Pro Gradu
Kompaktius topologisissa avaruuksissa

Heidi Saukkoriipi

16. marraskuuta 2012

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen	Laitos/Institution– Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä/Författare – Author Heidi Saukkoriipi		
Työn nimi / Arbetets titel – Title Kompaktius topologisissa avaruuksissa		
Oppiaine /Läroämne – Subject Matematiikka		
Työn laji/Arbetets art – Level Pro gradu -tutkielma	Aika/Datum – Month and year marraskuu 2012	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages 43 s.

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Työssä esitetään kompaktiuden käsite lähestyen sitä sekä peitteiden että verkkojen avulla, minkä lisäksi työssä esitetään ja todistetaan kompakteihin topologisiin avaruuksiin liittyviä lauseita.

Kompaktien topologisten avaruuksien lisäksi työssä esitetään kompaktisoinnin, lokaalin kompaktiuden ja jonokompaktiuden käsitteet ja todistetaan näihin liittyviä lauseita.

Työssä käsitellään myös kompakteja tuloavaruuksia ja todistetaan näihin liittyviä lauseita kuten Tihonovin lause. Kompaktien tuloavaruuksien käsittelyn yhteydessä todistetaan myös, että valinta-aksioomasta seuraa Zornin lemma ja hyvän järjestyksen lause.

Työ pohjautuu lähdeluettelossa olevaan kirjallisuuteen ja erityisesti Jussi Väisälän *Topologia II* ja John L. Kelleyn *Topology* teoksiin.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Hyvän järjestyksen lause, jonokompaktius, kompaktius, kompaktisointi, kompaktit tuloavaruudet, lokaalinen kompaktius, Tihonovin lause, topologinen avaruus, verkot, Zornin lemma

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited
Sähköinen arkisto Helda

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoitus on esittää kompaktiuden käsite topologisissa avaruuksissa. Lisäksi työssä esitellään kompakteihin topologisiin avaruuksiin liittyviä ominaisuuksia ja lauseita.

Kompaktius on yksi tärkeimmistä topologian käsitteistä. Kompaktit avaruudet ovat monestikin helpommin sovellettavia kuin ei-kompaktit toverinsa. Monesti ei-kompakteja topologisia avaruuksia jopa *kompaktisoidaan*, jotta niistä saadaan helpommin käsiteltäviä.

Kompaktiuden käsitteellä on vahva yhteys äärellisyyden kanssa, mutta tästä huolimatta ne eivät ole sama asia. Ajatellaan topologinen avaruus taloksi, joka on valaistu äärettömän monen lampun avulla. Kompaktiksi tällaista taloa voidaan sanoa, mikäli koko talo saadaan valaistua, vaikka lamppuja sammutetaan siten, että vain äärellinen määrä niistä on päällä. Vastaavasti kompaktia topologista avaruutta voidaan verrata kaupunkiin, jonka äärellinen määrä poliiseja pystyy valvomaan ja pitämään turvallisena.

Työssä lähestytään kompaktiuden käsitettä sekä peitteiden että verkkojen avulla. Tämän lisäksi tehdään pintaraapaisua lokaalisen kompaktiuteen, avaruuksien kompaktisointiin sekä kompakteihin tuloavaruuksiin. Kompaktien tuloavaruuksien kohdalla työssä käsitellään myös valinta-aksioomaa ja osoitetaan sen yhtäpitävyys Zornin lemman ja hyvän järjestyksen lauseen kanssa.

Työ pohjautuu lähdeluettelossa olevaan kirjallisuuteen ja erityisesti Jussi Väisälän *Topologia II* ja John L. Kelleyn *General Topology* teoksiin.

2 Topologiset avaruudet

Topologian tutkimuskohteita ovat sellaiset pistejoukkojen ominaisuudet, jotka säilyvät niin kutsutuissa topologisissa muunnoksissa eli homeomorfeissa. Useimmille topologisille käsitteille on luonteenomaista se, ettei niiden esittämiseen tarvita reaalilukuja. Yhtenä esimerkkinä topologisesta ominaisuudesta on järvi, jonka keskellä on saari. Saari on erillään mantereesta eikä saaresta pääse mantereelle kulkematta järven yli. Tämä on topologinen ominaisuus ja topologiassa sanottaisiin, että saaren ja mantereen muodostama joukko on epäyhtenäinen. Saaren etäisyys mantereesta sen sijaan ei enää olisi topologinen vaan metrinen käsite, koska saaren ja järven muoto vaikuttavat siihen. Etäisyyden suuruudesta riippumatta on kuitenkin aina olemassa sellaiset kohdat saaressa ja mantereella, joiden välinen etäisyys mantereelta saarelle on lyhin mahdollinen. Tämä ominaisuus on topologinen ja liittyy kompaktiuden käsitteeseen.

Määritelmä 2.1. (Joukon topologia) Olkoon X joukko ja $\mathcal{T}$ kokoelma joukon X osajoukkoja eli $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Sanomme, että $\mathcal{T}$ on joukon X *topologia*, jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

T1 $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä kaikki mahdolliset yhdisteet:
Jos $U_i \in \mathcal{T}$ kaikilla $i \in I$, niin $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

T2 $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset:
Jos $U_i \in \mathcal{T}$ kaikilla $1 \leq i \leq n$, niin $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

T3 $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$.

***Huomautus* 2.2.** Indeksöintejä ei välttämättä aina tarvita ja otetaankin tästä eteenpäin käyttöön myös merkintä

$$\bigcup \mathcal{D} = \{x : x \in A \text{ jollakin } A \in \mathcal{D}\}$$

Ehto T1 saataisiin nyt esitettyä muodossa: Jos $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$ niin $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{T}$.

Määritelmä 2.3. (Topologinen avaruus) Joukkoa, jolle on annettu jokin topologia, kutsutaan topologiseksi avaruudeksi. Topologinen avaruus on siis pari $(X, \mathcal{T})$, jossa X on joukko ja $\mathcal{T}$ jokin sen topologia.

Kutsumme topologisen avaruuden alkioita pisteiksi.

Määritelmä 2.4. (Avoimet joukot) Topologian $\mathcal{T}$ jäseniä kutsutaan avoimiksi joukoiksi. Siis jos U on topologian $\mathcal{T}$ jäsen, niin se on myös avoin joukko topologisessa avaruudessa $(X, \mathcal{T})$. Tätä merkitään lyhyesti $U \subset_o X$.

Määritelmän 2.1 ehdot voidaan nyt kirjoittaa muodossa:

T1 Avointen joukkojen kaikki mahdolliset yhdisteet ovat avoimia joukkoja.

T2 Avointen joukkojen äärelliset leikkaukset ovat avoimia joukkoja.

T3 $\emptyset$ ja X ovat avoimia joukkoja.

***Esimerkki* 2.5.** (Erilaisia topologioita)

a) Jokainen joukon X topologia sisältää joukot $\emptyset$ ja X ehdon (T3) nojalla. Toisaalta myös $\mathcal{T}_{mini} = \{\emptyset, X\}$ on joukon X topologia. Tätä topologiaa kutsutaan *minitopologiaksi* ja se on suppein joukon X topologioista.

b) Joukon X kaikkien osajoukkojen joukko eli potenssijoukko $\mathcal{P}(X)$ toteuttaa ehdot (T1) - (T3) ja on näin ollen joukon X topologia. Tätä topologiaa $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$ kutsutaan *diskreetiksi topologiaksi.* Topologista avaruutta, jonka topologia on diskreetti, kutsutaan diskreetiksi topologiseksi avaruudeksi. Diskreetti topologia on laajin kaikista avaruuden X topologioista.

c) Olkoon X kaksio $\{a, b\}$, $a \neq b$. Nyt joukolla X on olemassa neljä topologiaa: $\mathcal{T}_{mini} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{T}_{dis} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ja $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Nämä ovat myös kaksion X ainoat topologiat, sillä huomataan, ettei potenssijoukosta $\mathcal{P}(X)$ saada muodostettua muita sellaisia joukkoja, jotka sisältäisivät sekä tyhjän joukon että joukon X.

***Huomautus* 2.6.** Jos $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat avaruuden X topologioita ja $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, niin sanotaan, että $\mathcal{T}_1$ on heikompi tai pienempi kuin $\mathcal{T}_2$ ja että $\mathcal{T}_2$ on vahvempi tai suurempi kuin $\mathcal{T}_1$. Voidaan myös sanoa, että $\mathcal{T}_1$ on pienempi kuin $\mathcal{T}_2$, ainoastaan jos jokainen $\mathcal{T}_1$-avoin joukko on myös $\mathcal{T}_2$-avoin.

Jos $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ avaruuden X satunnaisia topologioita, saattaa olla, ettei $\mathcal{T}_1$ ole pienempi eikä suurempi kuin $\mathcal{T}_2$. Tässä tapauksessa sanotaan, etteivät $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ole vertailtavissa.

Seuraavaksi tarkastellaan topologisten avaruuksien osajoukkoja. Jotta voidaan puhua topologisten avaruuksien osajoukkojen ominaisuuksista, täytyy näihin liittää jokin topologia. Osajoukoille määritellään relatiivitopologia inkluusiokuvauksen avulla seuraavalla tavalla:

Määritelmä 2.7. (Inkluusiokuvaus) Jos $A \subset X$, niin inkluusiokuvaus $j : A \hookrightarrow X$ määritellään yhtälöllä $j(x) = x$. Sille on aina voimassa $j^{-1}E = A \cap E$, kun $E \subset X$.

Määritelmä 2.8. (Indusointi) Olkoon X joukko ja $(Y, \mathcal{T}')$ topologinen avaruus. Olkoon lisäksi $f : X \to Y$ kuvaus. Nyt $\mathcal{T} = \{f^{-1}V : V \in \mathcal{T}'\}$ on joukon X topologia ja sitä kutsutaan kuvauksen f topologiasta $\mathcal{T}'$ *indusoimaksi* topologiaksi.

Määritelmä 2.9. (Relatiivitopologia) Olkoon $A \subset X$. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ relatiivitopologia joukossa A on inkluusion $j : A \hookrightarrow X$ indusoima joukon A topologia. Sen merkitä on $\mathcal{T}|A$.

Tässä tutkielmassa topologisten avaruuksien osajoukoilla käytetään aina relatiivitopologiaa, ellei toisin sanota.

Määritelmä 2.10. (Ympäristö) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ ja $A \subset X$. Jos U on avaruuden X avoin osajoukko eli topologian $\mathcal{T}$ jäsen ja $x \in U$, niin U on *pisteen x ympäristö.* Samoin jos U on avaruuden X avoin osajoukko ja $A \subset U$, niin U on *joukon A ympäristö.*

***Huomautus* 2.11.** Otetaan tästä lähtien käyttöön seuraava todistusten esitystapa:

Jos pyritään todistamaan "A, jos ja vain jos B", niin todistus voidaan esittää muodossa:

1. "$\Rightarrow$"Tässä todistetaan, että $A \Rightarrow B$.

2. "$\Leftarrow$"Tässä todistetaan, että $B \Rightarrow A$.

Tämän jälkeen pätee $A \iff B$ eli lause on todistettu.

Lause 2.12. *Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko A on avoin , jos ja vain jos sen jokaisella pisteellä x on ympäristö $U_x \subset A$.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Jos A on avoin, voidaan kaikilla $x \in A$ valita $U_x = A$.

"$\Leftarrow$"Jos jokaisella joukon A pistellä x on ympäristö $U_x \subset A$, niin $A = \cup\{U_x : x \in A\}$. Näin ollen A on avoimien joukkojen yhdisteenä avoin. $\square$

Määritelmä 2.13. (Hausdorffin avaruus) Topologinen avaruus X on Hausdorffin avaruus tai Hausdorff, jos sen eri pisteillä on olemassa erilliset ympäristöt.

***Huomautus* 2.14.** Hausdorffin avaruutta kutsutaan kirjallisuudessa usein myös $T2$-avaruudeksi.

***Esimerkki* 2.15.** 1. Diskreetti avaruus on Hausdorff.

2. Minitopologialla varustettu vähintään kaksipisteinen avaruus X ei ole Hausdorff, sillä jos $a \in X$ ja $b \in X$, niin molempien ainoa ympäristö on X.

Määritelmä 2.16. (Suljettu joukko) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Joukko $F \subset X$ on suljettu, jos sen komplementti $X \setminus F$ on avoin. Suljettua joukkoa merkitään lyhyesti $F \subset_c X$.

