaaliluku. Jono on myös Cauchyn jono, koska kaikille $\epsilon > 0$ voidaan valita $n$ siten, että $\frac{1}{n} < \epsilon$ ja jonon $n$ myöhemmät termit ovat korkeintaan $\frac{1}{n} < \epsilon$ päässä toisistaan. Jonon raja-arvo reaalilukujen avaruudessa $\mathbb{R}$ on

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pi,$$

mutta $\pi$ ei ole rationaaliluku, joten jono ei suppene avaruudessa $\mathbb{Q}$.

Nyt on määritelty tarvittavat käsitteet Banachin avaruuden määrittelemiseen.

**Määritelmä 1.5.** Täydellistä normiavaruutta $(X, ||\cdot||)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi.*

## 1.2 Hilbertin avaruus

Tässä alaluvussa palautetaan mieliin Hilbertin avaruus, joka on nimetty saksalaisen matemaatikon David Hilbertin (1862-1943) mukaan. Ennen kuin voidaan määritellä Hilbertin avaruus, tarvitaan sisätuloavaruuden käsite. Aloitetaan määrittelemällä sisätulo, joka kuvaa avaruuden mielivaltaisen vektoriparin skalaariksi. Huomautetaan vielä, että merkintä $\overline{z}$ tarkoittaa kompleksiluvun $z \in \mathbb{C}$ liittolukua eli peilausta reaaliakselin suhteen.

**Määritelmä 1.6.** Olkoon $V$ vektoriavaruus. Kuvaus $(x, y) \to \langle x, y \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ on *sisätulo* vektoriavaruudessa $V$, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in V$ ja $a \in \mathbb{C}$:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$.
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$.
5. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$.

Todistetaan vielä kaksi ominaisuutta sisätulolle, jotka seuraavat suoraan määritelmästä.

**Lause 1.7.** *Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus. Seuraavat ominaisuudet pätevät kaikilla $x, y, z \in V$ ja $a \in \mathbb{C}$:*

1. $\langle x, ay \rangle = \overline{a}\langle x, y \rangle$.
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

*Todistus.* Soveltamalla sisätulon määritelmän ominaisuuksia saadaan ensimmäinen kohta

$$\langle x, ay \rangle = \overline{\langle ay, x \rangle} = \overline{a\langle y, x \rangle} = \overline{a} \cdot \overline{\langle y, x \rangle} = \overline{a}\langle x, y \rangle.$$

Toinen kohta saadaan vastaavasti

$$\langle x, y + z \rangle = \overline{\langle y + z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle} = \overline{\langle y, x \rangle} + \overline{\langle z, x \rangle} = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

□

Todistetaan tulos, jonka mukaan sisätulo määrää yksikäsitteisesti alkion sisätuloavaruudessa.

**Lause 1.8.** *Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus ja $x, y \in V$. Tällöin $x = y$, jos ja vain jos*

$$\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle$$

*kaikilla $z \in V$.*

*Todistus.* Olkoon $x, y \in V$, joille $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle$ kaikilla $z \in V$. Siirtämällä molemmat termit samalle puolelle ja yhdistämällä saadaan

$$0 = \langle z, x \rangle - \langle z, y \rangle = \langle z, x - y \rangle.$$

Koska tämä pätee kaikilla $z \in V$, niin se pätee erityisesti, kun $z = x - y$ eli

$$\langle x - y, x - y \rangle = 0.$$

Sisätulon määritelmän mukaan tästä seuraa, että $x - y = \overline{0}$ eli $x = y$. Osoitetaan vielä toinen suunta. Olkoon $x, y \in V$ ja $x = y$. Tällöin

$$0 = \langle z, x \rangle - \langle z, x \rangle = \langle z, x \rangle - \langle z, y \rangle,$$

mistä saadaan $\langle z, x \rangle = \langle z, y \rangle$ kaikilla $z \in V$. $\square$

Sisätuloavaruus on myös normiavaruus, sillä sisätuloavaruudessa normi määritellään sisätulon avulla seuraavasti.

**Määritelmä 1.9.** Olkoon $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sisätuloavaruus. *Sisätuloavaruuden normi* määritellään

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

kaikilla $x \in V$.

Seuraava tulos on Cauchy-Schwartzin epäyhtälö. Se on hyödyllinen arvio sisätulon itseisarvolle.

**Lause 1.10.** *(Cauchy-Schwartzin epäyhtälö) Olkoon $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sisätuloavaruus ja $x, y \in V$. Tällöin*

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||. \tag{1.11}$$

*Todistus.* Olkoon $x, y \in V$. Jos $x = \overline{0}$, niin

$$|\langle \overline{0}, y\rangle| = |\langle 0 \cdot \overline{0}, y\rangle| = |0 \cdot \langle \overline{0}, y\rangle| = 0 \cdot |\langle \overline{0}, y\rangle| = 0.$$

Tällöin epäyhtälön 1.11 molemmat puolet ovat nollia eli epäyhtälö pätee. Vastaava päättely pätee myös, kun $y = \overline{0}$. Oletetaan siis, että $x \neq \overline{0}$ ja $y \neq \overline{0}$. Merkitään $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}$. Koska vektorin normi on aina positiivinen, saadaan

$$\begin{aligned}
&0 \leq ||x + \lambda y||^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda y\rangle + \langle \lambda y, x\rangle + \langle \lambda y, \lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle x, y\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle y, y\rangle \\
&= ||x||^2 + \overline{\lambda} \cdot \langle x, y\rangle + \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\overline{\lambda}||y||^2 \\
&= ||x||^2 - \overline{\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}} \cdot \langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}\overline{\langle x, y\rangle} + \frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}\overline{\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}}||y||^2 \\
&= ||x||^2 - 2\overline{\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}} \cdot \langle x, y\rangle + \overline{\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}} \cdot \langle x, y\rangle \\
&= ||x||^2 - \overline{\frac{\langle x, y\rangle}{||y||^2}} \cdot \langle x, y\rangle \\
&= ||x||^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2},
\end{aligned}$$

jossa viimeinen välivaihe seuraa siitä, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee $z\overline{z} = |z|^2$. Saatiin siis $0 \leq ||x||^2 - \dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2}$. Siirtämällä termi $\dfrac{|\langle x, y\rangle|^2}{||y||^2}$ vasemmalle puolelle, kertomalla luvulla $||y||^2 > 0$ ja ottamalla kummastakin puolesta neliöjuuri saadaan

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||,$$

joten lause on todistettu. $\square$

Nyt voidaan määritellä Hilbertin avaruus.

**Määritelmä 1.12.** Täydellistä sisätuloavaruutta kutsutaan *Hilbertin avaruudeksi.*

Huomautetaan vielä, että Hilbertin avaruus on myös Banachin avaruus, koska sisätuloavaruus on normiavaruus.

## 1.3 Lineaarinen operaattori ja duaaliavaruus

Tässä alaluvussa määritellään operaattoriteoriaan liittyviä käsitteitä. Kaikki tässä luvussa tästä eteenpäin määritellyt käsitteet on määritelty normiavaruuksille eli pätevät siis Banachin avaruuksissa ja Hilbertin avaruuksissa. Määritellään ensin lineaarinen operaattori.

**Määritelmä 1.13.** Olkoon $X$ ja $Y$ normiavaruuksia ja $T$ kuvaus avaruudesta $X$ avaruuteen $Y$. Kuvaus $T$ on *lineaarinen operaattori*, jos

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \text{ kaikilla } x, y \in X \text{ ja } \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

Lineaaristen operaattorien kokoelmille käytetään seuraavia merkintöjä.

**Määritelmä 1.14.** Kaikkien lineaaristen operaattorien joukkoa normiavaruudesta $X$ normiavaruuteen $Y$ merkitään $L(X, Y)$ ja jatkuvien lineaaristen operaattorien joukkoa normiavaruudesta $X$ normiavaruuteen $Y$ merkitään $\mathcal{L}(X, Y)$. Jos maali- ja lähtöavaruus on sama, voidaan merkitä $L(X)$ tai $\mathcal{L}(X)$.

Määritellään seuraavaksi operaattorinormi.

**Määritelmä 1.15.** Olkoon $X$ ja $Y$ normiavaruuksia ja $T$ lineaarinen operaattori avaruudesta $X$ avaruuteen $Y$. Operaattorin $T$ *operaattorinormi* on

$$||T|| = \sup \{||T(x)|| : x \in X, ||x|| \leq 1\}.$$

Operaattori $T$ on *rajoitettu*, jos $||T|| < \infty$.

Yllä määritelty lineaaristen operaattorien joukko $\mathcal{L}(X,Y)$ on normiavaruus, kun se on varustettu operaattorinormilla. Itse asiassa se on vieläpä Banachin avaruus, jos operaattorien maalijoukko on Banachin avaruus. Näitä ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta todistukset löytyvät esimerkiksi lähteestä [3]. Lineaarinen operaattori $T$ on jatkuva, jos ja vain jos se on rajoitettu. Todistus tälle löytyy myös lähteestä [3]. Seuraavaksi todistetaan hyödyllinen epäyhtälö lineaarisille operaattoreille.

**Lause 1.16.** *Olkoon $X$ ja $Y$ normiavaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ rajoitettu lineaarinen operaattori. Tällöin*

$$||T(x)|| \leq ||T|| \cdot ||x||$$

*kaikilla $x \in X$.*

*Todistus.* Olkoon $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ rajoitettu lineaarinen operaattori ja $x \in X$. Arvioimalla pisteen $x$ kuvaa operaattorissa $T$ saadaan lineaarisuudesta

$$||T(x)|| = \frac{||x||}{||x||} \cdot ||T(x)|| = ||x|| \cdot ||T\left(\frac{x}{||x||}\right)|| \leq ||T|| \cdot ||x||.$$

Viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $\dfrac{x}{||x||} \in \overline{B}(\overline{0},1)$. □

Edellistä lausetta hyödyntäen voidaan osoittaa, että normiavaruudessa suppenevan jonon kuvajono rajoitetussa lineaarisessa kuvauksessa suppenee jonon raja-arvon kuvaan.

**Lause 1.17.** *Olkoon $(X, ||\cdot||)$ ja $(Y, ||\cdot||)$ normiavaruuksia, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ rajoitettu lineaarinen operaattori ja $(x_n)$ avaruuden $X$ jono, joka suppenee pisteeseen $x \in X$ eli*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

*Tällöin*

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$

*Todistus.* Määritelmästä 1.1 lähtien saadaan suoraan

$$\begin{aligned}
&||Tx_n - Tx|| && \text{(Operaattorin T lineaarisuus)} \\
&= ||T(x_n - x)|| && \text{(Lause 1.16)} \\
&\leq ||T|| \cdot ||x_n - x|| \to 0,
\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$, koska $T$ on rajoitettu eli $||T|| < \infty$. □

Nyt määritellään algebrallinen ja topologinen duaaliavaruus. Huomautetaan, että näissä määritelmissä kerroinkuntana toimii $\mathbb{K}$, joka voi olla $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$. Näin sen takia, että olisi selvää, että kyseessä on lineaariset operaattorit, joiden maalijoukkona on avaruuden kerroinkunta. Näiden määritelmien jälkeen palataan oletukseen, että kerroinkuntana on $\mathbb{C}$ ellei toisin mainita.

**Määritelmä 1.18.** Olkoon $V$ vektoriavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{K}$. Tällöin sanotaan, että $L(V, \mathbb{K})$ on vektoriavaruuden $V$ *algebrallinen duaaliavaruus.*

**Määritelmä 1.19.** Olkoon $X$ normiavaruus, jonka kerroinkunta on $\mathbb{K}$. Tällöin sanotaan, että $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ on normiavaruuden $X$ *topologinen duaaliavaruus.* Topologista duaaliavaruutta merkitään $X^*$.

Määritellään seuraavaksi heikon topologian ja heikon tähtitopologian käsitteet.

**Määritelmä 1.20.** Olkoon $X$ kompleksinen Banachin avaruus. Kaikki rajoitetut lineaarikuvaukset $T : X \to \mathbb{C}$ indusoivat avaruuden $X$ topologian $\tau_\omega$, jota sanotaan avaruuden $X$ *heikoksi topologiaksi.*

**Määritelmä 1.21.** Olkoon $X$ kompleksinen normiavaruus ja $X^*$ sen duaaliavaruus. Jokaista $x \in X$ kohti määritellään funktio $f_x : X \to \mathbb{C}$ asettamalla

$$f_x(\varphi) = \varphi(x).$$

Funktioperhe $(f_x)_{x \in X}$ indusoi avaruuden $X^*$ topologian $\tau_{\omega^*}$, jota sanotaan avaruuden $X^*$ *heikoksi tähtitopologiaksi.*

Yllä mainittu funktioperheen indusoima topologia on pienin sellainen topologia, jonka suhteen kaikki funktioperheen funktiot ovat jatkuvia.

Tässä tutkielmassa käytetään funktioiden $f$ ja $g$ yhdistetylle kuvaukselle merkintää $f \circ g$ ja välillä merkintää $f(g(x)) = f \circ g(x)$ tekstin ja todistusten luettavuuden selkeyttämiseksi. Seuraavassa lauseessa todistetaan yhdistetyn kuvauksen operaattorinormille hyödyllinen ominaisuus.

**Lause 1.22.** *Olkoon $X$, $Y$ ja $Z$ normiavaruuksia sekä $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita. Tällöin yhdistetyn kuvauksen $T \circ S$ operaattorinormille pätee*

$$||T \circ S|| \leq ||T|| \cdot ||S||.$$

*Todistus.* Olkoon $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ ja $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita. Olkoon $x \in \overline{B}(\overline{0},1)$. Arvioimalla pisteen $x$ kuvan normia lauseen 1.16 avulla saadaan

$$||T \circ S(x)|| \leq ||T|| \cdot ||S(x)|| \leq ||T|| \cdot ||S||.$$

Siis $||T \circ S|| \leq ||T|| \cdot ||S||$, koska $x \in \overline{B}(\overline{0},1)$. $\square$

Otetaan käyttöön seuraava merkintä lyhentämään yhdistetyn kuvauksen monikertoja.

**Määritelmä 1.23.** Olkoon $X$ vektoriavaruus ja $T : X \to X$ lineaarinen operaattori. Tällöin merkitään $\underbrace{T \circ ... \circ T}_{\text{n-kappaletta}}(x) = T^n(x)$ kaikilla $x \in X$ tai vastaavasti $\underbrace{T \circ ... \circ T}_{\text{n-kappaletta}} = T^n$.

Erityisesti tässä tutkielmassa ei käytetä merkintää $T^2(x) = T(x) \cdot T(x)$, vaan tämä merkitään $(T(x))^2 = T(x) \cdot T(x)$, kun tulo $T(x) \cdot T(x)$ on määritelty.

## 1.4 Invariantti ja hyperinvariantti aliavaruus

Tässä alaluvussa määritellään invariantin ja hyperinvariantin aliavaruuden käsitteet.

**Määritelmä 1.24.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin sanotaan, että suljettu aliavaruus $A \subset X$ on *invariantti* lineaarisen operaattorin $T$ suhteen, jos $T(A) \subset A$.

Aliavaruudet $\{0\}$ ja koko avaruus $X$ ovat invariantteja kaikilla operaattoreilla $T \in \mathcal{L}(X)$. Tämä motivoi seuraavan määritelmän.

**Määritelmä 1.25.** Olkoon $X$ Banachin avaruus. Tällöin sanotaan, että aliavaruus $A$ on *triviaali*, jos $A = \{0\}$ tai $A = X$. Vastaavasti sanotaan, että aliavaruus $A$ on *ei-triviaali*, jos $A \neq \{0\}$ ja $A \neq X$.

Seuraavassa esimerkissä huomataan, että jopa avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on olemassa lineaarisia operaattoreita, joilla ei ole ei-triviaalia invarianttia aliavaruutta. Tämän esimerkin takia tarkastellaan jatkossa invariantteja aliavaruuksia vain kompleksisissä avaruuksissa.

**Esimerkki 1.26.** Tutkitaan lineaarista operaattoria $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, joka on määritelty matriisilla $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Operaattori $T$ kiertää tason $\mathbb{R}^2$ vektorit vastapäivään $90°$. Yritetään muodostaa ei-triviaali invariantti aliavaruus $\mathcal{M}$ operaattorille $T$. Jotta aliavaruus $\mathcal{M}$ olisi ei-triviaali, täytyy valita aliavaruuten $\mathcal{M}$ jokin piste $x$, joka ei ole 0. Koska piste $x \in \mathcal{M}$, niin myös pisteen $T(x)$ täytyy kuulua aliavaruuteen. Tässä vaiheessa kuitenkin huomataan, että nämä vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia eli ne virittävät avaruuden $\mathbb{R}^2$ eli aliavaruus $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$.

Määritellään operaattorin kommutantti, jota tarvitaan hyperinvariantin aliavaruuden määritelmässä.

