HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan laitos

Tekijä — Författare — Author

Riitta Yli-Juuti

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Riccatin yhtälö

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	syyskuu 2012	30

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Työssä tarkastellaan Riccatin yhtälöä, joka on epälineaarinen ensimmäisen asteen differentiaaliyhtälö, jossa termi y esiintyy toiseen korotettuna. Riccatin yhtälöä on ensi kertaa tutkittu jo 1700-luvulla. Sittemmin Riccatin yhtälöllä on havaittu olevan merkittävä rooli differentiaalilaskennan lisäksi muilla matematiikan osa-alueilla, erityisesti variaatiolaskennassa sekä optimaalisessa suodatuksessa ja kontrollissa. Tässä työssäkin esiteltävä Riccatin yhtälön ja toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön yhteys on saanut matemaatikot tutkimaan sitä ahkerasti.

Tässä työssä pääpaino on skalaarimuotoisen Riccatin yhtälön ratkaisemisessa. Työssä esitellään miten tietyt ehdot täyttävä Riccatin yhtälö voidaan sopivalla sijoituksella muuntaa muotoon, joka on helpommin ratkaistavissa. Tarkastellaan myös, miten yhtälö voidaan ratkaista, jos tiedossa on yksi, kaksi tai kolme yksittäisratkaisua. Erityistapauksena tarkastellaan Riccatin yhtälöä, jonka kerroinfunktiot ovat polynomeja.

Yleisen Riccatin yhtälön lisäksi tarkastellaan erästä erikoistapausta, jota kutsutaan Riccatin alkuperäiseksi yhtälöksi. Tämän yhtälön merkittävä ominaisuus on sen yhteys Besselin funktioihin, minkä esitellään yhtälön ratkaisun yhteydessä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Riccatin yhtälö, epälineaarinen differentiaaliyhtälö, yksittäisratkaisu, Besselin funktio

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — övriga uppgifter — Additional information

Riccatin yhtälö

Riitta Yli-Juuti

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä Riccatin yhtälöä ja sen ratkaisemista. Yhtälö on saanut nimensä italialaisen kreivi Jacobo Francesco Riccatin mukaan. Riccati syntyi Venetsiassa vuonna 1676. Hän opiskeli lakia yliopistossa, mutta oli kiinnostunut myös muista aloista. Matematiikan suhteen hän oli itseoppinut, tietonsa hän hankki kirjoista sekä keskustelemalla ja käymällä kirjeenvaihtoa muiden tiedemiesten kanssa. Eräässä kirjeessään Giovanni Rizzetille vuonna 1720 Riccati esitteli kaksi uutta differentiaaliyhtälöä, jotka nykymerkinnöin voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\dot{x} = \alpha x^2 + \beta t^m$$

$$\dot{x} = \alpha x^2 + \beta t + \gamma t^2,$$

jossa m on rationaaliluku ja t riippumaton muuttuja (independent variable). Kirje on todennäköisesti ensimmäinen dokumentti Riccatin yhtälön alkuajoilta. [2]

Riccatin mukaan nimettyä yhtälöä ovat hänen jälkeensä tutkineet monien muiden lisäksi Euler (n. 1760) ja Jacques Liouville (n. 1840). 1900-luvun alkupuolella yhtälö nousi tärkeään rooliin erityisesti variaatiolaskennassa ja 1960-70 -luvuilla optimaalisessa suodatuksessa ja kontrollissa. [2]

Riccatin alunperin esittelemistä yhtälöistä on sittemmin muotoutunut yleisempi muoto

$$y'(x) + P(x)y(x)^2 + Q(x)y(x) = R(x),$$

missä $P(x)$, $Q(x)$ ja $R(x)$ ovat funktioita muuttujanaan x. Tätä yhtälön kutsutaan kirjallisuudessa useasti yleiseksi Riccatin yhtälöksi, tässä työssä yhtälöä kutsutaan pelkästään Riccatin yhtälöksi. Toinen yhtälö, jota tässä työssä tarkastellaan on tässä luvussa ensimmäisenä esitelty yhtälö. Sitä kutsutaan tässä työssä Riccatin alkuperäiseksi yhtälöksi ja se kirjoitetaan muodossa

$$y'(x) + ay(x)^2 = bx^n,$$

jossa a ja b ovat reaaliarvoisia vakioita ja n rationaaliluku.

Tässä työssä esitellään aluksi esitietoina muutamia perustuloksia tavallisista differentiaaliyhtälöistä (Luku 2). Näitä tuloksia ei todisteta, sillä ne kuuluvat differentiaalilaskennan peruskurssin aiheisiin. Riccatin yhtälön käsittely aloitetaan luvussa 3 esittelemällä lyhyesti, missä yhteyksissä kyseinen yhtälö on noussut esiin. Tämän jälkeen tarkastellaan Riccatin yhtälön ratkaisemista. Esitellään, miten sopivalla sijoituksella Riccatin yhtälö voidaan muuntaa lineaariseksi toisen asteen differentiaaliyhtälöksi ja millaisia muunlaisia sijoituksia yhtälön ratkaisemiseksi voidaan käyttää. Luvussa 4 esitellään myös, miten yhtälö voidaan ratkaista, kun tunnetaan yksi, kaksi tai kolme yksittäisratkaisua.

Luvussa 5 pääpaino on Riccatin yhtälön ratkaisemisessa, kun kerroinfunktiot ovat polynomeja. Tämän jälkeen luvussa 6 siirrytään tarkastelemaan alkuperäistä Riccatin yhtälöä ja sen yhteyttä Besselin funktioihin. Tässä yhteydessä ei todisteta Besselin differentiaaliyhtälöön tai funktioihin liittyviä tuloksia, vaan ne otetaan kirjallisuudesta annettuina.

2 Tavalliset differentiaaliyhtälöt

Tässä luvussa kerrataan tavallisiin differentiaaliyhtälöihin ja niiden ratkaisemiseen liittyviä seikkoja. Todistukset sivuutetaan, sillä nämä tiedot kuuluvat perustietoihin differentiaaliyhtälöistä. Lähteenä toimii Helsingin yliopiston Differentiaaliyhtälöt I & II -kurssien luentomateriaali [4] ellei muuta mainita.

Aloitetaan differentiaaliyhtälön määritelmästä

Määritelmä 1. (a) Olkoon F avaruuden $\mathbb{R}^{n+2}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Yhtälöä

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{2}$$

kutsutaan tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi. Differentiaaliyhtälön kertaluku on siinä esiintyvän korkeimman derivaatan kertaluku.

(b) Olkoon f avaruuden $\mathbb{R}^{n+1}$ osajoukossa määritelty annettu reaaliarvoinen funktio. Yhtälö

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{3}$$

on normaalimuotoinen differentiaaliyhtälö.

(c) Vähintään kertalukuun n asti derivoituva yhden reaalimuuttujan funktio $y = y(x) : I \to \mathbb{R}$ on differentiaaliyhtälön (2) ja (3) ratkaisu välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos (2) ja (3) toteutuu kaikissa pisteissä $x \in I$.

(d) Jollain reaalivälillä I määriteltyjen DY:n (2) ja (3) ratkaisujen joukkoa, joka riippuu kertaluvun mukaisesti n:stä vapaasti valittavasta oleellisesta parametrista, kutsutaan kyseisen yhtälön yleiseksi ratkaisuksi välillä I.

Lineaarinen differentiaaliyhtälö määritellään seuraavasti:

Määritelmä 4. Differentiaaliyhtälö on tavallinen n. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö, jos se on muotoa

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = q(x),$$

missä $p_0, \ldots, p_n, q \in C(I)$ ja $I \subset \mathbb{R}$ on väli. Jos differentiaaliyhtälö ei ole lineaarinen, se on epälineaarinen. [7]

2.1 Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöistä

Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleinen muoto on

$$F(x, y, y') = 0,$$

missä $F : A \to \mathbb{R}$ ja $A \subset \mathbb{R}^3$. Sanomme, että yhtälö on normaalimuodossa, jos se on muotoa

$$y' = f(x, y), \tag{5}$$

missä $f : D \to \mathbb{R}$ ja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Määritelmä 6. Funktio y on differentiaaliyhtälön (5) ratkaisu välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$, jos
(1) $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on derivoituva,
(2) $(x, y(x)) \in D$ jokaisella $x \in \Delta$ ja
(3) $y'(x) = f(x, y(x))$ kaikille $x \in \Delta$.

Tarkastellaan seuraavaksi muutamaa eri tyyppistä ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä, jotka liittyvät Riccatin yhtälöiden ratkaisemiseen. Aloitetaan separoituvilla yhtälöillä.

Määritelmä 7. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on separoituva, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = p(x)q(y),$$

jossa $y = y(x)$ on differentiaaliyhtälön tuntematon funktio ja p sekä q ovat tunnettuja yhden muuttujan funktioita.

Separoituvan yhtälön ratkaisemiseksi merkitään $h(y) = 1/q(y)$. Olkoon nyt $H(y) = \int h(y)dy$ ja $P(x) = \int p(x)dx$ jotkin funktioiden h ja p integraalifunktiot. Oletetaan, että $q(y(x)) \neq 0$, jolloin yhdistetyn funktion derivoimis-integroimissäännön nojalla saadaan

$$\begin{aligned} y'(x) = p(x)q(y) \quad &\Leftrightarrow \quad h(y(x))y'(x) = p(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \int h(y(x))y'(x)dx = \int p(x)dx \\ &\Leftrightarrow \quad H(y(x)) = P(x) + C. \end{aligned}$$

Saatu tavallinen yhtälö

$$H(y) = P(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

määrää siis separoituvan yhtälön ratkaisut.

Tarkastellaan seuraavaksi lineaarista ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä. Yhtälö on lineaarinen, jos se on muotoa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \tag{8}$$

Lineaariset ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt voidaan ratkaista integroivan tekijän avulla. Integroiva tekijä on

$$\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right) \tag{9}$$

ja yhtälön (8) ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right), \tag{10}$$

missä $C \in \mathbb{R}$ on jokin vakio.