***Huomautus* 2.17.** Voidaan myös tarkentaen sanoa joukon F olevan $\mathcal{T}$-suljettu avaruudessa X.

***Huomautus* 2.18.** On hyvä huomata, että topologisen avaruuden X osajoukot $\emptyset$ ja X ovat aina sekä suljettuja että avoimia avaruudessa X.

On hyvä huomata, että kaikki mikä voidaan topologisissa avaruuksissa esittää avoimilla joukoilla, voidaan esittää myös suljetuilla joukoilla. Topologiset avaruudet voidaankin lähteä määrittämään myös suljettujen joukkojen kautta.

Lause 2.19. *Olkoon X topologinen avaruus. Tällöin*

T1 Suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu.

T2 Suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu.

T3 $\emptyset$ ja X ovat suljettuja.

Todistus. Todistetaan kohdat T1-T3 yksi kerrallaan:

T1. Olkoon $V_i \subset_c X$ kaikilla $i \in I$. Suljettujen joukkojen määritelmän mukaan voidaan suljetut joukot esittää kaikilla $i \in I$ muodossa $V_i = X \setminus U_i$, missä $U_i \subset_o X$. Otetaan suljetuista joukoista mielivaltainen leikkaus $\bigcap_{i \in I} V_i = \bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i)$. De Morganin lakien mukaan $\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i) = X \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i)$. Määritelmän 2.1 mukaan $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä kaikki mahdolliset yhdisteet. Jos siis $U_i \in \mathcal{T}$ eli U_i on avoin kaikilla i, niin $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ eli myös $\bigcup_{i \in I} U_i$ on avoin. Koska $\bigcup_{i \in I} U_i$ on avoin joukko on sen komplementti $\bigcap_{i \in I}(X \setminus U_i) = X \setminus (\bigcup_{i \in I} U_i)$ suljettu. Näin ollen suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu.

T2. Olkoon $V_i \subset_c X$ kaikilla $1 \leq i \leq k$. Suljettujen joukkojen määritelmän mukaan voidaan suljetut joukot esittää kaikilla $1 \leq i \leq k$ muodossa $V_i = X \setminus U_i$, missä $U_i \subset_o X$. Otetaan suljetuista joukoista äärellinen yhdiste $\bigcup_{1 \leq i \leq k} V_i = \bigcup_{1 \leq i \leq k}(X \setminus U_i)$. De Morganin lakien mukaan $\bigcup_{1 \leq i \leq k}(X \setminus U_i) = X \setminus (\bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i)$ Määritelmän 2.1 mukaan $\mathcal{T}$ sisältää jäsentensä äärelliset leikkaukset. Jos siis $U_i \in \mathcal{T}$ eli U_i on avoin kaikilla $1 \leq i \leq k$, niin $\bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i \in \mathcal{T}$ eli $\bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i$ on avoin. Koska $\bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i$ on avoin joukko, on sen komplementti $\bigcup_{1 \leq i \leq k}(X \setminus U_i) = X \setminus (\bigcap_{1 \leq i \leq k} U_i)$ suljettu. Näin ollen suljettujen joukkojen äärellinen yhdiste on suljettu.

T3. Määritelmän 2.1 mukaan $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$ eli $\emptyset$ ja X ovat avoimia joukkoja. Nyt $X \setminus \emptyset = X$ eli X on myös suljettu. Samoin $X \setminus X = \emptyset$ eli $\emptyset$ on suljettu.

$\square$

Jotta voitaisiin lähteä käsittelemään kompakteja topologisia avaruuksia, tarvitaan vielä useita topologisiin avaruuksiin liittyviä määritelmiä. Seuraavaksi onkin listattu tarvittavat määritelmät.

Määritelmä 2.20. (Peite) Olkoon $A \subset X$ ja olkoon $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ kokoelma avaruuden X osajoukkoja. Sanomme, että $\mathcal{D}$ on joukon A peite, jos $A \subset \cup_{Y \in \mathcal{D}} Y$ eli jos jokainen joukon A piste kuuluu johonkin kokoelman $\mathcal{D}$ jäseneen.

Sama voidaan merkitä myös seuraavalla tavalla: $\mathcal{D}$ on joukon A peite, jos $A \subset \cup \mathcal{D}$.

Määritelmä 2.21. (Avoin peite) Avaruuden X peitettä sanotaan *avoimeksi*, jos sen jäsenet ovat avaruuden X avoimia osajoukkoja. Peitettä kutsutaan tällöin myös X-avoimeksi peitteeksi.

Määritelmä 2.22. (Osapeite) Jos $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}'$ ovat avaruuden X peitteitä ja jos $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, niin $\mathcal{D}'$ on peitteen $\mathcal{D}$ osapeite.

Määritelmä 2.23. (Normaali avaruus) Oletetaan, että $(X, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus. Jos avaruudella X on seuraavat ominaisuudet Nor1 ja Nor2, sanotaan, että X on *normaali avaruus*:

(Nor1) Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin kummallakin pisteistä a ja b on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

(Nor2) Jos $A, B \subset X$ ovat erillisiä ja suljettuja, niin joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 2.24. (Säännöllinen avaruus) Oletetaan, että $(X, \mathcal{T})$ on topologinen avaruus. Jos avaruudella X on seuraavat ominaisuudet S1 ja S2, sanotaan, että X on *säännöllinen avaruus*:

(S1) Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin kummallakin pisteistä a ja b on ympäristö, johon toinen ei kuulu.

(S2) Jos $a \in X$, ja B on avaruuden X sellainen suljettu osajoukko, että $a \notin B$, niin pisteellä a ja joukolla B on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 2.25. (Jono) Joukon D jonolla tarkoitetaan kuvausta $x : \mathbb{N} \to D$. Sen arvoja merkitään yleensä alaindeksillä eli $x(n) = x_n$. Itse jonolle voidaan käyttää merkintöjä $x_1, x_2, \ldots$ tai $(x_1, x_2, \ldots)$ tai $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tai (x_n). Jonoon sisältyy aina tieto siitä, missä järjestyksessä sen jäsenet ovat.

Määritelmä 2.26. (Osajono) Jos jonon termeistä valitaan vain osa, saadaan osajono. Tarkemmin sanottuna jono (y_k) on jonon (x_n) osajono, jos $y_k = x_{n_k}$ ja (n_k) on aidosti nouseva jono $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, jossa $n_k \in \mathbb{N}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Määritelmä 2.27. (Jonon suppeneminen) Avaruuden X pistejono suppenee kohti pistettä $a \in X$, jos jokaista pisteen a ympäristöä U kohden on olemassa sellainen n_0, että $x_n \in U$, kun $n \geq n_0$. Tällöin merkitään $x_n \to a$.

***Esimerkki* 2.28.** Yleisessä topologisessa avaruudessa jono voi supeta kohti useita pisteitä.

1. Jos avaruuden X topologia on minitopologia, niin jokainen avaruuden jono suppenee kohti jokaista avaruuden pistettä.

2. Jos avaruus on Hausdorff, niin sen jono voi supeta enintään yhtä pistettä kohti. Jos nyt $x_n \to a$ ja $x_n \to b$, missä $a \neq b$, voidaan valita erilliset ympäristöt $U(a)$ ja $V(b)$. Nyt kuitenkin $x_n \in U(a)$ ja $x_n \in V(b)$ jostain jonon jäsenestä n_0 alkaen, mikä on mahdotonta, sillä ympäristöjen piti olla erilliset.

Määritelmä 2.29. (Jonon kasautumisarvo) Piste $a \in X$ on jonon (x_n) kasautumisarvo, jos jokaista pisteen a ympäristöä U kohti $x_n \in U$ äärettömän monella indeksillä n. Jonolla voi olla useita kasautumisarvoja tai ei yhtään kasautumisarvoa.

Jos jono tai sen osajono suppenee kohti pistettä a, niin a on selvästi myös jonon kasautumisarvo.

Määritelmä 2.30. (Joukon kasautumispiste) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $A \subset X$ ja $x \in X$. Sanomme, että x on joukon A kasautumispiste, jos jokaisessa pisteen x ympäristössä $U(x)$ on jokin joukon A piste $y \neq x$ eli jos $(U(x) \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

Jos siis pisteen x jokainen ympäristö kohtaa joukon A eli niiden leikkaus on epätyhjä, niin x on joko joukon A kasautumispiste tai x kuuluu joukkoon A.

Määritelmä 2.31. (Joukon kosketuspiste) Sanomme, että x on joukon A koskestuspiste, jos jokainen pisteen x ympäristö U kohtaa joukon A eli $U \cap A \neq \emptyset$.

Määritelmä 2.32. (Sulkeuma) Joukon A sulkeuma $\overline{A}$ on sen kosketuspisteiden joukko eli $\overline{A} = \{x \in X : \text{Jokainen pisteen } x \text{ ympäristö kohtaa joukon } A\}$.

Lause 2.33. *Olkoon X topologinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin $\overline{A}$ on aina suljettu.*

Todistus. Olkoon $x \in X \setminus \overline{A}$. Tällöin on olemassa sellainen pisteen x ympäristö U, joka ei kohtaa joukkoa A. Jos $y \in U$, niin U on myös pisteen y ympäristö, joka ei myöskään kohtaa joukkoa A. Siispä $y \notin \overline{A}$ eli $y \in X \setminus \overline{A}$. Näin ollen $U \subset X \setminus \overline{A}$ eli $X \setminus \overline{A}$ on avoin ja $\overline{A}$ on sen komplementtina suljettu. □

Määritelmä 2.34. (Numeroituva joukko) Joukko A on numeroituva, jos se on äärellinen tai jos sillä on sama mahtavuus kuin joukolla $\mathbb{N}$.

Numeroituvilla joukoilla pätevät seuraavat asiat:

(1) Numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista on numeroituva.

(2) Numeroituvan joukon äärellisten osajoukkojen kokoelma on numeroituva.

Määritelmä 2.35. (Kanta) Sanalla kanta tarkoitetaan matematiikan eri aloilla yleensä sitä, että jollekin struktuurille valitaan "edustajisto", joka virittää koko struktuurin.

(Topologian kanta) Olkoon $\mathcal{T}$ joukon X topologia. Sanomme, että kokoelma $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ on topologian $\mathcal{T}$ kanta, jos

(1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$

(2) Jokainen $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}$ voidaan lausua yhdisteenä joistakin kokoelman $\mathcal{B}$ jäsenistä.

Sanomme myös, että $\mathcal{B}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta tai lyhyesti avaruuden X kanta, jos $\mathcal{T}$ on asiayhteydestä selvä.

Määritelmä 2.36. (Ympäristökanta) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$. Kokoelma $\mathcal{B}(x)$ pisteen x ympäristöjä on pisteen x *ympäristökanta* topologiassa $\mathcal{T}$, jos jokainen pisteen x ympäristö sisältää kokoelman $\mathcal{B}(x)$ jonkin jäsenen.

Määritelmä 2.37. (Esikanta) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$. Sanomme, että $\mathcal{A}$ on topologian $\mathcal{T}$ *esikanta*, jos kokoelman $\mathcal{A}$ jäsenten äärelliset leikkaukset muodostavat topologian $\mathcal{T}$ kannan. Tämän kannan jäsenet ovat siis muotoa $\bigcap\{A_k : k \in K\}$, jossa K on äärellinen (muuttuva) indeksijoukko ja $A_k \in \mathcal{A}$ kaikilla $k \in K$.

Määritelmä 2.38. (Numeroituvuusaksiomat) Olkoon $j \in \{1, 2\}$. Sanomme, että avaruus X on N_j-avaruus tai lyhyesti N_j, jos se toteuttaa alla olevan ehdon (N_j):

(N1) Jokaisella pisteellä $a \in X$ on numeroituva ympäristökanta.

(N2) Avaruudella X on numeroituva kanta.

Ehtoja $(N1)$ ja $(N2)$ sanotaan ensimmäiseksi ja toiseksi numeroituvuusaksiomaksi.

Lause 2.39. *Olkoon X topologinen avaruus, joka toteuttaa ensimmäisen numeroituvuusaksiooman. Jos s on nyt jonon S kasautumisarvo, niin jonolla S on olemassa osajono, joka suppenee kohti pistettä s.*

Todistus. Oletaan, että s on jonon (S_n) kasautumisarvo. Koska avaruus X toteuttaa ensimmäisen numeroituvuusaksiooman, on pisteellä s olemassa numeroituva ympäristökanta $V_1, V_2, \ldots$.