**Määritelmä 1.27.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori avaruudessa $X$. Jatkuvan lineaarisen operaattorin $T$ *kommutantiksi* $\{T\}'$ kutsutaan kaikkien operaattorin $T$ kanssa kommutoivien rajoitettujen operaattoreiden joukkoa, eli

$$\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST = TS\}.$$

**Määritelmä 1.28.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja olkoon $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Suljettua aliavaruutta $A \subset X$ kutsutaan *hyperinvariantiksi* operaattorille $T$, jos kaikilla operaattoreilla $S \in \{T\}'$ pätee $S(A) \subset A$.

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että jatkuvan lineaarisen operaattorin ydin on hyperinvariantti aliavaruus. Tätä tulosta tullaan myöhemmin käyttämään lauseen 3.14 todistuksessa.

**Lause 1.29.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin operaattorin $T$ ydin Ker $T$ on hyperinvariantti aliavaruus operaattorille $T$.*

*Todistus.* Olkoon $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Huomataan, että Ker $T \subset X$ on suljettu, koska se on nollavektorin yksiön alkukuva jatkuvassa kuvauksessa. Olkoon operaattori $S \in \{T\}'$ eli $T \circ S(x) = S \circ T(x)$ kaikilla $x \in X$. Osoitetaan, että $S(\text{Ker } T) \subset \text{Ker } T$. Olkoon $x \in S(\text{Ker } T)$. Tällöin on olemassa $y \in X$ siten, että $Sy = x$ ja $y \in \text{Ker } T$. Koska $y \in \text{Ker } T$, niin $Ty = \overline{0}$. Tästä saadaan

$$Tx = T \circ Sy = S \circ Ty = S\overline{0} = \overline{0},$$

joten $x \in \text{Ker } T$. Siis Ker $T$ on hyperinvariantti aliavaruus. □

**Korollaari 1.30.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T, S \in \mathcal{L}(X)$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita, jotka kommutoivat eli $T \circ S(x) = S \circ T(x)$ kaikilla $x \in X$. Tällöin aliavaruus* $\text{Ker}(I - S)$ *on operaattorin $T$ invariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Valitaan $K = I - S$. Huomataan, että

$$T \circ K = T(I - S) = T \circ I - T \circ S = I \circ T - S \circ T = (I - S)T = K \circ T.$$

Voidaan siis käyttää edellistä lausetta operaattoreihin $T$ ja $K$. Siitä seuraa, että operaattorin $K$ ydin Ker $K = \text{Ker}(I - S)$ on operaattorin $K$ hyperinvariantti aliavaruus eli se on operaattorin $K$ kanssa kommutoivan operaattorin $T$ invariantti aliavaruus. □

**Lause 1.31.** *Olkoon $X$ ei-separoituva Banachin avaruus. Tällöin jokaisella lineaarisella operaattorilla $T \in \mathcal{L}(X)$ on ei-triviaali invariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Valitaan $x \in X$ siten, että $x \neq \overline{0}$. Tutkitaan aliavaruutta

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{x, Tx, T^2x, ...\}.$$

Nyt aliavaruus $\overline{\mathcal{M}}$ on suljettu ja $T(\overline{\mathcal{M}}) \subset \overline{T(\mathcal{M})} \subset \overline{\mathcal{M}}$, koska operaattori $T$ on jatkuva. Aliavaruus $\overline{\mathcal{M}} \neq \{\overline{0}\}$, koska $x \neq \overline{0}$. Aliavaruus $\overline{\mathcal{M}}$ on separoituva, joten $\overline{\mathcal{M}} \neq X$. Siis $\overline{\mathcal{M}}$ on avaruuden $X$ suljettu ei-triviaali invariantti aliavaruus. □

## 1.5 Spektraaliteoriaa

Määritellään jatkossa tarvittavia spektraaliteorian käsitteitä.

**Määritelmä 1.32.** Olkoon $X$ kompleksinen Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattorin $T$ *spektri* $\sigma(T)$ on niiden kompleksilukujen joukko $\lambda \in \mathbb{C}$, joille operaattorilla $T - \lambda I$ ei ole jatkuvaa käänteiskuvausta.

Seuraava tulos osoittaa, että jatkuvan lineaarisen operaattorin spektri on kompakti osajoukko kompleksitasossa. Tätä lausetta ei todisteta, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [1, Theorem 6.10].

**Lause 1.33.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin operaattorin $T$ spektri $\sigma(T)$ on epätyhjä kompakti joukko kompleksitasossa.*

**Määritelmä 1.34.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattorin $T$ *pistespektri* on niiden kompleksilukujen $\lambda$ joukko, joille $T - \lambda I$ ei ole injektiivinen.

Määritellään ominaisarvon ja ominaisavaruuden käsitteet.

**Määritelmä 1.35.** Olkoon $V$ vektoriavaruus ja $T : V \to V$ lineaarinen operaattori. Tällöin $\lambda \in \mathbb{C}$ on lineaarisen operaattorin $T$ *ominaisarvo*, jos on olemassa $v \in V$ siten, että $v \neq 0$ ja

$$T(v) = \lambda v.$$

Operaattorin ominaisarvojen joukko on sen pistespektri.

**Määritelmä 1.36.** Olkoon $V$ vektoriavaruus, $T : V \to V$ lineaarinen operaattori ja $\lambda \in \mathbb{C}$ lineaarisen operaattorin $T$ ominaisarvo. Tällöin ominaisarvoa $\lambda$ vastaava *ominaisavaruus* on

$$\{x \in V : T(x) = \lambda x\}.$$

**Lause 1.37.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin jokainen operaattorin $T$ ominaisavaruus on operaattorin $T$ hyperinvarintti aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori ja $\lambda$ operaattorin $T$ ominaisarvo. Merkitään ominaisarvoa $\lambda$ vastaavaa ominaisavaruutta

$$F_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(T - \lambda).$$

Aliavaruus $F_\lambda$ on suljettu, koska se on suljetun joukon $\{\overline{0}\}$ alkukuva jatkuvassa kuvauksessa $T - \lambda$. Olkoon $S \in \{T\}'$. Huomataan, että kaikilla $x \in X$ pätee

$$\begin{aligned} S((T-\lambda)(x)) = S(T(x) - \lambda x) &= S(T(x)) - S(\lambda x) = T(S(x)) - \lambda S(x) \\ &= (T - \lambda)S(x). \end{aligned}$$

Olkoon $x \in F_\lambda$. Tällöin $(T - \lambda)(x) = \overline{0}$. Nyt

$$(T - \lambda)(S(x)) = S((T - \lambda)(x)) = S(\overline{0}) = \overline{0},$$

joten $S(F_\lambda) \subset F_\lambda$. Siis ominaisavaruus $F_\lambda$ on suljettu hyperinvariantti aliavaruus. $\square$

Seuraava lause osoittaa, että äärellisulotteisissa kompleksisissa vektoriavaruuksissa lineaarisilla operaattoreilla on ominaisarvot. Vastaava tulos ei päde reaalisissa vektoriavaruuksissa, sillä esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^2$ $90°$ kiertävällä operaattorilla ei ole reaalisia ominaisarvoja. Lausetta ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [4, Theorem 5.10].

**Lause 1.38.** *Olkoon $V$ äärellisulotteinen kompleksinen vektoriavaruus ja $T : V \to V$ lineaarinen operaattori. Tällöin lineaarisella operaattorilla $T$ on ominaisarvo.*

Lauseesta 1.37 seuraa, että edellisen lauseen operaattorilla $T$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.

## 1.6 Konveksi joukko

Tässä alaluvussa palautetaan mieliin konveksi joukko ja osoitetaan, että joukon konveksisuus säilyy jatkuvassa lineaarisessa operaattorissa ja että konveksin joukon sulkeuma on konveksi.

**Määritelmä 1.39.** Olkoon $X$ normiavaruus. Joukko $S \subset X$ on *konveksi*, jos kaikilla $x, y \in S$ ja $t \in [0, 1]$ pätee, että

$$tx + (1 - t)y \in S.$$

**Lause 1.40.** *Olkoon $X$ normiavaruus, $T \in L(X)$ lineaarinen operaattori ja $S \subset X$ konveksi joukko. Tällöin $T(S)$ on konveksi joukko.*

*Todistus.* Olkoon $T \in L(X)$ lineaarinen operaattori ja $S \subset X$ konveksi joukko. Olkoon $x, y \in T(S)$ ja $t \in [0, 1]$. Koska $x, y \in T(S)$, on olemassa $a, b \in S$ siten, että $T(a) = x$ ja $T(b) = y$. Nyt huomataan, että

$$tx + (1 - t)y = tT(a) + (1 - t)T(b) = T(ta) + T((1 - t)b) = T(ta + (1 - t)b).$$

Koska $S$ on konveksi, niin $ta + (1 - t)b \in S$, joten $T(ta + (1 - t)b) \in T(S)$ eli $T(S)$ on konveksi. $\square$

**Lause 1.41.** *Olkoon $X$ normiavaruus ja $S \subset X$ konveksi joukko. Tällöin sulkeuma $\overline{S}$ on konveksi.*

*Todistus.* Olkoon $x, y \in \overline{S}$ ja $t \in [0, 1]$. Koska $x, y \in S$, niin on olemassa sellaiset jonot $(x_n)$ ja $(y_n)$, että $\lim_n x_n = x$ ja $\lim_n y_n = y$ sekä $x_n \in S$ ja $y_n \in S$ kaikilla

$n \in \mathbb{N}$. Koska $S$ on konveksi, niin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $tx_n + (1-t)y_n \in S$. Nyt siis jonon $(tx_n + (1-t)y_n)$ alkiot kuuluvat joukkoon $S$, joten sen raja-arvo $tx + (1-t)y \in \overline{S}$ eli $\overline{S}$ on konveksi. □

## 1.7 Invariantin aliavaruuden ongelma

Tässä alaluvussa esitellään, mikä on invariantin aliavaruuden ongelma. Invariantin aliavaruuden ongelma kysyy, onko jokaisella rajoitetulla operaattorilla kompleksisessa Banachin avaruudessa olemassa ei-triviaali invariantti aliavaruus. Ongelma on vielä avoin kompleksiselle ääretönulotteiselle separoituvalle Hilbertin avaruudelle. Kootaan kaksi lausetta aiemmista tuloksista.

**Lause 1.42.** *Kompleksisessa äärellisulotteisessa avaruudessa lineaarisella operaattorilla on aina ei-triviaali invariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Lauseessa 1.37 osoitettiin, että lineaarisen operaattorin ominaisavaruus on hyperinvariantti aliavaruus ja siis myös invariantti aliavaruus. Tästä ja lauseesta 1.38 seuraa, että kompleksisessa äärellisulotteisessa avaruudessa lineaarisella operaattorilla on aina ominaisarvo ja siis myös ominaisavaruus. □

**Lause 1.43.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ lineaarinen operaattori, joka ei ole injektio. Tällöin operaattorille $T$ on olemassa ei-triviaali invariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Lauseessa 1.29 osoitettiin, että lineaarisen operaattorin ydin on hyperinvariantti aliavaruus eli myös invariantti aliavaruus. Injektiiviselle operaattorille ydin on aina nollavektorin yksiö, mutta lineaariselle operaattorille, joka ei ole injektio, ytimessä täytyy olla muitakin alkioita eli se on ei-triviaali invariantti aliavaruus. □

Muistetaan, että lauseessa 1.31 osoitettiin, että ei-separoituvassa Banachin avaruudessa jokaisella lineaarisella operaattorilla on ei-triviaali invariantti aliavaruus. Tämän sekä lauseiden 1.42 ja 1.43 mukaan voidaan myöhemmissä luvuissa keskittyä tarkastelemaan vain kompleksisia ääretönulotteisia separoituvia Banachin avaruuksia ja injektiivisiä operaattoreita.

# Luku 2

# Lomonosovin lause

Tässä luvussa esitetään Lomonosovin lause, jonka Victor Lomonosov (1946-2018) todisti vuonna 1973. Tähän tarvitaan kuitenkin muutamia työkaluja, jotka käydään läpi ennen Lomonosovin lausetta.

## 2.1 Banachin algebra

Tässä alaluvussa osoitetaan, että normiavaruudessa $X$ jatkuvien lineaaristen operaattorien joukko $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ on Banachin algebra. Aloitetaan määrittelemällä Banachin algebran käsite.

**Määritelmä 2.1.** Banachin avaruutta $X$ sanotaan *Banachin algebraksi*, jos avaruuden $X$ alkioille on määritelty laskutoimitus $X \times X \to X$; $(x, y) \mapsto x \circ y$, joka toteuttaa seuraavan ehdon:

$$||x \circ y|| \leq ||x|| \cdot ||y|| \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

sekä lisäksi algebran ehdot:

1. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$

2. $x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z$

3. $(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

4. $(\lambda x) \circ y = \lambda(x \circ y) = x \circ (\lambda y)$

kaikilla $x, y, z \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Banachin algebraa kutsutaan *ykköselliseksi*, jos on olemassa alkio $e \in X$, jolle pätee $e \circ x = x \circ e = x$ kaikilla $x \in X$.

**Lause 2.2.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus. Silloin $\mathcal{L}(X)$ varustettuna kuvausten yhdistämisellä on ykköselllinen Banachin algebra, missä neutraalialkio on identiteettikuvaus.*

*Todistus.* Olkoon $X$ Banachin avaruus. Lauseen 1.22 mukaan

$$||S \circ T|| \leq ||S|| \cdot ||T|| \text{ kaikilla } S, T \in \mathcal{L}(X).$$

Tutkitaan seuraavaksi, toteuttaako $\mathcal{L}(X)$ algebran ehdot. Kuvauksen yhdistäminen on liitännäinen operaatio ja sille pätevät osittelulait, mistä seuraavat ehdot 1-3. Meille jää siis näytettäväksi, että kaikilla $S, T \in \mathcal{L}(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$ pätee

$$(\lambda S) \circ T = \lambda(S \circ T) = S \circ (\lambda T).$$

Tämä seuraa siitä, että $S$ ja $T$ ovat lineaarisia. Identiteettikuvaus $I$ on neutraalialkio, sillä sille pätee

$$I \circ T(x) = T \circ I(x) = I(x)$$

kaikilla $x \in X$ ja $T \in \mathcal{L}(X)$. $\square$

Määritellään vielä operaattorialgebran käsite, jota tarvitaan jatkossa.

**Määritelmä 2.3.** Olkoon $X$ Banachin avaruus. Avaruuden $\mathcal{L}(X)$ vektorialiavaruutta $\mathcal{A}$ kutsutaan *operaattorialgebraksi* eli alialgebraksi algebran $\mathcal{L}(X)$ suhteen, jos kaikilla $S, T \in \mathcal{A}$ pätee $S \circ T \in \mathcal{A}$. Operaattorialgebraa kutsutaan ykköselliseksi, jos identiteettikuvaus kuuluu sinne.

## 2.2 Algebran suhteen invariantti aliavaruus

Tässä alaluvussa määritellään algebran suhteen invariantin aliavaruuden käsite, transitiivisen algebran käsite ja todistetaan kolme lausetta, joita tarvitaan Lomonosovin lauseen todistamisessa.

**Määritelmä 2.4.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra. Suljettua aliavaruutta $B \subset X$ sanotaan algebran $\mathcal{A}$ suhteen invariantiksi eli *$\mathcal{A}$-invariantiksi*, jos aliavaruus $B$ on invariantti jokaisen operaattorin $A \in \mathcal{A}$ suhteen.

**Määritelmä 2.5.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra. Operaattorialgebraa $\mathcal{A}$ sanotaan *transitiiviseksi*, jos sillä ei ole ei-triviaalia $\mathcal{A}$-invarianttia aliavaruutta. Vastaavasti sanotaan, että $\mathcal{A}$ on *ei-transitiivinen*, jos sillä on ei-triviaali suljettu $\mathcal{A}$-invariantti aliavaruus.

**Lause 2.6.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin $\{T\}'$ on algebran $\mathcal{L}(X)$ alialgebra eli operaattorialgebra.*

*Todistus.* Olkoon $A, B \in \{T\}'$. Nyt siis $(A \circ T)(x) = (T \circ A)(x)$ ja $(B \circ T)(x) = (T \circ B)(x)$ kaikilla $x \in X$. Kuvauksien liitännäisyyden ja edellisten yhtälöiden nojalla saadaan, että

$$(A \circ B \circ T)(x) = (A \circ T \circ B)(x) = (T \circ A \circ B)(x)$$

kaikilla $x \in X$ eli $A \circ B \in \{T\}'$. $\square$

Seuraavaa tulosta tullaan käyttämään lauseen 4.15 todistuksessa.