Eräs erityistapaus epälineaarisesta ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöstä on Bernoullin yhtälö. Se on muotoa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^{\lambda}, \tag{11}$$

jossa λ on reaalinen parametri ja kertoimet p ja q ovat jatkuvia. Kun $\lambda = 0$ tai $\lambda = 1$, yhtälö on lineaarinen, joten oletetaan, että $\lambda \neq 0$ ja $\lambda \neq 1$. Bernoullin yhtälö ratkaisut $y = y(x)$, joissa $y(x) \neq 0$, saadaan yhtälöstä

$$y^{-\lambda}y' + p(x)y^{1-\lambda} = q(x).$$

Tehdään sijoitus

$$z(x) = y(x)^{(1-\lambda)},$$

jolloin Bernoullin yhtälö palautuu ensimmäisen kertaluvun lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi

$$\frac{1}{1-\lambda}z' + p(x)z = q(x).$$

2.2 Toisen kertaluvun lineaarisesta differentiaaliyhtälöstä

Toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yleinen muoto on

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0,$$

missä funktio F on määritelty jossain $\mathbb{R}^4$:n avoimessa osajoukossa. Lineaarisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön standardimuoto on

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x), \tag{12}$$

jossa kerroinfunktiot p, q ja r ovat annettuja ja ne oletetaan jatkuviksi jollain välillä $I \subset \mathbb{R}$. Yhtälöä (12) vastaava homogeeniyhtälö on

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{13}$$

Määritelmä 14. Funktiopari (y_1, y_2) on homogeeniyhtälön (13) perusjärjestelmä välillä I, jos
(1) funktiot y_1 ja y_2 ovat kyseisen funktion ratkaisuja välillä I,
(2) kyseisen yhtälön kaikki ratkaisut välillä I saadaan muodosta

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

joka on siten kaikkien ratkaisujen joukko (yleinen ratkaisu välillä I).

Wronskin determinantin avulla voidaan selvittää, onko funktiopari (y_1, y_2) perusjärjestelmä.

Määritelmä 15. Funktioiden $y_1, y_2 \in C^1(I)$ Wronskin determinantti on funktio $W(y_1, y_2) : I \to \mathbb{R}$,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad \text{kaikilla } x \in I.$$

Lause 16. *Olkoot $p, q \in C(I)$, ja olkoot $y_k : I \to \mathbb{R}, k = 1, 2$, homogeeniyhtälön (13) kaksi ratkaisua. Tällöin pari (y_1, y_2) on kyseisen yhtälön perusjärjestelmä välillä I tasan silloin, kun $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jossakin pisteessä $x_0 \in I$.*

Jos homogeeniyhtälön perusjärjestelmä (y_1, y_2) tunnetaan, epähomogeenisen yhtälön yksittäisratkaisu löytyy niin kutsutulla vakioiden varioinnilla. Menetelmässä lähdetään liikkeelle yritteestä

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x), \tag{17}$$

jossa funktiot c_1 ja c_2 oletetaan ainakin kertaalleen derivoituviksi. Välivaiheiden kautta päädytään tulokseen, jonka mukaan lineaarisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yksittäisratkaisussa (17) esiintyvät funktiot $c_1(x)$ ja $c_2(x)$ saadaan määritettyä seuraavasti:

$$c_1(x) = -\int \frac{r(x)y_2(x)}{W(y_1, y_2)(x)}dx \quad \text{ja} \quad c_2(x) = -\int \frac{r(x)y_1(x)}{W(y_1, y_2)(x)}dx.$$

Tarkastellaan vielä toisen kertaluvun lineaarista differentiaaliyhtälöä

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \tag{18}$$

kuten teoksessa [3] on tehty eli tehdään siihen sijoitus

$$y = f(x)v(x),$$

jossa $v(x)$ on uusi x:stä riippuva muuttuja ja $f(x)$ funktio, jonka voimme vapaasti valita. Sijoituksen jälkeen yhtälö (18) saa muodon

$$fv'' + 2f'v' + f''v + p(fv' + f'v) + qfv = r,$$

joka termien järjestelyn jälkeen saa muodon

$$fv'' + (2f' + pf)v' + (f'' + pf' + qf)v = r. \tag{19}$$

Koska funktio f oli vapaasti valittavissa, valitaan se niin, että termin v kerroin häviää eli

$$f'' + pf' + qf = 0.$$

Tämä tarkoittaa, että f on yhtälöä (18) vastaavan homogeeniyhtälön jokin yksittäisratkaisu. Funktion f valinnan jälkeen yhtälö 19 sievenee muotoon

$$fv'' + (2f' + pf)v' = r.$$

Kun tähän yhtälöön tehdään muuttujanvaihdos $v' = z$, saadaan

$$fz' + (2f' + pf)z = r, \tag{20}$$

joka on lineaarinen ensimmäisen kertaluvun yhtälö. Tehdään vielä oletus, että $f(x) \neq 0$ tarkasteluvälillä, jolloin yhtälö (20) voidaan saattaa muotoon

$$z' + (2\frac{f'}{f} + p)z = \frac{r}{f}.$$

Saatu yhtälö voidaan ratkaista määrittämällä integroiva tekijä (9), jolloin yhtälön ratkaisu z saadaan yhtälön (10) mukaisesti. Kun z tiedetään, voidaan v määrittää yhtälöstä $v' = z$ ja tämän jälkeen y yhtälöstä $y = fv$, missä f siis on yhtälön (18) yksittäisratkaisu.

3 Riccatin yhtälö

Tässä luvussa tutustutaan ensin kahden esimerkin avulla Riccatin yhtälöön, jonka jälkeen esitellään Riccatin yhtälön ja lineaarisen toisen asteen differentiaaliyhtälön yhteys sekä tarkastellaan Riccatin yhtälön ratkaisemista sopivan sijoituksen avulla.

3.1 Mistä Riccatin yhtälöön päädytään

Esimerkki 1.

Differentioi lauseke

$$y = \frac{a(x) + kb(x)}{c(x) + kd(x)}, \tag{21}$$

jossa $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ ja $d(x)$ ovat annettuja funktioita ja k on jokin vakio.
Ratkaisu
Derivoidaan lauseke (21) x:n suhteen, jolloin

$$y' = \frac{(a' + kb')(c + kd) - (a + kb)(c' + kd')}{(c + kd)^2}.$$

Saatu yhtälö voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$y' = \frac{a' + kb'}{c + kd} - \frac{a + kb}{c + kd}\frac{c' + kd'}{c + kd} = \frac{a' + kb'}{c + kd} - y\frac{c' + kd'}{c + kd}. \tag{22}$$

Ratkaistaan k lausekkeesta (21), jolloin saadaan

$$k = -\frac{a - cy}{b - dy}$$

ja samoin lausekkeesta (22), jolloin saadaan

$$k = -\frac{a' - c'y - cy'}{b' - d'y - dy'}.$$

Kun merkitään näillä kahdella tavalla saadut lausekkeet vakiolle k yhtä suuriksi ja kerrotaan ristiin, saadaan

$$(a - cy)(b' - d'y - dy') = (b - dy)(a' - c'y - cy').$$

Muokkaamalla saatua yhtälöä, saadaan

$$(bc - ad)y' + (a'd + bc' - ad' - b'c)y + (cd' - c'd)y^2 = (a'b - ab'). \tag{23}$$

Otetaan käyttöön merkintä $D = bc - ad$ ja oletetaan, että $D \neq 0$, sillä muussa tapauksessa yhtälö (23) sievenisi tavalliseksi toisen asteen yhtälöksi. Otetaan käyttöön myös merkinnät

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{a'd - ad' + bc' - b'c}{D} \\ R(x) &= \frac{cd' - c'd}{D} \\ P(x) &= \frac{a'b - ab'}{D}, \end{aligned}$$

jolloin yhtälö (23) voidaan kirjoittaa muodossa

$$y' + Q(x)y + R(x)y^2 = P(x). \tag{24}$$

Saatua yhtälöä kutsutaan Riccatin yhtälöksi. Havaitaan, että jos Riccatin yhtälössä kerroinfunktio $P(x) = 0$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$, yhtälö sievenee Bernoullin yhtälöksi (11) ja jos kerroinfunktio $R(x) = 0$, kaikilla $x \in \mathbb{R}$, yhtälö palautuu ensimmäisen kertaluvun lineaariseksi differentiaaliyhtälöksi (8). Näin ollen jatkossa oletetaan, että Riccatin yhtälössä (24) kerroinfunktiot $R(x)$ ja $P(x)$ eivät ole identtisesti nollia. Riccatin yhtälöstä huomataan lisäksi, että se on epälineaarinen, koska sitä ei voida kirjoittaa yhtälön (8) muotoon. Myöhemmin osoitetaan, että Riccatin yhtälön yleinen ratkaisu voidaan aina esittää lausekkeen (21) muodossa.

Esimerkki 2.

Itse kreivi Riccati päätyi tarkastelemaan nykyään nimeään kantavaa yhtälöä seuraavanlaisen pulman kautta [2]. Oletetaan, että lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

määrittää suuntavektorin tasossa. Oletetaan lisäksi, että kertoimet w_{ij} ovat vakioita. Riccati pohti, minkälainen yhtälö määrittäisi suuntavektorin kulmakertoimeksi $x = \frac{\beta}{\alpha}$.