Olkoon $W_1 = V_1$, $W_2 = V_1 \cap V_2$, $W_3 = V_1 \cap V_2 \cap V_3 \ldots$. Jatketaan näin käyden läpi kaikki ympäristökannan (V_j) jäsenet. Näin saatu (W_j) on myös pisteen s ympäristökanta ja lisäksi sillä pätee $W_{j+1} \subset W_j$.

Valitaan seuraavaksi kaikilla $i \in \mathbb{N}$ n_i siten, että $n_i > n_{i-1}$ ja $S_{n_i} \in W_i$. Nyt (S_{n_i}) on jonon (S_n) sellainen osajono, joka suppenee kohti pistettä s. $\square$

Määritelmä 2.40. (Lindelöf-avaruus) Avaruus X on Lindelöf-avaruus tai *Lindelöf*, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite.

Määritelmä 2.41. (Homeomorfismi) Kuvaus $f : X \to Y$ on *homeomorfismi*, jos

1. f on bijektio
2. f on jatkuva
3. f^{-1} on jatkuva.

Tällöin voidaan merkitä $f : X \approx Y$. Sanomme myös, että X on *homeomorfinen* Y:n kanssa, mitä voidaan merkitä $X \approx Y$. Topologiset avaruudet jakautuvat keskenään erilaisiin homeomorfismiluokkiin.

3 Metriset ja metristyvät avaruudet ja kompaktius

Määritelmä 3.1. (Metriikka) Olkoon X joukko. Kuvausta $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ sanotaan metriikaksi eli etäisyydeksi, jos seuraavat ehdot ovat voimassa kaikilla $x, y, z \in X$:

1. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) = 0$ tasan silloin, kun $x = y$

Määritelmä 3.2. (Metrinen avaruus) Metriikalla d varustettua joukkoa X sanotaan metriseksi avaruudeksi. Toisin sanottuna metrinen avaruus on pari (X,d), jossa X on joukko ja d on metriikka joukossa X. Metrisen avaruuden alkioita kutsutaan tavallisesti pisteiksi.

***Esimerkki* 3.3.** Suomen rautatieliikennepaikkoja ja niiden välisiä etäisyyksiä rautateitse voidaan tarkastella metrisenä avaruutena.
Olkoon siis X Suomen rautatieliikenneasemien muodostama joukko ja $d(x,y)$ etäisyys rautateitse asemalta x asemalle y, kun $x, y \in X$. Tällöin d voidaan osoittaa metriikaksi joukossa X osoittamalla, että kaikki kolme metriikan määritelmässä 2.1 mainittua ehtoa pätevät.
Huomataan myös, ettei vastaavalla tavalla voida määritellä metristä avaruutta koko maailman rautatieliikenneasemien joukossa. Merkitään koko maailman rautetieliikenneasemien muodostamaa joukkoa J:llä. Merkitään $x =$ Yhdysvaltojen New Yorkin rautatieasema Grand Central Terminal ja $y =$ Iso-Britannian Lontoon Paddingtonin rautatieasema. Nyt $x \in J$ ja $y \in J$. Kuitenkaan näiltä asemilta ei pääse lainkaan rautateitse toinen toistensa luo sillä asemat sijaitsevat eri mantereilla eikä niiden välillä ole siis rautatieyhteyttä. Siispä metriikkaa $d(x,y)$ ei ole määritelty. Näin ollen koko maailman rautatieasemat ja näiden väliset etäisyydet rautateitä pitkin eivät muodosta metristä avaruutta.

Määritelmä 3.4. (Tavallinen metriikka) Normiavaruuden $\mathbb{R}^n$ tavallisella metriikalla tarkoitetaan euklidista metriikkaa eli

$$d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$$

Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ käytetään aina tavallista metriikkaa, ellei toisin mainita.

Määritelmä 3.5. (Osajoukon metriikka) Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $A \subset X$. Tällöin metriikan d rajoittuma $d_A = d|(A \times A)$ on selvästi metriikka joukossa A. Sanomme metriikkaa d_A metriikan d *indusoimaksi* metriikaksi joukossa A.

Näin ollen (A, d_A) on metrinen pari. Käsiteltäessä metristen avaruuksien osajoukkoja metrisinä avaruuksina, käytetään indusoitua metriikkaa, ellei toisin mainita.

Määritelmä 3.6. (Tuloavaruuden metriikka) Olkoon (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Näiden karteesisen tuloavaruuden $Z = X \times Y$ metriikka voidaan määritellä usealla eri tavalla metriikkojen d ja d' avulla. Tuloavaruuden Z topologiset ja useimmat metriset ominaisuudet eivät riipu siitä, mitä näistä metriikoista käytetään. Tuloavaruuden Z metriikat e_0, e_1 ja e_2 määritellään seuraavasti. Olkoon $z = (x, y)$ ja $z' = (x', y')$ avaruuden Z pisteitä. Tällöin

$$\begin{aligned} e_0(z, z') &= \max(d(x, x'), d'(y, y')) \\ e_1(z, z') &= d(x, x') + d'(y, y') \\ e_2(z, z') &= \sqrt{d(x, x')^2 + d'(y, y')^2}. \end{aligned}$$

Todistus sille, että nämä todella ovat metriikoita löytyy Jussi Väisälän teoksesta *Topologia I* sivuilta 73-74.

Jokainen joukon X metriikka määrää joukolle X topologian $\mathcal{T}_d$. Tämä tapahtuu siksi, että metrisen avaruuden (X, d) avoimien joukkojen joukko $\mathcal{T}_d$ on topologia avaruudessa X. Metrinen avaruus on siis myös aina topologinen avaruus. Tarkastellaan seuraavaksi tätä metristen avaruuksien ja topologisten avaruuksien suhdetta tarkemmin.

Määritelmä 3.7. (Metristen ja topologisten avaruuksien suhde)

Metrisillä avaruuksilla avoimet joukot määritellään avointen kuulaympäristöjen avulla. Määritelmän mukaan metrisen avaruuden (X, d) osajoukko $U \subset X$ on avoin avaruudessa X, jos ja vain jos sen jokaisella pisteellä $x \in U$ on sellainen avoin kuulaympäristö $B(x, r) = \{y \in X : d(y, x) < r)\}$, että $B(x, r) \subset U$. Tämä voidaan ilmaista myös siten, että metrisen avaruuden osajoukko U on topologian $\mathcal{T}_d$ jäsen, jos ja vain jos jokaista $x \in U$ kohti on olemassa sellainen $r > 0$, että metrisen avaruuden (X, d) avoin kuula eli avoin d-kuula $B(x, r)$ sisältyy osajoukkoon U.

Avaruuden X metriikkojen joukosta saadaan siis muodostettua kuvaus $d \to \mathcal{T}_d$ avaruuden X topologioiden joukkoon.

On hyvä huomata, ettei tämä kuvaus ole yleensä injektio sillä esimerkiksi $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{2d}$. Tällöin sanomme metriikoita d ja $2d$ *ekvivalenteiksi.*

Kuvaus $d \to \mathcal{T}_d$ ei ole myöskään yleensä surjektio. Esimerkiksi oletetaan, että $X = \{a, b\}$ ja $a \neq b$. Tällöin jokaista $x \in \{a\}$ eli yksiön ainoaa jäsentä a kohti on olemassa sellainen $r = d(a, b) > 0$, että avoin kuula $B(a, d(a, b))$ sisältyy joukkoon $\{a\}$. Näin ollen siis $\{a\} \in \mathcal{T}_d$. Kuitenkin $\mathcal{T}_{mini} = \{\emptyset, X\}$. Koska kuitenkin kaikilla metriikoilla $\{a\} \in \mathcal{T}_d$, niin $\mathcal{T}_{mini}$ ei voi olla minkään metriikan määräämä tässä avaruudessa. Kuvaus $d \to \mathcal{T}_d$ ei siis ole surjektio.

Jos topologiselle avaruudelle $(X, \mathcal{T})$ on olemassa metriikka d, jolla $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, niin topologista avaruutta kutsutaan *metristyväksi.* Erikoistapauksena voidaan mainita diskreetti avaruus, joka on aina metristyvä, sillä kun d on avaruuden X $\{0, 1\}$-metriikka, jossa $d(x, y) = 1$, kun $x \neq y$ ja $d(x, x) = 0$, niin $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$.

Koska kuvaus $d \to \mathcal{T}_d$ ei ole surjektio, voidaan topologisten avaruuksien avulla käsitellä tilanteita, joihin metriset avaruudet eivät riitä. Topologiset avaruudet eivät kuitenkaan varsinaisesti ole metristen avaruuksien yleistyksiä, sillä avaruuden metriikka kertoo monesti enemmän avaruudesta kuin sen topologia. Esimerkiksi täydellisyys, tasainen jatkuvuus ja tasainen suppeneminen ovat hyödyllisiä käsitteitä metrisissä avaruuksissa, mutta niillä ei ole juurikaan mielekyyttä topologisissa avaruuksissa. Metrisellä ja topologisella avaruudella on siis vahva yhteys, mutta niitä ei voi yhtenäistää yhdeksi ja samaksi käsitteeksi.

Metrisissä avaruuksissa kompaktiutta voidaan lähestyä joko jonojen ja peitteiden avulla. Jonoilla määritelty kompaktius on jossain määrin helpommin omaksuttava kuin peitteillä määritelty, minkä vuoksi onkin hyvä käsitellä sitä ensimmäisenä.

Määritelmä 3.8. Metrinen avaruus on kompakti, jos sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono.

***Esimerkki* 3.9.** 1. Metrisen avaruuden (X, d) osajoukko A on myös metrinen avaruus (A, d_A). Siispä osajoukko A on kompakti, jos jokaisella A:n jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain pistettä $a \in A$.
2. Äärellinen joukko on aina kompakti, sillä sen jokaisella jonolla on aina osajonona vakiojono $(a, a, a, a...)$.
3. $\emptyset$ on kompakti tyhjän joukon logiikalla. Toisaalta voidaan haluttaessa myös lisätä tyhjän joukon kompaktius kompaktiuden määritelmään.
4. Avoin väli $]a, b[$ tai puoliavoin väli $[a, b[$ ei ole kompakti, sillä esimerkiksi jonolla $(x_n) = (b - \frac{b-a}{2n})$ ei ole osajonoa, joka suppenisi kohti välin pistettä.

Seuraavaa lausetta varten tarvitaan avuksi seuraavat metrisiä avaruuksia koskevat apulauseet. Näiden apulauseiden todistukset löytyvät Jussi Väisälän teoksesta *Topologia I* sivuilta 75, 79 ja 82.

Apulause 3.10. Metrisen avaruuden (X, d) metriikka $d : X \times X \to \mathbb{R}$ on jatkuva.

Apulause 3.11. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja $A \subset X$. Oletetaan lisäksi, että $a \in X$. Nyt $a \in \overline{A}$, jos ja vain jos on olemassa sellainen avaruuden X jono (x_n), että $x_n \in A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja (x_n) suppenee kohti pistettä a.

Apulause 3.12. Jos (x_n) suppenee kohti pistettä a ja (y_k) on on jonon (x_n) osajono, niin myös (y_k) suppenee kohti pistettä a.

Lause 3.13. *Jos $A \subset X$ on kompakti, niin A on suljettu metrisessä avaruudessa X.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ kompakti ja $c \in \overline{A}$. Nyt apulauseen 3.11 mukaan joukossa A on olemassa jono (x_n), joka suppenee kohti pistettä c. Lisäksi koska A on kompakti, suppenee jonon (x_n) jokin osajono (y_k) kohti jotakin pistettä $a \in A$. Koska kuitenkin (x_n) suppeni kohti pistettä c, täytyy lauseen 3.12 mukaan myös jokaisen jonon (x_n) osajonon supeta kohti pistettä c. Koska jonojen raja-arvot ovat yksikäsitteisiä metrisissä avaruuksissa, täytyy olla $a = c$ eli $c \in A$. Täten $\overline{A} \subset A$ eli A on suljettu. $\square$

Lause 3.14. *Jos $A \subset X$ on suljettu ja X on kompakti metrinen avaruus, niin A on kompakti.*

Todistus. Olkoon (x_n) jono joukossa A. Nyt (x_n) on myös avaruuden X jono. Koska X on kompakti, suppenee jonon (x_n) jokin osajono (x_{n_k}) kohti jotain pistettä $a \in X$. Koska A on suljettu, täytyy olla $a \in A$. A on siis kompakti. $\square$

Vaikka metrisissä avaruuksissa kompaktilla ja suljetulla joukolla on läheinen yhteys ja paljon samoja ominaisuuksia, on kyseessä silti kaksi eri asiaa. Puhuttaessa suljetuista joukoista tarvitaan aina tieto, missä avaruudessa joukko on suljettu. Käsitettä "suljettu"sanotaankin relatiiviseksi käsitteeksi. Kompakti joukko ei tätä tietoa tarvitse ja joukon A kompaktius riippuukin vain avaruudesta (A, d_A). Sanotaan, että kompaktius on absoluuttinen käsite. Suljettu joukko on siis aina suljettu jossakin, mutta kompakti joukko on kompakti riippumatta "ulkoavaruudesta".

