Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Maisterintutkielma

Birkhoffin-Kakutanin teoreema

Toni Pentti

Ohjaaja: Erik Elfving 30.10.2021

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Opintosuunta – Studieinrikting – Study track
Matematiikan opettaja

Tekijä – Författare – Author
Toni Pentti

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Birkhoffin-Kakutanin teoreema

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Maisterintutkielma	30.10.2021	17

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Tämän tutkielman tarkoitus on esitellä ja todistaa eräs topologisiin ryhmiin liittyvä lause. Lause kertoo topologisen ryhmän oleva metristyvä avaruus, mikäli ryhmän neutraalialkiolla on numeroituva ympäristökanta. Tutkielmassa käsitellään tarkemmin topologisiin ryhmiin liittyviä tuloksia ja niiden seurauksia.

Ensimmäinen kappale on varattu johdannolle. Heti alussa käydään läpi miksi tutkielman tulos on merkittävä ja miksi siihen on järkevää paneutua. Tutkielmassa esitellään oleelliset lähtötiedot, jotta lukijan on helpompi tutustua varsinaiseen aiheeseen. Toisessa kappaleessa kerrotaan tärkeimmät käsitteet ja ne yritetään mahdollisimman selvästi selittää lukijalle. Tässä kappaleessa käydään myös läpi tutkielmassa käytettyjä merkintätapoja.

Kolmannessa kappaleessa tutustutaan topologisiin ryhmiin ja niihin liittyviin tuloksiin. Kappaleessa on lyhyesti esiteltynä topologisen ryhmän määritelmä, pohjaten algebran määrittelemään ryhmän käsitteeseen ja yleisen topologian määräämiin ehtoihin. Topologisille ryhmille johdetaan kaksi lausetta, jotka ovat tutkielman päätuloksen todistusta varten oleellisia. Ensimmäinen lauseista kertoo, että neutraalialkiolle voidaan rakentaa symmetrisiä ympäristöjä niin, että niiden tulo kuuluu aina johonkin toiseen ympäristöön. Toinen lauseista taas antaa tiedon siitä kuinka neutraalialkiolle löytyy ympäristöjä johon jokin toinen alkio ei kuulu. Nämä lauseet antavat työkalut rakentamaan ryhmän alkioille avoimia ympäristöjä, joita käytetään taas edelleen sopivia ympäristökantoja rakennettaessa. Tässä kappaleessa käydään läpi kaikki tarvittava päätulosta varten.

Tutkielman varsinainen päätulos esitellään lyhyesti kappaleen neljä alussa. Kappaleessa todistetaan vaihe vaiheelta topologisen ryhmän neutraalialkiolle rakennetun numeroituvan ympäristökannan avulla, että löydetään metriikka joka määrittää avoimet joukot siten, että ne ovat samoja kuin topologian määräämät avoimet joukot. Tulos on merkittävä siksi, että se antaa työkalun tarkastella topologisten ja metristen avaruuksien yhteyksiä.

Lähtökohta työlle oli kirjoittajan oma kiinnostus topologisiin ryhmiin ja niihin liittyviin tuloksiin. Tavoitteena oli todistaa tärkeä tulos topologian alalta, joka auttaa linkittämään topologiset ja metriset avaruudet toisiinsa.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Topologinen ryhmä, metristyvä avaruus

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällys

1 Johdanto

Tutkielman tavoitteena on tutustua topologisten ryhmien tulokseen, joka linkittää topologiset avaruudet ja metriset avaruudet toisiinsa hyödyllisellä tavalla. Tutkielmassa seurataan tarkasti Deane Montgomeryn ja Leo Zippinin teosta Topological Transformation Groups [2]. Teoksessa on esitelty monia tuloksia topologisiin ryhmiin liittyen, mutta tässä tutkielmassa keskitytään siihen kuinka saadaan muodostettua abstraktista topologisesta ryhmästä metrinen avaruus ja täten alkioille jokin määritelty etäisyys. Tutkielman päätulos on nimetty kahden matemaatikon Garrett Birkhoffin ja Shizuo Kakutanin mukaan. Teoreema on nimetty molempien mukaan, sillä Birkhoff sekä Kakutani työskentelivät samoihin aikoihin itsenäisesti ryhmille rakennettujen metriikoiden parissa. Tulos kertoo topologisen ryhmän olevan metristyvä, jos ja vain jos topologisen ryhmän neutraalialkiolla on olemassa numeroituva ympäristökanta. Tulos on merkittävä, sillä se antaa meille tavan rakentaa järkevä metriikka topologisille ryhmille. Keinoa, jolla funktiot metriikkaa rakennettaessa laaditaan on käyttänyt muun muassa Andrew Gleason, joka ratkaisi Hilbertin viidennen ongelman.