**Lause 2.7.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori ja $z \in X$. Tällöin aliavaruuden*

$$\mathcal{M} = \operatorname{span}\{STz : S \in \{T\}'\}$$

*sulkeuma $\overline{\mathcal{M}}$ on hyperinvariantti operaattorille $T$.*

*Todistus.* Olkoon $D \in \{T\}'$. Olkoon $x \in D(\mathcal{M})$ eli

$$x = D\left(\sum_{i \in I} S_i \circ Tz\right),$$

missä $I$ on äärellinen indeksijoukko, $S_i \in \{T\}'$ kaikilla $i \in I$. Koska kyseessä on äärellinen summa ja operaattori $D$ on lineaarinen, saadaan

$$x = D\left(\sum_{i \in I} S_i \circ Tz\right) = \sum_{i \in I} D \circ S_i \circ Tz.$$

Koska $T \circ S_i(x) = S_i \circ T(x)$ ja $T \circ D(x) = D \circ T(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $i \in I$, niin $D \circ S_i \circ T(x) = D \circ T \circ S_i(x) = T \circ D \circ S_i(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $i \in I$, joten operaattorit $T$ ja $D \circ S_i$ kommutoivat eli $D \circ S_i \in \{T\}'$ kaikilla $i \in I$. Näin ollen

$$x = \sum_{i \in I} D \circ S_i \circ Tz \in \mathcal{M}.$$

Siis $D(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$. Kaikilla operaattoreilla $D \in \{T\}'$ seuraa jatkuvuudesta, että $D(\overline{\mathcal{M}}) \subset \overline{D(\mathcal{M})} \subset \overline{\mathcal{M}}$ eli $\overline{\mathcal{M}}$ on hyperinvariantti aliavaruus. □

Tässä tutkielmassa käytetään operaattorin suljettujen invarianttien aliavaruuksien kokoelmalle samaa merkintää kuin lähteessä [6]. Määritellään tämä seuraavaksi.

**Määritelmä 2.8.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattorin $T$ kaikkien suljettujen invarianttien alivaruuksien kokoelmaa merkitään $\mathrm{Lat}(T)$.

Huomataan tässä kohdassa seuraava yhtäpitävyys.

**Lause 2.9.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra. Tällöin $\mathcal{A}$ on transitiivinen, jos ja vain jos*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Lat} A = \{\{0\}, X\}.$$

*Todistus.* Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra. Olkoon $\mathcal{A}$ transitiivinen. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että sillä ei ole ei-triviaaleja suljettuja $\mathcal{A}$-invariantteja aliavaruuksia eli $\mathrm{Lat}A = \{\{0\}, X\}$ kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Lat}A = \{\{0\}, X\}.$$

□

Määritellään seuraavaksi merkintä, joka selkeyttää tutkielmaa.

**Määritelmä 2.10.** Olkoon $X$ Banachin avaruus, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra ja $x \in X$. Tällöin

$$\mathcal{A}x = \{Ax : A \in \mathcal{A}\}.$$

**Lause 2.11.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $\mathcal{A}$ algebran $\mathcal{L}(X)$ alialgebra ja $x \in X$. Tällöin $\mathcal{A}x = \{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ on avaruuden $X$ aliavaruus.*

*Todistus.* $\mathcal{A}x$ on määritelmän mukaan avaruuden $X$ osajoukko, joten riittää näyttää, että se on suljettu yhteenlaskun ja skaalaarilla kertomisen suhteen. Olkoon $y, z \in \mathcal{A}x$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Koska $y, z \in \mathcal{A}x$, niin on olemassa $A_y, A_z \in \mathcal{A}$, joille pätee $A_y(x) = y$ ja $A_z(x) = z$. Koska $A_y, A_z \in \mathcal{A}$ ja $\mathcal{A}$ on algebra, niin $A_y + A_z \in \mathcal{A}$ ja $\lambda A_y \in \mathcal{A}$. Huomataan, että

$$y + z = A_y(x) + A_z(x) = (A_y + A_z)(x) \in \mathcal{A}x$$

ja vastaavasti

$$\lambda y = \lambda A_y(x) = (\lambda A_y)(x) \in \mathcal{A}x.$$

Siis $\mathcal{A}x$ on avaruuden $X$ aliavaruus. □

**Lause 2.12.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra ja $x \in X$. Tällöin aliavaruus $\mathcal{A}x = \{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ on $\mathcal{A}$-invariantti.*

*Todistus.* Määritelmän 2.4 mukaan $\mathcal{A}x$ on $\mathcal{A}$-invariantti, jos se on invariantti jokaisen $A \in \mathcal{A}$ suhteen. Olkoon $A \in \mathcal{A}$. Huomataan, että

$$A(\mathcal{A}x) = A(\{Bx : B \in \mathcal{A}\}) = \{A \circ Bx : B \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{A}x,$$

koska yhdistetty kuvaus $A \circ B \in \mathcal{A}$, kun kuvaukset $A, B \in \mathcal{A}$. □

**Lause 2.13.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra ja $\mathcal{A}x = \{0\}$ jollakin $x \in X$ ja $x \neq \overline{0}$. Tällöin aliavaruus $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ on $\mathcal{A}$-invariantti.*

*Todistus.* Olkoon $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ operaattorialgebra ja $\mathcal{A}x = \{0\}$ jollakin $x \in X$ ja $x \neq \overline{0}$. Aliavaruus $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ on $\mathcal{A}$-invariantti, koska

$$A(\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}) = \{A(\lambda x) : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{\lambda(A(x)) : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{\lambda 0 : \lambda \in \mathbb{C}\} = \{0\}.$$

□

## 2.3 Kompakti operaattori

Tässä alaluvussa määritellään kompaktin operaattorin käsite ja todistetaan kaksi siihen liittyvää lausetta sekä esitetään Rieszin lemma. Otetaan käyttöön merkintä $B_X = \overline{B}(\overline{0}, 1) = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$.

**Määritelmä 2.14.** Olkoon $X$ ja $Y$ Banachin avaruuksia ja $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattori $K$ on *kompakti operaattori*, jos joukon $K(B_X)$ sulkeuma on kompakti osajoukko avaruudessa $Y$.

Seuraavassa lauseessa todistetaan, että jatkuvan lineaarikuvauksen ja kompaktin operaattorin yhdistetty kuvaus on myös kompakti operaattori. Tätä lausetta hyödynnetään Lomonosovin lauseen 2.28 todistuksessa.

**Lause 2.15.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin $K \circ T$ ja $T \circ K$ ovat kompakteja operaattoreita.*

*Todistus.* Olkoon $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori ja $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Näytetään, että joukon $K \circ T(B_X)$ sulkeuma on kompakti. Huomataan, että $\frac{1}{||T||}T(B_X) \subset B_X$. Tästä seuraa $K\left(\frac{1}{||T||}T(B_X)\right) \subset \overline{K(B_X)}$ eli joukon $K\left(\frac{1}{||T||}T(B_X)\right)$ sulkeuma on kompakti, koska se kuvautuu kompaktin joukon sisään ja on suljettu. Tällöin myös joukon $K \circ T(B_X) = ||T||K\left(\frac{1}{||T||}T(B_X)\right)$ sulkeuma on kompakti. Tästä seuraa, että $K \circ T$ on kompakti. Yhdistetyn operaattorin $T \circ K$ kompaktisuus seuraa siitä, että kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti. Siis $\overline{K(B_X)}$ on kompakti, joten $T\left(\overline{K(B_X)}\right) = \overline{T\left(\overline{K(B_X)}\right)}$ on myös. Tällöin joukon $T \circ K(B_X)$ sulkeuma on suljettu ja sisältyy kompaktiin joukkoon eli väite pätee. □

Seuraavaksi esitetään Rieszin lemma, joka on nimetty unkarilaisen matemaatikon Frigyes Rieszin (1880-1956) mukaan. Lemmaa tarvitaan heti seuraavan lauseen todistuksessa. Rieszin lemmaa ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [10, Riesz's Lemma 2.5-4].

**Lemma 2.16.** *(Rieszin lemma) Olkoon $X$ normiavaruus, $Y$ normiavaruuden $X$ aito suljettu aliavaruus ja $\alpha$ sellainen reaaliluku, että $0 < \alpha < 1$. Tällöin on olemassa sellainen $x \in X$, että $||x|| = 1$ ja $||x - y|| \geq \alpha$ kaikilla $y \in Y$.*

Seuraava lause tarvitaan Lomonosovin lauseen 2.28 todistukseen.

**Lause 2.17.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori. Tällöin aliavaruuden* $\mathrm{Ker}(I - K)$ *dimensio on äärellinen.*

*Todistus.* Olkoon $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(I-K) \cap B_X &\subset \mathrm{Ker}(I-K) \cap K(B_X) \\ &\subset K(B_X) \subset \overline{K(B_X)}.\end{aligned}$$

Koska operaattori $K$ on kompakti, niin joukko $\overline{K(B_X)}$ on kompakti. Nyt siis aliavaruuden $\mathrm{Ker}(I - K)$ yksikkökuula $\mathrm{Ker}(I - K) \cap B_X$ on kompakti.

Tehdään vastaoletus, että aliavaruus $\text{Ker}(I - K)$ on ääretönulotteinen. Valitaan induktiolla joukon $\text{Ker}(I - K)$ jono $(x_n)$ käyttäen Rieszin lemmaa 2.16. Valitaan ensimmäinen jonon jäsen $x_1 \in \text{Ker}(I - K)$ niin, että $||x_1|| = 1$. Nyt tämä jonon jäsen muodostaa aliavaruuden $X_1$. Tämä on aliavaruuden $\text{Ker}(I-K)$ aito aliavaruus, koska se ei ole ääretönulotteinen. Rieszin lemman nojalla voidaan valita $x_2$ niin, että

$$||x_2|| = 1 \text{ ja } ||x_2 - y|| \geq \frac{1}{2}$$

kaikilla $y \in X_1$. Nyt jonon jäsenten $x_1$ ja $x_2$ muodostama aliavaruus $X_2$ on äärellisulotteinen. Rieszin lemman nojalla voidaan valita $x_3$ niin, että

$$||x_3|| = 1 \text{ ja } ||x_3 - y|| \geq \frac{1}{2}$$

kaikilla $y \in X_2$. Jatkamalla vastaavia valintoja saadaan jono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jonka kaikki jäsenet kuuluvat avaruuteen $\text{Ker}(I - K)$, mutta tämä jono ei ole Cauchyn jono, koska $||x_n - x_m|| \geq \frac{1}{2}$ aina, kun $n \neq m$. Tämä on ristiriita, sillä kaikki jonon jäsenet kuuluvat joukkoon $\text{Ker}(I-K) \cap B_X$, joka on kompakti ja silloin sen jokaisella jonolla täytyy olla suppeneva osajono. Tästä seuraa siis, että aliavaruuden $\text{Ker}(I - K)$ dimensio on äärellinen. □

Seuraava aputulos tarvitaan lauseen 2.21 todistukseen. Sitä ei tässä todisteta, mutta sen todistus löytyy lähteestä [12, Theorem 4.23].

**Lemma 2.18.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori. Tällöin* $\text{Im}(\lambda I - K)$ *on suljettu kaikilla* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Palautetaan vielä mieliin funktionaalianalyysin kurssilta avoimen kuvauksen lause ja tämän korollaari.

**Lause 2.19.** *Olkoon $X$ ja $Y$ Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ jatkuva lineaarinen surjektio. Tällöin operaattori $T$ on avoin kuvaus.*

**Korollaari 2.20.** *Olkoon $X$ ja $Y$ Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ jatkuva lineaarinen bijektio. Tällöin operaattori $T$ on lineaarinen isomorfismi eli käänteiskuvaus $T^{-1}$ on jatkuva.*

**Lause 2.21.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori ja $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$. Tällöin $\lambda$ on operaattorin $K$ ominaisarvo ja ominaisavaruuden*

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - K) = \{x \in X : Kx = \lambda x\}$$

*dimensio on äärellinen.*

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että $\lambda$ ei ole kompaktin operaattorin $K$ ominaisarvo. Operaattori $\lambda I - K$ on injektio, koska $\lambda$ ei ole operaattorin $K$ ominaisarvo. Operaattori $\lambda I - K$ ei kuitenkaan ole surjektio, koska se on injektio ja se ei ole kääntyvä. Nimittäin, jos $\lambda I - K$ on surjektio, niin se on bijektio ja käänteiskuvaus $(\lambda I - K)^{-1}$ on jatkuva avoimen kuvauksen lauseen 2.19 seurauksena.

Valitaan $A_1 = \mathrm{Im}(\lambda I - K)$. Aliavaruus $A_1$ on suljettu lemman 2.18 mukaan ja se on avaruuden $X$ aito aliavaruus, koska $\lambda I - K$ ei ole surjektio. Valitaan $A_2 = (\lambda I - K)(A_1)$. Tutkitaan kompaktin operaattorin $\lambda I - K$ rajoittumaa $(\lambda I - K)_{A_1} : A_1 \to A_1$.

Osoitetaan seuraavaksi, että rajoittuma $(\lambda I - K)|_{A_1}$ ei ole surjektio. Koska $\lambda I - K$ ei ole surjektio eli on olemassa $z \notin A_1$ siten, että $(\lambda I - K)z \in A_1$. Jos $(\lambda I - K)|_{A_1}$ olisi surjektio $A_1 \to A_1$, niin on olemassa $v \in A_1$ siten, että $(\lambda I - K)v = (\lambda I - K)z$. Koska $(\lambda I - K)$ on injektio, niin $v = z$, mutta $v \in A_1$ ja $z \notin A_1$. Siis $(\lambda I - K)|_{A_1}$ ei ole surjektio eli $A_2 := \mathrm{Im}(\lambda I - K)^2 \subsetneq A_1$.

Olkoon $A_n := \mathrm{Im}(\lambda I - K)^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jatkamalla samalla tavalla kuin edellä saadaan $A_n \supsetneq A_{n+1}$, missä $A_n \subset X$ on suljettu aliavaruus. Nyt voidaan valita jono $(y_n)$ Rieszin lemman 2.16 avulla siten, että $y_n \in A_n$, $||y_n|| = 1$ ja $||y_n - z|| \geq \frac{1}{2}$ kaikilla $z \in A_{n+1}$. Jono $(y_n)$ sisältyy yksikkökuulaan, jonka kuvan sulkeuma kompaktissa operaattorissa $K$ on kompakti eli jonolla $(K(y_n))$ on suppeneva osajono. Kuitenkin kaikilla $n < m$ pätee

$$\begin{aligned}&||Ky_n - Ky_m|| = ||Ky_n - \lambda I(y_n) + \lambda I(y_n) - K(y_m) + \lambda I(y_m) - \lambda I(y_m)||\\&= ||(K-\lambda I)(y_n) + \lambda y_n - (K-\lambda I)(y_m) - \lambda y_m||.\end{aligned}$$

Huomataan, että $\frac{1}{\lambda}((K-\lambda I)(y_n) + (K-\lambda I)(y_m) + \lambda y_m) \in A_{n+1}$, joten

$$||Ky_n - Ky_m|| = |\lambda| \cdot ||y_n - \frac{1}{\lambda}((K-\lambda I)(y_n) + (K-\lambda I)(y_m) + \lambda y_m)|| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tämä on ristiriita, sillä jonolla $(K(y_n))$ on suppeneva osajono, mutta se ei ole Cauchy-jono. Siis $\lambda$ on kompaktin operaattorin $K$ ominaisarvo.

Huomataan, että $\{x \in X : Kx = \lambda x\} = \{x \in X : \frac{1}{\lambda}Kx - x = 0\} = \mathrm{Ker}(\frac{1}{\lambda}K - I)$. Operaattori $\frac{1}{\lambda}K$ on kompakti operaattori, joten lauseen 2.17 mukaan aliavaruus $\mathrm{Ker}(\frac{1}{\lambda}K - I)$ on äärellisulotteinen. Siis ominaisavaruuden $\{x \in X : Kx = \lambda x\}$ dimensio on äärellisulotteinen. □

## 2.4 Schauderin kiintopistelause

Tässä alaluvussa esitellään ensin Brouwerin kiintopistelause, joka on nimetty alankomaalaisen matemaatikon Luitzen Egbertus Jan Brouwerin (1881-1966) mukaan. Brouwerin kiintopistelausetta ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta sen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [9]. Brouwerin kiintopistelauseen jälkeen todistetaan Schauderin kiintopistelause, joka on nimetty puolalaisen Juliusz Schauderin (1899-1943) mukaan. Ennen Brouwerin kiintopistelausetta määritellään vielä kiintopisteen käsite.

**Määritelmä 2.22.** Olkoon $X$ normiavaruus. Tällöin piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \to X$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$.

Osoitetaan seuraavaa lausetta varten tarvittava topologian aputulos.