Lause 3.15. *Kompakti metrinen avaruus (X, d) on rajoitettu eli $d(X) = sup\{\, d(x,y) : x \in X$ ja $y \in X\,\} < \infty$.*

Todistus. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että avaruus X on kompakti, muttei rajoitettu. Valitaan piste $a \in X$. Koska X ei ole rajoitettu, voidaan jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti valita piste $x_n \in X$ siten, että $d(x_n, a) > n$. Olemme nyt saaneet muodostettu jonon (x_n), jossa $x_n \in X$ kaikilla $n \in N$. Koska X on kompakti, on jonolla (x_n) olemassa osajono (x_{n_k}), joka suppenee kohti jotain pistettä $b \in X$. Nyt $d((x_{n_k}), a)$ suppenee kohti etäisyyttä $d(b, a)$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä $d(x_{n_k}, a) > n_k \geq k$ eli, kun k kasvaa rajatta, myös pisteiden x_{n_k} ja a etäisyys kasvaa rajatta. Olemme päätyneet ristiriitaan eli alkuperäinen väite on tosi: kompakti avaruus X on siis rajoitettu. $\square$

Seuraavia todistuksia varten tarvitaan seuraava apulause. Apulauseen todistus löytyy Jussi Väisälän kirjasta *Topologia I* sivuilta 80-82.

Apulause 3.16. Tuloavaruuden $Z = X \times Y$ jono $(z_n) = ((x_n, y_n))$ suppenee kohti pistettä $c = (a, b) \in Z$, jos ja vain jos $x_n \to a$ avaruudessa X ja $y_n \to b$ avaruudessa Y.

Lause 3.17. *(Heine-Borel) Olkoon $A \subset R^n$. Nyt A on kompakti jos ja vain jos A on suljettu ja rajoitettu.*

Todistus. " $\Rightarrow$ " Jos A on kompakti, niin lauseiden 3.13 ja 3.15 nojalla A on myös suljettu ja rajoitettu.
" $\Leftarrow$ " Olkoon $A \subset R^n$ suljettu ja rajoitettu. Nyt myös A:n projektiot $pr_j A$ ovat rajoitettuja, kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Olkoon $J = (a_n)$ jono A:ssa. Koska rajoitetulla reaalilukujonolla on aina suppeneva osajono, on jonolla J olemassa sellainen osajono $J_1 = (b_1, b_2, \ldots)$, että sen ensimmäisten koordinaattien jono $(pr_1(b_1), pr_1(b_2), \ldots)$ suppenee kohti jotain lukua $a_1 \in \mathbb{R}$.

Samalla tavoin voimme löytää jonolta J_1 sellaisen osajonon $J_2 = (c_1, c_2, \ldots)$, että sen toisien koordinaattien jono $(pr_2(c_1), pr_2(c_2), \ldots)$ suppenee kohti jotain lukua $a_2 \in \mathbb{R}$.

Jatkamalla näin voidaan kaikilla $k \in \{1, \ldots, n\}$ löytää jonon J_{k-1} osajono $J_k = (v_1, v_2, \ldots)$ sillä tavoin, että sen k:nsien koordinaattien jono $(pr_k(v_1), pr_k(v_2), \ldots)$ suppenee kohti lukua $a_k \in \mathbb{R}$.

Käymällä kaikki koordinaatit näin läpi päädymme lopulta jonoon $J_n = (w_i)$, jolle kaikilla $j \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $pr_j(w_i) \to a_j$. Apulauseen 3.16 yleistyksen nojalla siis $w_i \to a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Tämän lisäksi $a \in A$, koska A on suljettu joukko. Olemme siis saaneet muodostettua joukon A jokaiselle jonolle suppenevan osajonon eli A on kompakti. □

Lause 3.18. *Kompaktien avaruuksien (X, d) ja (Y, d) karteesinen tulo $X \times Y$ on kompakti.*

Todistus. Oletetaan, että avaruudet (X, d) ja (Y, d) ovat kompakteja. Tarkastellaan näiden avaruuksien karteesista tuloa $X \times Y$. Oletetaan, että $J = (z_n)$ on jono avaruudessa $X \times Y$. Voimme esittää jonon myös muodossa $J = ((x_n, y_n))$, missä (x_n) on jono avaruudessa X ja (y_n) jono avaruudessa Y. Koska avaruus X on kompakti, on jonolla J sellainen osajono J_1, että sen ensimmäisten koordinaattien jono (x_{n_k}) suppenee kohti pistettä $a \in X$. Koska myös Y on kompakti, on jonolla J_1 olemassa sellainen osajono J_2, että sen toisten koordinaattien jono (y_{n_l}) suppenee kohti pistettä $b \in Y$. Nyt jonon J_2 ensimmäisten koordinaattien jono suppenee kohti pistettä $a \in X$ ja toisten koordinaattien jono suppenee kohti pistettä $b \in Y$. Siispä apulauseen 3.16 nojalla jono J_2 suppenee kohti pistettä $(a, b) \in X \times Y$. Olemme siis löytäneet jonolle $J = (z_n)$ suppenevan osajonon . Tuloavaruus $X \times Y$ on siis kompakti. □

Lause 3.19. *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva ja X kompakti. Olkoon (y_n) jono joukossa fX. Valitaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $x_n \in X$, jolla $f(x_n) = y_n$. Pisteet $x_n \in X$ muodostavat jonon avaruudessa X. Koska X on kompakti, niin jonolla (x_n) on osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, joka suppenee kohti jotain pistettä $a \in X$. Koska f on jatkuva kaikkialla avaruudessa X, niin sille pätee $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(a)$, kun $x_{n_k} \to a$. Täten fX on kompakti. □

Lause 3.20. *Jos $X \neq \emptyset$ on kompakti ja jos $f : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f saa avaruudessa X pienimmän ja suurimman arvonsa.*

Todistus. Lauseen 3.19 nojalla fX on kompakti avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukko. Koska joukko fA on kompakti, on se lauseen 3.17 nojalla myös suljettu ja rajoitettu. Suljetulla ja ylhäältä rajoitetulla reaaliavaruuden $\mathbb{R}$ osajoukolla $\sup A \in A$ eli $\sup A = \max A$ eli joukolla on suurin arvo. Vastaava päättely voidaan toistaa infimumin kohdalla, jolloin saamme tietää, että suljetulla ja alhaalta rajoitetulla reaaliavaruuden osajoukolla on pienin arvo. Koska fA on kompakti avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukko, on se myös suljettu ja rajoitettu sekä alhaalta että ylhäältä. Edellä olevan päättelyn mukaan joukosta fA löytyy siis pienin ja suurin arvo. □

Lause 3.21. *Jos $\emptyset \neq A \subset X$ ja A on kompakti, niin on olemassa sellaiset $a, b \in A$, että $d(a,b) = d(A)$.*

Todistus. Lauseen 3.18 nojalla $A \times A$ on kompakti ja apulauseen 3.10 nojalla $d : A \times A \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Nyt lauseen 3.20 nojalla d saa suurimman arvonsa jossakin pisteessä $(a,b) \in A \times A$. Tällöin $d(a,b) = d(A)$. $\square$

Jonojen lisäksi kompaktius voidaan metrisissä avaruuksissa määritellä myös peitteiden avulla. Määritelmän mukaan avaruus on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Seuraavaksi onkin esitetty kompaktiuden peitteillä määrittelyyn tarvittavia määritelmiä ja lauseita. Lisäksi osoitetaan, että peitteillä määritelty kompaktius on yhtäpitävä jonokompaktiuden kanssa metrisissä avaruuksissa.

Lause 3.22. *(Lebesguen peitelause) Olkoon $A \subset X$ kompakti ja olkoon $\mathcal{D}$ joukon A avoin peite. Tällöin on olemassa sellainen $\lambda > 0$, että jos $x \in A$, niin $B(x, \lambda) \subset Y$ jollakin $Y \in \mathcal{D}$.*

Lisäksi, jos joukon A osajoukko $B \subset A$ ja $d(B) < \lambda$, niin $B \subset Y$ jollakin $Y \in \mathcal{D}$.

Todistus. Todistetaan vastaoletuksen kautta, että $\lambda = \frac{1}{n}$ toteuttaa lauseen alkuosan jollain $n \in \mathbb{N}$. Tehdään siis vastaoletus: mikään $\lambda = \lambda_n = \frac{1}{n}$ ei toteuta lauseen alkuosaa, kun $n \in \mathbb{N}$. Jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti voidaan siis valita sellainen $x_n \in A$, ettei kuula $B(x_n, \lambda_n)$ sisälly mihinkään peitteen $\mathcal{D}$ jäseneen. Ollaan saatu muodostettua joukon A jono (x_n). Koska A on kompakti, niin sen jokaisella jonolla on jokin kasautumisarvo eli myös jonolla (x_n) on kasautumisarvo $a \in A$. Koska $\mathcal{D}$ on joukon A peite, niin a kuuluu johonkin peitteen $\mathcal{D}$ jäseneen Y. Koska $\mathcal{D}$ oli avoin peite, on myös Y avoin joukko. Näin ollen se sisältää pisteen a jonkin kuulaympäristön $B(a, r)$.

Valitaan luku $k \in \mathbb{N}$, jolla pätee $k > \frac{2}{r}$ eli $r > \frac{2}{k}$. Koska a on jonon (x_n) kasautumisarvo, niin voidaan valita sellainen $n > k$, että $x_n \in B(a, \frac{1}{k})$. Nyt $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(a, r)$, sillä jos $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$, niin

$$d(y,a) \leq d(y, x_n) + d(x_n, a) < \frac{1}{n} + \frac{1}{k} < \frac{2}{k} < r.$$

Siis $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B(a, r) \subset Y \in \mathcal{D}$ eli olemme päässeet ristiriitaan. Näin ollen alkuperäinen väite on tosi ja $\lambda = \frac{1}{n}$ toteuttaa lauseen alkuosan jollain $n \in \mathbb{N}$.

Lauseen loppuosa on selvä, jos $B = \emptyset$. Jos $B \neq \emptyset$, valitaan piste $x \in B$. Nyt oletuksen mukaan $d(B) < \lambda$, joten $B \subset B(x, \lambda)$. Nyt ollaan palautettu tilanne lauseen alkuosaan, joka onkin jo todistettu. $\square$

***Huomautus* 3.23.** (Lebesguen luku) Jos $\mathcal{D}$ on kompaktin joukon $A \subset X$ avoin peite, niin jokaista Lebesguen peitelauseen toteuttavaa $\lambda > 0$ sanotaan peitteen $\mathcal{D}$ Lebesguen luvuksi.

Lause 3.24. *Olkoon $A \subset X$. Tällöin A on kompakti, jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Olkoon A kompakti ja olkoon $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ sen avoin peite. Todistetaan vastaoletuksen kautta, että nyt peitteellä $\mathcal{D}$ on olemassa äärellinen osapeite. Tehdään siis vastaoletus ja oletetaan, ettei mikään peitteen $\mathcal{D}$ äärellinen osakokoelma peitä joukkoa A eli peitteellä $\mathcal{D}$ ei ole äärellistä osapeitettä. Lauseen 3.22 mukaan peitteelle $\mathcal{D}$ on olemassa Lebesguen luku $\lambda > 0$. Lebesquen lukua apunakäyttäen pystytään konstruoimaan pistejono (x_n), jolla ei ole kasautumisarvoa joukossa A eli joka ei myöskään suppene kohti mitään pistettä $x \in A$. Tällöin ollaan saatu aikaa selvä ristiriita. Konstruoidaan jono seuraavalla tavalla.