Tässä tutkielmassa lähdetään liikkeelle käsitteistä ja merkinnöistä, joita tutkielmassa tarvitaan ja tullaan käyttämään. Sisällöt ovat käytännössä kurssien Topologia I ja Topologia II tietojen soveltamista. Työssä esitellään ensin mitä topologiset avaruudet tarkoittavat ja tutustutaan niihin liittyvään käsitteistöön. Myöhemmin yhdistetään topologiset avaruudet ryhmän käsitteeseen ja tutkitaan topologisiin ryhmiin liittyviä tuloksia. Tutkielman kannalta tärkeää on tarkastella neutraalialkiota ja erityisesti neutraalialkion ympäristöjä. Neutraalialkion ympäristöjen avulla muodostetaan sopiva ympäristöistä koostuva perhe jonka ominaisuuksien avulla päästään rakentamaan metriikkaa. Ympäristöjä valittaessa tärkeää on rakentaa joukot sillä tavoin, että ympäristöt sisältyvät toisiinsa ja muodostavat neutraalialkiolle numeroituvan ympäristökannan. Ympäristökannan avulla voidaan muodostaa funktio, jota edelleen käytetään varsinaisen metriikan rakentamiseen. Metriikka antaa etäisyyden kahdelle topologisen ryhmän alkiolle.

Birkhoffin-Kakutanin teoreema on yksi tärkeä tulos topologian alalla, joka auttaa ymmärtämään topologisten avaruuksien ja metristen avaruuksien välisiä yhteyksiä.

2 Merkintöjä ja käsitteistöä

Tässä tutkielmassa tullaan viittaamaan paljon kurssien Topologia I ja Topologia II määritelmiin. Lähtötiedoiksi vaaditaan melko paljon käsitteitä ja niiden ymmärtämistä. Tässä kappaleessa nostetaan esille tutkielmassa käytettyjä käsitteitä. Lähdemateriaalina on käytetty Jussi Väisälän teoksia Topologia I [3] ja Topologia II [4].

2.1 Metriikka ja metrinen avaruus

Olkoon X joukko ja olkoon d kuvaus $X \times X \to \mathbb{R}_+$. Kuvaus d määrittää jokaiselle joukon X alkioparille niitä vastaavan ei-negatiivisen reaaliluvun. Tällöin kun $x, y \in X$ niitä vastaa reaaliluku $d(x, y) \geq 0$. Tätä lukua $d(x, y)$ kutsutaan x:n etäisyydeksi y:stä. Jotta kuvausta d voitaisiin kutsua metriikaksi, sen täytyy täyttää seuraavat ehdot. Oletetaan, että $x, y, z, \in X$:

(M1) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M2) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

(M3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Metrinen avaruus on joukko X, jossa on annettu jokin metriikka d. Tällöin pari (X, d) on metrinen avaruus.

Metrisiin avaruuksiin liittyy tärkeänä käsitteenä myös kuulat. Kuulille käytetään merkintää $B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$, missä $a \in X$ ja $r > 0$. Tämä tarkoittaa sitä, että kun valitaan jokin reaaliluku r niin kaikki avaruuden X pisteet, joiden etäisyys pisteestä a on pienempi kuin r, kuuluvat kuulaan.

2.2 Avoin joukko

Avointen joukkojen käsite on topologian kiistatta keskeisin käsite, sillä niiden avulla määritellään useita muita tärkeitä käsitteitä. Käsitellään tässä se mitä avoimet joukot tarkoittavat metristen avaruuksien näkökulmasta.

Määritelmä. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $U \subset X$. Joukkoa U sanotaan avoimeksi joukoksi jos sen jokaisella pisteellä $x \in U$ on olemassa kuulaympäristö $B(x, r)$ siten, että $B(x, r) \subset U$.

Tällä tavoin määriteltynä kuulat $B(x, r)$ ovat määritelmän mukaan itse avoimia joukkoja, sillä kuulan sisältä voidaan jokaiselle kuulan pisteelle y aina jokin toinen kuula valitsemalla säde sopivasti siten, että $B(y, r_y) \subset B(x, r)$ [3].

2.3 Topologinen avaruus

Olkoon X joukko ja τ kokoelma X:n osajoukkoja. Tällöin τ on X:n topologia, kun seuraavat ehdot ovat voimassa.

(T1) τ sisältää kaikki jäsentensä mielivaltaiset yhdisteet,

(T2) τ sisältää kaikki jäsentensä äärelliset leikkaukset,

(T3) tyhjä joukko $\emptyset \in \tau$ ja koko avaruus $X \in \tau$.

Näillä ehdoilla paria (X, τ) voidaan kutsua topologiseksi avaruudeksi.

Avoimet joukot topologisille avaruuksille ovat määritelty abstraktimmin kuin metrsille avaruuksille. Topologisissa avaruuksissa avoimet joukot ovat joukkoja jotka kuuluvat kokoelmaan τ. Topologia on siis kokoelma avoimia joukkoja, eikä topologia ota kantaa siihen miltä avoimet joukot näyttävät. Topologia ei esimerkiksi tunnista avoimia kuulia, sillä metriikka ei kuulu topologian määritelmään millään lailla.