**Lemma 2.23.** *Olkoon $A$ kompakti avaruus, $B$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko ja $f : A \to B$ jatkuva bijektio. Tällöin $f$ on homeomorfismi.*

*Todistus.* Riittää osoittaa, että funktion $f$ käänteiskuvaus $g : B \to A$ on jatkuva. Olkoon $E$ suljettu joukko avaruudessa $A$. Koska $A$ on kompakti avaruus, niin $E$ on kompakti joukko. Myös $f(E)$ on kompakti, sillä kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti ja erityisesti suljettu. Koska $f(E) = g^{-1}(E)$, niin $g^{-1}(E)$ on suljettu. Siis $g$ on jatkuva ja $f$ on homeomorfismi. $\square$

Jatkossa käytetään merkintää $\overline{B}^n$ n-ulotteisen avaruuden suljetulle yksikkökuulalle eli $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$ euklidisessä normissa.

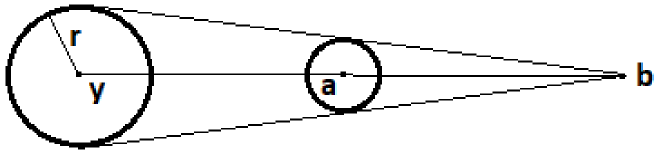
**Lause 2.24.** *(Brouwerin kiintopistelause) Jatkuvalla kuvauksella $f : \overline{B}^n \to \overline{B}^n$ on ainakin yksi kiintopiste.*

Seuraavaa lausetta tarvitaan Schauderin kiintopistelauseen todistuksessa.

**Lause 2.25.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakti ja konveksi joukko, jolla on ainakin yksi sisäpiste. Tällöin joukko $A$ on homeomorfinen suljetun yksikkökuulan $\overline{B}^n$ kanssa.*

*Todistus.* Olkoon $y \in A$ joukon $A$ sisäpiste. Sisäpisteen määritelmän nojalla on olemassa jokin $r > 0$ siten, että $\overline{B}(y, r) \subset A$. Tutkimalla mielivaltaista sädettä, joka lähtee pisteestä $y$ huomataan, että se kohtaa reunat $\partial A$ ja $\partial \overline{B}(y, r)$ tasan kerran.

Näytetään, että mielivaltainen säde $s$, joka lähtee pisteestä y kohtaa reunan $\partial A$ tasan kerran. Tehdään vastaoletus, että säde $s$ kohtaa reunan kahdessa pisteessä. Merkitään näitä pisteitä $a$ ja $b$, joista $b$ on kauempana pisteestä y oleva piste. Piirretään pisteestä $b$ kaikki mahdolliset janat kuulan $\overline{B}(y, r)$ pisteille. Nämä janat sisältyvät joukkoon $A$, koska niiden alku- ja loppupisteet kuuluvat joukkoon $A$ ja joukko $A$ on konveksi. Olkoon näiden janojen muodostama joukko $D$. Valitaan pisteelle $a$ kuulaympäristö $B\left(a, r\dfrac{||a-b||}{||y-b||}\right) \subset D \subset A$ (Kuva 2.1). Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä joukon $A$ reunapisteellä ei ole ympäristöä, joka sisältyy joukkoon $A$.




Kuva 2.1: Kuvassa havainnollistus pisteen $a$ ympäristöstä.

Määritellään funktio $f : \partial A \to \overline{B}(y, r)$ kaavalla

$$f(x) = r \cdot \frac{x - y}{||x - y||} + y$$

kaikilla $x \in \partial A$. Funktio $f$ kuvaa edellä tutkitun mielivaltaisen pisteestä $y$ lähtevän säteen ja joukon $\partial A$ leikkauspisteen joukon $\partial\overline{B}(y, r)$ ja säteen leikkauspisteeksi. Edellä huomattiin, että nämä säteet leikkaavat kummankin joukon tasan kerran, joten funktio $f$ on injektio. On myös helppo nähdä, että jokaista joukon $\partial\overline{B}(y, r)$ pistettä kohti on olemassa säde eli funktio $f$ on myös surjektio. Funktio $f$ on jatkuva, koska se on yhdistetty funktio jatkuvista funktioista. Funktio $f$ on siis jatkuva bijektio kompaktista avaruudesta avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle, joten se on lemman 2.23 mukaan homeomorfismi $\partial A \to \partial\overline{B}(y, r)$.

Määritellään funktio $g : \overline{B}(y, r) \to A$ kaavalla

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{||y - x||}{r} \cdot f^{-1}\left(y + r \cdot \dfrac{y - x}{||y - x||}\right), & \text{jos } x \in \overline{B}(y, r) \setminus \{y\} \\ 0, & \text{jos } x = y. \end{cases}$$

Tutkitaan pisteestä $y$ lähteviä janoja, joiden pituus on $r$. Huomataan ensinnäkin, että janat sisältyvät joukkon $A$, koska $A$ on konveksi joukko. Funktio $g$ skaalaa pisteestä $y$ lähtevät janat joukkoon $A$ siten, että janat peittävät joukon $A$. Siis funktio $g$ on surjektio. On myös helppo nähdä, että jokaista joukon $A \setminus \{y\}$ pistettä kohti on olemassa vain yksi jana, joka kohtaa tämän pisteen. Tästä voidaan todistaa funktion $g$ injektiivisyys, sillä kahdella samalla janalla olevalla pisteellä termi $f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-x}{||y-x||}\right)$ pysyy samana, mutta termi $\frac{||y-x||}{r}$ muuttuu. Olkoon $a, b \in \overline{B}(y,r) \setminus \{y\}$ ja $a \neq b$ sekä $a$ ja $b$ samalla janalla. Nyt saadaan

$$
\begin{aligned}
g(a) &= \frac{||y-a||}{r} \cdot f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-a}{||y-a||}\right) \\
&= \frac{||y-a||}{r} \cdot f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-b}{||y-b||}\right) \\
&\neq \frac{||y-b||}{r} \cdot f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-b}{||y-b||}\right) = g(b).
\end{aligned}
$$

Siis funktio $g$ on injektio. Funktio $g$ on jatkuva joukossa $\overline{B}(y,r) \setminus \{y\}$, koska se on yhdistetty funktio jatkuvista funktioista. Osoitetaan vielä funktion $g$ jatkuvuus pisteessä $y$. Koska joukko $A$ on kompakti, niin on olemassa $M$ siten, että $||x|| \leq M$ kaikilla $x \in A$. Olkoon $(y_n)$ jono, jolle pätee $y_n \to y$, kun $n \to \infty$. Arvioimalla saadaan

$$
\begin{aligned}
||g(y) - g(y_n)|| &= \left|\left|0 - \frac{||y-y_n||}{r} \cdot f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-y_n}{||y-y_n||}\right)\right|\right| \\
&= \frac{||y-y_n||}{r} \cdot \left|\left|f^{-1}\left(y + r \cdot \frac{y-y_n}{||y-y_n||}\right)\right|\right| \\
&\leq \frac{||y-y_n||}{r} \cdot M
\end{aligned}
$$

Ottamalla oikeasta puolesta raja-arvo, kun $n \to \infty$, nähdään, että funktio $g$ on jatkuva pisteessä $y$. Funktio $g$ on jatkuva bijektio kompaktista avaruudesta $\overline{B}(y,r)$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle. Lemman 2.23 mukaan funktio $g$ on siis homeomorfismi joukosta $\overline{B}(y,r)$ joukkoon $A$. Yksikkökuula $\overline{B}^n$ ja kuula $\overline{B}(y,r)$ ovat myös homemorfiset, joten yksikkökuula $\overline{B}^n$ on homemorfinen joukon $A$ kanssa, mikä todistaa väitteen.

$\square$

Seuraavaksi esitetään Schauderin kiintopistelause, jonka todisti ensin Juliusz Schauder. Tämä todistus löytyy lähteestä [14].

**Lause 2.26.** *Olkoon $X$ normiavaruus ja $K \subset X$ epätyhjä, konveksi ja kompakti joukko. Silloin jokaisella jatkuvalla kuvauksella $f : K \to K$ on kiintopiste.*

*Todistus.* Olkoon $K \subset X$ epätyhjä, konveksi ja kompakti joukko. Olkoon $\epsilon > 0$ kiinnitetty. Merkitään $B_\epsilon(x) = \{y \in X : ||x - y|| < \epsilon\}$. Kokoelma $\{B_\epsilon(x) : x \in K\}$ on joukon $K$ avoin peite. Koska joukko $K$ on kompakti, niin on olemassa $n$ pistettä $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ niin, että kuulat $B_\epsilon(x_1), B_\epsilon(x_2), ..., B_\epsilon(x_n)$ peittävät joukon $K$. Määritellään funktiot $g_1, g_2, ..., g_n$ siten, että $g_i : K \to [0, \infty)$ ja

$$g_i(x) := \begin{cases} \epsilon - ||x - x_i||, & \text{jos } ||x - x_i|| < \epsilon \\ 0, & \text{jos } ||x - x_i|| \geq \epsilon \end{cases}$$

kaikilla $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Funktiot $g_1, g_2, ..., g_n$ ovat jatkuvia, koska normi on jatkuva funktio, ja positiviisia. Lisäksi $\sum_{i=1}^n g_i(x) > 0$ kaikilla $x \in K$, koska $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_\epsilon(x_k)$ eli $x$ kuuluu ainakin yhteen kuulaan. Käytetään merkintää $C$ pienimmälle konveksille joukolle, joka sisältää pisteet $x_1, x_2, ..., x_n$. Koska pisteet $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ ja $K$ on konveksi sekä joukko $C$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää pisteet $x_1, x_2, ..., x_n$, niin $C \subset K$. Seuraavaksi määritellään funktio $g : K \to C$ kaavalla

$$g(x) := \frac{\sum_{i=1}^n g_i(x) x_i}{\sum_{i=1}^n g_i(x)}$$

kaikilla $x \in K$. Funktio $g$ on jatkuva kuvaus joukolta $K$ joukolle $C$, koska

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sum_{j=1}^n g_j(x)} g_i(x) = 1.$$

Funktio $g$ on jatkuva, koska se on äärellinen summa, tulo ja osamäärä jatkuvista funktioista. Merkitään $h := g \circ f$ ja käytetään funktion $h$ rajoittumalle joukkoon $C$ merkintää $\hat{h}$. Joukko $C$ on kompakti, konveksi ja se on osajoukko vektoreiden $x_1, x_2, ..., x_n$ virittämässä äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa $\mathcal{M} = \text{span}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Vektoriavaruus $\mathcal{M}$ on isomorfinen avaruuden $\mathbb{R}^k$ kanssa jollakin $k \leq n$. Koska lauseen 2.25 mukaan konveksi ja kompakti joukko $C \subset \mathcal{M}$ on homeomorfinen suljetun kuulan $\overline{B}^k \subset \mathbb{R}^k$ kanssa, voidaan soveltaa Brouwerin kiintopistelausetta 2.24 joukkoon

$C$ ja funktioon $\hat{h}$. Brouwerin kiintopistelauseen mukaan on olemassa $y$, jolle pätee $\hat{h}(y) = y = g \circ f(y)$. Huomataan, että funktiolle $g$ pätee

$$||g(x) - x|| = ||\frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)} - x||$$

$$= ||\frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)x_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)x}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)}|| = ||\frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - x)}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)}||$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)||x_i - x||}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\epsilon}{\sum_{i=1}^{n} g_i(x)} = \epsilon \text{ kaikilla } x \in K.$$

Lisäksi pätee, että $||f(y)-y|| = ||f(y)-g(f(y))|| \leq \epsilon$. On siis osoitettu, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $y_\epsilon \in K$ siten, että $||f(y_\epsilon) - y_\epsilon|| \leq \epsilon$. Voidaan valita jono $(y_m)$ niin, että $||f(y_m) - y_m|| \leq \frac{1}{m}$. Koska $(f(y_m))$ on jono kompaktissa joukossa $K$, niin on olemassa jonon $(y_m)$ osajono $(y_n)$, jolle pätee $f(y_n) \to z$, kun $n \to \infty$, jollekin pisteelle $z \in K$. Seuraavaksi näytetään, että $f(y_n)$ lähestyy myös pistettä $f(z)$. Nimittäin huomataan, että

$$||y_n - z|| = ||y_n - f(y_n) + f(y_n) - z||$$

$$\leq ||y_n - f(y_n)|| + ||f(y_n) - z|| \leq \frac{1}{n} + ||f(y_n) - z||,$$

jossa oikeanpuoleinen yhtälö lähestyy arvoa 0, kun $n \to \infty$. Tästä seuraa, että $y_n \to z$, kun $n \to \infty$. Funktio $f$ on jatkuva, joten $f(y_n) \to f(z)$, kun $n \to \infty$. Jonolla $(f(y_n))$ on siis raja-arvot $f(z)$ ja $z$, joten $f(z) = z$. $\square$

## 2.5 Lomonosovin lause

Schauderin kiintopistelauseen avulla todistetaan vielä yksi aputulos, jonka alkuperäinen todistus löytyy lähteestä [6, Lemma 6.1.1]. Tämän jälkeen ollaan valmiita todistamaan Lomonosovin lause. Seuraavassa lauseessa käytetään 1-säteiselle $y$-keskiselle avoimelle kuulalle merkintää $B_1(y)$ eli $B_1(y) = \{x \in X : ||x - y|| < 1\}$.

**Lemma 2.27.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{A}$ Banachin algebran $\mathcal{L}(X)$ sellainen* *alialgebra, että*

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Lat}A = \{\{0\}, X\}$$

*eli $\mathcal{A}$ on transitiivinen. Silloin kaikille kompakteille operaattoreille $K \in \mathcal{L}(X) \setminus \{0\}$ on olemassa $A \in \mathcal{A}$ ja $x_0 \in X \setminus \{0\}$ siten, että $KAx_0 = x_0$.*

*Todistus.* Koska operaattori $K$ ei ole nollaoperaattori, on olemassa $y \in X$ siten, että joukon $K(B_1(y))$ sulkeuma $C := \overline{K(B_1(y))}$ ei sisällä nollavektoria. Nimittäin voidaan valita $y \in X$, jolle $||Ky|| > 2||K||$. Jos $y_1 \in B_1(y)$, niin

$$||Ky_1|| = ||K(y_1 - y + y)|| = ||Ky - K(y - y_1)|| \geq ||Ky|| - ||K(y - y_1)||$$

$$\geq ||Ky|| - ||K|| \cdot ||y - y_1|| > 2||K|| - ||K|| = ||K||.$$

Huomataan, että joukko $C$ on kompakti, koska se on 1-säteisen $y$-keskisen kuulan kuvan sulkeuma kompaktissa operaattorissa. Huomataan myös lauseen 1.40 nojalla, että joukko $K(B_1(y))$ on konveksi, koska se on konveksin joukon kuva lineaarisessa kuvauksessa. Tästä seuraa lauseen 1.41 nojalla, että joukko $C$ on konveksi, koska se on konveksin joukon $K(B_1(y))$ sulkeuma.

Näytetään nyt, että $\overline{\mathcal{A}x} = \overline{\{Ax : A \in \mathcal{A}\}} = X$ kaikilla $x \in X \setminus \{0\}$. Joukko $\mathcal{A}x$ on aliavaruus lauseen 2.11 nojalla, joten $\overline{\mathcal{A}x}$ on avaruuden $X$ suljettu aliavaruus. Kaikilla $A \in \mathcal{A}$ ja kaikilla $x \in X$ pätee, että

$$A(\overline{\mathcal{A}x}) \subset \overline{A(\mathcal{A}x)} \subset \overline{\mathcal{A}x},$$

missä ensimmäinen sisältyvyys seuraa siitä, että $A$ on jatkuva kuvaus, ja toinen lauseesta 2.12. Tästä seuraa, että $\overline{\mathcal{A}x}$ on $\mathcal{A}$-invariantti kaikilla $x \in X$ ja siis

$$\overline{\mathcal{A}x} \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Lat}A = \{\{0\}, X\}.$$

Jos $\overline{\mathcal{A}x} = \{0\}$ jollakin $x \neq 0$, niin lauseen 2.13 nojalla $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$ on $\mathcal{A}$-invariantti ja siis

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} \mathrm{Lat}A \neq \{\{0\}, X\}.$$

Näin ollen $\overline{\mathcal{A}x} = X$ kaikilla $x \neq 0$. Koska $0 \notin C$ ja $\overline{\mathcal{A}x} = X$, niin $\mathcal{A}x \cap B_1(y) \neq \emptyset$ kaikilla $x \in C$. Tästä seuraa, että

$$C \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{-1}(B_1(y)).$$

Koska joukko $C$ on kompakti ja kokoelma $\{A^{-1}(B_1(y)) : A \in \mathcal{A}\}$ on joukon $C$ avoin peite, niin on olemassa sellainen äärellinen osapeite $\{A_1^{-1}(B_1(y)), A_2^{-1}(B_1(y)), ..., A_n^{-1}(B_1(y))\}$, että

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{-1}(B_1(y)).$$

Olkoon $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sellainen jatkuva kuvaus, että $r^{-1}(\{0\}) = [1, \infty)$ ja $r(s) > 0$, kun $s \in [0, 1)$. Määritellään kuvaus $f : C \to B_1(y)$ niin, että

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(||A_i x - y||)}{\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x - y||)} A_i x.$$

Funktio $f$ on hyvin määritelty, koska $\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x - y||) > 0$. Tämä seuraa siitä, että $x \in A_k^{-1}(B_1(y))$ jollakin $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Tutkitaan nyt kuvausta $F := K \circ f$ joukolta $C$ joukolle C. Koska joukko $C$ on epätyhjä, kompakti ja konveksi ja $F$ on jatkuva, niin Schauderin kiintopistelauseen 2.26 nojalla on olemassa sellainen $x_0 \in C$, että $F(x_0) = x_0$ eli

$$x_0 = K\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{r(||A_i x - y||)}{\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x - y||)} A_i x\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(||A_i x - y||)}{\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x - y||)} K A_i x.$$

Määritellään operaattori $A \in \mathcal{A}$ niin, että

$$Au = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(||A_i x_0 - y||)}{\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x_0 - y||)} A_i u,$$

kaikilla $u \in X$. Nyt

$$Ax_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{r(||A_i x_0 - y||)}{\sum_{j=1}^{n} r(||A_j x_0 - y||)} A_i x_0 = f(x_0)$$

ja siis $KAx_0 = K(f(x_0)) = K \circ f(x_0) = x_0$. Tässä $x_0 \neq 0$, koska $0 \notin C$.