Piste $x_1 \in A$ valitaan mielivaltaisesti. Tällöin on olemassa sellainen $Y_1 \in \mathcal{D}$, että $B(x_1, \lambda) \subset Y_1$. Nyt täytyy kuitenkin olla $A \not\subset Y_1$ sillä muutoin $\{Y_1\}$ olisi peitteen $\mathcal{D}$ äärellinen osapeite ja oletuksemme oli, ettei tällaista ole olemassa. Voidaan siis valita piste $x_2 \in A \backslash Y_1$. Käyttäen taas luvun λ ominaisuutta löydetään $Y_2 \in \mathcal{D}$, jolla $B(x_2, \lambda) \subset Y_2$. Koska $Y_1 \cup Y_2$ ei oletuksemme mukaan voi peittää joukkoa A, voidaan valita piste $x_3 \in A \backslash (Y_1 \cup Y_2)$. Jatkamalla tällä tavoin saadaan muodostettua joukon A jono (x_n) ja peitteen $\mathcal{D}$ jäsenet Y_n, joilla kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$B(x_n, \lambda) \subset Y_n, \quad x_{n+1} \in A \backslash (Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_n).$$

Valitaan nyt $k \in \mathbb{N}$ siten, että $1 \leq k < n$. Tällöin $x_n \notin Y_k$. Koska kuitenkin $B(x_k, \lambda) \subset Y_k$, seuraa tästä, että $d(x_n, x_k) \geq \lambda$. Tämän täytyy kuitenkin metriikan määritelmän symmetria-ominaisuuden nojalla päteä kaikilla $n \neq k$. Jos nyt oletettaisiin, että jonolla (x_n) olisi kasautumisarvo a, täytyisi kaikilla pisteen a ympäristöillä U päteä $x_n \in U$ äärettömän monella indeksillä n. Kuitenkin jos $U = B(a, \frac{\lambda}{2})$, ei tähän ympäristöön voi kuulua x_n äärettömän monella n, sillä $d(x_n, x_k) \geq \lambda$ kaikilla $n \neq k$. Jonolla (x_n) ei siis ole kasautumisarvoa ja näin ollen A ei voi olla kompakti joukko. Tämä on ristiriidassa tehtyjen oletusten kanssa, joten alkuperäinen väite on tosi. Kompaktin avaruuden jokaisella avoimella peitteellä täytyy siis olla äärellinen osapeite.

"$\Leftarrow$"Oletetaan, että joukon A jokaisella avoimella peitteellä $\mathcal{D}$ on äärellinen osapeite. Haluamme nyt osoittaa, että A on kompakti joukko eli sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Tehdään jälleen vastaoletus eli oletetaan, että joukossa A on olemassa jokin jono (x_n), jolla ei ole suppenevaa osajonoa. Tästä seuraa, ettei jonolla (x_n) ole yhtään kasautumisarvoa joukossa A . Tällöin jokaisella pisteellä $a \in A$ on sellainen ympäristö $Y(a)$, että $x_n \in Y(a)$ vain äärellisen monella luvulla $n \in \mathbb{N}$.

Kokoelma $\{Y(a) : a \in A\}$ on joukon A avoin peite, joten sillä on oletuksen mukaan olemassa äärellinen osapeite, joka voidaan esittää muodossa $\{Y(a_1), \ldots, Y(a_k)\}$. Nyt $x_n \in A \subset Y(a_1) \cup \ldots \cup Y(a_k)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Näin olle täytyy olla, että jokin $Y(a_j)$ sisältää äärettömän monta jonon (x_n) jäsentä. Tämä on ristiriidassa alkuperäisen ympäristön $Y(a_j)$ valinnan kanssa. Siispä jos joukon A jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite, on A myös kompakti.

$\square$

Metrisillä avaruuksilla saadaan siis määriteltyä kompaktius myös peitteiden kautta ja tämä määritelmä on yhtäpitävä jonoilla määritellyn kompaktiuden kanssa:

Määritelmä 3.25. Metrinen avaruus on kompakti jos ja vain jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Seuraavaksi esitetään vielä muutamia metristyviä topologisia avaruuksia koskevia lauseita.

Lause 3.26. *Jokainen metristyvä avaruus on Hausdorff.*

Todistus. Olkoon x ja y metrisen avaruuden eri pisteitä. Nyt näille voidaan valita erilliset ympäristöt $U = B(x,r)$ ja $Y = B(y,r)$, missä $r = \frac{d(x,y)}{2}$. Nyt Hausdorffin ehto toteutuu. $\square$

Metristyvyys on topologinen ominaisuus. Metristyvillä topologisilla avaruuksilla onkin seuraava tärkeä ominaisuus.

Lause 3.27. *Jos $(X,\mathcal{T})$ on metristyvä ja $(X,\mathcal{T}) \approx (Y,\mathcal{T}')$, niin myös $(Y,\mathcal{T}')$ on metristyvä.*

Todistus. Olkoon $f : (Y,\mathcal{T}') \approx (X,\mathcal{T})$ ja olkoon d avaruuden X topologian määräävä metriikka. Asettamalla $e(a,b) = d(f(a), f(b))$ saadaan avaruudelle Y metriikka e. Tällöin f on isometria $(Y,e) \to (X,d)$ eli f säilyttää etäisyydet. Näin ollen f on siis myös homeomorfismi $(Y,\mathcal{T}_e) \to (X,\mathcal{T}_d)$. Koska $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, saadaan homeomorfismi $id = f^{-1} \circ f : (Y,\mathcal{T}') \to (Y,\mathcal{T}_e)$, joten $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_e$. $\square$

Kuten metrisissä avaruuksissa, niin myös metristyvissä avaruuksissa kompaktiutta voidaan lähestyä joko peitteiden tai jonojen avulla. Ja yhä edelleen samoin kuin metrisissä avaruuksissa, niin myös metristyvissä avaruuksissa nämä kaksi asiaa ovat yhtäpitäviä.

Lause 3.28. *Metristyvä avaruus on kompakti jos ja vain jos*

1. *sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono*
2. *sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.*

Todistus. Käytännössä sama kuin lauseen 3.24 todistus. $\square$

4 Kompaktius peitteillä topologisissa avaruuksissa

Oletetaan koko kappaleen ajan, että $(X, \mathcal{T})$ ja $(Y, \mathcal{T}')$ ovat topologisia avaruuksia.

Metrisissä ja metristyvissä avaruuksissa jonokompaktiuden määritelmä on yhtäpitävä peitteillä määritellyn kompaktiuden kanssa. Topologisissa avaruuksissa näin ei kuitenkaan aina ole ja kyseessä onkin kaksi eri asiaa. Jonoilla määriteltyä kompaktiutta kutsutaankin *jonokompaktiudeksi* ja peitteillä määritelty kompaktius on varsinainen kompaktiuden käsite. Yleistämällä jonot verkoiksi tai filttereiksi voidaan saada peitteillä määritellyn kompaktiuden kanssa yhtäpitävä määritelmä kompaktiudelle. Tämä tehdäänkin myöhemmissä kappaleissa.

Myöhemmissä kappaleissa palataan myös vielä jonokompaktiuden ja kompaktiuden irrallisuuteen toisistaan ja konstruoidaan esimerkkiavaruus, joka on kompakti, muttei jonokompakti. Samoin konstruoidaan jonokompakti avaruus, joka ei ole kompakti.

Määritelmä 4.1. (Jonokompakti topologinen avaruus) X on jonokompakti, jos sen jokaisella jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain sen pistettä.

Määritelmä 4.2. (Kompakti topologinen avaruus) Avaruus X on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

Joukko $A \subset X$ on kompakti, jos se on kompakti topologinen avaruus relatiivitopologiassa.

Sama tiivistettynä:

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{T},\ \cup \mathcal{D} = X \Rightarrow \text{on olemassa äärellinen } \mathcal{A} \subset \mathcal{D}, \text{ jolla} \cup \mathcal{A} = X.$$

Lause 4.3. *Joukko $A \subset X$ on kompakti, jos ja vain jos sen jokaisella X-avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Oletetaan, että $A \subset X$ on kompakti. A on siis kompakti avaruus relatiivitopologiassa, joten sen avoimella peitteellä $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)|A$ on äärellinen osapeite $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Jos nyt $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon A X-avoin peite, niin myös sen rajoittuma $\mathcal{F}|A$ on joukon A peite. Lisäksi $\mathcal{F}|A$ on joukon A avoin peite relatiivitopologiassa. Näin ollen sillä on myös äärellinen osapeite $\mathcal{F}_0|A$. Tällöin $\mathcal{F}_0$ on joukon A äärellinen peite ja lisäksi $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ eli joukon A X-avoimella peitteellä on äärellinen osapeite.

"$\Leftarrow$"Oletetaan, että jokaisella joukon A X-avoimella peitteellä on äärellinen osapeite. Jos $\mathcal{F}$ on joukon A avoin peite relatiivitopologiassa, niin se voidaan myös esittää muodossa $\mathcal{F} = \mathcal{D}|A$, missä $\mathcal{D}$ on joukon A X-avoin peite. Siispä peitteellä $\mathcal{D}$ on äärellinen osapeite $\mathcal{D}_0$. Nyt myös $\mathcal{D}_0|A$ on joukon A äärellinen osapeite ja lisäksi $\mathcal{D}|A \subset \mathcal{F}$ eli joukko A on kompakti topologinen avaruus relatiivitopologiassa. $\square$

Kaikki, mikä voidaan lausua avointen joukkojen avulla, voidaan lausua myös suljettujen joukkojen avulla, koska topologisissa avaruuksissa avoimet ja suljetut joukot ovat toistensa komplementteja. Avointen joukkojen yhdisteitä koskevat kysymykset voidaan siis palauttaa suljettujen joukkojen leikkauksia koskeviksi.

Esitetäänkin seuraavaksi kompaktiuden määritelmä suljettujen joukojen avulla. Oletetaan $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ja merkitään $\mathcal{D}^* = \{\complement A : A \in \mathcal{D}\}$. De Morganin lakien nojalla $\cup\mathcal{D} = \complement(\cap\mathcal{D}^*)$. Huomataan, että $\mathcal{D}$ on avaruuden X peite, jos ja vain jos $\cap\mathcal{D}^* = \emptyset$.

Seuraavaan lauseeseen tarvitaan käsite ÄLO eli *äärellisten leikkausten ominaisuus.* Sanomme, että kokoelmalla $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ on ÄLO, jos kaikilla äärellisillä ja epätyhjillä $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ pätee $\cap\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Lause 4.4. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä avaruudelle X:*

(1) X on kompakti.

(2) Olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma avaruuden X suljettuja joukkoja ja olkoon $\cap\mathcal{F} = \emptyset$. Tällöin on olemassa sellainen äärellinen $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, että leikkaus $\cap\mathcal{F}_0 = \emptyset$.

(3) Jos $\mathcal{F}$ on kokoelma avaruuden X suljettuja joukkoja ja jos kokoelmalla $\mathcal{F}$ on ÄLO, niin $\cap\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Todistus. Siirtymällä kompaktiuden määritelmässä komplementteihin, nähdään heti, että (1) $\Leftrightarrow$ (2) ja (2) $\Leftrightarrow$ (3). □

Seuraavaksi esitetään erilaisia kompakteihin topologisiin avaruuksiin liittyviä lauseita ja niiden todistuksia.