2.4 Ympäristöt

Tässä tutkielmassa viitataan paljon ympäristöihin, tutkielmassa tullaan myös yhdistämään metristen avaruuksien ja topologian käsitteet ympäristöjen avulla. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $U \subset X$ ja $x \in X$. Joukko U on pisteen x ympäristö, jos $x \in U$ ja U on avoin. Yleensä metristen avaruuksien avoimien joukkojen käsitteenä käytetään ympäristön sijasta kuulia, sillä kuula on jo itsessään ympäristö. Ympäristön käsite on siitä mielenkiintoinen, että sen määritelmä topologiselle avaruudelle on sama kuin metriselle avaruudelle. Olkoon (Y, τ) topologinen avaruus ja olkoon $V \subset Y$ avoin joukko. Joukko V on pisteen y ympäristö, jos $y \in V$ ja V on avoin.

2.5 Hausdorffin avaruus

Topologinen avaruus (X, τ) on Hausdorffin avaruus (tässä tutkielmassa käytetään lyhennettä Hausdorff tai T_2-avaruus), jos sen pisteillä $x, y \in X, x \neq y$ on erilliset ympäristöt. Toisin sanoen, on olemassa pisteiden x, y ympäristöt $x \in U$ ja $y \in V$, joille $U \cap V = \emptyset$.

2.6 Metristyvä avaruus

Topologista avaruutta (X, τ) kutsutaan metristyväksi, jos on olemassa metriikka d, että $\tau = \tau_d$. Tällöin sanotaan, että d indusoi avaruuden (X, τ) topologian. Merkintä $\tau = \tau_d$ tarkoittaa sitä, että metriikka muodostaa samat avoimet joukot kuin mitä topologia määrittää.

Lause 1. *Diskreetti avaruus on metristyvä.*

Todistus. Olkoon (X, τ_{dis}) diskreetti avaruus, eli τ_{dis} sisältää kaikki X:n osajoukot. Määritetään metriikka d siten, että kun $x, y \in X$, $d(x, y) = 1$ kun $x \neq y$ ja $d(x, x) = 0$. Tästä seuraa suoraan, että $\tau_{dis} = \tau_d$, koska voidaan valita avoimet joukot kuuliksi joiden säde on pienempi kuin 1. Jos $A = \{x\}$, niin $A = B(x, \frac{1}{2})$.

$\square$

Jokainen diskreetti avaruus on Hausdorff, koska jokaiselle kahdelle pisteelle voidaan löytää erilliset ympäristöt.

2.7 Kanta ja ympäristökanta

Kanta tarkoittaa topologiassa koko avaruuden topologian virittävää joukkoa. Toisin sanoen topologia määräytyy kantansa mukaan.

Määritelmä. Oletetaan, että pari (X, τ) on topologinen avaruus. Nyt $\mathbb{B}$ on avaruuden X osajoukkojen kokoelmana topologian τ kanta, jos

(K1) $\mathbb{B} \subset \tau$.

(K2) Jokainen $U \in \tau, U \neq \emptyset$, on yhdiste joistakin kannan $\mathbb{B}$ jäsenistä.

Metrisille avaruuksille kannan muodostavat avoimet kuulat $B(x, r)$.

Määritelmä. Kokoelmaa pisteen x ympäristöjä kutsutaan ympäristökannaksi, jos jokainen x:n ympäristö sisältää jonkin tämän kokoelman jäsenen.

Ympäristökannan käsite on usein hyödyllinen sen takia, että sillä tavoin voidaan rajoittaa tarkasteltavien avointen ympäristöjen määrää. Ympäristökannan avulla avoimille joukoille saadaan merkitys ja usein ympäristökannan numeroituvuus auttaa niiden hallitsemisessa. Tässä tutkielmassa tarvitaan numeroituvia ympäristökantoja.

2.8 Homeomorfismi

Homeomorfismi on kuvaus joka liittää kahden topologisen avaruuden pisteet toisiinsa siten, että avoimet joukot molemmissa avaruuksissa ns. ”vastaavat” toisiaan.

Määritelmä. Oletetaan että X ja Y ovat topologisia avaruuksia. Kuvaus $f : X \to Y$ on homeomorfismi, jos

(H1) f on bijektio

(H2) f on jatkuva

(H3) f^{-1} on jatkuva.

3 Topologinen ryhmä

Tämän tutkielman päätulos liittyy topologisten ryhmien metristyvyyteen ja sen takia on tärkeää tarkastella millaisia olioita topologiset ryhmät ovat. Topologisten ryhmien käsittely yhdistää laajasti matematiikan osa-alueista topologiaa ja algebraa. Käydään ensin läpi ryhmän ja aliryhmän määritelmät kuten Jokke Häsän ja Johanna Rämön teoksessa Johdatus abstraktiin algebraan [1] ja tutkitaan sen jälkeen ryhmien topologiaa tarkemmin.

3.1 Ryhmä

Joukot muodostavat algebrallisia rakenteita jos niille on määritelty jokin laskutoimitus siten, että se liittää joukon kaksi alkioita yhdeksi saman joukon alkioksi. Tämän kaltaisia rakenteita kutsutaan ryhmiksi jos alkioille ja alkioiden välisille operaatiolle on voimassa vielä muutama ehto.