Koska annetun yhtälöparin mukaan

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= w_{11}\alpha + w_{12}\beta \\ \dot{\beta} &= w_{21}\alpha + w_{22}\beta, \end{aligned}$$

saadaan x:n derivaatalle lauseke

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{\beta}\alpha - \beta\dot{\alpha}}{\alpha^2} \\ &= \frac{w_{21}\alpha^2 + w_{22}\beta\alpha - w_{11}\beta\alpha - w_{12}\beta^2}{\alpha^2} \\ &= w_{21} + (w_{22} - w_{11})\frac{\beta}{\alpha} - w_{12}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \\ &= w_{21} + (w_{22} - w_{11})x - w_{12}x^2 \end{aligned}$$

Riccati päätyi siis yhtälöön

$$\dot{x} = ax^2 + bx + c,$$

missä $a = -w_{12}$, $b = w_{22} - w_{11}$ ja $c = w_{21}$. Yhtälö on siis muuten sama, kuin (24), mutta kerroinfunktiot ovat nyt vakioita.

3.2 Riccatin yhtälön ja toisen asteen lineaarisen differentiaaliyhtälön yhteys

Syy Riccatin yhtälön merkittävyyteen differentiaaliyhtälöiden teoriassa ja siihen, että yhtälöä on tutkittu paljon, on osaltaan sen yhteys toisen asteen lineaariseen differentiaaliyhtälöön. Alla esitellään tätä yhteyttä lähteen [3] mukaisesti.

Tehdään Riccatin yhtälöön (24) sijoitus

$$y = \frac{u'}{Ru},$$

missä $R = R(x)$ ja $u = u(x)$. Tällöin

$$y' = \frac{u''Ru - (u'R + uR')u'}{(Ru)^2}$$

ja Riccatin yhtälö (24) saa muodon

$$\frac{u''Ru - (u')^2R - uR'u'}{(Ru)^2} + Q\frac{u'}{Ru} + R\left(\frac{u'}{Ru}\right)^2 = P.$$

Saatu yhtälö voidaan kertoa puolittain termillä $(Ru)^2$, jolloin sievennyksen jälkeen saadaan

$$Ru'' - (R' - QR)u' - PR^2u = 0, \tag{25}$$

joka on siis Riccatin yhtälöä vastaava toisen kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Havaitaan, että yhtälö (25) on homogeeninen.

Toisaalta toisen asteen homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = 0, \tag{26}$$

voidaan vastaavasti muuntaa Riccatin yhtälöksi sijoituksella

$$u' = (Ry)u.$$

Tällöin

$$u'' = (Ry)'u + Ryu' = (R'y + Ry')u + Ryu',$$

ja tekemällä sijoitukset yhtälöön (26) sekä sieventämällä saadaan

$$y' + \left(\frac{R'}{R} + \frac{B}{A}\right)y + Ry^2 + \frac{C}{AR} = 0.$$

3.3 Yhtälön ratkaiseminen sijoituksen avulla

Edellisessä kappaleessa esiteltiin sijoitus, jonka avulla Riccatin yhtälö voidaan ratkaista. Usealla muullakin sijoituksella Riccatin yhtälö voidaan saada muunnettua ratkaistavaan muotoon. Tässä luvussa esitellään esimerkinomaisesti pari erilaista sijoitusta.

Raon tapa

Rao esitteli artikkelissaan [11] muuttujanvaihdon, jonka seurauksena Riccatin yhtälö (24) saadaan muunnettua separoituvaan muotoon. Oletetaan, että $P(x)$ on derivoituva ja että $Q(x)$ ja $R(x)$ ovat kahdesti derivoituvia. Lisäksi oletetaan, että $R(x) < 0$. Tehdään Riccatin yhtälöön sijoitus

$$y = uv - \frac{Q}{R}, \tag{27}$$

jolloin $y' = u'v + uv' - Q'R^{-1} + QR^{-2}R'$ ja sievennyksen jälkeen saadaan

$$R^2vu' = W - R^2(v' - Qv)u - R^3v^2u^2, \tag{28}$$

missä $W = PR^2 - QR' + Q'R$.

Tarkastellaan nyt kahta tilannetta, joista toisessa kaikissa tarkasteluvälin pisteissä $W = 0$ ja toisessa $W > 0$

Kun $W = 0$, valitaan v siten, että $v' - Qv = 0$. Tämä differentiaaliyhtälö voidaan separoida, jolloin saadaan sen eräs yksittäisratkaisu

$$v = e^{\int Qdx}.$$

Koska $W = 0$ ja $v' - Qv = 0$, yhtälö (28) saa sievennetyn muodon

$$u' = -Rvu^2,$$

joka voidaan myös separoida, jolloin ratkaisuksi saadaan

$$u = \frac{1}{\int Rvdx} = \frac{1}{\int Re^{\int Qdx}dx}.$$

Kun $W > 0$, valitaan v siten, että $-R^3v^2 = W$ eli

$$v = W^{1/2}(-R)^{3/2}. \tag{29}$$

Sijoittamalla v ja sen derivaatta v' ja yhtälöön (28), saadaan

$$u' = \left(\frac{-W}{R}\right)^{1/2}\left(1 - Ku + u^2\right), \tag{30}$$

missä

$$K = \frac{-RW' + (3R' + 2RQ)W}{2(-R)^{1/2}W^{3/2}}. \tag{31}$$

Saatu yhtälö (30) on myös Riccatin yhtälö, joka voidaan separoida, jos se saadaan muunnettua yhtälön (7) mukaisesti muotoon $u'(x) = p(x)q(u)$. Tämä voidaan tehdä silloin, kun K on vakio. Jos siis lauseke (31) saa vakioarvon, voidaan Riccatin yhtälö ratkaista määrittämällä u yhtälöstä (30) ja v yhtälöstä (29) ja tämän jälkeen käyttää tehtyä sijoitusta (27) ratkaisun määrittämiseksi.

Esimerkki 1.

Ratkaise Riccatin yhtälö

$$y' - 2y - e^{-2x}y^2 = e^{2x}$$

Ratkaisu:

Tehtävän yhtälössä $P = e^{2x}$, $Q = -2$ ja $R = -e^{-2x}$. Ehto $R(x) < 0$ toteutuu. Määritetään ensin W:

$$W = PR^2 - QR' + Q'R = 5e^{-2x}.$$

Lauseke (31) saa vakioarvon, sillä

$$\frac{-RW' + (3R' + 2RQ)W}{2(-R)^{1/2}W^{3/2}} = \frac{4}{5^{1/2}}.$$

Näin ollen tehtävän Riccatin yhtälö voidaan ratkaista sijoittamalla vaaditut muuttujat yhtälöön (30) ja separoida se. Merkitään vielä $a = 5^{1/2}$, jolloin uusi yhtälö on

$$u' = a\left(1 - \frac{4}{a}u + u^2\right).$$

Kirjoitetaan saatu yhtälö separoidussa muodossa

$$\int \frac{du}{u^2 - \frac{4}{a} + 1} = \int a dx.$$

Oikea puoli on helppo integroida ja vasemman puolenkin tulos saadaan suoraan taulukosta (esim. [15]), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a\tan^{-1}(au - 2) &= ax + C_1 \\ u &= \frac{\tan(x + C) + 2}{a}, \end{aligned}$$

missä C_1 ja C ovat vakioita.

Nyt täytyy vielä määrittää v:

$$v = W^{1/2}(-R)^{-3/2} = 5^{1/2}e^{2x} = ae^{2x},$$

jonka jälkeen saadaan määritettyä alkuperäisen yhtälön ratkaisu y:

$$\begin{aligned} y &= uv - \frac{Q}{R} \\ &= \frac{\tan(x + C) + 2}{a}ae^{2x} - \frac{-2}{-e^{-2x}} \\ &= e^{2x}\tan(x + C). \end{aligned}$$

Allenin ja Steinin tapa

Allen ja Stein esittivät artikkelissaan [1] toisen muunnoksen, jonka avulla Riccatin yhtälö muuntuu separoituvaksi. Heidän muunnoksessaan ei vaadita yhtä paljon kerroinfunktioiden derivoituvuudesta eikä siinä tarvitse määritellä samalla lailla riippuvaa muutujaa, kuten Raon tavassa määriteltiin muuttuja v.

Tässä tavassa Riccatin yhtälöön (24) tehdään sijoitus

$$y = \sqrt{-\frac{P}{R}}u,$$

jolloin

$$y' = \frac{1}{2}\left(-\frac{P}{R}\right)^{-1/2}\left(\frac{PR' - P'R}{R^2}\right)u + \left(-\frac{P}{R}\right)^{1/2}u'.$$

Sijoittamalla y ja y' Riccatin yhtälöön $y' + Qy + Ry^2 = P$, saadaan

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{P}{R}\right)^{-1/2}\left(\frac{PR' - P'R}{R^2}\right)u + \left(-\frac{P}{R}\right)^{1/2}u' + Q\left(-\frac{P}{R}\right)^{1/2}u - Pu^2 = P.$$

Kertomalla saatu yhtälö puolittain termillä $(-P/R)^{-1/2}$, saadaan

$$u' + \frac{1}{2}\left(\frac{P'}{P} - \frac{R'}{R}\right)u + Qu - (-PR)^{1/2}u^2 = (-PR)^{1/2}.$$

Näin ollen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} u' &= \sqrt{-PR} + \left(\frac{R'}{2R} - \frac{P'}{2P} - Q\right)u + \sqrt{-PR}u^2 \\ &= \sqrt{-PR}\left(1 + Cu + u^2\right), \end{aligned}$$

missä

$$C = \frac{R'/2R - P'/2P - Q}{\sqrt{-PR}},$$

Vastaavasti kuin Raon tavassa, saatu yhtälö on separoituva, jos termin u kerroin on vakio eli, jos C on vakio. Tässä muunnoksessa vaaditaan siis, että $P(x)$ ja $R(x)$ ovat kertaalleen derivoituvia. Vaatimukset ovat kevyemmät kuin Raon tavassa, jossa vaadittiin, että $P(x)$ on kertaalleen ja $Q(x)$ sekä $R(x)$ kahdesti derivoituvia. Lisäksi kun Raon tavassa vaadittiin, että $R(x) < 0$, Allenin ja Steinin tavassa riittää, että $PR < 0$, jolloin $\sqrt{-PR}$ on määritelty.