□

**Lause 2.28.** *(Lomonosovin lause) Olkoon $X$ kompleksinen Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori ja $T \neq zI_X$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Jos on olemassa sellainen kompakti operaattori $K$, että $TK = KT$ ja $K$ ei ole nollaoperaattori, niin operaattorilla $T$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen operaattori, $T \neq zI_X$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja $K \in \mathcal{L}(X)$ sellainen kompakti operaattori, että $K \neq \overline{0}$ ja $TK = KT$. Tehdään vastaoletus, että operaattorilla $T$ ei ole ei-triviaalia hyperinvarianttia aliavaruutta. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$\bigcap_{A \in \{T\}'} \mathrm{Lat} A = \{\{0\}, X\}.$$

Koska $X$ on Banachin avaruus, $\bigcap_{A \in \{T\}'} \mathrm{Lat} A = \{\{0\}, X\}$ ja $\{T\}'$ on algebran $\mathcal{L}(X)$ alialgebra, niin lemman 2.27 oletukset toteutuvat. Siis on olemassa $A \in \{T\}'$ ja $x_0 \in X \setminus \{0\}$, joille pätee $KAx_0 = x_0$. Koska $K, A \in \{T\}'$, niin $KA \in \{T\}'$.

Seuraavaksi näytetään, että operaattorin $KA$ kiintopisteiden joukko eli operaattorin $I - KA$ ydin

$$\mathrm{Ker}\,(I - KA) = \{x \in X : (I - KA)\,(x) = 0\}$$

$$= \{x \in X : KA(x) = I(x)\} = \{x \in X : KA(x) = x\}$$

on itse asiassa operaattorin $T$ invariantti aliavaruus. Koska $K, A \in \mathcal{L}(X)$, niin $I - KA$ on jatkuva. Tästä seuraa, että $\mathrm{Ker}\,(I - KA) = (I - KA)^{-1}\{0\}$ on suljettu, koska se on suljetun joukon alkukuva jatkuvassa kuvauksessa. Tällöin $\mathrm{Ker}(I - KA)$ on avaruuden $X$ suljettu aliavaruus. Koska operaattorit $T$ ja $KA$ kommutoivat, niin lauseen 1.30 nojalla operaattorin $KA$ kiintopisteiden joukko $\mathrm{Ker}\,(I - KA)$ on $T$-invariantti. Lauseen 2.17 nojalla sen dimensio on äärellinen, koska operaattori $KA$ on kompakti. Operaattorin $KA$ kompaktisuus seuraa lauseesta 2.15, koska operaattori $K$ on kompakti ja operaattori $A$ on jatkuva ja lineaarinen. Koska operaattorilla $KA$ on kiintopiste $x_0 \neq 0$, niin $\mathrm{Ker}\,(I - KA) \neq \{0\}$. Koska operaattori $KA$ kommutoi kaikkien kommutaattorin $\{T\}'$ operaattorien kanssa, niin

$$\mathrm{Ker}\,(I - KA) \in \bigcap_{B \in \mathcal{A}} \mathrm{Lat} B = \{\{0\}, X\}.$$

Koska $\mathrm{Ker}\,(I - KA) \neq \{0\}$, on oltava $\mathrm{Ker}\,(I - KA) = X$. Siis Banachin avaruus $X$ on äärellisulotteinen. Koska $X$ on äärellisulotteinen Banachin avaruus, operaattorilla $T$ on ominaisarvo $\lambda$ lauseen 1.38 nojalla. Merkitään tätä ominaisarvoa vastaavaa ominaisavaruutta $F_\lambda = \{x \in X : T(x) = \lambda x\}$. Tapauksessa $\lambda = 0$ saadaan, että $F_\lambda = \mathrm{Ker}\ T$, jolloin lauseen 1.29 nojalla $F_\lambda$ on hyperinvariantti ja se on epätriviaali, koska operaattori $T$ ei ole muotoa $zI$ jollakin $z \in \mathbb{C}$. Kirjoittamalla ominaisavaruuden $F_\lambda$ uudelleen huomataan, että

$$F_\lambda = \{x \in X : T(x) = \lambda x\} = \{x \in X : \frac{1}{\lambda} T(x) = x\} = \mathrm{Ker}(I - \frac{1}{\lambda} T).$$

Lauseen 1.30 nojalla kaikilla $S \in \{T\}'$ pätee $S(\mathrm{Ker}(I - \frac{1}{\lambda}T)) \subset \mathrm{Ker}(I - \frac{1}{\lambda}T)$, koska $\frac{1}{\lambda}T(S(x)) = \frac{1}{\lambda}S(T(x)) = S(\frac{1}{\lambda}T(x))$ kaikilla $x \in X$. Huomataan vielä, että $F_\lambda \neq \{0\}$ ja $F_\lambda \neq X$, koska operaattori $T$ ei ole muotoa $zI$ jollakin $z \in \mathbb{C}$. Tästä saadaan ristiriita, koska

$$F_\lambda \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Lat} A = \{\{0\}, X\},$$

mutta $F_\lambda$ on ei-triviaali invariantti aliavaruus. Siis vastaoletus johtaa ristiriitaan, joten seuraa, että operaattorilla $T$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. □

Erityisesti Lomonosovin lause pitää sisällään aikaisemmin tunnetun tuloksen, että jokaisella kompaktilla operaattorilla on ei-triviaali invariantti aliavaruus.

**Korollaari 2.29.** *Olkoon $X$ kompleksinen Banachin avaruus ja $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakti operaattori, joka ei ole nollaoperaattori. Tällöin operaattorilla $K$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. Erityisesti operaattorille $K$ on olemassa ei-triviaali invariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Tämä seuraa suoraan Lomonosovin lauseesta 2.28 ja siitä, että operaattori $K$ kommutoi itsensä kanssa. $\square$

# Luku 3

# Normaali operaattori

Tässä luvussa todistetaan, että normaalilla operaattorilla, joka ei ole identiteettikuvauksen moninkerta, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. Ennen kuin tämä voidaan todistaa, määritellään tarvittavat käsitteet ja todistetaan muutama aputulos.

## 3.1 Adjungaatti ja normaali operaattori

Tässä alaluvussa määritellään adjungaatti ja normaali operaattori sekä todistetaan näille tarvittavat ominaisuudet.

**Määritelmä 3.1.** Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattorin $T$ *adjungaatti* on lineaarinen kuvaus $T^*$, jolle on voimassa $\langle T^*(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ kaikilla $x, y \in \mathcal{H}$.

Osoitetaan, että adjungaatti $T^*$ todella on jatkuva ja lineaarinen.

**Lause 3.2.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin operaattorin $T$ adjungaatti $T^*$ on jatkuva lineaarinen operaattori ja pätee*

$$||T|| = ||T^*||.$$

*Todistus.* Osoitetaan ensin operaattorin $T^*$ lineaarisuus. Olkoon $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in \mathcal{H}$. Nyt sisätulon ominaisuuksien nojalla pätee kaikilla $z \in \mathcal{H}$, että

$$\begin{aligned}
&\langle z, T^*(\alpha x + \beta y)\rangle = \langle T(z), \alpha x + \beta y\rangle \\
=&\overline{\alpha}\langle T(z), x\rangle + \overline{\beta}\langle T(z), y\rangle \\
=&\overline{\alpha}\langle z, T^*(x)\rangle + \overline{\beta}\langle z, T^*(y)\rangle \\
=&\langle z, \alpha T^*(x)\rangle + \langle z, \beta T^*(y)\rangle \\
=&\langle z, \alpha T^*(x) + \beta T^*(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Lauseen 1.8 nojalla pätee $T^*(\alpha x+\beta y) = \alpha T^*(x)+\beta T^*(y)$, mikä todistaa operaattorin $T^*$ lineaarisuuden. Osoitetaan operaattorin $T^*$ jatkuvuus. Olkoon $x \in \overline{B}(\overline{0}, 1)$. Tutkimalla pisteen $x$ kuvan normin toista potenssia saadaan $||T^*(x)||^2 = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle$. Voidaan olettaa, että $||T^*(x)|| > 0$, muuten jatkuvuus seuraa suoraan. Kertomalla edellinen yhtälö molemmilta puolilta normin $||T^*(x)||$ käänteisluvulla saadaan

$$\begin{aligned}
||T^*(x)|| &= \frac{1}{||T^*(x)||}\langle T^*(x), T^*(x)\rangle \\
&= \frac{1}{||T^*(x)||}\langle x, T \circ T^*(x)\rangle \\
&\leq \frac{1}{||T^*(x)||}||T \circ T^*(x)|| \cdot ||x|| \\
&= \frac{1}{||T^*(x)||}||T(T^*(x))|| \cdot ||x|| \\
&= \frac{1}{||T^*(x)||}||T|| \cdot ||T^*(x)|| \cdot ||x|| \\
&\leq ||T|| \cdot 1 = ||T|| < \infty.
\end{aligned}$$

Siis $||T^*|| \leq ||T||$ eli $T^*$ on jatkuva. Toisaalta $||T|| = ||T^{**}|| \leq ||T^*||$ eli

$$||T|| = ||T^*||.$$

□

**Määritelmä 3.3.** Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori.

1. Operaattorin $T$ sanotaan olevan *normaali operaattori*, jos se kommutoi adjungaattinsa kanssa eli $T \circ T^*(x) = T^* \circ T(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{H}$.

2. Operaattorin $T$ sanotaan olevaan *itseadjungoitu*, jos se on itsensä adjungaatti eli $T^*(x) = T(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{H}$.

Seuraava lause osoittaa, että itseadjungoitu operaattori on myös normaali operaattori.

**Lause 3.4.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva itseadjungoitu lineaarinen operaattori. Tällöin operaattori $T$ on normaali operaattori.*

*Todistus.* Suoraan määritelmästä saadaan

$$T \circ T^*(x) = T^* \circ T^*(x) = T^* \circ T(x)$$

kaikilla $x \in \mathcal{H}$. □

Seuraava lause kertoo, että yhdistetyn operaattorin adjungaatti on sama kuin operaattorien adjungaattien yhdiste käänteisessä järjestyksessä.

**Lemma 3.5.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T, S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuvia lineaarisia operaattoreita. Tällöin niiden adjungaateille pätee $(T \circ S)^*(x) = S^* \circ T^*(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{H}$ eli $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.*

*Todistus.* Olkoon $y, z \in \mathcal{H}$. Määritelmästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
&\langle (T \circ S)^* y, z \rangle \\
&= \langle y, T \circ S z \rangle \\
&= \langle T^* y, S z \rangle \\
&= \langle S^* \circ T^* y, z \rangle
\end{aligned}$$

eli $(T \circ S)^*(x) = S^* \circ T^*(x)$ kaikilla $x \in \mathcal{H}$. □

Operaattorin $T$ ja tulon $T^* \circ T$ operaattorinormille pätee seuraava yhteys, jota tullaan hyödyntämään lemman 3.9 ja lauseen 3.10 todistuksissa.

**Lemma 3.6.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin pätee, että $||T||^2 = ||T^* \circ T||$.*

*Todistus.* Lauseiden 1.22 ja 3.2 avulla saadaan heti toinen suunta

$$||T^* \circ T|| \leq ||T|| \cdot ||T^*|| = ||T|| \cdot ||T|| = ||T||^2.$$

Käänteinen suunta saadaan käyttämällä Cauchy-Schwartzin epäyhtälöä 1.10, sisätulon määritelmää ja operaattorinormin arviota (Lause 1.16). Olkoon $x \in \overline{B}\left(\overline{0}, 1\right)$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned} ||T(x)||^2 &= |\langle T(x), T(x) \rangle| = |\langle x, T^* \circ T(x) \rangle| \\ &\leq ||x|| \cdot ||T^* \circ T(x)|| = ||T^* \circ T|| \cdot ||x||^2 \leq ||T^* \circ T||, \end{aligned}$$

mistä seuraa

$$||T(x)|| \leq \sqrt{||T^* \circ T||}$$

kaikilla $x \in \overline{B}\left(\overline{0}, 1\right)$. Operaattorin $T$ operaattorinormille pätee siis $||T|| \leq \sqrt{||T^* \circ T||}$ eli $||T||^2 \leq ||T^* \circ T||$. Nyt yhdistämällä saadaan $||T||^2 = ||T^* \circ T||$. □

## 3.2 Spektraalisäde

Tässä alaluvussa määritellään spektraalisäteen käsite ja osoitetaan sille jatkossa tarvittavia ominaisuuksia. Aloitetaan määrittelemällä spektraalisäde ja palauttamalla mieliin, että lineaarisen operaattorin $T$ spektri $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ on epätyhjä kompakti joukko.

**Määritelmä 3.7.** Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori. Operaattorin $T$ *spektraalisäde* on

$$\rho(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Seuraava tulos osoittaa yhteyden spektraalisäteen ja operaattorinormin välille. Todistusta ei tässä tutkielmassa esitetä, mutta se löytyy esimerkiksi lähteestä [12, Theorem 10.13].

**Lause 3.8.** *Olkoon $\mathcal{H}$ kompleksinen Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen operaattori. Tällöin operaattorin $T$ spektraalisäteelle $\rho(T)$ pätee*

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n}.$$

Seuraavaksi todistetaan lemma 3.9, jonka mukaan jatkuvan lineaarisen itseadjungoidun operaattorin spektraalisäde on yhtä suuri kuin sen normi. Tämän jälkeen laajennetaan sama tulos jatkuvalle lineaariselle normaalille operaattorille (Lause 3.10).

**Lemma 3.9.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen itseadjungoitu operaattori. Tällöin operaattorin $T$ spektraalisäde on yhtä suuri kuin sen normi eli $\rho(T) = ||T||$.*

*Todistus.* Osoitetaan ensin induktiolla aputulos, jonka mukaan $||T||^{2^n} = ||T^{2^n}||$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tapauksessa $n = 1$ saadaan

$$||T||^2 = ||T^* \circ T|| = ||T \circ T|| = ||T^2||,$$

missä ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa lemmasta 3.6. Oletetaan seuraavaksi, että yhtälö pätee tapauksessa $n$ eli $||T||^{2^n} = ||T^{2^n}||$ ja osoitetaan tapaus $n+1$. Samaan tapaan kuin tapauksessa $n = 1$ saadaan induktio-oletuksesta, että

$$\begin{aligned}||T^{2^{n+1}}|| &= ||T^{2^n} \circ T^{2^n}|| = ||(T^*)^{2^n} \circ T^{2^n}|| \\ &= ||\left(T^{2^n}\right)^* \circ T^{2^n}|| = ||T^{2^n}||^2 \\ &= \left(||T||^{2^n}\right)^2 = ||T||^{2^{n+1}},\end{aligned}$$

mikä todistaa induktion eli $||T||^{2^n} = ||T^{2^n}||$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Nyt aputulosta ja lausetta 3.8 hyödyntäen saadaan, että

$$\rho(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^{2^n}||^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} ||T||^{2^n \cdot 2^{-n}} = ||T||.$$

□

Nyt voidaan osoittaa sama tulos normaalille operaattorille.