Olkoon G epätyhjä joukko, $a, b, c \in G$ ja $*$ binäärioperaatio (laskutoimitus). Nyt G on ryhmä jos seuraavat ehdot täyttyvät:

(R1) Kaikilla $a, b \in G : a * b \in G$,

(R2) kaikilla $a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$,

(R3) on olemassa neutraalialkio $e \in G : a * e = e * a = a$,

(R4) jokaiselle $a \in G$ on olemassa $a^{-1} \in G : a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Tällöin joukko G on ryhmä. Ryhmille käytetään merkintää $(G, *)$.

3.2 Aliryhmä

Joukko H on ryhmän $(G, *)$ aliryhmä, mikäli joukolle H pätee $H \subset G$, $H \neq \emptyset$, sekä seuraavat aksioomat:

(A1) Kaikilla $a, b \in H : a * b \in H$,

(A2) kaikilla $a \in H : a^{-1} \in H$.

3.3 Topologisen ryhmän määritelmä

Rakenteeltaan topologinen ryhmä on joukko, jolle pätee ryhmän aksiomaattinen määritelmä, sekä että se on topologinen avaruus. Binäärioperaatioilta vaaditaan myös jatkuvuus.

Olkoon G topologinen avaruus, sekä ryhmä. G on topologinen ryhmä, mikäli sille on voimassa seuraavat ehdot.

(G1) Kuvaus $\varphi : G \times G \to G, (a, b) \mapsto ab$ on jatkuva,

(G2) kuvaus $\iota : G \to G, a \mapsto a^{-1}$ on jatkuva,

(G3) jos $a, b \in G$, niin ainakin toisella pisteistä a, b on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

Topologisia ryhmiä ovat esimerkiksi reaaliluvut tavallisella avointen välien määräämällä topologialla (avoimet välit toimivat topologian kantana) ja tavallisella yhteenlaskulla varustettuna. Reaalilukujen yhteenlasku on tunnetusti jatkuva kuvaus, sekä yhteenlaskun käänteisalkion ottaminen on jatkuva. Toinen esimerkki topologisesta ryhmästä on kompleksilukujen ympyräryhmä $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Tällä ryhmällä laskutoimituksena käytetään kompleksilukujen kertolaskua ja topologia määräytyy avointen kuulien määräämien ympyränkaarien mukaan. Kaarenpätkät toimivat tässä avaruuden kantana. Topologisen ryhmän jatkuvuusominaisuudet seuraavat suoraan kompleksilukujen kertolaskun ja jakolaskun jatkuvuudesta.

Ehto G3 on niin sanottu Kolmogorov-avaruuden separoituvuusehto T_0. Ehto siis antaa topologiselle ryhmälle hieman lisäehtoja topologiseen avaruuteen nähden. Esimerkiksi jokainen Hausdorff (T_2) on Kolmogorov avaruus (T_0), sillä separoituvuusehto T_2 on vahvempi kuin T_0.

3.4 Tulojoukko

Topologisilla ryhmillä tärkeitä tuloksia saadaan yleensä osoitettua ei ainoastaan alkioiden tulojen, vaan myös joukkojen tulon avulla. Erityisesti kertomalla keskenään topologisen ryhmän alkioiden avoimia ympäristöjä voidaan osoittaa hyödyllisiä tuloksia.

Oletetaan, että G on ryhmä. Nyt joukon $A \subset G$ käänteisjoukko on A^{-1}, eli joukko $\{a^{-1} \mid a \in A\}$. Tärkeänä joukko-opillisena huomiona voidaan heti todeta, että $(A^{-1})^{-1} = A$. Vastaavasti jos $B \subset G$, niin tulojoukko AB on kaikkien alkioiden $a \in A$ ja $b \in B$ tulojoukko $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \subset G$. Joukkojen tuloihin liittyy vahvasti käsitteet symmetrisyys ja avoimuus.

Määritelmä. Olkoon G topologinen ryhmä. Osajoukko $A \subset G$ on symmetrinen joukko, jos $A^{-1} = A$.

Tällä tavoin määriteltynä mille tahansa osajoukolle $A \subset G$ pätee, että että joukko AA^{-1} on symmetrinen, koska

$$
\begin{aligned}
(AA^{-1})^{-1} &= \{(ab^{-1})^{-1} \mid a, b \in A\} \\
&= \{(b^{-1})^{-1}a^{-1} \mid a, b \in A\} \\
&= \{ba^{-1} \mid a, b \in A\} \\
&= AA^{-1}.
\end{aligned}
$$

Lause 2. *Olkoon G topologinen ryhmä ja $A \subset G$ avoin. Tällöin joukko A^{-1} on avoin.*

Todistus. Koska G on topologinen ryhmä täytyy silloin määritelmän mukaan kuvauksen ι olla jatkuva. Kuvaus ι on myös homeomorfismi, koska se on jatkuva topologisen ryhmän määritelmän mukaan, sekä se on itsensä käänteiskuvaus. Nyt $\iota^{-1}(A) = A^{-1}$, mikä jo todistaa lauseen, sillä kuvaus ι on jatkuva, jos ja vain jos avoimen joukon alkukuva on avoin joukko. Koska ι on jatkuva ja A on avoin joukko, täytyy siis myös joukon A^{-1} olla avoin. □

3.5 Neutraalialkion ympäristöt

Tutkielman päätuloksen kannalta on tärkeää tutkia neutraalialkion ympäristöjä, jotta voidaan todistaa tulos. Tässä kappaleessa oletetaan, että G on topologinen ryhmä ja U on G:n avoin osajoukko, joka sisältää G:n neutraalialkion e.