Haaheimin ja Steinin tapa

Esitellään vielä kolmas tapa määrittää Riccatin yhtälön ratkaisu muunnoksen avulla. Luvussa 3.2 esiteltiin traditionaalinen tapa muuntaa Riccatin yhtälö toisen asteen differentiaaliyhtälöksi. Tässä tavassa Riccatin yhtälöön tehtiin sijoitus $y = u'/Ru$ ja vastaavaksi toisen asteen yhtälöksi saatiin

$$u'' - \left(\frac{R'}{R} - Q\right)u' - PRu = 0.$$

Sugai esitteli artikkelissaan [12] toisen tavan, jossa Riccatin yhtälöön tehdään sijoitus $y = Pu/u'$. Tällöin Riccatin yhtälö muuntuu toisen asteen differentiaaliyhtälöksi

$$u'' - \left(\frac{P'}{P} + Q\right) u' - RPu = 0.$$

Sugai myös osoitti, että kumpikin edellä mainituista sijoituksista voidaan kehittää tekemällä Riccatin yhtälöön sijoitus

$$y = \frac{uf}{g}, \tag{32}$$

missä u, f ja g ovat funktioita muuttujanaan x. Tämän sijoituksen jälkeen Riccatin yhtälö saa muodon

$$\underset{1}{u'fg} + \underset{2}{uf'g} - \underset{3}{ufg'} + \underset{4}{Qufg} + \underset{5}{Ru^2f^2} - \underset{6}{Pg^2} = 0. \tag{33}$$

Yhtälön alle merkityt numerot viittaavat termin järjestysnumeroon. Nyt huomataan, että funktioiden f ja g derivaatat esiintyvät termeissä 2 ja 3. Oletetaan nyt, että termien 3 ja 5 summaksi tulee nolla, eli $ufg' = Ru^2f^2$, jolloin

$$f = \frac{g'}{Ru}$$

ja edelleen

$$y = \frac{uf}{g} = \frac{g'}{gR},$$

jolloin ollaan siis saatu traditionaalinen muunnos.

Jos taas merkitään yhtälössä (34) termien 2 ja 6 summa nollaksi eli $uf'g = Pg^2$, saadaan

$$g = \frac{uf'}{P}$$

ja edelleen

$$y = \frac{Pf}{f'},$$

joka on yhtenevä Sugain esittämän muunnoksen kanssa.

Sugain motiivina tutkia näitä kahta samantyyppistä, mutta kuitenkin erilaista muunnosta, oli niiden erot korkeamman asteen epälineaaristen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa [12]. Haaheim ja Stein jatkoivat Sugain esittämän muunnoksen tutkimista Riccatin yhtälön ratkaisemiseksi artikkelissaan [5]. Heidän metodissaan otetaan käyttöön merkintä $\{a, b\}$, joka tarkoittaa, että yhtälössä (34) termien numeroiltaan a ja b summa on nolla. Näin ilmaistuna tapaukset $\{3, 5\}$ ja $\{2, 6\}$ on jo käsitelty. Jatkossa käsitellään myös tilanteita, joissa useamman termin summa on nolla, silloin käytetään merkintöjä $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$ jne. Kaikki $\{a, b\}$-yhdistelmät eivät johda mielekkääseen lopputulokseen, mutta jotkut niistä johtavat melko yksinkertaisiin testeihin, joiden avulla voidaan selvittää onko kyseinen Riccatin yhtälö ratkaistavissa jollakin tietyllä metodilla. [5]

Tarkastellaan ensin tapausta $\{4,5\}$, eli $Qufg + Ru^2f^2 = 0$, josta saadaan, että

$$\begin{aligned} \frac{uf}{g} &= -\frac{Q}{R}, \quad \text{eli} \\ y &= -\frac{Q}{R} \quad \text{ja} \quad y' = -\frac{Q'R - QR'}{R^2}. \end{aligned}$$

Kun sijoitetaan y:lle ja y':lle saadut lausekkeet Riccatin yhtälöön (24), saadaan

$$\begin{aligned} P &= -\frac{Q'R - QR'}{R^2} - Q\frac{Q}{R} + R\frac{Q^2}{R^2} \\ P &= -\frac{Q'R - QR'}{R^2} \\ P &= -\left(\frac{Q}{R}\right)'. \end{aligned} \tag{34}$$

On siis näytetty, että jos Riccatin yhtälön kerroinfunktiot toteuttavat yhtälön (34), tällöin Riccatin yhtälöllä on yksittäisratkaisuna $y = -Q/R$. Jonkin yksittäisratkaisun löytäminen on hyödyllistä yleisen ratkaisun määrittämisessä, kuten seuraavassa luvussa huomataan.

Seuraavaksi tarkastellaan tilannetta $\{1,4,6\}$, eli $u'fg + Qufg - Pg^2 = 0$. Saadusta yhtälöstä ratkaistaan f, joka sijoitetaan yhtälöön (32) ja saadaan

$$y = \frac{Pu}{u' + Qu}. \tag{35}$$

Tämä muuttujanvaihto muuntaa Riccatin yhtälön toisen asteen lineaariseksi homogeeniseksi yhtälöksi $u'' + (Q - P'/P)u' + P(Q' - PR - P'Q/P)u = 0$, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$u'' + \left(Q - \frac{P'}{P}\right)u' + P\left(\left(\frac{Q}{P}\right)' - R\right)u = 0.$$

Havaitaan, että jos saadussa yhtälössä $R = (Q/P)'$, yhtälö on ensimmäisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö derivaatalle u' ja täten ratkaistavissa. Siis jokainen Riccatin yhtälö, joka on muotoa

$$y' + Qy + \left(\frac{Q}{P}\right)' y^2 = P \tag{36}$$

voidaan ratkaista tekemällä Riccatin yhtälöön muuttujanvaihto (35).

Muutkin yhdistelmät, kuin $\{1,4,6\}$ johtavat yhtälöön (36). Tällaisia yhdistelmiä ovat myös $\{2,4,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,3,4,6\}$ ja $\{2,3,4,6\}$. Jokainen näistä yhtälöistä sisältävät yhtälön (34) termit 4 ja 6. Kun ratkaistaan u yhtälöstä $\{4,6\}$ eli yhtälöstä $Qufg - Pg^2$ ja sijoitetaan se yhtälöön (32), saadaan

$$y = \frac{P}{Q}.$$

Sijoittamalla y:lle saatu lauseke yhtälöön (36) havaitaan, että se toteuttaa yhtälön. Näin ollen $y = P/Q$ on yhtälön (36) yksittäisratkaisu.

4 Riccatin yhtälön yleisen ratkaisun määrittäminen yksittäisratkaisujen avulla

Sijoituksen lisäksi Riccatin yhtälö voidaan ratkaista, kun tiedetään yksittäisratkaisu tai yksittäisratkaisuja. Seuraavassa esitellään ratkaisun määrittäminen, kun tiedetään yksi, kaksi tai kolme yksittäisratkaisua.

4.1 Tiedossa yksi yksittäisratkaisu

Riccatin yhtälö voidaan ratkaista, kun tiedossa on yksi yksittäisratkaisua, tarkastellaan tätä tilannetta teoksen [10] tavalla.

Oletetaan, että y_1 on Riccatin yhtälön (24) yksittäisratkaisu. Edellä on esitelty, kuinka sijoituksen avulla Riccatin yhtälö saadaan muunnettua lineaariseksi toisen asteen differentiaaliyhtälöksi. Riccatin yhtälön sekä sitä vastaavan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön yksittäisratkaisujen välillä on siis yhteys

$$y_1 = \frac{u_1'}{Ru_1}. \tag{37}$$

Koska u_1 on homogeenisen yhtälön (25) yksittäisratkaisu, toinen yksittäisratkaisu yhtälölle saadaan luvussa 2 esitetyn mukaisesti muodossa:

$$u(x) = u_1(x)\sigma(x), \tag{38}$$

missä $\sigma(x)$ on tuntematon funktio muuttujanaan x. Derivoimalla (38) saadaan

$$u' = u_1'\sigma + u_1\sigma'.$$

Saatu yhtälö jaetaan termillä $u_1\sigma$, jolloin

$$\frac{u'}{u_1\sigma} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{\sigma'}{\sigma} \quad \text{eli}$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{\sigma'}{\sigma}. \tag{39}$$

Kun yhdistetään yhtälöt (37), (38) ja (39) saadaan

$$y = y_1 + \frac{\sigma'}{R\sigma}. \tag{40}$$

Yhtälön (40) muodon perusteella tehdään muuttujanvaihdos

$$y = y_1 + t,$$

jossa $t = t(x)$. Tehdään muuttujanvaihdos Riccatin yhtälöön (24), jolloin

$$y_1' + t' + Q(x)y_1 + Q(x)t + R(x)y_1^2 + 2R(x)y_1t + R(x)t^2 = P(x).$$

Koska y_1 on Riccatin yhtälön yksittäisratkaisu, saatu yhtälö sievenee muotoon

$$t' + (Q(x) + 2R(x)y_1)t = -R(x)t^2,$$

joka on Bernoullin yhtälö. Jaetaan vielä yhtälö t^2:lla, jolloin saadaan

$$\frac{t'}{t^2} + (Q(x) + 2R(x)y_1)\frac{1}{t} = -R(x).$$

Luvussa 2 esiteltiin Bernoullin yhtälöä. Toimitaan samalla lailla kuin aiemmin yhtälön (11) tapauksessa eli tehdään sijoitus

$$v = \frac{1}{t},$$

jolloin

$$v' = -\frac{t'}{t^2}.$$

Sijoittamalla nämä edellä olevaan Bernoullin yhtälöön ja sieventämällä, saadaan

$$v' - (Q(x) + 2R(x)y_1)v = R(x).$$

Saatu yhtälö on ensimmäisen asteen lineaarinen differentiaaliyhtälö, joka voidaan ratkaista määrittämällä integroiva tekijä ja sen jälkeen yleinen ratkaisu, kuten luvussa 2 on esitetty.