**Lause 3.10.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ jatkuva lineaarinen normaali operaattori. Tällöin operaattorin $N$ spektraalisäde on yhtä suuri kuin sen normi.*

*Todistus.* Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$||N^{2^n}||^2 = ||(N^* \circ N)^{2^n}||.$$

Lauseen 3.6 nojalla $||N||^2 = ||N^* \circ N||$ eli alkuaskel pätee. Tehdään induktio-oletus $||N^{2^n}||^2 = ||(N^*N)^{2^n}||$. Osoitetaan ensin, että $||N^{2^{n+1}}||^2 \geq ||(N^*N)^{2^{n+1}}||$. Nimittäin

$$\begin{aligned}
&||(N^*N)^{2^{n+1}}|| \\
&= ||(N^*)^{2^{n+1}} N^{2^{n+1}}|| && \text{(N on normaali)} \\
&\leq ||(N^*)^{2^{n+1}}|| \cdot ||N^{2^{n+1}}|| \\
&= ||(N^{2^{n+1}})^*|| \cdot ||N^{2^{n+1}}|| && \text{(Lause 3.5)} \\
&= ||N^{2^{n+1}}|| \cdot ||N^{2^{n+1}}|| && \text{(Lause 3.6)} \\
&= ||N^{2^{n+1}}||^2.
\end{aligned}$$

Osoitetaan seuraavaksi käänteinen arvio $||N^{2^{n+1}}||^2 \leq ||(N^*N)^{2^{n+1}}||$.

$$\begin{aligned}
&||N^{2^{n+1}}||^2 \\
&= \sup\{||N^{2^{n+1}}x|| : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1\}^2 \\
&= \sup\{||N^{2^{n+1}}x||^2 : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1\} \\
&= \sup\{\langle N^{2n+1}x, N^{2n+1}x\rangle : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1\} \\
&= \sup\{\langle x, (N^{2n+1})^*N^{2n+1}x\rangle : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1\} \\
&= \sup\{\langle x, (N^*N)^{2n+1}x\rangle : x \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1\} \qquad \text{(N on normaali)} \\
&\leq \sup\{\langle x, (N^*N)^{2n+1}y\rangle : x, y \in \mathcal{H}, ||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1\} \\
&= ||(N^*N)^{2^{n+1}}||.
\end{aligned}$$

Nyt siis $||N^{2^n}|| = ||(N^*N)^{2^n}||$. Huomataan vielä, että $N^*N$ on itseadjungoitu operaattori, koska $N^*N = N^*(N^*)^* = (N^*N)^*$. Edellisten tulosten ja lauseiden 3.6 ja 3.9 avulla saadaan

$$\begin{aligned}
||N||^2 &= ||N^*N|| = \rho(N^*N) \\
&= \lim_{n\to\infty} ||(N^*N)^{2^n}||^{\frac{1}{2^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} ||N^{2^n}||^{\frac{2}{2^n}} \\
&= \rho(N)^2.
\end{aligned}$$

Siis $\rho(N)^2 = ||N||^2$, joten saadaan

$$\rho(N) = ||N||.$$

$\square$

## 3.3 Spektraalimitta ja spektraalilause

Määritellään nyt spektraalimitan käsite, jota tarvitaan tämän luvun päätuloksen todistuksessa.

**Määritelmä 3.11.** Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $X$ mitta-avaruus ja $\Omega$ $\sigma$-algebra mitta-avaruudessa $X$. *Spektraalimitta* $E$ mitta-avaruudessa $(X, \Omega)$ on kuvaus, joka kuvaa $\sigma$-algebran joukot Hilbertin avaruuden $H$ ortogonaalisiksi projektioiksi eli

$$E : \Omega \to \{P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : P^2 = P \text{ ja } P^* = P\}$$

ja täyttää seuraavat ehdot:

1. $E(X) = I$, jossa $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ on identiteettioperaattori.

2. Kaikille $\sigma$-algebran $\Omega$ jonoille pareittain erillisiä joukkoja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ pätee
$$E\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E(A_k).$$

Seuraavassa lauseessa todistetaan spektraalimitan ominaisuuksia.

**Lause 3.12.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $(X, \Omega)$ mitta-avaruus ja $E : \Omega \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ spektraalimitta. Spektraalimitalla $E$ on seuraavat ominaisuudet:*

1. *Jos $A \subset B$, niin $E(B \setminus A) = E(B) - E(A)$.*

2. *$E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B)$.*

3. *$E(A)E(A) = E(A)$.*

4. *Jos $A \cap B = \emptyset$, niin $E(A)E(B) = 0$, missä $0$ tarkoittaa $0$-kuvausta.*

5. *$E(A \cap B) = E(A)E(B)$.*

*Todistus.* (1.) Olkoon $A \subset B$.

$$\begin{aligned}
&E(B) = E(A \cup (B \setminus A)) = E(B \setminus A) + E(A) \\
&\Rightarrow E(B \setminus A) = E(B) - E(A).
\end{aligned}$$

(2.) Kohdan (1.) perusteella saadaan

$$\begin{aligned}
&E(A \cup B) = E(A \cup (B \setminus A)) = E(A \cup (B \setminus (A \cap B))) \\
&= E(A) + E(B \setminus (A \cap B)) = E(A) + E(B) - E(A \cap B),
\end{aligned}$$

joten siirtämällä termi $E(A \cap B)$ toiselle puolelle saadaan

$$E(A \cup B) + E(A \cap B) = E(A) + E(B).$$

(3.) Tämä seuraa siitä, että kaikilla projektioilla $P$ pätee, että $P \circ P = P$.

(4.) Olkoon $A \cap B = \emptyset$. Koska $A \cap B = \emptyset$ ja $E(\emptyset) = 0$, niin kohdan (2.) nojalla $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$. Tällöin siis

$$\begin{aligned}
&E(A \cup B) = E(A \cup B)^2 = (E(A) + E(B))^2 \\
&= E(A)^2 + E(B)^2 + 2E(A)E(B) \\
&= E(A) + E(B) + 2E(A)E(B) \\
&= E(A \cup B) + 2E(A)E(B).
\end{aligned}$$

Siis $E(A)E(B) = 0$.

(5.) Käyttäen tietoa, että $A \cap B, A \setminus B$ ja $B \setminus A$ ovat pareittain erillisiä, saadaan

$$\begin{aligned}
&E(A)E(B) = E((A \setminus B) \cup (A \cap B))E((B \setminus A) \cup (A \cap B)) \\
&= E((A \setminus B) + (A \cap B))E((B \setminus A) + (A \cap B)) \\
&= E(A \cap B)^2 + E(A \setminus B)E(A \cap B) + E(B \setminus A)E(A \cap B) + E(A \setminus B)E(B \setminus A) \\
&= E(A \cap B) + 0 + 0 + 0 \\
&= E(A \cap B).
\end{aligned}$$

$\square$

Tarvitsemme tämän luvun päätuloksen todistamiseen spektraalilauseen. Se kertoo, että normaalilla operaattorilla on olemassa yksikäsitteinen spektraalimitta. Seuraavaan lauseeseen on koottu tutkielmassa tarvittava osa spektraalilausetta, mutta se on laajempi kokonaisuus kuin seuraavassa lauseessa esitetään. Spektraalilausetta ei todisteta, mutta sen todistus löytyy esimerkiksi lähteistä [11, Theorem 2.5.6] ja [12, Theorem 12.22-12.24].

**Lause 3.13.** *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus ja $N \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normaali operaattori. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen spektraalimitta $E$, joka on määritelty spektrin $\sigma(N)$ Borel-joukkojen $\sigma$-algebralle $\mathcal{B}$ ja jolle pätee*

$$\langle Nx, y\rangle = \int_{\sigma(N)} z dE_{x,y}(z)$$

*kaikilla $x, y \in \mathcal{H}$, missä $dE_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle$ on vastaava kompleksiarvoinen mitta kaikilla Borel-joukoilla $B \subset \sigma(N)$. Lisäksi spektraalimitalla $E$ on seuraavat ominaisuudet:*

- *Kaikilla Borel-joukoilla $A \subset \sigma(N)$ projektio $E(A)$ kommutoi kaikkien operaattorin $N$ kanssa kommutoivien operaattorien kanssa.*
- *$E(A) \neq 0$ kaikilla relatiivisesti avoimilla epätyhjillä joukoilla $A \subset \sigma(N)$.*

## 3.4 Normaalilla operaattorilla on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus

Nyt ollaan valmiita todistamaan tämän osion päätulos.

**Lause 3.14.** *Normaalilla operaattorilla $N$, joka ei ole muotoa $zI$ jollakin $z \in \mathbb{C}$, on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon $N$ normaali operaattori, joka ei ole muotoa $zI$ jollakin $z \in \mathbb{C}$, ja $E$ normaalia operaattoria $N$ vastaava spektraalimitta. Näytetään ensin, että operaattorin $N$ spektri $\sigma(N)$ ei voi olla yksiö. Tehdään vastaoletus, että $\sigma(N) = \{\lambda\}$

jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$. Tämä tarkoittaa sitä, että operaattorilla $N - \lambda I$ ei ole jatkuvaa käänteiskuvausta. Tällöin myöskään operaattorilla $N - \lambda I - 0I$ ei sellaista ole. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $\sigma(N - \lambda I) = \{0\}$. Lisäksi $N - \lambda I$ on normaali operaattori, koska $N$ on normaali operaattori. Tästä seuraa, että

$$\rho(N - \lambda I) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(N - \lambda I)\} = \sup\{0\} = 0.$$

Lauseen 3.10 mukaan normaalin operaattorin normi on yhtä suuri kuin sen spektraalisäde eli

$$||N - \lambda I|| = \rho(N - \lambda I) = 0.$$

Normin määritelmän mukaan täytyy päteä, että $N = \lambda I$. Tämä on kuitenkin ristiriita, sillä oletuksen mukaan normaali operaattori $N$ ei ole muotoa $cI$ jollakin $c \in \mathbb{C}$. Tästä seuraa siis, että $\sigma(N)$ ei ole yksiö.

Koska lineaarisen operaattorin spektri on aina epätyhjä ja spektri $\sigma(N)$ ei ole yksiö, niin spektrissä $\sigma(N)$ täytyy olla ainakin kaksi pistettä. Merkitään näitä pisteitä $\lambda_1$ ja $\lambda_2$. Koska pisteet ovat erilliset, niin kompleksitasossa on olemassa suora $L$, joka erottaa pisteet ja jakaa spektrin $\sigma(N)$ Borel-joukkoihin $A$ ja $B$ siten, että $\lambda_1 \in A$ ja $\lambda_2 \in B$ sekä $A$ on relatiivisesti avoin spektrissä $\sigma(N)$. Merkitään $B_1 = B \setminus L$. Joukko $B_1$ on relatiivisesti avoin spektrissä $\sigma(N)$, koska se on avoimen puolitason ja spektrin $\sigma(N)$ leikkaus (Tämä topologinen tulos löytyy lähteestä [15, Lause 5.3]). Koska $A$ ja $B_1$ ovat relatiivisesti avoimia joukkoja spektrissä $\sigma(N)$, niin lauseen 3.13 mukaan $E(A) \neq 0$ ja $E(B_1) \neq 0$.

Koska joukkojen $A$ ja $B_1$ leikkaus on tyhjä, niin lauseen 3.12 mukaan

$$E(A \cap B_1) = E(A)E(B_1) = E(B_1)E(A) = 0.$$

Jos $E(A) = I$, niin $0 = E(A)E(B_1) = E(B_1) \neq 0$, mikä on ristiriita eli $E(A) \neq I$. Vastaavalla päättelyllä saadaan, että $E(B_1) \neq I$. Koska $E(B_1) \neq 0$, niin on olemassa suljettu aliavaruus $X \subset \mathcal{H}$ siten, että $E(B_1)(\mathcal{H}) = X$ ja $X \neq \{0\}$. Koska

$E(A)E(B_1) = 0$, niin $E(A)(X) = \{0\}$. Tästä seuraa, että $X \subset \text{Ker } E(A)$, joten $\text{Ker } E(A) \neq \{0\}$. Projektion $E(A)$ ytimelle pätee myös, että $\text{Ker } E(A) \neq \mathcal{H}$, koska $E(A) \neq 0$. Olkoon $T \in \{N\}'$ lineaarinen operaattori, joka on vaihdannainen normaalin operaattorin $N$ kanssa. Lauseen 3.13 mukaan $E(A)$ on vaihdannainen operaattorin $T$ kanssa. Tästä seuraa, että

$$E(A)(T(\text{Ker } E(A))) = T(E(A)(\text{Ker } E(A))) = T(0) = 0,$$

joten $T(\text{Ker } E(A)) \subset \text{Ker } E(A)$. Siis $\text{Ker } E(A)$ on normaalin operaattorin $N$ ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.

$\square$

# Luku 4

# Minimaaliset vektorit

Tässä luvussa määritellään minimaaliset vektorit, todistetaan luvun päätuloksena lause 4.15 ja sen sovelluksena saadaan uusi erilainen todistus sille, että kompakteilla operaattoreilla on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.

## 4.1 Hahn-Banachin ja Banach-Alaoglun lauseet

Seuraava tulos on nimeltään Hahn-Banachin lause, josta on eri muotoja. Hahn-Banachin lausetta ei tässä tutkielmassa todisteta, mutta todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [13, Theorem 3.4].

**Lause 4.1.** *(Hahn-Banach) Olkoon $A$ ja $B$ erillisiä, epätyhjiä ja konvekseja joukkoja Banachin avaruudessa $X$ ja joukko $A$ on avoin. Tällöin on olemassa jatkuva funktionaali $\Lambda \in X^*$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$Re\ \Lambda x < \gamma \leq Re\ \Lambda y$$

*kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$.*

Todistetaan seuraava versio, joka laajentaa Hahn-Banachin lausetta niin, että Hahn-Banachin lauseessa 4.1 voidaan siirtyä joukon $A$ sulkeumaan, jos sallitaan ensimmäisessä epäyhtälössä yhtäsuuruus.

**Lause 4.2.** *Olkoon $A$ ja $B$ erillisiä, epätyhjiä ja konvekseja joukkoja Banachin avaruudessa $X$ ja joukko $A$ on avoin. Tällöin on olemassa jatkuva funktionaali $\Lambda \in X^*$ ja $\gamma \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$Re\ \Lambda x \leq \gamma \leq Re\ \Lambda y$$

*kaikilla $x \in \overline{A}$ ja $y \in B$.*

*Todistus.* Joukoille $A$ ja $B$ pätevät Hahn-Banachin lauseen 4.1 oletukset, joten on olemassa funktionaali $\Lambda \in X^*$ siten, että $\mathrm{Re}\ \Lambda x < \gamma \leq \mathrm{Re}\ \Lambda y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$. Voidaan olettaa, että $||\Lambda|| > 0$. Riittää osoittaa, että kaikilla $z \in \overline{A}$ pätee $\mathrm{Re}\ \Lambda z \leq \gamma$. Tehdään vastaoletus, että $\mathrm{Re}\ \Lambda z > \gamma$. Koska $z \in \overline{A}$, niin on olemassa jono $(z_n)$ joukon $A$ pisteitä niin, että $z_n \to z$, kun $n \to \infty$. Voidaan valita jonosta $(z_n)$ jonon jäsen $z_k$ siten, että $||z_k - z|| < \dfrac{\mathrm{Re}\ \Lambda(z) - \gamma}{||\Lambda||}$. Hahn-Banachin lauseen 4.1 nojalla $\gamma > \mathrm{Re}\ \Lambda z_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, mutta toisaalta

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\ \Lambda z_k &= \mathrm{Re}\ \Lambda(z - z + z_k) \\
&= \mathrm{Re}\ (\Lambda(z) - \Lambda(z - z_k)) \\
&= \mathrm{Re}\ \Lambda(z) - \mathrm{Re}\ \Lambda(z - z_k) \\
&\geq \mathrm{Re}\ \Lambda(z) - |\Lambda(z - z_k)| && \text{(Lause 1.16)} \\
&\geq \mathrm{Re}\ \Lambda(z) - ||\Lambda|| \cdot ||z - z_k|| && \left(||z_k - z|| < \frac{\mathrm{Re}\ \Lambda(z) - \gamma}{||\Lambda||}\right) \\
&> \mathrm{Re}\ \Lambda(z) - (\mathrm{Re}\ \Lambda(z) - \gamma) \\
&= \gamma,
\end{aligned}$$

joten $\gamma > \gamma$, joka on ristiriita eli $\mathrm{Re}\ \Lambda z \leq \gamma$. Siis kaikilla $x \in \overline{A}$ pätee $\mathrm{Re}\ \Lambda x \leq \gamma$ $\square$

Seuraavaksi esitellään Mazurin lause. Sitä ei todisteta, mutta sen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [12, Theorem 3.12].

**Lause 4.3.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $E \subset X$ konveksi joukko. Joukko $E$ on suljettu Banachin avaruuden $X$ topologiassa, jos ja vain jos se on suljettu heikossa topologiassa.*

Seuraava lause on nimeltään Banach-Alaoglun lause. Tätä lausetta ei todisteta, mutta sen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [12, Theorem 3.15].

**Lause 4.4.** *(Banach-Alaoglu) Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $X^*$ tätä vastaava duaaliavaruus. Tällöin avaruuden $X^*$ yksikköpallo on kompakti heikossa tähtitopologiassa.*

Myös seuraavan lauseen todistus löytyy lähteestä [12, Theorem 3.16].