Tarkastellaan ensin joukon Ug avoimuutta kun $g \in G$. Tässä kohtaa on järkevää määritellä siirtokuvaukset r_g ja l_g. Oletetaan, että $x \in G$. Nyt $r_g : G \to G, x \mapsto xg$ ja $l_g : G \to G, x \mapsto gx$. Kuvaukset r_g ja l_g ovat jatkuvia topologisen ryhmän määritelmän mukaan. Lisäksi $r_g \circ r_g^{-1} = id = r_g^{-1} \circ r_g$, jolloin r_g on homeomorfismi. Vastaavasti myös l_g on homeomorfismi. Voidaan nyt sanoa joukon Ug olevan avoin, sillä $Ug = r_g(U)$. Samalla myös gU on avoin. Vastaava tulos pätee myös muille G:n avoimille osajoukoille V jotka eivät sisällä neutraalialkiota.

Merkitään seuraavaksi neutraalialkion ympäristöjen kokoelmaa joka muodostaa ympäristökannan merkinnällä $\{U_a\}$. Tällöin jokainen topologisen ryhmän G avoin osajoukko on yhdiste muotoa g_aU_a olevista avoimista joukoista, kun $g_a \in G$ ja $U_a \in \{U_a\}$. Kun kaikki G:n avoimet joukot saadaan näin, niin voidaan sanoa G:n topologian määräytyvän neutraalialkion e ympäristökannan mukaan.

Lause 3. *Olkoon G topologinen ryhmä ja U on G:n neutraalialkion e ympäristö. On olemassa e:n symmetrinen ympäristö W siten, että $W^2 \subset U$.*

Todistus. Olkoon U neutraalialkion ympäristö. Nyt funktion φ jatkuvuudesta seuraa, että on olemassa jokin joukon $G \times G$ neutraalialkion (e, e) ympäristö $V = V_1 \times V_2$, missä $V \subset G \times G$ siten, että $\varphi(V) \subset U$. Myös ympäristöt V_1 ja V_2 ovat neutraalialkion ympäristöjä. Tämän perusteella voidaan valita joukko $W \subset G$ sopivasti siten, että $W = V_1 \cap V_1^{-1} \cap V_2 \cap V_2^{-1}$. Joukon W symmetrisyys seuraa siitä miten joukko W on valittu neutraalialkion ympäristöjen leikkauksista. Oletetaan, että $a \in W$. Seuraukset voidaan kirjoittaa,

$$a \in W \implies a \in V_1 \implies a^{-1} \in V_1^{-1}.$$

Samanlaisella päättelyketjulla saadaan,

$$a \in W \implies a \in V_1^{-1} \implies a^{-1} \in V_1.$$

Seuraavaksi leikkausten ominaisuuksista seuraa, että $a^{-1} \in V_1 \cap V_1^{-1}$. Vastaavalla tavalla saadaan $a^{-1} \in V_2 \cap V_2^{-1}$. Joukko W on täten symmetrinen. Kirjoittamalla vielä auki jos $a \in W$ ja $b \in W$, niin $a \in V_1$ ja $b \in V_2$. Siis $(a, b) \in V_1 \times V_2 = V$ ja $W \times W \subset V$. Tällä tavoin valittuna $W^2 = \varphi(W \times W) \subset \varphi(V) \subset U$.

□

Lause 4. *Olkoon G topologinen ryhmä ja $x \in G$. Jos $x \neq e$, niin neutraalialkoille e on olemassa ympäristö W siten, että $W \cap xW$ on tyhjä joukko.*

Todistus. Topologisten ryhmien ehdon (G3) mukaan neutraalialkiolle e on olemassa ympäristö V_1 johon x ei kuulu, tai alkiolle x on olemassa ympäristö V_2 johon e ei kuulu. Nyt joukon xV_2^{-1} on oltava avoin joukko joka sisältää neutraalialkion, koska tällä tavoin muodostettu joukko sisältää alkion $xx^{-1} = e$ ja joukon avoimuus seuraa aiemmin esiteltyjen siirtokuvausten jatkuvuudesta. Kummassakin tapauksessa saatiin joukot V_1 ja xV_2^{-1} jotka ovat avoimia joukkoja joihin neutraalialkio kuuluu. Täytyy vielä osoittaa, että $x \notin xV_2^{-1}$. Jos $x \in V_2$, niin $x^{-1} \in V_2^{-1}$. Täten V_2 määrittelyn mukaan jos $e \notin V_2$, niin $e \notin V_2^{-1}$. Jos $x \in xV_2^{-1}$, niin neutraalialkion pitäisi kuulua joukkoon V_2^{-1} sillä joukon xV_2^{-1} pitäisi sisältää sisältää alkio $xe = x$. Tämä on ristiriita, joten $x \notin xV_2^{-1}$.