Tarkastellaan seuraavaksi esimerkkiä, joka on otettu lähteestä [13]

Esimerkki 1.

Ratkaise Riccatin yhtälö

$$y' + y^2 = \frac{2}{x^2}. \tag{41}$$

Ratkaisu

Selvitetään ensin jokin yksittäisratkaisu. Se voidaan löytää arvaamalla tai kokeilemalla sopivan muotoisella yritteellä. Tehdään yrite $y = \frac{c}{x}$, jolloin $y' = -\frac{c}{x^2}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön (41), jolloin saadaan

$$-\frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} = \frac{2}{x^2}.$$

Yritteemme toteuttaa siis annetun yhtälön kaikilla $x \in \mathbb{R}$, kun $c^2 - c - 2 = 0$ eli kun $c = -1$ tai $c = 2$. Koska tarvitsemme vain yhden yksittäisratkaisun, valitsemme $c = 2$. Tehdään nyt yhtälöön (41) muuttujanvaihdos $y = y_1 + t$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} y_1' + t' + y_1^2 + 2y_1 t + t^2 &= \frac{2}{x^2}, \\ t' + 2y_1 t &= -t^2, \\ t' + \frac{4}{x}t &= -t^2, \\ \frac{t'}{t^2} + \frac{4}{x}\frac{1}{t} &= -1. \end{aligned}$$

Saatu yhtälö on Bernoullin yhtälö. Kuten edelläkin, tehdään sijoitus $v = \frac{1}{t}$, jolloin saadaan

$$v' - \frac{4}{x}v = 1. \tag{42}$$

Saatu yhtälö on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen yhtälö, jossa $p(x) = -\frac{4}{x}$ ja $q(x) = -1$. Yleinen ratkaisu y yhtälölle saadaan kaavalla (10):

$$v(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)dx + C\right),$$

jossa μ on integroiva tekijä, joka saadaan yhtälöstä (9)

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{4}{x}dx} = e^{-4\ln|x|} = |x|^{-4} = x^{-4}.$$

Yleinen ratkaisu yhtälölle (42) on siis

$$v(x) = x^4\left(\int x^{-4}\cdot 1dx + C\right) = x^4\left(\frac{1}{3}x^{-3} + C\right) = -\frac{x}{3} + Cx^4.$$

Jotta saadaan alkuperäisen Riccatin yhtälön ratkaisu, täytyy vielä tehdä muuttujanvaihdot toiseen suuntaan. Koska $v = 1/t$, saadaan

$$t(x) = \frac{1}{v(x)} = \frac{1}{-\frac{x}{3} + Cx^4} = \frac{3}{3Cx^4 - x} = \frac{3}{(3Cx^3 - 1)x}.$$

Ja edelleen, koska $y = y_1 + t$, saadaan yleiseksi ratkaisuksi

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{(3Cx^3 - 1)x} = \frac{2(3Cx^3 - 1) + 3}{x(3Cx^3 - 1)} = \frac{6Cx^3 + 1}{x(3Cx^3 - 1)} = \frac{2C_1x^3 + 1}{x(C_1x^3 - 1)},$$

missä viimeisessä muodossa $C_1 = 3C$.

Tarkastellaan vielä jatkon erästä jatkon kannalta tärkeää Riccatin yhtälön ratkaisemiseen liittyvää seikkaa, jota sivuttiin jo luvussa 3.1.

Lause 43. *Riccatin yhtälön $y' + Q(x)y(x) + R(x)y(x)^2 = P(x)$ yleinen ratkaisu voidaan aina esittää muodossa*

$$y = \frac{bf_1(x) + f_2(x)}{bf_3(x) + f_4(x)}, \tag{44}$$

jossa b on vakio ja $f_i(x), i = 1, 2, 3, 4$, sopivia funktioita.

Todistus. Riccatin yhtälöä vastaava toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on homogeeninen, joten sen ratkaisu voidaan Määritelmän 14 mukaan esittää muodossa $u = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, missä u_1 ja u_2 ovat kyseisen differentiaaliyhtälön jokin perusjärjestelmä ja c_1 ja c_2 vakioita. Tällöin $u' = c_1u_1'(x) + c_2u_2'(x)$ ja sijoittamalla nämä yhtälöön (37) saadaan

$$y = \frac{u'}{Ru} = \frac{c_1u_1' + c_2u_2'}{R(c_1u_1 + c_2u_2)} = \frac{bu_1' + u_2'}{bRu_1 + Ru_2},$$

missä $b = \frac{c_1}{c_2}$. Saatu muoto on yhtenevä yhtälön (44) kanssa, kun merkitään $u_1' = f_1$, $u_2' = f_2$, $Ru_1 = f_3$ ja $Ru_2 = f_4$. □

4.2 Tiedossa kaksi yksittäisratkaisua

Tarkastellaan Riccatin yhtälön ratkaisemista, kun tiedossa on kaksi yksittäisratkaisua kuten teoksessa [14] on tehty.

Olkoon nyt y_0 ja y_1 Riccatin yhtälön kaksi yksittäisratkaisua. Tehdään Riccatin yhtälöön sijoitus

$$w = \frac{y - y_0}{y - y_1} \Leftrightarrow y = \frac{y_1 w - y_0}{w - 1}.$$

Määritetään seuraavaksi y'. Derivaatan määrittämiseksi jaetaan y:n lauseke kahteen osaan ja suoritetaan derivointi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1 w}{w-1} - \frac{y_0}{w-1}\right) &= \frac{(y_1 w' + y_1' w) - y_1 w w'}{(w-1)^2} - \frac{y_0'(w-1) - y_0 w'}{(w-1)^2} \\ &= \frac{y_0 - y_1}{(w-1)^2} w' + \frac{w}{w-1} w' - \frac{1}{w-1} y_0'. \end{aligned}$$

Kun saadut lausekkeet sijoitetaan Riccatin yhtälöön, saadaan

$$\frac{y_0 - y_1}{(w-1)^2} w' + \frac{w}{w-1} y_1' - \frac{1}{w-1} y_0' = P + Q \frac{y_1 w - y_0}{w-1} + R\left(\frac{y_1 w - y_0}{w-1}\right)^2.$$

Koska y_0 ja y_1 ovat Riccatin yhtälön yksittäisratkaisuja, voidaan saatuun yhtälöön sijoittaa niiden derivaatat

$$y_0' = P + Q y_0 + R y_0^2 \quad \text{ja} \quad y_1' = P + Q y_1 + R y_1^2.$$

Tehdään sijoitukset, kerrotaan yhtälö puolittain termillä $(w-1)^2$ ja sievennetään, jolloin saadaan yhtälö

$$y_0 - y_1 w' = R w (y_0 - y_1)^2.$$

Koska y_0 ja y_1 ovat yksittäisratkaisuja, $y_0 - y_1 \neq 0$, joten saatu yhtälö voidaan jakaa puolittain termillä $y_0 - y_1$, jolloin saadaan

$$\frac{1}{w} w' = R(y_0 - y_1).$$

Saatu yhtälö on separoituva, joten se voidaan integroida puolittain, jolloin saadaan

$$w = c e^{\int R(y_0 - y_1) dx},$$

missä c on itegrointivakio.

4.3 Tiedossa kolme yksittäisratkaisua

Jos tiedetään Riccatin yhtälön kolme yksittäisratkaisua, voidaan yleinen ratkaisu määrittää kaksoissuhteen avulla. Menetelmää tarkastellaan teoksen [3] mukaisesti. Kaksoissuhde liittyy projektiiviseen (projective) geometriaan, funktioteoriaan (theory of functions) ja muihin matematiikan osa-alueisiin. Ennen kuin käsitellään Riccatin yhtälön ratkaisemista, muotoillaan määritelmä kaksoissuhteelle.

Määritelmä 45. Neljän suureen kaksoissuhde (y_1, y_2, y_3, y_4) on

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} \cdot \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3}.$$

Seuraavaksi osoitetaan, että neljän Riccatin yhtälön yksittäisratkaisun kaksoissuhde on vakio. Tulos on merkityksellinen myös sen kannalta, että sen avulla pystytään muotoilemaan Riccatin yhtälön yleinen ratkaisu, kun tiedetään kolme yksittäisratkaisua.

Lause 46. *Jos y_1, y_2, y_3 ja y_4 ovat Riccatin yhtälön* (24) *ratkaisuja, niin niiden muodostama kaksoissuhde on vakio.*

Todistus. Lauseen 43 mukaan Riccatin yhtälön yleinen ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$y = \frac{bf_1(x) + f_2(x)}{bf_3(x) + f_4(x)}.$$

Tarkastellaan nyt neljää yksittäisratkaisua y_1, y_2, y_3 ja y_4, jotka ovat lineaarisesti riippumattomia ja jotka voidaan määrittää yllä olevan perusteellaa siten, että

$$y_i = \frac{b_i f_1(x) + f_2(x)}{b_i f_3(x) + f_4(x)},$$

missä b_i on kyseistä yksittäisratkaisua vastaava vakio. Merkitään $G_i = b_i f_3 + f_4$ ja lasketaan $y_i - y_j$, jota tarvitsemme kaksoissuhteen määrittämiseen:

$$y_i - y_j = \frac{b_i f_1 + f_2}{b_i f_3 + f_4} - \frac{b_j f_1 + f_2}{b_j f_3 + f_4} = \frac{(b_i - b_j)(f_1 f_4 - f_3 f_2)}{G_i G_j}.$$

Käyttämällä tätä tulosta saadaan kaksoissuhde määritettyä

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{(y_1 - y_3)(y_2 - y_4)}{(y_1 - y_4)(y_2 - y_3)} = \frac{(b_1 - b_2)(b_2 - b_4)}{(b_1 - b_4)(b_2 - b_3)}.$$

Koska b_1, b_2, b_3 ja b_4 ovat vakioita, myös Riccatin yhtälön neljän lineaarisesti riippumattoman yksittäisratkaisun kaksoissuhde on vakio. □

Näin ollen Riccatin yhtälön yleinen ratkaisu saadaan yhtälöstä

$$\frac{y - y_3}{y - y_4} \cdot \frac{y_2 - y_4}{y_2 - y_3} = c,$$

jossa c on jokin vakio ja y_1, y_2 ja y_3 ovat Riccatin yhtälön yksittäisratkaisuja.