Lause 4.5. *Kompaktin avaruuden suljettu osajoukko on kompakti.*

Todistus. Olkoon X kompakti avaruus ja A avaruuden X suljettu osajoukko. Olkoon $\mathcal{D}$ joukon A X-avoin peite. Tällöin $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cup \{X \setminus A\}$ on avaruuden X avoin peite. Koska X on kompakti, on peitteellä $\mathcal{D}_1$ äärellinen osapeite, joka voidaan kirjoittaa muodossa $\mathcal{D}_0 \cup \{X \setminus A\}$, jossa $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$. Nyt $\mathcal{D}_0$ peittää joukon A eli se on joukon A avoimen peitteen $\mathcal{D}$ äärellinen osapeite. Näin ollen A on kompakti. □

Lause 4.6. *Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti.*

Todistus. Olkoon X kompakti avaruus ja $f : X \to Y$ jatkuva. Olkoon $\mathcal{D}$ kuvajoukon fX peite, joka on Y-avoin. Tällöin $\{f^{-1}V : V \in \mathcal{D}\}$ on avaruuden X peite ja lisäksi avoin, koska f on jatkuva. Koska X on kompakti, tällä peitteellä on äärellinen osapeite, joka voidaan kirjoittaa muodossa $\{f^{-1}V_1, \dots, f^{-1}V_n\}$, jossa $V_j \in \mathcal{D}$. Nyt $\{V_1, \dots, V_n\}$ on kuvajoukon fX peite. Siis fX on kompakti. □

Lause 4.7. *Jos $X \neq \emptyset$ on kompakti ja $f : X \to R$ on jatkuva, niin f saa suurimman ja pienimmän arvonsa.*

Todistus. Edellisen lauseen perusteella joukko $fX \subset \mathbb{R}$ on kompakti. Lauseen 3.17 nojalla fX on joukon $\mathbb{R}$ kompaktina osajoukkona suljettu ja rajoitettu. Suljetulla ja ylhäältä rajoitetulla reaaliavaruuden $\mathbb{R}$ osajoukolla $\sup A \in A$ eli sup$A$ =max$A$ eli joukolla on suurin arvo. Vastaava päättely voidaan toistaa infimumin kohdalla, jolloin saamme tietää, että suljetulla ja alhaalta rajoitetulla reaaliavaruuden osajoukolla on pienin arvo. Edellä olevan päättelyn mukaan joukosta fA löytyy siis pienin ja suurin arvo. □

Lause 4.8. *Jos A ja B ovat avaruuden X kompakteja osajoukkoja, niin $A \cup B$ on kompakti.*

Todistus. Olkoon $A \subset X$ ja $B \subset X$ kompakteja. Olkoon $\mathcal{D}$ on joukon $A \cup B$ avoin peite eli $A \cup B \subset \bigcup \mathcal{D}$. Nyt siis myös $A \subset \cup \mathcal{D}$ ja $B \subset \cup \mathcal{D}$ eli $\mathcal{D}$ on myös joukkojen A ja B avoin peite. Koska A on kompakti on peitteellä $\mathcal{D}$ olemassa äärellinen osapeite $\mathcal{D}_1$ siten, että $A \subset \bigcup \mathcal{D}_1$. Samoin koska B on kompakti, niin peitteellä $\mathcal{D}$ on olemassa myös äärellinen osapeite $\mathcal{D}_2$ siten, että $B \subset \bigcup \mathcal{D}_2$. Nyt jos $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, niin $A \cup B \subset \cup D_3$, missä $\mathcal{D}_3$ on peitteen $\mathcal{D}$ äärellinen osapeite. Siispä $A \cup B$ on kompakti. □

Lause 4.9. *Olkoon X Hausdorff ja $A \subset X$ ja $B \subset X$ kompakteja erillisiä joukkoja. Tällöin joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $A \neq \emptyset \neq B$. Oletamme aluksi, että $B = \{b\}$ on yksiö. Valitsemme kullakin $a \in A$ erilliset ympäristöt $a \in U(a)$ ja $b \in V_a(b)$. Nyt siis $U(a)$ on pisteen a ympäristö ja $V_a(b)$ pisteen b ympäristö siten, että $U(a) \cap V_a(b) = \emptyset$. Koska $\{U(a) : a \in A\}$ on joukon A avoin peite, niin sillä on osapeite $\{U(a) : a \in F\}$, jossa $F \subset A$ on äärellinen. Nyt

$$U = \bigcup \{U(a) : a \in F\} \text{ ja } V = \bigcap \{V_a(b) : a \in F\}$$

ovat joukon A ja yksiön $\{b\}$ erilliset ympäristöt.

Olkoon sitten B mielivaltainen kompakti joukko. Edellisen nojalla voimme kullakin $b \in B$ valita erilliset ympäristöt $A \subset U_b(A)$ ja $b \in V(b)$. Koska B on kompakti, niin sillä on peite $\{V(b) : b \in K\}$, jossa $K \subset B$ on äärellinen. Halutut ympäristöt ovat

$$U = \bigcap \{U_b(A) : b \in K\} \text{ ja } V = \bigcup \{V(b) : b \in K\}.$$

□

Lause 4.10. *Kompakti Hausdorffin avaruus on normaali.*

Todistus. Seuraa lauseista 4.5 ja 4.9. □

Lause 4.11. *Jos X on Hausdorff ja $A \subset X$ on kompakti, niin A on suljettu.*

Todistus. Olkoon $x \in X \setminus A$. Lauseen 4.9 mukaan pisteellä x ja joukolla A on erilliset ympäristöt U_x ja V_A. Koska nyt $U_x \subset X \setminus A$ kaikilla $x \in X \setminus A$, niin $X \setminus A = \cup U_x$ eli $X \setminus A$ on avoin. Näin ollen $A = \complement(X \setminus A)$ on suljettu. □

Lause 4.12. *Jos X on kompakti, niin jokaisella avaruuden X jonolla on ainakin yksi kasautumisarvo.*

Todistus. Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että avaruudessa X on olemassa jono, jolla ei ole yhtään kasautumisarvoa. Tällöin jokaisella pisteellä $a \in X$ on ympäristö $U(a)$, joka sisältää jonon jäseniä eli myös pisteitä x_n vain äärellisen määrän. Koska X on kompakti, niin sen avoimella peitteellä $\{U(a) : a \in X\}$ on äärellinen osapeite $\{U(a_1), \dots, U(a_k)\}$. Tästä seuraa, että jonon pisteitä on vain äärellinen määrä, mistä seuraa haluttu ristiriita. □

Jonokompaktiuden ja varsinaisen kompaktiuden lisäksi on olemassa myös muita kompaktiuden käsitteitä. Tässä esitetään kaksi näistä eli numeroituva kompaktius ja kasautumispiste kompaktius.

Määritelmä 4.13. (Numeroituva kompaktius) Topologinen avaruus X on *numeroituvasti kompakti*, jos sen jokaisella numeroituvalla peitteellä on äärellinen osapeite.

Määritelmä 4.14. (Kasautumispiste kompaktius) Topologinen avaruus X on *kasautumispiste kompakti*, jos sen jokaisella äärettömällä osajoukolla on vähintään yksi kasautumispiste.

Lause 4.15. *(Bolzano-Weierstrass) Jos A on topologisen avaruuden kompakti osajoukko, niin A on myös kasautumispiste kompakti.*

Todistus. Tehdään vastaoletus ja oletetaan, että E on kompaktin joukon A sellainen ääretön osajoukko, jolla ei ole kasautumispistettä. Nyt siis mikään $x \in A$ ei ole joukon E kasautumispiste, joten jokaisella pisteellä x on sellainen A-ympäristö U_x, että $E \cap U_x \setminus \{x\} = \emptyset$. Näin ollen joukko $E \cap U_x$ sisältää vain pisteen x. Koska kokoelma $\{U_x\}_{x \in A}$ muodostaa kompaktin joukon A avoimen peitteen, niin täytyy tällä olla myös äärellinen osapeite $A = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Nyt $E = E \cap A = E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap U_i)$ eli E on äärellisen monen joukon yhdiste ja lisäksi jokainen näistä joukoista sisältää korkeintaan yhden pisteen. Siispä E on äärellinen joukko. Ollaan päästy ristiriitaan eli jokaisella joukon A äärettömällä osajoukolla täytyy olla ainakin yksi kasautumispiste. □

Lause 4.16. *Olkoon $a \in X$ ja olkoon $X \setminus U$ kompakti jokaisella pisteen a ympäristöllä U. Tällöin X on kompakti.*

Todistus. Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että X ei ole kompakti. Nyt sillä siis täytyy olla olemassa jokin avoin peite, jolla ei ole äärellistä osapeitettä. Olkoon $\mathcal{A}$ tällainen X:n peite. Koska $\mathcal{A}$ on avaruuden X avoin peite ja $a \in X$, täytyy jonkin pisteen a ympäristön U kuulua peitteeseen eli $U \in \mathcal{A}$.

Nyt kuitenkin oletuksen mukaan $X \setminus U$ on kompakti eli tämän kaikilla avoimilla peitteillä on äärellinen osapeite. Huomataan, että $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \{U\}$ on yksi joukon $X \setminus U$ avoimista peitteistä. Siispä tällä täytyy olla äärellinen osapeite $\mathcal{B}_0$. Koska tällainen osapeite on olemassa, niin myös avaruuden X peitteellä $\mathcal{A}$ on olemassa äärellinen osapeite $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0 \cup \{U\}$. Ollaan siis saatu aikaa ristiriita eli alkuperäinen väite pitää paikkaansa ja X on kompakti. □

Lause 4.17. *Kompakti avaruus on aina Lindelöf.*

Todistus. Kompaktilla avaruudella on aina äärellinen peite. Äärellinen peite on myös numeroituva. Näin ollen kompakti avaruus on Lindelöf. □

5 Kompaktius verkoilla

Metrisissä avaruuksissa kompaktiutta voidaan lähestyä joko jonojen tai peittojen avulla. Aiemmin todettiinkin, ettei tämä onnistu samalla tavoin topologisissa avaruuksissa, vaan jonokompaktius on erillinen käsite itse kompaktiudesta. Jonojen käsitettä voidaan kuitenkin laajentaa ja muokata, jolloin saamme muodostettua *verkon* käsitteen. Verkot ovatkin yleistys jonoille ja verkkojen avulla saadaan muodostettua yhtäpitävä määritelmä peitteillä määritellylle kompaktiudelle. Verkkojen ja peitteiden lisäksi kompaktiutta voitaisiin käsitellä myös niin kutsuttujen filttereiden ja ultrafilttereiden avulla, mutta nämä käsittelytavat jäävät tämän tutkielman ulkopuolelle.

Tämä kappale keskittyy täysin verkkoihin ja esittää siis toisen tavan lähestyä kompakteja topologisia avaruuksia.

Määritelmä 5.1. (suuntaus) Epätyhjän joukon H relaatio $\geqq$ on *suuntaus*, jos kaikilla $a, b, c \in H$ on voimassa:

(1) $a \geqq a$

(2) Jos $a \geqq b$ ja $b \geqq c$, niin $a \geqq c$

(3) Jos $m, n \in H$, niin on olemassa sellainen $p \in H$, että $p \geqq m$ ja $p \geqq n$.

Jos $\geqq$ on joukon H suuntaus, sanotaan paria $(H, \geqq)$ *suunnatuksi joukoksi.*

***Esimerkki* 5.2.** 1. Sekä reaalilukujen joukolla $\mathbb{R}$ että ei-negatiivisten kokonaislukujen joukolla $\mathbb{Z}_+$ on suuntaus $\geq$. Esimerkiksi $0 \in \mathbb{Z}_+$ ja kaikilla $x \in \mathbb{Z}_+$ pätee $x \geq 0$.
2. Pisteen $a \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $\mathcal{U}$ voidaan suunnata relaatiolla $\subset$. Pisteen a kahden ympäristön U ja V leikkaus $U \cap V$ on myös ympäristö pisteelle a ja lisäksi $U \cap V \subset U$ ja $U \cap V \subset V$.

Määritelmä 5.3. (Verkko) Olkoon $S : A \to B$ funktio. $(S, \geqq)$ on *verkko*, jos $\geqq$ on funktion määrittelyjoukon A suuntaus.

Jos $S : A \to B$ funktio ja $H \subset A$ ja $\geqq$ on joukon H suuntaus, niin $\{S_n, n \in H, \geqq\}$ on verkko $\{S|H, \geqq\}$, missä $S|H$ tarkoitetaan, että funktion S määrittelyjoukko on kutistettu joukkoon H inkluusiokuvauksen $j : H \hookrightarrow A$ avulla.

Kutsutaan verkon alkioita jäseniksi.

Verkoille voidaan määritellä seuraavia nimityksiä:
1. Verkko $\{S_n, n \in H, \geqq\}$ sisältyy joukkoon C, jos ja vain jos $S_n \in C$ kaikilla n.
2. Verkko sisältyy lopulta joukkoon C, jos ja vain jos on olemassa sellainen $m \in H$, että jos $n \in H$ ja $n \geqq m$, niin $S_n \in C$.
3. Verkko on toistuvasti joukossa C, jos ja vain jos jokaiselle $m \in H$ on olemassa sellainen $n \in H$, että $n \geqq m$ ja $S_n \in C$

Jos verkko $\{S_n, n \in H, \geqq\}$ on toistuvasti joukossa A, niin silloin joukolla $E = \{n \in H : S_n \in A\}$ on seuraavanlainen ominaisuus: kaikille $m \in H$ on olemassa sellainen $p \in E$, että $p \geqq m$. Näitä joukon H osajoukkoja E kutsutaan *kofinaaleiksi*.