**Lause 4.5.** *Olkoon $X$ separoituva normiavaruus. Tällöin heikko tähtitopologia duaaliavaruuden $X^*$ suljetulla yksikkökuulalla on metristyvä.*

## 4.2 Minimaalinen vektori

Shamim Ansari ja Per Enflo sovelsivat minimaalisia vektoreita Hilbertin avaruuksille 1990-luvulla kirjoittamassaan artikkelissa [2]. Isabelle Chalendar, Jonathan Partington ja Martin Smith yleistivät minimaaliset vektorit Banachin avaruuksiin 2000-luvulla julkaistussa artikkelissa [5].

Määritellään kuvaus joukon etäisyydelle origosta. Tämä merkintä ei ole yleisessä käytössä, mutta se selkeyttää tätä tutkielmaa.

**Määritelmä 4.6.** Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$. Tällöin funktio $\mathrm{dist}_0 : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ määritellään

$$\mathrm{dist}_0(A) = \inf\{||x|| : x \in A\}$$

kaikilla $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Seuraavaksi määritellään minimaalisen vektorin käsite Banachin avaruudessa. Alkuperäinen määritelmä löytyy artikkelista [7].

**Määritelmä 4.7.** Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$ ja $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$.

Tällöin vakiolle $\lambda \geq 1$ vektori $y_n \in X$ on $\lambda$-*minimaalinen vektori*, johon liittyvät luonnollinen luku $n$, vektori $x_0$ ja reaaliluku $\epsilon$, jos

$$||T^n y_n - x_0|| \leq \epsilon \text{ ja } ||y_n|| \leq \lambda \cdot \mathrm{dist}_0(\{y \in X : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\}).$$

Kun $\lambda = 1$, voidaan vektoria $y_n$ kutsua lyhyesti *minimaaliseksi vektoriksi.*

Todistetaan tässä kohtaa topologinen aputulos, jota tarvitaan lauseen 4.9 todistuksessa.

**Lause 4.8.** *Olkoon $X, Y$ ja $Z$ metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Jos lisäksi $f(X)$ on tiheä avaruudessa $Y$ ja $g(Y)$ on tiheä avaruudessa $z$, niin $(g \circ f)(X)$ on tiheä avaruudessa $Z$.*

*Todistus.* Olkoon $z \in Z$ ja $\epsilon > 0$. Koska $g(Y)$ on tiheä avaruudessa $Z$, niin on olemassa sellainen $y \in Y$, että $||g(y) - z|| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Koska kuvaus $g$ on jatkuva, niin voidaan valita $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x_\delta \in B(y, \delta)$ pätee $||g(x_\delta) - g(y)|| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Koska $f(X)$ on tiheä avaruudessa $Y$, niin on olemassa sellainen $x \in X$, että $f(x) \in B(y, \delta)$. Arvioimalla saadaan

$$||g \circ f(x) - z|| \leq ||g \circ f(x) - g(y) + g(y) - z||$$

$$\leq ||g(f(x)) - g(y)|| + ||g(y) - z|| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\square$

Näytetään seuraavaksi $\lambda$-minimaalisen vektorin määritelmässä esiintyvälle joukolle $\{y : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\} = (T^n)^{-1}(\overline{B}(x_0, \epsilon))$ muutama perusominaisuus.

**Lause 4.9.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$ ja $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$. Merkitään $K = \{y \in X : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\}$. Joukolle $K$ pätee seuraavat ominaisuudet:*

1. *$K$ on suljettu.*

2. *$K$ on konveksi joukko.*

*3.* $\overline{0} \notin K$.

*4.* $K \neq \emptyset$.

*Todistus.* (1.) Koska $T$ on jatkuva kuvaus, niin $T^n$ on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva. Koska joukko $K = (T^n)^{-1}(\overline{B}(x_0, \epsilon))$ ja joukko $\overline{B}(x_0, \epsilon)$ on suljettu, niin $K$ on suljettu suljetun joukon alkukuvana jatkuvassa kuvauksessa.

(2.) Olkoon $x, y \in K$ eli $T^n x, T^n y \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$ ja $\alpha \in (0, 1)$. Näytetään seuraavaksi, että $\alpha x + (1 - \alpha)y \in (T^n)^{-1}(\overline{B}(x_0, \epsilon))$, joka on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$T^n(\alpha x + (1 - \alpha)y) \in \overline{B}(x_0, \epsilon).$$

Huomataan, että

$$T^n(\alpha x + (1 - \alpha)y) = \alpha T^n x + (1 - \alpha)T^n y \in \overline{B}(x_0, \epsilon),$$

koska suljettu kuula $\overline{B}(x_0, \epsilon)$ on konveksi joukko.

(3.) Tehdään vastaoletus, että $\overline{0} \in K$. Koska $T^n\overline{0} = \overline{0}$, niin $\overline{0} \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$ eli $||x_0 - \overline{0}|| = ||x_0|| \leq \epsilon$, mikä on ristiriita, koska $||x_0|| > \epsilon$.

(4.) Koska operaattorin $T$ kuvajoukko on tiheä ja siten myös lauseen 4.8 seurauksena operaattorin $T^n$, niin on olemassa jono $(z_m)$ avaruuden $X$ pisteitä siten, että $T^n z_m \to x_0$, kun $m \to \infty$. Olkoon $z$ ensimmäinen jonon jäsen, jolla $||T^n z - x_0|| \leq \epsilon$. Siis $z \in K$, joten $K \neq \emptyset$. □

Seuraavaksi esitetään Eberlein-Šmulyanin lause. Tämän todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [8, Theorem 13.1].

**Lause 4.10.** *(Eberlein-Šmulyan) Olkoon $X$ Banachin avaruus. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitävät:*

*1. $X$ on refleksiivinen.*

2. *Yksikkökuula $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ on kompakti heikossa topologiassa.*

3. *Yksikkökuula $\overline{B}(\overline{0}, 1)$ on jonokompakti heikossa topologiassa.*

4. *Jokaisella rajoitetulla jonolla avaruudessa $X$ on heikossa topologiassa suppeneva osajono.*

Seuraava lause osoittaa, että 1-minimaaliset vektorit ovat olemassa refleksiivisessä Banachin avaruudessa. Lauseen todistus mukailee lähteen [6, Proposition 7.1.1] todistusta.

**Lause 4.11.** *Olkoon $X$ refleksiivinen Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$ ja $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$. Tällöin on olemassa minimaalinen vektori $y_n$.*

*Todistus.* Merkitään $K = \{y : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\}$, joka on lauseessa 4.9 esiintyvä joukko, ja $d := \mathrm{dist}_0(K_n)$. Olkoon $(z_m)$ sellainen jono joukossa $K$, että $||z_m|| \to d$. Valitaan jonon $(z_m)$ osajono $(z_p)$, jonka normien jono on laskeva, jolloin jono $(z_p) \subset K \cap \overline{B}(\overline{0}, ||z_1||)$. Joukko $K \cap \overline{B}(\overline{0}, ||z_1||)$ on konveksi ja suljettu, joten se on suljettu heikossa topologiassa lauseen 4.3 mukaan. Joukko $\overline{B}(\overline{0}, ||z_1||)$ on skaalattu suljettu yksikkökuula, joten helppona seurauksena lauseesta 4.10 saadaan, että se on kompakti heikossa topologiassa. Joukko $K \cap \overline{B}(\overline{0}, ||z_1||)$ on leikkaus suljetusta ja kompaktista joukosta heikossa topologiassa, joten se on kompakti heikon topologian suhteen. Lauseesta 4.10 seuraa myös, että jonolla $(z_p)$ on osajono $(z_q)$, joka suppenee heikossa topologiassa vektoriin $y_n \in K$. Vektorin $y_n$ normille saadaan seuraava arvio

$$||y_n|| = ||y_n - z_q + z_q|| \leq ||y_n - z_q|| + ||z_q||.$$

Ottamalla raja-arvo, kun $q \to \infty$, saadaan $||y_n|| \leq d$. Siis $||y_n|| = d$ ja $y_n \in K$ eli $y_n$ on mimimaalinen vektori.

□

## 4.3 Minimaalisten vektorien sovellus invariantin ali-avaruuden ongelmaan

Aloitetaan tämä alaluku todistamalla hyödyllisiä tuloksia päätulosta varten. Seuraavaa tulosta tarvitaan lauseessa 4.15.

**Lemma 4.12.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T : X \to \mathbb{C}$ jatkuva lineaarinen funktionaali ja $x \in X$ vektori, jolle $T(x) \neq 0$. Tällöin jokaisella $z \in X$ on esitys $z = cx + w$, missä $c$ on skalaari ja $w \in Ker\ T$.*

*Todistus.* Olkoon siis $T : X \to \mathbb{C}$ jatkuva lineaarinen funktionaali ja $x \in X$ vektori, jolle $T(x) \neq 0$. Merkitään $x_0 = \frac{1}{T(x)}x$. Tällöin $T(x_0) = T\left(\frac{1}{T(x)}x\right) = \frac{1}{T(x)}T(x) = 1$. Kirjoitetaan $z = T(z)x_0 + (z - T(z)x_0)$. Tämä toteuttaa väitteen ehdot, koska $T(z) \in \mathbb{C}$ ja

$$T(z - T(z)x_0) = T(z) - T(T(z)x_0) = T(z) - T(T(z)\frac{1}{T(x)}x)$$

$$= T(z) - \frac{1}{T(x)}T(z)T(x) = 0$$

eli $w =: z - T(z)x_0 \in \text{Ker } T$ . □

Ennen tämän luvun päätuloksen todistamista esitetään vielä yksi teknisempi aputulos, joka selkeyttää päätuloksen todistusta. Tämän lemman todistus mukailee lähteen [7, Lemma 2.1] todistusta.

**Lemma 4.13.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^+$, $x_0 \in X$ sekä $\lambda \geq 1$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$, ja $y_n$ on $\lambda$-minimaalinen vektori, johon liittyvät vektori $x_0$ ja reaaliluku $\epsilon$. Tällöin on olemassa $g_n \in X^*$, jolle pätee $||g_n|| = 1$, ja $\beta > 0$ siten, että*

1. $|g_n(x_0)| \geq \beta + \epsilon$.
2. $\beta \leq |g_n(T^n y_n)| \leq \lambda\beta$.

*3.* $|g_n(T^n(y_n))| \geq \frac{1}{\lambda}||g_n \circ T^n|| \cdot ||y_n||$.

*Todistus.* Merkitään $K_n = \{y : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\}$, joka on lauseessa 4.9 esiintyvä joukko, ja $d_n := \text{dist}_0(K_n)$. Selvästi $d_n \geq 0$. Näytetään, että $d_n > 0$. Tehdään vastaoletus, että $d_n = 0 = \text{dist}_0(\{y : ||T^n y - x_0|| \leq \epsilon\})$. Koska joukon $K_n$ etäisyys origosta on 0 ja se on suljettu, täytyy päteä, että $\overline{0} \in K_n$. Tämä on ristiriita lauseen 4.9 kanssa, sillä $\overline{0} \notin K_n$, joten $d_n > 0$. Tästä seuraa, että $\overline{B}(\overline{0}, d_n)$ on epätriviaali suljettu kuula.

Näytetään, että joukot $B(x_0, \epsilon)$ ja $T^n B(\overline{0}, d_n)$ eivät leikkaa eli

$$B(x_0, \epsilon) \cap T^n(B(\overline{0}, d_n)) = \emptyset.$$

Olkoon $x \in B(x_0, \epsilon)$, joten $(T^n)^{-1}(x) \in K$. Tällöin $||(T^n)^{-1}(x)|| \geq d_n$, joten $(T^n)^{-1}(x) \notin B(\overline{0}, d_n)$ ja siis $x \notin T^n(B(\overline{0}, d_n))$. Näin ollen saadaan

$$B(x_0, \epsilon) \cap T^n(B(\overline{0}, d_n)) = \emptyset.$$

Koska joukot $A = \text{int}(T^n(B(\overline{0}, d_n)))$ ja $B = \overline{B}(x_0, \epsilon)$ ovat erillisiä, epätyhjiä ja konvekseja, ne toteuttavat Hanh-Banachin lauseen 4.1 ja siten myös lauseen 4.2 ehdot. Tällöin on olemassa $g_n \in X^*$, jonka operaattorinormi $||g_n|| = 1$, ja $\beta > 0$ siten, että

$$\text{Re } g_n(x) \leq \beta \leq \text{Re } g_n(y)$$

kaikilla $x \in \overline{\text{int}(T^n(B(\overline{0}, d_n)))} = \overline{T^n(B(\overline{0}, d_n))}$ ja $y \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$. Operaattorin $T^n$ jatkuvuudesta seuraa, että $\overline{T^n(B(\overline{0}, d_n))} \supset T^n(\overline{B}(\overline{0}, d_n))$. Tästä voidaan siirtyä tutkimaan kuulan $\overline{B}(\overline{0}, d_n)$ pisteitä, joille pätee siis

$$\text{Re } g_n(T^n(x)) \leq \beta \text{ kaikilla } x \in \overline{B}(\overline{0}, d_n).$$

Aloitetaan näyttämällä lauseen väite (1). Koska $||g_n|| = 1$, niin voidaan valita $(a_k) \subset \overline{B}(\overline{0}, 1) \subset X$ siten, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ pätee $|g_n(a_k)| \geq 1 - \frac{1}{k}$ ja valitaan $\alpha_k$ siten, että $|\alpha_k| = 1$ ja $\alpha_k g_n(a_k) = |g_n(a_k)|$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi merkitään $z_k = x_0 - \epsilon \alpha_k a_k$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Huomataan, että

$$||z_k - x_0|| = ||x_0 - \epsilon\alpha_k a_k - x_0|| = ||\epsilon\alpha_k a_k|| = \epsilon|\alpha_k|||a_k|| \leq \epsilon \cdot 1 \cdot 1 = \epsilon,$$

siis $z_k \in \overline{B}(x_0, \epsilon)$. Arvioimalla pisteen $g_n(x_0) \in \mathbb{C}$ normia saadaan

$$\begin{aligned}
&|g_n(x_0)| \geq \text{Re } g_n(x_0) = \text{Re } g_n(x_0 - z_k + z_k) \\
&= \text{Re } g_n(x_0 - z_k) + \text{Re } g_n(z_k) \\
&\geq \text{Re } g_n(x_0 - z_k) + \beta = \text{Re } g_n(\epsilon\alpha_k a_k) + \beta \\
&= \epsilon \cdot \text{Re } \alpha_k \cdot g_n(a_k) + \beta = \epsilon \cdot \text{Re } |g_n(a_k)| + \beta \\
&= \epsilon \cdot |g_n(a_k)| + \beta = \epsilon \cdot (1 - \frac{1}{k}) + \beta.
\end{aligned}$$

Ottamalla tästä epäyhtälöstä raja-arvo, kun $k \to \infty$, saadaan

$$|g_n(x_0)| \geq \epsilon + \beta,$$

joka on lauseen väite (1).

Koska $y_n \in K = (T^n)^{-1}(\overline{B}(x_0, \epsilon))$, niin $T^n y_n \in \overline{B}(x_0, \epsilon) = B$, joten $\beta \leq \text{Re } g_n(Ty_n)$. Tästä seuraa lauseen väitteen (2) ensimmäinen epäyhtälö, koska

$$\beta \leq \text{Re } g_n(Ty_n) \leq |g_n(Ty_n)|.$$

Tutkitaan seuraavaksi lauseen väitteessä (3) esiintyvää operaattorinormia $||g_n \circ T^n|| = ||g_n(T^n)||$. Olkoon $x \in \overline{B}(\overline{0}, 1)$. Valitaan sellainen $\alpha \in \mathbb{C}$, että $|\alpha| = 1$ ja $|g(T^n x)| =$

Re $\alpha \cdot g(T^n x)$. Saadaan, että

$$
\begin{aligned}
|g(T^n x)| &= \text{Re } \alpha \cdot g(T^n x) \\
&= \frac{d_n}{d_n} \text{Re } g(T^n(\alpha x)) \\
&= \frac{1}{d_n} \text{Re } g(T^n(d_n \alpha x)).
\end{aligned}
$$

Koska $d_n \alpha x \in d_n \overline{B}(\overline{0}, 1) = \overline{B}(\overline{0}, d_n)$, niin Re $g(T^n(d_n \alpha x)) \leq \beta$. Saadaan siis $|g(T^n x)| \leq \frac{\beta}{d_n}$ kaikilla $x \in \overline{B}(\overline{0}, 1)$ eli $||g_n \circ T^n|| = ||g_n(T^n)|| \leq \frac{\beta}{d_n}$.

Lauseen väitteen (2) jälkimmäinen arvio seuraa siitä, että $||y_n|| \leq \lambda d_n$ ja

$$
|g_n(T^n y_n)| \leq ||g_n T^n|| \cdot ||y_n|| \leq \frac{\beta}{d_n} ||y_n|| \leq \lambda \beta.
$$

Lauseen väite (3) seuraa siitä, että

$$
|g_n \circ T^n(y_n)| \geq \beta \geq d_n ||g_n \circ T^n|| \geq \frac{1}{\lambda} ||y_n|| \cdot || \circ T^n|| = \frac{1}{\lambda} ||g_n \circ T^n|| \cdot ||y_n||.
$$

□

Palautetaan mieliin tasaisesti rajoitetun funktion määritelmä.