5 Esimerkkejä ratkaisun määrittämisestä erilaisilla kerroinfunktioilla

Tässä luvussa käsitellään ensin lyhyesti jo luvussa 3.1 esitellyn Riccatin itsensä pohdinnan tuloksena syntyneen yhtälön ratkaiseminen. Pääpaino luvussa on kuitenkin sellaisen Riccatin yhtälön ratkaisemisessa, jonka kerroinfunktiot ovat polynomeja.

5.1 Kerroinfunktiot vakioita

Kun Riccatin yhtälössä kerroinfunktiot ovat vakioita, eli yhtälö on muotoa

$$y' = ay(x) + by(x)^2 + c, \tag{47}$$

missä a, b ja c ovat vakioita, yhtälö on separoituva. Tällöin yhtälössä voidaan termit järjestellä uudestaan ja integroida puolittain:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= ay + by^2 + c \\ \frac{dy}{by^2 + ay + c} &= dx \\ \int \frac{1}{ay + by^2 + c} dy &= \int dx. \end{aligned}$$

Saatu yhtälö voidaan ratkaista helposti, vasemman puolen ratkaisemiseen voidaan käyttää suoraan taulukosta löytyvää ratkaisua (esim. [15]).

5.2 Kerroinfunktiot polynomeja

Edellä on todettu, että Riccatin yhtälön ratkaisemiseksi tiedossa pitää olla aina jokin yksittäisratkaisu. Yksittäisratkaisu voidaan löytää kokeilemalla, mutta tämä saattaa olla työlästä. Riccatin yhtälön kertoimista riippuu, minkälaisessa muodossa yksittäisratkaisua kannattaa lähteä etsimään. Erityyppisille Riccatin yhtälöille on kirjallisuudessa esitetty erilaisia lähtökohtia yksittäisratkaisun etsinnälle. Seuraavaksi tarkastellaan Riccatin yhtälöä, jossa kerroinfunktiot ovat polynomeja. Tällöin tuntuu luonnolliselta lähteä etsimään yksittäisratkaisuakin polynomimuodossa, mutta jotta vältyttäisiin satunnaiselta kokeilemiselta, etsitään metodi, jonka rajaa testattavien polynomien määrää.

Vuonna 1954 J.G.Campbell ja Michael Colomb esittivät ehdot ratkaisujen olemassaololle sekä algoritmin ratkaisujen löytämiselle Riccatin yhtälölle, joka on muotoa

$$Ay' = B_0 + B_1 + B_2 y^2,$$

missä A, B_0, B_1 ja B_2 ovat polynomeja muuttujanaan x. Tässä työssä tarkastellaan erästä erityistapausta, eli yhtälöä

$$u' = B_0 + B_1 u + u^2, \tag{48}$$

jossa B_0 ja B_1 ovat polynomeja muuttujanaan x. Havaitaan, että yksittäisratkaisun löytämiseksi riittää kokeilla vain kahta hyvin määriteltyä polynomia ja että näiden polynomien lisäksi ei ole muita polynomiratkaisuja. Tarkastelu suoritetaan kuten teoksessa [10].

Yhtälön (48) ratkaisemisessa tulee tarpeelliseksi määrittää jonkin polynomin $P(x)$ neliöjuuri. Tämä määritetään kehittämällä $\sqrt{P(x)}$ laskevaksi potenssisarjaksi. Tässä työssä määrittämiseen käytetään menetelmää, joka on lyhyesti esitelty lähteessä [10] ja tarkemmin lähteessä [9]. Kyseinen menetelmän käyttö edellyttää, että juurrettavan polynomin ensimmäisen termin kerroin on positiivinen ja eksponentti parillinen. Tarkastellaan tätä menetelmää esimerkin avulla.

Esimerkki 1.

Määritä polynomin $x^6 - 4x^4 + 10x^2 - 4$ neliöjuuri laskevana potenssisarjana.

Ratkaisu

Ratkaisu esitetään lähteessä [9] esitetyllä tavalla. Juuren ensimmäinen termi saadaan ottamalla neliöjuuri juurrettavan ensimmäisestä termistä. Tässä tapauksessa $\sqrt{x^6} = x^3$.

Seuraavaksi tarkastellaan lauseketta $-4x^4 + 10x^2 - 4$. Juuren toinen termi saadaan jakamalla tämän lausekkeen ensimmäinen termi juuren ensimmäisellä termillä eli $\frac{-4x^4}{2x^3} = -2x$.

Juuren kolmatta termiä määritettäessä tarkastellaan lauseketta $14x^2 - 4$, missä $14x^2 = 10x^2 - 2 \cdot (-2x)$. Tehdään samalla lailla kuin edellisessä kohdassa, jolloin saadaan $\frac{14x^2}{2x^3} = 7x^{-1}$.

Laskutoimitusta voitaisiin jatkaa vielä pidemmälle, mutta se ei ole jatkon kannalta tarpeellista. On siis saatu tulos $\sqrt{x^6 - 4x^4 + 10x^2 - 4} = x^3 - 2x + 7x^{-1} + \ldots$.

Muotoillaan nyt edellä esitetyn pohjalta seuraavanlainen määritelmä

Määritelmä 49. Olkoon $P(x)$ polynomi, jonka asteluku on parillinen. Merkinnällä $[\sqrt{P(x)}]$ tarkoitetaan lausekkeen $\sqrt{P(x)}$ x:n suhteen kehitetyn laskevan potenssisarjan polynomiosaa.

Esimerkki 2.

Esimerkin 1 tapauksessa $[\sqrt{P(x)}] = x^3 - 2x$.

Seuraavaksi tarkastellaan Riccatin yhtälöä, jonka kerroinfunktiot ovat polynomeja. Aloitetaan yksinkertaistetun yhtälön tarkastelulla.

Lause 50. *Jos yhtälössä*

$$u' = B_0 + u^2 \tag{51}$$

polynomin $B_0(x)$ asteluku on parillinen, ainoastaan polynomit

$$u = \pm[\sqrt{-B_0}]$$

voivat olla yhtälön (51) *ratkaisuja. Jos polynomin B_0 asteluku on pariton, yhtälöllä* (51) *ei ole polynomiratkaisuja.*

Todistus. Olkoon polynomin B_0 asteluku parillinen ja merkitään

$$S = [\sqrt{-B_0}].$$

Koska S on laskevaksi potenssisarjaksi kehitetyn lausekkeen $\sqrt{-B_0}$ polynomiosa, määritellään lisäksi lauseke Q siten, että

$$-B_0 = S^2 + Q.$$

Lauseke Q on siis myös potenssisarja, mutta tämän sarjan korkein potenssi on pienempi kuin polynomin S asteluku. Nyt yhtälö (51) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u' = (u - S)(u + S) - Q. \tag{52}$$

Olkoon u polynomi muuttujanaan x. Nyt on oltava $u = S$ tai $u = -S$, sillä jos näin ei ole, yhtälön (52) oikea puolen asteluku on vähintään yhtä suuri, kuin polynomien u ja S asteluvuista suurempi. Toisaalta polynomien u' ja Q asteluvut ovat kummatkin pienempiä kuin suurempi polynomien u ja S asteluvuista. Näin ollen yhtälö (52) toteutuu vain, kun $u = \pm S = [\sqrt{-B_0}]$.

Olkoon nyt polynomin B_0 asteluku pariton. Polynomin u^2 asteluku on parillinen ja suurempi kuin polynomin u'. Toisaalta jotta yhtälö (51) toteutuisi, täytyy lausekkeen $B_0 + u^2$ niiden termien, joiden asteluku on suurempi kuin polynomilla u', hävitä identtisesti. Näin ollen polynomien u^2 ja B_0 astelukujen tulisi olla yhtä suuret. Tämä on mahdotonta, sillä polynomin u^2 asteluku on parillinen ja polynomin B_0 pariton. Näin ollen ei ole olemassa polynomiratkaisuja yhtälölle (51), kun polynomin B_0 asteluku on pariton. □

Tarkastellaan sitten jo yllä esiteltyä yhtälöä

$$u' = B_0 + B_1 u + u^2.$$

Tehdään sijoitus $u = w - \frac{1}{2}B_1$, jolloin $u' = w' - \frac{1}{2}B_1'$ ja sijoittamalla nämä yhtälöön, saadaan

$$\begin{aligned} w' - \frac{1}{2}B_1' &= B_0 + B_1 w - \frac{1}{2}B_1^2 + w^2 - B_1 w + \frac{1}{4}B_1^2 \\ w' &= B_0 + \frac{1}{2}B_1' - \frac{1}{4}B_1^2 + w^2 \\ w' &= -\frac{1}{4}(B_1^2 - 4B_0 - 2B_1') + w^2. \end{aligned}$$

Saatu yhtälö on samaa muotoa kuin yhtälö (51), joten lausetta 50 käyttäen, voidaan muotoilla seuraava lause.

Lause 53. *Jos yhtälössä*

$$u' = B_0 + B_1 u + u^2 \tag{54}$$

B_0 *ja* B_1 *ovat polynomeja muuttujanaan* x *ja jos lausekkeen*

$$\Delta = B_1^2 - 4B_0 - 2B_1'$$

asteluku on parillinen, vain ja ainoastaan polynomit

$$u = -\frac{1}{2}(B_1 \pm T),$$

missä $T = [\sqrt{\Delta}]$ *voivat olla yhtälön polynomiratkaisuja. Jos polynomin* Δ *asteluku on pariton, yhtälöllä* (54) *ei ole polynomiratkaisuja.*

Esimerkki 3.