Joukon H suuntaus on myös sen kofinaalin osajoukon E suuntaus, sillä kaikille $m, n \in E$ on olemassa sellainen $p \in H$, että $p \geqq m$ ja $p \geqq n$ ja lisäksi on olemassa alkio $q \in E$ niin, että $q \geqq p$. Näin ollen siis suuntauksen ehdot (1)-(3) toteutuvat myös osajoukossa E.

Nyt on saatu muodostettua seuraava ekvivalenssi:
Verkko $\{S_n, n \in H, \geqq\}$ on toistuvasti joukossa C, jos ja vain jos joukon H kofinaalin osajoukon alkioiden kuvat sisältyvät joukkoon C ja tämä tapahtuu, jos ja vain jos verkko ei lopulta sisälly joukon C komplementtiin.

Määritelmä 5.4. (Osaverkko) Verkko $\{T_m, m \in E\}$ on verkon $\{S_n, n \in H\}$ *osaverkko* , jos ja vain jos on olemassa sellainen funktio $N : E \to H$, että

(a) $T = S \circ N$ eli $T_i = S_{N_i}$ kaikilla $i \in E$, ja

(b) kaikille $m \in H$ on olemassa sellainen $n \in E$, että jos $p \geqq n$, niin $N_p \geqq m$. Toisin sanoen, jos p suurenee tarpeeksi, niin myös N_p suurenee.

Osaverkoilla on seuraavia ominaisuuksia:
1. Jos verkko S sisältyy lopulta joukkoon A, niin myös verkon S osaverkko $S \circ N$ sisältyy lopulta joukkoon A.
2. Jos E on joukon H kofinaali osajoukko ja $N : E \to H$ on inkluusiokuvaus, niin verkko $\{S_n, n \in E, \geqq\}$ on verkon $\{S, n \in H, \geqq\}$ osaverkko.

Määritelmä 5.5. (Verkkojen suppeneminen) Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ verkko $(S_n, \geqq)$ *suppenee* kohti pistettä a , jos ja vain jos se sisältyy lopulta jokaiseen pisteen a ympäristöön.

Suppeneminen riippuu siis funktiosta S, topologiasta $\mathcal{T}$ ja järjestyksestä $\geqq$, mutta jos sekä topologia $\mathcal{T}$ että suuntaus $\geqq$ ovat selviä voidaan sanoa yksinkertaisesti, että "verkko S suppenee kohti pistettä a".

***Esimerkki* 5.6.** 1. Jos X on diskreetti avaruus eli varustettu diskreetillä topologialla, niin silloin verkko S suppenee kohti avaruuden pistettä a , jos ja vain jos verkko sisältyy lopulta yksiöön $\{a\}$. Toisin sanoen on olemassa $m \in H$ siten, että jos $n \geqq m$ niin $S_n = a$.

2. Jos X on varustettu minitopologialla, niin jokainen avaruuden X verkko suppenee kohti jokaista avaruuden X pistettä. Näin ollen verkko voi siis supeta yhtäaikaa useampaa eri pistettä kohti.

Lause 5.7. *Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ piste $a \in X$ on joukon $A \subset X$ kasautumispiste, jos ja vain jos joukkoon $A \setminus \{a\}$ sisältyy verkko, joka suppenee kohti pistettä a.*

Todistus. $\Rightarrow$ Oletetaan, että $a \in X$ on joukon A kasautumispiste. Tällöin jokaisessa pisteen a ympäristössä U on piste $S_U \in A \setminus \{a\}$. Pisteen a ympäristöjen joukolla $\mathcal{U}$ on suuntaus $\subset$. Jos siis U ja V ovat pisteen a ympäristöjä siten, että $V \subset U$ niin silloin $S_V \in V \subset U$. Siispä verkko $\{S_U, U \in \mathcal{U}, \subset\}$ suppenee kohti pistettä s.

$\Leftarrow$ Oletaan, että joukkoon $A \setminus \{a\}$ sisältyy sellainen verkko, että se suppenee kohti pistettä a. Koska tällainen verkko sisältyy lopulta pisteen a jokaiseen ympäristöön,täytyy verkolla olla jäseniä jokaisessa pisteen a ympäristössä. Koska verkko sisältyy joukkoon $A \setminus \{a\}$ ja jokaisessa pisteen a ympäristössä on verkon jäseniä, on jokaisessa pisteen a ympäristössä myös joukon $A \setminus \{a\}$ alkioita eli a on joukon A kasautumispiste. $\square$

Määritelmä 5.8. (Verkon kasautumisarvo) Piste $a \in X$ on verkon S kasautumisarvo , jos ja vain jos verkko S on toistuvasti jokaisessa pisteen s ympäristössä.

Verkoilla voi olla yksi kasautumisarvo, monta kasautumisarvoa tai ei yhtään kasautumisarvoa.

***Esimerkki* 5.9.** Olkoon $\mathbb{Z}_+$ ei-negatiivisten kokonaislukujen joukko. Nyt verkolla $\{n, n \in \mathbb{Z}_+, \geq\}$ ei ole kasautumisarvoa topologisessa avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{tav})$.

Määritelmä 5.10. (Karteesisen tulon suuntaus) Olkoon $(D, \geqq)$ ja $(E, \succ)$ suunnattuja joukkoja. Nyt karteesinen tulo $D \times E$ on suunnattu relaatiolla $\gg$, missä $(d, e) \gg (f, g)$, jos ja vain jos $d \geqq f$ ja $e \succ g$. Joukkoa $(D \times E, \gg)$ sanotaan suunnattuksi tulojoukoksi.

Lemma 5.11. *Olkoon $\{S, \geqq\}$ verkko ja olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma sellaisia joukkoja, joihin S toistuvasti sisältyy. Lisäksi kokoelman $\mathcal{A}$ kahden jäsenen leikkauksen tulee sisältää kokoelman $\mathcal{A}$ jäsen. Nyt on olemassa sellainen verkon S osaverkko, joka sisältyy lopulta jokaiseen kokoelman $\mathcal{A}$ jäseneen.*

Todistus. Kahden kokoelman $\mathcal{A}$ jäsenen leikkaus sisältää kolmannen kokoelman $\mathcal{A}$ jäsenen. Näin ollen kokoelmalla $\mathcal{A}$ on suunnattu relaatiolla $\subset$. Olkoon $\{S_n, n \in H, \geqq\}$ verkko, joka sisältyy toistuvasti jokaiseen kokoelman $\mathcal{A}$ jäseneen ja olkoon E joukko, joka sisältää kaikki sellaiset parit (m, A), että $m \in H$, $A \in \mathcal{A}$ ja $S_m \in A$. Tällöin joukko E on suunnattu karteesisen tulon $H \times \mathcal{A}$ suuntauksella "$\gg$". Tällöin pätee, että jos $(m, A) \in E$ ja $(n, B) \in E$, niin on olemassa sellainen $C \in \mathcal{A}$, että $C \subset A \cap B$. On myös olemassa sellainen $p \in H$, että $p \geqq m$ ja $p \geqq n$. Näille taas on olemassa sellainen $q \geq p$, että $S_q \in C$. Tällöin $(q, C) \gg (m, A)$ ja $(q, C) \gg (n, B)$.

Määritellään funktio $N : E \to H$ siten, että $N(m, A) = m$. Tällöin N on selvästi kasvava ja funktion N arvojoukko on kofinaali joukossa H, sillä $\{S_n, n \in H\}$ sisältyy toistuvasti jokaiseen kokoelman $\mathcal{A}$ jäseneen. Siispä $S \circ N$ on verkon S osaverkko.

Olkoon A kokoelman $\mathcal{A}$ jäsen ja m joukon H alkio, jolla $S_m \in A$. Olkoon lisäksi (n, B) joukon E alkio, jolla pätee $(n, B) \gg (m, A) \in E$. Tällöin $S \circ N(n, B) = S_n \in B \subset A$. Näin ollen $S \circ N$ sisältyy lopulta joukkoon A. $\square$

Lause 5.12. *Topologisen avaruuden piste x on verkon S kasautumisarvo, jos ja vain jos jokin verkon S osaverkko suppenee sitä kohti.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Olkoon x verkon S kasautumisarvo ja olkoon $\mathcal{U}$ kaikkien pisteen s ympäristöjen kokoelma. Näin ollen kahden kokoelman $\mathcal{U}$ jäsenen leikkaus kuuluu myös kokoelmaan $\mathcal{U}$ ja verkko S sisältyy toistuvasti jokaiseen kokoelman

$\mathcal{U}$ jäseneen. Lemman 5.11 mukaan nyt on olemassa verkon S osaverkko, joka sisältyy lopulta kaikkiin kokoelman $\mathcal{U}$ jäseniin eli suppenee kohti pistettä x.

$\Leftarrow$"Tehdään vastaoletus eli otetaan, että x ei ole verkon S kasautumisarvo. Nyt pisteellä x on sellainen ympäristö U, ettei verkko S sisälly toistuvasti joukkoon U. Näin ollen verkko S sisältyy lopulta U:n komplementtiin. Nyt jokainen verkon S osaverkko sisältyy lopulta U:n komplementtiin ja näin ollen ei voi supeta kohti pistettä x. $\square$

Lause 5.13. *Olkoon $\{S_n, n \in H\}$ verkko topogisessa avaruudessa. Määritellään joukko A_n kaikille $n \in H$ seuraavalla tavalla $A_n = \{S_m : m \geq n\}$. Nyt x on verkon kasautumisarvo , jos ja vain jos x kuuluu joukon A_n sulkeumaan kaikilla $n \in H$.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Olkoon x verkon $\{S_n, n \in H\}$ kasautumisarvo. Tällöin kaikilla n pätee, että A_n leikkaa kaikkien pisteen x ympäristöjen kanssa, koska verkko $\{S_n, n \in H\}$ sisältyy toistuvasti jokaiseen ympäristöön. Näin ollen x kuuluu kaikkien joukkojen A_n sulkeumiin.

"$\Leftarrow$"Tehdään vastaoletus eli oletetaan, ettei x ole verkon $\{S_n, n \in H\}$ kasautumisarvo. Tällöin on olemassa sellainen pisteen x ympäristö U, ettei verkko $\{S_n, n \in H\}$ ole toistuvasti ympäristössä U. Siispä jollain $k \in H$ pätee, että jos $m \geqq k$, niin $S_m \notin U$. Näin ollen U ja A_k ovat erillisiä. Siispä x ei kuulu joukon A_k sulkeumaan. Ollaan päästy ristiriitaan oletuksen kanssa eli alkuperäinen väite on tosi. $\square$

Lause 5.14. *Topologinen avaruus X on kompakti, jos ja vain jos sen jokaisella verkolla on kasautumisarvo.*

Toisin sanoen: X on kompakti, jos ja vain jos jokaisella avaruuden X verkolla on osaverkko, joka suppenee kohti jotain avaruuden X pistettä.

Todistus. Todistetaan ensin lauseen ensimmäinen osa:

"$\Rightarrow$"Olkoon $\{S_n, n \in H\}$ verkko kompaktissa topologisessa avaruudessa X ja olkoon $A_n = \{S_m | m \geq n\}$ kaikilla $n \in H$. Nyt kaikkien joukkojen A_n kokoelmalla on äärellisten leikkausten ominaisuus, koska $\geq$ on joukon H suuntaus. Tämän seurauksena kaikkien sulkeumien $\overline{A_n}$ kokoelmalla on myös ÄLO. Koska X on kompakti avaruus, on siellä olemassa sellainen piste x, joka kuuluu jokaiseen sulkeumaan $\overline{A_n}$. Lisäksi lauseen 5.13 mukaan tämä piste x on verkon $\{S_n, n \in H\}$ kasautumisarvo.

"$\Leftarrow$"Olkoon X topologinen avaruus, jonka jokaisella verkolla on kasautumisarvo. Olkoon $\mathcal{A}$ kokoelma avaruuden X suljettuja osajoukkoja siten, että kokoelmalla $\mathcal{A}$ on ÄLO. Olkoon nyt $\mathcal{B}$ kokoelma, joka koostuu kaikista kokoelman $\mathcal{A}$ jäsenten äärellisistä leikkauksista. Nyt myös kokoelmalla $\mathcal{B}$ on ÄLO ja koska $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ niin riittää osoittaa, että $\bigcap\{B : B \in \mathcal{B}\}$ on epätyhjä. Kahden kokoelman $\mathcal{B}$ jäsenen leikkaus on myös kokoelman $\mathcal{B}$ jäsen ja näin ollen kokoelmalla $\mathcal{B}$ on suuntaus $\subset$. Jos valitsemme verkolle jäsenen S_B jokaisesta kokoelman $\mathcal{B}$ joukosta B, niin $\{S_B, B \in \mathcal{B}\}$ on avaruuden X verkko ja näin ollen sillä on kasautumisarvo x. Jos A ja C ovat kokoelman $\mathcal{B}$ jäseniä siten, että $C \subset A$, niin tällöin $S_C \in C \subset A$. Näin ollen verkko $\{S_A, A \in \mathcal{B}\}$ sisältyy lopulta suljettuun joukkoon A ja näin ollen myös kasautumisarvo x kuuluu joukkoon A. Siispä x kuuluu jokaiseen kokoelman $\mathcal{B}$ jäseneen, joten kokoelman $\mathcal{B}$ jäsenten leikkaus on epätyhjä.