Edellä todettiin, että neutraalialkiolle on oltava avoin ympäristö U, johon x ei kuulu. Nyt lausetta 3 hyödyntämällä voidaan löytää e:n symmetrinen ympäristö W siten, että $W^2 \subset U$. Tarkastelemalla joukkoja $W \cap xW$ huomataan että, jos ne eivät olisi tyhjiä pitäisi olla olemassa alkiot $g_1, g_2 \in W$, joille $g_2 = xg_1$. Nyt kertomalla oikealta g_1:n käänteisalkiolla saadaan $x = g_2 g_1^{-1}$. Tämä tarkoittaa sitä, että alkion x pitäisi kuulua joukkoon $W^2 \subset U$, joka on ristiriita siinä mielessä, että joukko U on e:n ympäristö johon x ei kuulu. Täten joukon $W \cap xW$ on oltava tyhjä.

□

Tulos on tärkeä myöhemmin. Neutraalialkiolle siis löydetään aina jokin ympäristö johon jokin toinen alkio ei kuulu. Tämä tarkoittaa sitä, että mikäli otetaan leikkaus kaikista näistä neutraalialkion ympäristöistä, joukkoon kuuluu vain neutraalialkio itse.

3.6 Ympäristöperhe

Tässä kappaleessa rakennetaan topologisen ryhmän neutraalialkion ympäristöjen avulla sopiva ympäristöperhe siten, että sitä voidaan hyödyntää myöhemmin sopivan metriikan rakentamisessa topologisille ryhmille.

Olkoon G topologinen ryhmä ja joukot $Q_0, Q_1, ...$ neutraalialkion e ympäristöjä. Olkoon Q_0 symmetrinen joukko. Nyt lausetta 3 käyttämällä voidaan löytää neutraalialkiolle e symmetriset avoimet ympäristöt $U_0, U_1, ...$ siten, että $U_0 = Q_0$ ja $U_{n+1}^2 \subset U_n \cap Q_n$, missä $n = 0, 1, ...$

Seuraavaksi hyödynnetään äskeisen kaltaisia neutraalialkion symmetrisiä avoimia ympäristöjä muodostamaan ympäristöperhe V_r, missä $r = \frac{k}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, ...$ ja $k = 1, 2, 3, ..., 2^n$. Tarkastellaan ensin vain osaa ympäristöistä, tarkemmin muotoa $V_{\frac{1}{2^n}}$ olevia. Olkoon nämä ympäristöt määritelty ympäristöjen U_n avulla siten, että $V_{\frac{1}{2^n}} = U_n$. Määritellään parillisilla k:n arvoilla ympäristöt siten, että saadaan vastaavuudet

$$V_{\frac{2k}{2^{n+1}}} = V_{\frac{k}{2^n}}. \tag{1}$$

Tämän muodon avulla saadaan muodostettua kaikki ympäristöt V_r, koska parittomalla osoittajalla varustettu ympäristö voidaan määritellä

$$V_{\frac{2k+1}{2^{n+1}}} = V_{\frac{1}{2^{n+1}}} V_{\frac{k}{2^n}}. \tag{2}$$

Muotoa V_r olevat ympäristöt voidaan siis aina purkaa muotoa $V_{\frac{1}{2^n}}$ oleviksi ympäristöiksi. Näille ympäristöille on olemassa hyödyllinen ominaisuus ja siksi juuri niitä hyödynnetäänkin metriikkaa rakennettaessa. Ominaisuus on se että ympäristöt sisältyvät toisiinsa tavalla, että

$$V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{m}{2^n}} \subset V_{\frac{m+1}{2^n}}, \text{ missä } m+1 \leq 2^n. \tag{3}$$

Tarkastellaan seuraavaksi mistä tämä ominaisuus seuraa. Oletetaan ensin, että $m = 2k$. Nyt purkamalla auki lähtien väitteen (3) vasemmalta puolelta,

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{m}{2^n}} &\overset{m=2k}{=} V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{2k}{2^n}} \\ &\overset{(1)}{=} V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{k}{2^{n-1}}} \\ &\overset{(2)}{=} V_{\frac{2k+1}{2^n}} \\ &= V_{\frac{m+1}{2^n}}. \end{aligned}$$

Tilanteessa, jossa $m = 2k+1$, saadaan

$$\begin{aligned} V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{m}{2^n}} &\overset{m=2k+1}{=} V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{2k+1}{2^n}} \\ &\overset{(2)}{=} V_{\frac{1}{2^n}} (V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{k}{2^{n-1}}}) \\ &\subset V_{\frac{1}{2^{n-1}}} V_{\frac{k}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Samalla sijoituksella sisältyvyyden (3) oikeasta puolesta tulee

$$\begin{aligned} V_{\frac{m+1}{2^n}} &\overset{m=2k+1}{=} V_{\frac{2k+2}{2^n}} \\ &= V_{\frac{k+1}{2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Nyt on osoitettu sisältyvyys parillisille ja parittomille m. Joukot V_r on muodostettu induktiivisesti, joten vielä täytyy tarkastaa päteekö sisältyvyys alkuaskeleella, eli kun $n = 1$. Kiinnitetään $n = 1$, saadaan

$$V_{\frac{1}{2}} V_{\frac{1}{2}} \subset V_{\frac{2}{2}} = V_1.$$

Tämä pitää paikkaansa jo muotoa $V_{\frac{1}{2^n}}$ olevien joukkojen määrittelyn mukaan, sillä joukko $V_{\frac{1}{2}} = U_1$ ja joukko $V_1 = U_0$.