Määritä kaikki polynomiratkaisut yhtälölle

$$u' = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 + (x^3 - 2x + 4)u + u^2.$$

Ratkaisu

Tehtävään voidaan soveltaa lausetta 53. Lauseen merkinnöin

$$B_0(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6, \quad \text{ja} \quad B_1(x) = x^3 - 2x + 4.$$

Näin ollen voidaan laskea

$$\begin{aligned} \Delta &= B_1^2 - 4B_0 - 2B_1' \\ &= (x^3 - 2x + 4)^2 - 4(2x^3 - 3x^2 - 4x + 6) - 2(3x^2 - 2) \\ &= x^6 - 4x^4 + 10x^2 - 4. \end{aligned}$$

Koska polynomin Δ asteluku on parillinen, voidaan mahdolliset polynomiratkaisut tehtävän yhtälölle määrittää yhtälöstä $u = -\frac{1}{2}(B_1 \pm T)$. Nyt $T = [\sqrt{\Delta}] = [\sqrt{x^6 - 4x^4 + 10x^2 - 4}]$, joka on määritetty jo tämän luvun esimerkeissä 1 ja 2. Tulokseksi saadaan siis, että $T = x^3 - 2x$. Nyt alkuperäisen yhtälön mahdollisesti toteuttavia polynomiratkaisuja ovat

$$u_1 = -\frac{1}{2}(B_1 + T) = -x^3 + 2x - 2 \quad \text{ja} \quad u_2 = -\frac{1}{2}(B_1 - T) = -2.$$

Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön havaitaan, että u_1 toteuttaa sen, kun taas u_2 ei toteuta. Siis ratkaisu

$$u_1 = -x^3 + 2x - 2$$

on ainoa polynomiratkaisu tehtävän Riccatin yhtälölle.

6 Alkuperäinen Riccatin yhtälö

Riccatin alunperin tutkima differentiaaliyhtälö oli muotoa

$$y' + ay^2 = bx^n. \tag{55}$$

Tätä yhtälöä on tutkittu paljon, koska sillä on useita erikoisia ominaisuuksia, joista eräs on sen yhteys Besselin funktioihin [3]. Daniel Bernoulli näytti vuonna 1724 ilmestyneessä teoksessaan, että jos yhtälössä (55) indeksi n saa jonkin arvoista $0, -\frac{4}{1}, -\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{12}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{16}{9}, \ldots$ ja a ja b ovat vakioita, yhtälön ratkaisu voidaan esittää alkeisfunktioiden avulla. [14] Edellä luetellut luvut voidaan esittää lyhyemmin kaavalla

$$n = -\frac{4m}{2m \pm 1}, m = 0, 1, 2, \ldots.$$

Yhtälöä on ratkottu monella eri tavalla. Tässä työssä esitellään Davisin [3] teoksessaan esittelemä tapa, joka muistuttaa Eulerin käyttämää metodia (teoksessa [14], jossa myös muita tapoja on esitelty).

6.1 Ratkaiseminen

Tehdään ensin muuttujanvaihto $y = u'/(au)$, jolloin yhtälö (55) saadaan kirjoitettua lineaarisessa muodossa

$$u'' - c^2x^n u = 0, \text{missä } c^2 = ab. \tag{56}$$

Tehdään vielä toinen muuttujanvaihto

$$u(x) = v(x)e^{Ax^p}, \tag{57}$$

jolloin yhtälö (56) saa muodon

$$v'' + 2Apx^{p-1}v' + \left[Ap(p-1)x^{p-2} + A^2p^2x^{2(p-1)} - c^2x^n\right] v = 0.$$

Muokataan vielä yhtälöä valitsemalla

$$A = \frac{c}{p} \quad \text{ja} \quad p = 1 + \frac{1}{2}n \Leftrightarrow n = 2(p-1), p \neq 0,$$

jolloin yhtälö sievenee muotoon

$$v'' + 2cx^{p-1}v' + c(p-1)x^{p-2}v = 0. \tag{58}$$

Oletetaan nyt, että yhtälön (58) ratkaisu on potenssisarja, joka on muotoa

$$v(x) = a_0 + a_1x^p + a_2x^{2p} + a_3x^{3p} + \ldots + a_mx^{mp} + \ldots,$$

jolloin kertoimien a_{m+1} ja a_m välillä on yhteys

$$a_{m+1} = -\frac{c[(2m+1)p-1]}{(m+1)p[(m+1)p-1]}a_m. \tag{59}$$

Valitaan nyt $a_0 = 1$ ja m saa arvot $0, 1, 2, \ldots$, jolloin yhtälön (58) ratkaisu voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} V(x,c) = 1 - \frac{p-1}{p(p-1)}cx^p &+ \frac{(p-1)(3p-1)}{p(p-1)2p(2p-1)}c^2x^{2p} \\ &- \frac{(p-1)(3p-1)(5p-1)}{p(p-1)2p(2p-1)3p(3p-1)}c^3x^{3p} - \ldots \end{aligned}$$

Tällöin yhtälön (57) mukaisesti yhtälön (56) eräs ratkaisu on

$$u_1(x) = e^{cx^p/p}V(x,c).$$

Toisaalta yhtälössä (56) voidaan c korvata $-c$:llä. Tämä ei aiheuta muutoksia yhtälöihin, joten toinen ratkaisu saadaan yhtälöstä

$$u_2(x) = e^{-cx^p/p}V(x,-c).$$

Näin ollen yleinen ratkaisu lineaariselle yhtälölle (56) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x),$$

missä c_1 ja c_2 ovat vakioita. Näin ollen alkuperäisen yhtälön (55) ratkaisuksi saadaan

$$y = \frac{u_1' + ku_2'}{a(u_1 + ku_2)},$$

missä $k = c_2/c_1$.

Riccatin alkuperäiselle yhtälölle on nyt löydetty formaali ratkaisu. Kiinnostavaa olisi kuitenkin, löytyykö yhtälölle jokin polynomiratkaisu. Yhtälöstä (59) havaitaan, että termi a_{m+1} saa arvon 0, kun $(2m+1)p - 1 = 0$ eli toisin sanoen, kun $p = 1/(2m+1)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Koska $n = 2(p-1)$, niin Riccatin alkuperäisellä yhtälöllä (55) on päättyvä ratkaisu, kun

$$n = -\frac{4m}{2m+1}, m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{60}$$

eli toisin sanoen, kun n saa jonkin arvoista $0, -4/3, -8/5, -12/7$ jne.

Kuten tämän luvun alussa todettiin, Riccatin alkuperäisellä yhtälöllä (55) on ratkaisu myös, kun

$$n = -\frac{4m}{2m-1}. \tag{61}$$

Määrittääksemme tämän toisenkin tuloksen, tehdään yhtälöön (56) sijoitukset

$$u = \frac{w}{t}, \quad x = \frac{1}{t},$$

jolloin saadaan

$$\frac{d^2w}{dt^2} - c^2t^{-n-4}w = 0.$$

Tämä yhtälö on samaa muotoa yhtälön (56) kanssa ja kun määritellään $n = 2q - 2$, saadaan sarjakehitelmä

$$W(t,c) = 1 + \frac{q+1}{q(q+1)}ct^{-q} + \frac{(q+1)(3q+1)}{q(q+1)2q(2q+1)}c^2t^{-2q} + \ldots$$

Tämä sarjakehitelmä päättyy, kun $q = -1/(2m-1)$. Kun tämä sijoitetaan yhtälöön $n = 2q - 2$, saadaan vahvistettua (61).

6.2 Yhteys Besselin funktioihin

Riccatin alkuperäisen yhtälön merkittävä ominaisuus on sen yhteys Besselin funktioihin. [3] Tässä luvussa käsitellään aluksi hieman Besselin funktioita ja sen jälkeen niiden ja Riccatin yhtälön välistä yhteyttä.

Besselin funktiot

Eräs soveltavan matematiikan tärkeimmistä differentiaaliyhtälöistä on Besselin differentiaaliyhtälö [6]

$$x^2\frac{d^2U}{dx^2} + x\frac{dU}{dx} + (x^2 - \nu^2)U = 0. \tag{62}$$

Besselin yhtälön ratkaisuja ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla. Ratkaisu voidaan kuitenkin esittää Besselin funktioiden avulla. Yhtälön (62) yleinen ratkaisu on

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x), \tag{63}$$

jossa $\nu \in \mathbb{R}$ ja $\nu > 0$, $A, B \in \mathbb{R}$. Edellä J_ν on ensimmäisen lajin ja Y_ν toisen lajin Besselin funktio.

Tässä työssä ei tarkemmin käsitellä teoriaa Besselin differentiaaliyhtälön tai funktoiden osalta, otetaan vain seuraavat tulokset teoksesta [6] käyttöön.

Kun ν on kokonaisluku, ensimmäisen lajin Besselin funktio on

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}.$$

Kun $\nu \geq 0$, ensimmäisen lajin Besselin funktio on

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^2 m}{2^{2m+\nu} m!\Gamma(\nu+m+1)},$$

missä Γ on gammafunktio, jolle pätee

$$\Gamma(k+1) = k!.$$

Kun ν ei ole kokonaisluku, on voimassa seuraava lause.

Lause 64. *Jos ν ei ole kokonaisluku, Besselin yhtälön yleinen ratkaisu kaikille $x \neq 0$ on*

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Lausetta ei todisteta, mutta todetaan, että tulos juontaa juurensa siitä, että Besselin yhtälössä ν esiintyy toiseen korotettuna, joten sekä J_ν että $J_{-\nu}$ ovat yhtälön ratkaisuja samalla arvolla ν. Lisäksi kun ν ei ole kokonaisluku, nämä kaksi ratkaisua ovat lineaarisesti riippumattomia ja näin ollen muodostavat yleisen ratkaisun lauseen 64 mukaisesti.