**Määritelmä 4.14.** Olkoon $X$ normiavaruus ja $(f_n)$ sellainen jono funktioita, että $f_n : X \to \mathbb{C}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin funktiojono $(f_n)$ on *tasaisesti rajoitettu*, jos on olemassa $M < \infty$ siten, että $|f_n(x)| \leq M$ kaikilla $x \in X$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Nyt ollaan valmiita todistamaan tämän luvun päätulos. Tämä tulos on todistettu artikkelissa [7, Theorem 2.1], jonka todistusta seurataan.

**Lause 4.15.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$ ja $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$. Olkoon myös $(y_n)$ jono $\lambda$-minimaalisia vektoreita, $(A_k) \subset \{T\}'$ tasaisesti rajoitettu operaattorijono ja*

*$(y_{n_k})$ jonon $(y_n)$ osajono, jolle pätee, että*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0,$$

*sekä jono $(A_k T^{n_k-1} y_{n_k-1})$ suppenee kohti pistettä $z \in X \setminus \{\overline{0}\}$. Tällöin operaattorilla $T$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Tavoitteena on näyttää, että löytyy suljettu aliavaruus $\mathcal{M} \subset X$, jolle kaikilla $D \in \{T\}'$ pätee $D\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Olkoon $D \in \{T\}'$. Lemman 4.13 nojalla jokaista $n \in \mathbb{N}$ ja vastaavaa $y_n$ kohti on olemassa $g_n \in X^*$ ja $\beta_n > 0$ siten, että $||g_n|| = 1$ ja lemman 4.13 epäyhtälöt 1-3 toteutuvat. Näytetään ensin, että

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k} DTz = 0.$$

Lemman 4.13 mukaan $g_{n_k}(T^{n_k} y_{n_k}) \geq \beta_{n_k} > 0$, joten lemman 4.12 nojalla voidaan kirjoittaa vektori $DA_k y_{n_k-1} \in X$ lineaarisena hajotelmana siten, että

$$DA_k y_{n_k-1} = \alpha_{n_k} y_{n_k} + \omega_{n_k}, \tag{4.16}$$

missä $\alpha_{n_k} \in \mathbb{C}$ ja $\omega_{n_k} \in \mathrm{Ker}(g_{n_k} \circ T^{n_k})$. Tästä seuraa

$$g_{n_k} \circ T^{n_k}(DA_k y_{n_k-1}) = g_{n_k} \circ T^{n_k}(\alpha_{n_k} y_{n_k} + \omega_{n_k}) = \alpha_{n_k} g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k}),$$

josta ratkaisemalla $\alpha_{n_k}$ saadaan

$$\alpha_{n_k} = \frac{g_{n_k} \circ T^{n_k}(DA_k y_{n_k-1})}{g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})}.$$

Tästä saadaan kompleksiluvun $\alpha_{n_k}$ itseisarvolle seuraava arvio

$$\begin{aligned}
|\alpha_{n_k}| &= \frac{|g_{n_k} \circ T^{n_k}(DA_k y_{n_k-1})|}{|g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})|} \\
&\leq \frac{||g_{n_k} \circ T^{n_k}|| \cdot ||D|| \cdot ||A_k|| \cdot ||y_{n_k-1}||}{|g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})|} \\
&\leq \frac{||g_{n_k} \circ T^{n_k}|| \cdot ||D|| \cdot ||A_k|| \cdot ||y_{n_k-1}||}{\frac{1}{\lambda}||g_{n_k} \circ T^{n_k}|| \cdot ||y_{n_k}||} && \text{(Lemma 4.13 )} \\
&= \lambda \frac{||D|| \cdot ||A_k|| \cdot ||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||}. && \text{(Sievennys)}
\end{aligned}$$

Koska jono $(A_k)$ on tasaisesti rajoitettu, niin on olemassa $M < \infty$ siten, että $||A_k|| \leq M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Ottamalla raja-arvo $k \to \infty$ saadaan

$$\lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}| \leq \lim_{k\to\infty} \lambda \frac{||D|| \cdot ||A_k|| \cdot ||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} \leq \lim_{k\to\infty} \lambda \frac{||D|| \cdot M \cdot ||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0,$$

koska $\lambda \cdot ||D|| \cdot M$ on vakio ja $\lim_{k\to\infty} \frac{||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0$. Siis $\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = 0$. Hyödyntäen tätä tietoa saadaan

$$\begin{aligned}
&|g_{n_k} \circ D \circ T \circ A_k \circ T^{n_k-1}(y_{n_k-1})| && (A_k, D \in \{T\}') \\
&= |g_{n_k} \circ T^{n_k} \circ D \circ A_k(y_{n_k-1})| && \text{(Sijoitus 4.16)} \\
&= |g_{n_k} \circ T^{n_k}(\alpha_{n_k} y_{n_k} + \omega_{n_k})| && (\omega_{n_k} \in \mathrm{Ker}(g_{n_k} \circ T^{n_k})\ ) \\
&= |g_{n_k} \circ T^{n_k}(\alpha_{n_k} y_{n_k})| && (g_{n_k} \text{ ja } T \text{ lineaarisia}) \\
&= |\alpha_{n_k}||g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})|.
\end{aligned}$$

Ottamalla raja-arvo molemmilta puolilta yhtälöä, kun $k \to \infty$, saadaan

$$\lim_{k\to\infty} |g_{n_k} \circ D \circ T \circ A_k \circ T^{n_k-1}(y_{n_k-1})| = \lim_{k\to\infty} |\alpha_{n_k}||g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})| = 0,$$

koska $\lim_{n\to\infty} |\alpha_{n_k}| \to 0$ ja lauseen 4.13 kohdan (2) mukaan $|g_{n_k} \circ T^{n_k}(y_{n_k})| \leq \lambda\beta$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Lauseen 1.17 sekä oletuksen $\lim_{n\to\infty} A_k T^{n_k-1} y_{n_k-1} = z$ nojalla

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(DTz) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k} \circ D \circ T \circ A_k \circ T^{n_k-1}(y_{n_k-1}) = 0.$$

Näytetään seuraavaksi, että operaattorijonolla $(g_{n_k})$ on heikossa tähtitopologiassa suppeneva osajono. Lauseen 4.4 nojalla avaruuden $X^*$ yksikkökuula $\overline{B}_{X^*}(\overline{0}, 1)$ on kompakti. Lauseen 1.31 nojalla voidaan olettaa, että $X$ on separoituva. Tällöin suljettu yksikkökuula $\overline{B}_{X^*}(\overline{0}, 1)$ on metristyvä lauseen 4.5 perusteella. Metrisessä avaruudessa kompaktisuus on yhtäpitävää jonokompaktisuuden kanssa. Koska $||g_{n_k}|| = 1$ kaikilla $n_k \in \mathbb{N}$, niin $g_{n_k} \in \overline{B}_{X^*}(\overline{0}, 1)$. Jonokompaktiuden määritelmästä seuraa, että jonolla $(g_{n_k})$ on suppeneva osajono $(g_m)$, joka suppenee funktionaaliin $\Phi \in X^*$. Koska jonolle $(g_m)$ pätee $\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(DTz) = 0$, niin rajalla $\Phi(DTz) = 0$. Nyt voidaan osoittaa, että aliavaruus

$$\mathcal{M} = \overline{\text{span}}\{STz : S \in \{T\}'\}$$

on operaattorin $T$ hyperinvariantti aliavaruus ja se ei ole triviaali. Aliavaruus $\mathcal{M}$ on operaattorin $T$ hyperinvariantti aliavaruus lauseen 2.7 mukaan. Koska identiteettikuvaus $I \in \{T\}'$, niin $TIz = Tz \in \mathcal{M}$ ja $z \neq 0$. Koska $T$ on injektio, niin $Tz \neq T0 = 0$ eli $\mathcal{M} \neq \{0\}$. Lemman 4.13 kohdasta 2 seuraa, että $|\Phi(x_0)| \geq \beta + \epsilon$ eli $\Phi$ ei ole vakiokuvaus 0. Koska $\mathcal{M} \subset \text{Ker } \Phi$, niin $\mathcal{M} \neq X$. Näin ollen aliavaruus $\mathcal{M}$ on operaattorin $T$ ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. □

Helppona korollaarina edellisestä tuloksesta saadaan seuraava tulos.

**Korollaari 4.17.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$, sekä $(y_n)$ jono $\lambda$-minimaalisia vektoreita, joihin liittyvät vektori $x_0$ ja reaaliluku $\epsilon$ ja jonon $(y_n)$ alijono $(y_{n_k})$, jolle pätee*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0.$$

*Tällöin operaattorilla $T$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus, jos ainakin toi-*

*nen seuraavista ehdoista pätee:*

1. *$(T^{n_k-1}y_{n_k-1})$ suppenee normissa.*

2. *$(T^{n_k}y_{n_k-1})$ suppenee normissa vektoriin, joka ei ole nollavektori.*

*Todistus.* Oletetaan lauseen oletukset ja 1. ehto. Valitaan lauseen 4.15 jono $(A_k)$ siten, että $A_k = I$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Nyt huomataan, että

$$||T^{n_k-1}y_{n_k-1}|| \geq ||x_0|| - \epsilon,$$

koska $y_{n_k-1} \in \{y : ||T^{n_k-1} - x_0|| \leq \epsilon\}$. Tästä seuraa, että $\lim_{k\to\infty} ||T^{n_k-1}y_{n_k-1}|| \neq \overline{0}$, joten jono $(I \circ T^{n_k-1}y_{n_k-1})$ toteuttaa lauseen 4.15 ehdot ja siis operaattorilla $T$ on hyperinvariantti aliavaruus.

Oletetaan lauseen oletukset ja 2. ehto. Valitaan lauseen 4.15 jono $(A_k)$ siten, että $A_k = T$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa suoraan, että $(T \circ T^{n_k-1}y_{n_k-1}) = (T^{n_k}y_{n_k-1})$, joka oletuksen nojalla suppenee vektoriin, joka ei ole nollavektori. Siis lauseen 4.15 ehdot toteutuvat ja operaattorilla $T$ on hyperinvariantti aliavaruus. □

Sovelluksena edelliselle lauseelle annetaan uusi (ja varsin erilainen) todistus aikaisemmalle tulokselle 2.29, jonka mukaan kompaktilla operaattorilla, joka ei ole nollakuvaus, on ei-triviaali invariantti aliavaruus. Tätä varten tarvitaan seuraava lemma. Lemman todistuksessa seurataan lähteessä [6, Lemma 7.4.4] esitettyä todistusta.

**Lemma 4.18.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus, $T \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva lineaarinen injektio, jonka kuvajoukko on tiheä, $\epsilon > 0$, $x_0 \in X$, jolle pätee $||x_0|| > \epsilon$, ja $(y_n)$ jono $\lambda$-minimaalisia vektoreita, joihin liittyvät vektori $x_0$ ja reaaliluku $\epsilon$. Jos $\sigma(T) = \{0\}$, niin on olemassa jonon $(y_n)$ osajono $(y_{n_k})$, jolle pätee*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0.$$

*Todistus.* Tehdään vastaoletus, että sopivalle osajonolle on olemassa $t > 0$, jolle pätee

$$\frac{||y_{n-1}||}{||y_n||} > t$$

kaikilla $n > 0$. Tästä seuraa, että $||y_{n-1}|| > ||y_n||t$, josta saadaan

$$||y_1|| > t||y_2|| > ... > t^{n-1}||y_n||.$$

Koska $||T^n y_n - x_0|| = ||T(T^{n-1}y_n) - x_0||$ ja $T^{n-1}y_n \in T^{-1}\overline{B}(x_0, \epsilon)$, niin

$$||T^{n-1}y_n|| \geq \inf\{||z|| : z \in T^{-1}\overline{B}(x_0, \epsilon)\} \geq \frac{||y_1||}{\lambda}.$$

Näillä tiedoilla saadaan arvio

$$||T^{n-1}|| \cdot ||y_n|| \geq ||T^{n-1}y_n|| \geq \frac{||y_1||}{\lambda} > t^{n-1}\frac{||y_n||}{\lambda}.$$

Supistamalla $||y_n||$ saadaan $||T^{n-1}|| > \dfrac{t^{n-1}}{\lambda}$, mistä seuraa

$$||T^{n-1}||^{1/(n-1)} > \frac{t}{\lambda^{1/(n-1)}}.$$

Tästä saadaan ristiriita, sillä spektraalisädekaavan nojalla $0 < \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = \rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$, mutta $\sigma(T) = \{0\}$. $\square$

Nyt voidaan edellisten tulosten avulla antaa uusi ja erilainen todistus Lomonosovin korollaarille 2.29. Todistus seuraa kirjan [6, Corollary 7.4.5] todistusta.

**Lause 4.19.** *Olkoon $X$ Banachin avaruus ja $K \in \mathcal{L}(X)$ jatkuva kompakti operaattori, joka ei ole nollakuvaus. Tällöin operaattorilla $K$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus.*

*Todistus.* Voidaan olettaa, että operaattori $K$ on injektio ja $\sigma(K) = \{0\}$, muuten sillä on lauseen 2.21 mukaan äärellisulotteinen ominaisavaruus, joka on kompaktin operaattorin $K$ hyperinvariantti aliavaruus, mikä on todistettu lauseessa 1.37. Voidaan olettaa, että $||K|| = 1$, koska voidaan yhtä hyvin siirtyä tutkimaan operaattoria $\dfrac{K}{||K||}$.

Olkoon $\lambda > 1$. Valitaan $x_0 \neq \overline{0}$ ja $0 < \epsilon < ||Kx_0||$. Tästä seuraa, että $||x_0|| = ||x_0|| \cdot ||K|| \geq ||Kx_0|| > \epsilon$. Olkoon $(y_n)$ jono operaattorin $K$ $\lambda$-minimaalisia vektoreita, joihin liittyvät vektori $x_0$ ja $\epsilon$. Lemman 4.18 mukaan on olemassa osajono $(y_{n_k})$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} \frac{||y_{n_k-1}||}{||y_{n_k}||} = 0.$$

Jonolla $(K^{n_k} y_{n_k-1})$ on suppeneva osajono, koska $K^{n_k} y_{n_k-1} = K(K^{n_k-1} y_{n_k-1})$ ja operaattori $K$ on kompakti sekä $(K^{n_k-1} y_{n_k-1})$ on rajoitettu jono. Jonon $(K^{n_k} y_{n_k-1})$ osajonon raja-arvo ei voi olla $\overline{0}$, koska

$$||K^{n_k} y_{n_k-1} - Kx_0|| = ||K(K^{n_k-1} y_{n_k-1}) - Kx_0|| \leq ||K|| \cdot ||K^{n_k-1} y_{n_k-1} - x_0|| < \epsilon.$$

Jonon $(K^{n_k} y_{n_k-1})$ osajono toteuttaa siis korollaarin 4.17 jälkimmäisen ehdon eli kompaktilla operaattorilla $K$ on ei-triviaali hyperinvariantti aliavaruus. $\square$

# Kirjallisuutta

[1] Abramovich, Y. A. ja Aliprantis, C. D. *An Invitation to Operator Theory*. American Mathematical Society, 2002.

[2] Ansari, Shamim ja Enflo, Per. *Extremal Vectors and Invariant Subspaces*. Trans. Amer. Math. Soc., 350:539-558, 1998.

[3] Astala, Kari, Piiroinen, Petteri ja Tylli, Hans-Olav. *Funktionaalianalyysin peruskurssi, Luentomuistiinpanot,* 2010.

[4] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right, third edition*. Springer, 2015.

[5] Chalendar, Isabelle, Partington, Jonathan ja Smith, Martin. *Approximation in Reflexive Banach Spaces and Applications to the Invariant Subspace Problem.* Proc. Amer. Math. Soc., 132(4):1133-1142, 2004.

[6] Chalendar, Isabelle ja Partington, Jonathan R. *Modern Approaches to the Invariant-Subspace Problem.* Cambridge University Press, 2011.

[7] Chalendar, Isabelle and Partington, Jonathan R. *Variations on Lomonosov's theorem via the technique of minimal vectors.* Acta Sci. Math., 71(3-4):603-617, 2005.

[8] Conway, John B. *A Course in Functional Analysis.* Springler, 1990.

[9] Hurewicz, Witold ja Wallman, Henry. *Dimension Theory* (Princeton Mathematical Series, volume 4). Princeton University Press, 1948.

[10] Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis with Applications.* Wiley, 1978.

[11] Murphy, Gerald. *C*-Algebras and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[12] Rudin, Walter. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991.

[13] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, 1974.

[14] Schauder, Juliusz. *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen.* Studia Mathematica 2, (1930) s. 171-180.

[15] Väisälä, Jussi. *Topologia 2.* Limes ry, 2015.