4 Birkhoffin-Kakutanin teoreema

Tutkielman päätuloksena esitellään teoreema joka liittää topologiset ryhmät metrisiin avaruuksiin, sillä pienillä ehdoilla voidaan osoittaa että topologinen ryhmä on metristyvä. Todistuksessa hyödynnetään viime kappaleessa muodostettuja symmetrisiä ympäristöperheitä.

Lause 5. *Jos G on topologinen ryhmä ja sen neutraalialkiolla e on numeroituva ympäristökanta, niin G on metristyvä avaruus.*

Todistus. Ensin täytyy rakentaa järkevä ympäristökanta neutraalialkiolle. Olkoon U_i, missä $i = 1, 2, ...$, neutraalialkion e numeroituva ympäristökanta. Olkoon O_n näistä ympäristöistä muodostuva joukko siten, että $O_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, missä $n = 1, 2, ...,$. Koska O_n on leikkauksista muodostuva joukko, täytyy n kasvaessa O_n ”pienentyä” monotonisesti. Tällä tavoin muodostettuna joukot O_n muodostavat myös ympäristökannan neutraalialkiolle e. Olkoot seuraavaksi V_r ympäristöperhe neutraalialkiolle e samalla tavoin kuin viime kappaleessa. Viime kappaleessa oli lähdetty liikkeelle melko yleisistä avoimista joukoista Q_n joille ei ollut rajoitteita kuin, että Q_0 on oltava symmetrinen. Muodostetaan ympäristöperhe V_r lähtien siitä, että joukkoja Q_n vastaa joukot O_n.

Muodostetaan funktio $f : G \times G \to [0, 1]$, ehdoilla $f(x, y) = 0$ jos ja vain jos $y \in V_r V_r^{-1} x$ kaikilla r. Muuten $f(x, y) = \sup\{r; y \notin V_r V_r^{-1} x\}$. Tällä tavoin määritelty funktio antaa jotakin tietoa siitä kuinka kaukana alkiot ovat toisistaan, vaikka joukoista V_r ei välttämättä tiedettäisikään mitään. Seuraava tärkeä huomio on että joukot $V_r V_r^{-1}$ ovat symmetrisia ja täten $xy^{-1} \in V_r V_r^{-1}$, jos ja vain jos $yx^{-1} \in V_r V_r^{-1}$ kun r on kiinnitetty. Tästä seuraa suoraan se että funktio f on symmetrinen, eli $f(x, y) = f(y, x)$.

Joukot $V_{\frac{1}{2^n}}$ ovat symmetrisiä, joten kuten aiemmassa kappaleessa todettiin $V_{\frac{1}{2^n}} V_{\frac{1}{2^n}}^{-1} = V_{\frac{1}{2^n}}^2 \subset V_{\frac{1}{2^{n-1}}}$. Lisäksi $V_{\frac{1}{2^{n-1}}} \subset O_{n-1}$. Leikkaus kaikista joukoista O_{n-1} on e. Tämä on seurausta topologisten ryhmien määritelmän ehdosta (G3), jonka suora seuraus lause 4 on. Joukot O_n pienenevät monotonisesti, joten kun kaikki joukot O_{n-1} on käyty leikkauksessa läpi ympäristökannan määritelmä kertoo, että leikkausjoukon on oltava neutraalialkio. Tämä siksi, koska neutraalialkiolla on oltava ympäristö johon jokin toinen avaruuden piste ei kuulu. Tiedosta hyödytään edelleen, sillä funktio $f(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$. Tämä voidaan todeta seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&f(x,y)=0\\
&\implies y\in V_rV_r^{-1}x,\ \text{kaikilla } r\\
&\implies y\in V_{\frac{1}{2^n}}V_{\frac{1}{2^n}}^{-1}x,\ \text{kaikilla } n\\
&\implies yx^{-1}\in V_{\frac{1}{2^n}}V_{\frac{1}{2^n}}^{-1}=V_{\frac{1}{2^n}}^2\\
&\subset V_{\frac{1}{2^{n-1}}}\subset O_n.
\end{aligned}
$$

Tästä seuraa, että $yx^{-1}\in O_n$ kaikilla n, jolloin pitäisi päteä $yx^{-1}=e$. Tällöin $x=y$. Jos $x=y$, niin $f(x,y)=0$ seuraa suoraan funktion f määritelmästä, koska $x\in V_rV_r^{-1}x$ kaikilla r.