Aiemmin todettiin, että Besselin funktioita ei yleisesti voida esittää alkeisfunktioiden avulla, seuraava lause kuitenkin tuo poikkeuksen tähän.

Lause 65. *Kun $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2} \ldots$, niin Besselin funktiot J_ν voidaan esittää alkeisfunktioiden (sini, kosini, potenssit) avulla.*

Muutama esimerkki näistä funktioista:

$$
\begin{aligned}
J_{1/2} &= P(x)\sin x, \quad \text{missä} \quad P(x) = \sqrt{2/\pi x}, \\
J_{3/2} &= P(x)\left[\frac{\sin x}{x} - \cos x\right], \\
J_{5/2} &= P(x)\left[\left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\sin x - \frac{3}{x}\sin x\right], \\
J_{-1/2} &= P(x)\cos x, \\
J_{-3/2} &= P(x)\left[-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right], \\
J_{-5/2} &= P(x)\left[\frac{3}{x}\sin x + \left(\frac{3}{x^2} - 1\right)\cos x\right].
\end{aligned}
$$

Riccatin yhtälö ja Besselin funktiot

Lopuksi käsitellään Riccatin yhtälön ja Besselin funktioiden välistä suhdetta kuten teoksessa [3]. Aloitetaan tarkastelu tekemällä ensin muuttujanvaihto $t = (x/2)^2$ yhtälöön (62), jolloin saadaan

$$M(U) \equiv t^2\frac{d^2U}{dt^2} + t\frac{dU}{dt} + \left(t - \left(\frac{1}{2}\nu\right)^2\right)U = 0. \tag{66}$$

Tehdään vielä toinen muunnos $U(t) = t^\beta W(t)$, jolloin yhtälö saa muodon

$$t^2\frac{d^2W}{dt^2} + t(1+2\beta)\frac{W}{dt} + \left[\left(\beta^2 - \left(\frac{1}{2}\nu\right)^2\right) + t\right]W = 0. \tag{67}$$

Nyt jos $\beta^2 = (\nu/2)^2$ eli $\beta = \pm\frac{1}{2}\nu$, jälkimmäinen yhtälö sievenee yksinkertaisempaan muotoon

$$N(W) \equiv t\frac{d^2W}{dt^2} + (1 \pm \nu)\frac{dW}{dt} + W = 0. \tag{68}$$

Yhtälöiden (66) ja (68) saadaan nyt Besselin yhtälön yleisen ratkaisun (63) perusteella

$$M(U) = 0: \quad U = AJ_\nu(2\sqrt{t}) + BY_\nu(2\sqrt{t}); \tag{69}$$

$$N(W) = 0: \quad W = t^{-\beta}[AJ_\nu(2\sqrt{t}) + BY_\nu(2\sqrt{t})], \quad \beta = \pm\frac{1}{2}\nu \tag{70}$$

Palataan nyt Riccatin yhtälöön (55). Tehdään siihen muuttujanvaihto $y(x) = u(x)/x$, jolloin saadaan

$$x\frac{du}{dx} - u + au^2 = bx^h, \quad h = n + 2.$$

Tehdään vielä toinen muuttujanvaihto $s = gx^h$, missä g on vakio. Tällöin yhtälö saa muodon

$$\frac{du}{ds} - \frac{u}{hs} + \frac{au^2}{hs} = \frac{b}{gh}.$$

Vielä yksi muunnos

$$u(s) = \frac{hs}{a}\frac{w'(s)}{w(s)}, \tag{71}$$

ja käsittelyssä oleva yhtälö saa muodon

$$s\frac{d^2w}{ds^2} + \left(1 - \frac{1}{h}\right)\frac{dw}{ds} - \frac{ab}{gh^2}w = 0. \tag{72}$$

Kun nyt määritellään toisessa muuttujanvaihdossa käyttöön otettu vakio g siten, että $(-ab/gh^2) = 1$, eli $g = -ab/h^2$, on Riccatin alkuperäinen yhtälö muunnettu muotoon

$$s\frac{d^2w}{ds^2} + \left(1 - \frac{1}{h}\right)\frac{dw}{ds} + w = 0. \tag{73}$$

Saatu yhtälö on samaa muotoa kuin yhtälö (68), ja kun merkitään $h = 1/\nu$ yhtälön (73) ratkaisu saadaan kuten kohdassa (70)

$$w = s^{\nu/2}[AJ_\nu(2\sqrt{s}) + BY_\nu(2\sqrt{s})]. \tag{74}$$

Kun ν ei ole kokonaisluku, J_ν ja $J_{-\nu}$ muodostavat Besselin differentiaaliyhtälön ratkaisujen perusjärjestelmän. Koska $\nu = 1/h$, $h = n+2$ ja n on kokonaisluku, voidaan tässä tapauksessa saadussa ratkaisussa (74) korvata funktio $Y_\nu(2\sqrt{s})$ funktiolla $J_{-\nu}(2\sqrt{s})$, jolloin saadaan ratkaisulle muoto

$$w(s) = s^{\nu/2}[AJ_\nu(2\sqrt{s}) + NJ_{-\nu}(s\sqrt{s})].$$

Lauseen 65 mukaan Besselin funktio $J_\nu(x)$ voidaan esittää alkeisfunktioiden avulla, kun $\nu = \frac{1}{2}(2m-1)$ tai $\nu = \frac{1}{2}(-2m+1)$, missä m on positiivinen kokonaisluku. Koska nyt $h = 1/\nu = n+2$, niin $\nu = 1/(n+2)$ ja havaitaan, että yhtälön (55) ratkaisu voidaan esittää alkeisfunktioilla, kun

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}(2m+1) \quad \text{tai} \quad \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}(-2m+1), \quad \text{eli kun}$$
$$n = \frac{4(1-m)}{2m-1} \quad \text{tai} \quad n = \frac{4m}{1-2m}.$$

Kun $m = 1, 2, 3, \ldots$, saadaan muuttujalle n samat arvot kuin edellisessä luvussa, kun tutkittiin alkuperäisen Riccatin yhtälön ratkaisemista (kts. lausekkeet (60) ja (61)).

Esimerkki

Tarkastellaan yhtälöä

$$y' + y^2 = 1.$$

Käyttäen yhtälön (55) merkintöjä: $a = b = 1$ ja $n = 0$. Nyt $h = n+2 = 2$ ja $\nu = 1/h = 1/2$ ja yhtälö (72) saa muodon

$$sw'' + \left(1 - \frac{1}{2}\right)w' + w = 0,$$

jonka ratkaisu on yhtälön (74) ja edellisessä luvussa esiteltyjen päättyvien Besselin funktioiden mukaisesti

$$\begin{aligned} w &= As^{1/4}J_{1/2}(2\sqrt{s}) + Bs^{1/4}J_{-1/2}(2\sqrt{s}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}[A\sin(2\sqrt{s}) + B\cos(2\sqrt{s})]. \end{aligned}$$

Tehdään vielä muuttujanvaihto (71) takaisin, jolloin saadaan

$$u(s) = 2s\frac{w'(s)}{w(s)} = \frac{2\sqrt{s}[A\cos(2\sqrt{s}) - B\sin(2\sqrt{s})]}{A\sin(2\sqrt{s}) + B\cos(2\sqrt{s})}.$$

Koska $g = -ab/h^2 = -1/4$ ja $s = gx^h$, niin $4s = -x^2$, josta seuraa $2\sqrt{s} = \pm ix$. Sijoitetaan tämä viimeiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$u = \frac{\pm ixA\cos(\pm ix) - (\pm ixB\sin(\pm ix))}{A\sin(\pm ix) + B\cos(\pm ix)}.$$

Nyt koska $\pm ix\cos(\pm ix) = \pm ix\cosh x$ ja $\pm ix\sin(\pm ix) = -x\sin x$, yhtälö sievenee muotoon

$$u = \frac{\pm ixA\cosh x + Bx\sin x}{-Ai\sin x + B\cosh x}.$$

Ratkaisuksi saadaan siis

$$y = \frac{u}{x} = \frac{A'\cosh x + B\sinh x}{A'\sinh x + B\cosh x},$$

missä $A' = iA$.

Viitteet

[1] J. L. Allen & F. M. Stein: On solutions of certain Riccati differential equation. The American Mathematical Monthly, Vol. 71, No. 10 (Dec., 1964), pp. 1113-1115.

[2] S. Bittani: History and Prehistory of the Riccati Equation, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996.

[3] Harold T. Davis: Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Publications, Inc, 1962.

[4] Mats Gyllenberg, Lasse Lamberg, Petri Ola ja Petteri Piiroinen: DY I-II, luentomoniste, 2011.

[5] D. R. Haaheim & F. M. Stein: Methods of solutions of the Riccati differential equation. Mathematics Magazine, Vol. 42, No. 5 (Nov., 1969), pp. 233-240.

[6] E. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematic, John Wiley & Sons, 1999.

[7] O. Martio ja J. Sarvas: Tavalliset differentiaaliyhtälöt, Gaudeamus, 1982

[8] G. M. Murphy: Ordinary differential equations and their solutions, D. Van Nostrand Company, 1960.

[9] J. Pahikkala: "Square root of polynomial"(version 14). PlanetMath.org. http://planetmath.org/SquareRootOfPolynomial.html. Viitattu 31.8.2012.

[10] Earl D. Rainville: Intermediate Differential Equations, The Macmillan Company, 1964.

[11] P. R. P. Rao: The Riccati differential equation. The American Mathematical Monthly, Vol. 69, No. 10 (Dec., 1962), pp. 995-996.

[12] I. Sugai: Riccati's nonlinear differential equation. The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No.2 (Feb., 1960), pp. 134-139.

[13] http://www.math24.net/riccati-equation.html Viitattu 14.8.2012.

[14] G. N. Watson: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, The Macmillan Company, 1948.

[15] Wikipedia: List of integrals of rational functions. http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_integrals_of_rational_functions. Viitattu 11.9.2012