Alkuvalmisteluista päästään nyt laatimaan metriikkaa. Määritellään metriikkaehdokas d seuraavasti:

$$
d(x,y)=\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(u,y)|
$$

ja varmistetaan että se varmasti täyttää metriikan ehdot.

(M1) Tarkistetaan ensin metriikan ensimmäinen ehto $d(x,y)=d(y,x)$:

$$
\begin{aligned}
d(x,y)&=\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(u,y)|\\
&=\sup_{u\in G}|f(u,x)-f(y,u)|\\
&=\sup_{u\in G}|f(y,u)-f(u,x)|\\
&=d(y,x).
\end{aligned}
$$

Tässä hyödynnettiin funktion f symmetrisyyttä.

(M2) Seuraavaksi kolmioepäyhtälö, eli $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$:

$$
\begin{aligned}
d(x,z)&=\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(u,z)|\\
&=\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(y,u)+f(y,u)-f(u,z)|\\
&=\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(u,y)+f(y,u)-f(u,z)|\\
&\le\sup_{u\in G}|f(x,u)-f(u,y)|+\sup_{u\in G}|f(y,u)-f(u,z)|\\
&=d(x,y)+d(y,z).
\end{aligned}
$$

(M3) Tarkistetaan vielä viimeinen ehto, eli että $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Kun valitaan $u = y$, saadaan epäyhtälöketju

$$d(x, y) = \sup_{u \in G} |f(x, u) - f(u, y)| \geq |f(x, y) - f(y, y)| = f(x, y).$$

Jos siis $d(x, y) = 0$, täytyy $f(x, y) = 0$ ja jos $f(x, y) = 0$ niin $x = y$ aiemmin perustellun ehdon mukaan.

Jos taas $x = y$, niin saman ehdon mukaan $f(x, y) = 0$ ja

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sup_{u \in G} |f(x, u) - f(u, y)| \\ &= \sup_{u \in G} |f(y, u) - f(u, y)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nyt on osoitettu että metriikkaehdokas d täyttää metriikan ehdot. Jäljelle jää osoittaa, että metriikka muodostaa samat avoimet joukot kuin alkuperäinen topologia ryhmässä G. Tämä riittää osoittaa neutraalialkion avoimille joukoille, sillä loput avoimet joukot saadaan G:n siirtokuvausten jatkuvuudesta.

Olkoon $S_{\frac{1}{2^n}}$ joukko kaikista joukon G alkioista joiden etäisyys neutraalialkiosta metriikassa d on pienempi kuin $\frac{1}{2^n}$, eli

$$S_{\frac{1}{2^n}} = B_d(e, \frac{1}{2^n}) = \{x \in G : d(e, x) < \frac{1}{2^n}\}.$$

Aiemmin määritellyille joukoille V_r on voimassa sisältyvyys $V_{\frac{1}{2^{n+1}}} \subset S_{\frac{1}{2^n}}$, koska jos $x \in V_{\frac{1}{2^{n+1}}}$, niin x on metriikan d mukaan enimmillään etäisyydellä $\frac{1}{2^n}$ neutraalialkiosta.

Enää tarvitsee osoittaa, että kuulat $S_{\frac{1}{2^n}}$ muodostavat neutraalialkion ympäristökannan. Olkoon O jokin neutraalialkion ympäristö. Aiemmin määriteltiin joukkojen O_n muodostavan ympäristökannan neutraalialkiolle, joten on olemassa jokin kynnysarvo $k \leq n$ jonka jälkeen ympäristölle $O_n = \bigcap_{i=1}^n U_i$ katkaistuna luvun k kohdalta pätee $O_k = \bigcap_{i=1}^k U_i \subset O$. Nyt metriikan määritelmän mukaan jos $x \in S_{\frac{1}{2^{k+1}}}$, niin $d(e, x) < \frac{1}{2^{k+1}}$ ja täten myös $f(e, x) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Edellisestä seuraa suoraan, että

$$x \in V_{\frac{1}{2^{k+1}}} V_{\frac{1}{2^{k+1}}}^{-1} = V_{\frac{1}{2^{k+1}}}^2 \subset V_{\frac{1}{2^k}} \subset O_k.$$

Päättelyketjun perusteella jos $x \in S_{\frac{1}{2^{k+1}}}$, niin $x \in O_k$ ja täten siis $S_{\frac{1}{2^{k+1}}} \subset O_k$. Tästä seuraa, että kuulat $S_{\frac{1}{2^n}}$ muodostavat neutraalialkion ympäristökannan.

$\square$

Todistuksessa saatiin abstraktiin topologiseen ryhmään G rakennettua neutraalialkiolle e numeroituva ympäristökanta ja että järkevästi muodostetun ympäristökannan avulla saadaan topologiselle ryhmälle aina metriikka.

Viitteet

[1] J. Häsä ja J. Rämö. *Johdatus abstraktiin algebraan*. Gaudeamus Oy. HYY Yhtymä, 2012/2015.

[2] D. Montgomery ja L. Zippin. *Topological Transformation Groups*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1955.

[3] J. Väisälä. *Topologia I*. Limes Ry, 2012.

[4] J. Väisälä. *Topologia II*. Limes Ry, 2005.