Lauseen toinen osa seuraa lauseesta 5.12 eli siitä, että piste on verkon kasautumisarvo, jos ja vain jos joku osaverkko suppenee sitä kohti. □

Määritelmä 5.15. (ω-kasautumispiste) Piste x on joukon A ω-kasautumispiste, jos ja vain jos jokainen pisteen x ympäristö sisältää äärettömän monta joukon A alkiota.

Jokainen joukon A ω-kasautumispiste on myös joukon A kasautumispiste. Jos lisäksi avaruuden jokainen yksiö on suljettu joukko eli avaruus on T_1- avaruus, niin jokainen joukon A kasautumispiste on myös ω-kasautumispiste.

Lemma 5.16. *Jokaisella topologisen avaruuden jonolla on kasautumisarvo, jos ja vain jos jokaisella äärettömällä joukolla on ω-kasautumispiste.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Oletetaan, että jokaisella topologisen avaruuden jonolla on kasautumisarvo ja että A on tämän avaruuden ääretön osajoukko. Tällöin on olemassa olemassa jono, joka koostuu joukon A alkioista siten, ettei jonossa esiinny samaa alkiota useampaan kertaan. Tällaisen jonon kasautumisarvo on selvästi joukon A ω-kasautumispiste.

"$\Leftarrow$"Oletetaan, että jokaisella topologisen avaruuden äärettömällä joukolla on ω-kasautumispiste ja $\{S_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ on jono avaruudessa. Tällöin jompikumpi seuraavista tilanteista täytyy pitää paikkaansa. Joko jonon arvojoukko on ääretön tai jonon arvojoukko on äärellinen. Jos arvojoukko on ääretön, niin jokainen äärettömän joukon ω-kasautumispiste on jonon kasautumisarvo. Jos arvojoukko on äärellinen, niin on olemassa sellainen avaruuden piste x, että $S_n = x$ äärettömän monella $n \in \mathbb{Z}_+$ ja näin ollen x on jonon kasautumisarvo. □

Lemma 5.17. *Jos X on Lindelöfin avaruus ja jokaisella avaruuden X jonolla on kasautumisarvo, niin X on kompakti.*

Todistus. Pyritään osoittamaan, että jokaisella avaruuden avoimella osapeitteellä on äärellinen osapeite ja tätä kautta todistamaan, että avaruus X on kompakti.

Koska X on Lindelöf, niin voidaan olettaa, että avoin peite koostuu avoimista joukoista $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, $n \in \mathbb{N}$. Olkoon nyt $B_0 = A_0$ ja olkoon kaikilla $p \in \mathbb{N}$ B_p ensimmäinen sellainen jonon A jäsen, joka ei sisälly joukkoon $B_0 \cup B_1 \cup \ldots \cup B_{p-1}$. Jos tällaista jonon A jäsentä ei löydy, jossain vaiheessa jonon B muodostamista, niin jo valitut joukot muodostavat vaaditun äärellisen osapeitteen.

Jos tällaista tilannetta ei tule vaan voidaan valita äärettömän monta joukkoa B_p, niin voidaan kaikilla $p \in \mathbb{N}$ valita sellainen piste $b_p \in B_p$, että $b \notin B_i$, kun $i < p$. Olkoon x näin saadun jonon (b_p) kasautumisarvo. Tällöin jollain p pätee $x \in B_p$ ja koska x on kasautumisarvo, niin $b_q \in B_p$ jollain $q > p$. Tämä on kuitenkin ristitiita. Näin ollen ei voi tulla tilannetta, että voitaisiin valita äärettömän monta joukkoa B_p, vaan joukkoja on aina äärellinen määrä ja ne muodostavat vaaditun äärellisen osapeitteen, joten X on kompakti. □

Seuraava lause tiivistää aiemmat tiedot jonoista, osajonoista, kasautumispisteistä ja kompaktiudesta.

Lause 5.18. *Seuraavassa luettelossa on topologisen avaruuden X erilaisia ominaisuuksia:*

(O1) Jokaisella äärettömällä avaruuden X osajoukolla on ω-kasautumispiste.

(O2) Jokaisella avaruuden X jonolla on kasautumisarvo.

(O3) Jokaisella avaruuden X jonolla on osajono, joka suppenee kohti jotain avaruuden X pistettä.

(O4) X on kompakti avaruus.

Jos X on topologinen avaruus, niin näillä ominaisuuksilla on seuraavanlaiset yhteydet:

(1) $(O1) \Leftrightarrow (O2)$.

(2) $(O4) \Rightarrow (O1)$.

Jos avaruus X toteuttaa ensimmäisen numeroituvuusaksiooman $(N1)$, *niin*

(3) $(O1) \Leftrightarrow (O2) \Leftrightarrow (O3)$.

Jos avaruus X toteuttaa toisen numeroituvuusaksiooman $(N2)$, *niin tällöin*

(4) $(O1) \Leftrightarrow (O2) \Leftrightarrow (O3) \Leftrightarrow (O4)$.

Todistus. Lemman 5.16 mukaan $(O1) \Leftrightarrow (O2)$ eli (1) pätee.

Koska jono on myös verkko, niin lause 5.14 osoittaa, että $(O4) \Rightarrow (O2)$. Koska lisäksi (1) pätee, niin (2) pätee.

Jos avaruus X toteuttaa ensimmäisen numeroituvuusaksiooman, niin lauseen 2.39 mukaan $(O2) \Leftrightarrow (O3)$. Koska lisäksi (1) pätee, niin (3) pätee.

Jos avaruus X toteuttaa toisen numeroituvuusaksiooman, niin jokaisella avoimella peitteellä on numeroituva osapeite. Tällöin lemman 5.17 mukaan $(O2) \Rightarrow (O4)$. Koska lisäksi (1), (2) ja (3) pätevät, niin (4) pätee. □

6 Lokaalinen kompaktius

Lähes kaikista topologisen avaruuden ominaisuuksista voidaan muodostaa paikallinen eli lokaalinen ominaisuus. Kun lokaalistamisajatusta sovelletaan kompaktiuteen, siirrytään yleensä käyttämään samalla ympäristön sulkeumaa. Tämä siksi, koska ympäristö ei yleensä ole suljettu eikä näin ollen myöskään kompakti ainakaan Hausdorffin avaruudessa.

Määritelmä 6.1. Avaruus X on lokaalisti kompakti, jos jokaisella $a \in X$ on sellainen ympäristö U, että sen sulkeuma $\overline{U}$ on kompakti.

***Esimerkki* 6.2.** 1. Kompakti avaruus on lokaalisti kompakti.

2. Avaruus $\mathbb{R}^n$ on lokaalisti kompakti, sillä sen jokainen suljettu kuula $\overline{B}(x, r)$ on kompakti.

Lause 6.3. *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus ja olkoon U pisteen $a \in X$ ympäristö. Tällöin pisteellä a on sellainen ympäristö V, että $\overline{V}$ on kompakti ja $\overline{V} \subset U$.*

Todistus. Koska X on lokaalisti kompakti, niin pisteellä a on ympäristö W, jonka sulkeuma $\overline{W}$ on kompakti. Lauseen 4.10 nojalla $\overline{W}$ on normaali ja siis säännöllinen. Joukko $U \cap W$ on pisteen a ympäristö $\overline{W}$:ssa, joten pisteellä a on sellainen $\overline{W}$-ympäristö A, että $\overline{A} \cap \overline{W} \subset U \cap W$. Koska $A \subset \overline{W}$, niin $\overline{A} \subset \overline{W}$, joten $\overline{A} \cap \overline{W} = \overline{A}$. Siispä $\overline{A} \subset U \cap W$. Olkoon nyt $V = A \cap W$. Koska $A \subset_o \overline{W}$, niin $V \subset_o W \subset_o X$ eli $V \subset_o X$. Lisäksi $a \in V$ ja $\overline{V} \subset \overline{A} \subset U \cap W \subset U$. Koska $\overline{V} \subset_c \overline{W}$ ja $\overline{W}$ on kompakti, niin $\overline{V}$ on kompakti. □

Lause 6.4. *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Jos $A \subset X$ on avoin tai suljettu, niin A on lokaalisti kompakti.*

Todistus. Jos A on avoin, niin tulos seuraa heti lauseesta 6.3.

Jos A on suljettu ja $a \in A$, valitaan a:n ympäristö U, jolla $\overline{U}$ on kompakti. Joukko $V = U \cap A$ on pisteen a A-ympäristö ja $\overline{V} \cap A \subset_c \overline{U}$. Siispä $\overline{V} \cap A$ on kompakti lauseen 4.5 nojalla. □

Lause 6.5. *Olkoon X lokaalisti kompakti Hausdorffin avaruus. Nyt $A \subset X$ on lokaalisti kompakti, jos ja vain jos se on avoimen ja suljetun joukon leikkaus.*

Todistus. "$\Rightarrow$"Oletetaan, että A on lokaalisti kompakti avaruuden X osajoukko. Todistetaan, että $A \subset_o \overline{A}$ eli $A = U \cap \overline{A}$, missä U on avaruuden X avoin osajoukko.

Oletetaan, että $y \in A$. Nyt täytyy löytää pisteelle y $\overline{A}$-ympäristö, joka sisältyy myös joukkoon A. Koska A on lokaalisti kompakti, on lauseen 6.3 mukaan olemassa sellainen joukko $U' \subset_o A$, että $y \in U'$ ja $\overline{U'} \cap A$ on kompakti. Siispä $U' = A \cap V$, missä $V \subset_o X$. Lisäksi $\overline{U'} \cap A = A \cap \overline{(A \cap V)}$ on kompakti eli näin ollen myös suljettu. Nyt siis

$$A \cap V \subset A \cap \overline{(A \cap V)} \Rightarrow \overline{(A \cap V)} \subset A$$

Näytetään seuraavaksi, että

$$\overline{A} \cap V \subset \overline{(A \cap V)}.$$

Jos $z \in \overline{A} \cap V$ ja W on mikä tahansa pisteen z ympäristö, niin myös $V \cap W$ on pisteen z ympäristö. Koska $z \in \overline{A}$, sen jokainen ympäristö kohtaa joukon A ja näin ollen

$$(V \cap W) \cap A = W \cap (A \cap V) \neq \emptyset$$

Nyt siis jokainen pisteen z ympäristö kohtaa myös joukon $A \cap V$. Siispä $z \in \overline{A \cap V}$.

Näin ollen $\overline{A} \cap V \subset A$. Täten $\overline{A} \cap V$ on pisteen y ympäristö joukossa $\overline{A}$, jolla pätee $\overline{A} \cap V \subset A$.

"$\Leftarrow$"Oletetaan, että $A \subset X$ on avoimen ja suljetun joukon leikkaus eli $A = B \cap C$, missä B on suljettu ja C on avoin. Nyt lauseen 6.4 mukaan B ja C ovat lokaalisti kompakteja. Oletetaan, että $x \in A$. Tällöin myös $x \in B$ ja $x \in C$. Koska B on lokaalisti kompakti, on pisteellä x olemassa sellainen B-ympäristö $x \in U \subset B$, että $\overline{U}$ on kompakti joukossa B. Samoin koska C on lokaalisti kompakti, niin on pisteellä x olemassa sellainen ympäristö $x \in V \subset C$, jolla $\overline{V}$ on kompakti joukossa C.

Nyt $x \in U \cap V \subset B \cap C$, joten $U \cap V$ on pisteen x ympäristö joukossa $A = B \cap C$. Nyt $\overline{U \cap V}$ on sulkeumana aina suljettu, joten $\overline{U \cap V} \subset_c \overline{U}$ ja $\overline{U \cap V} \subset_c \overline{V}$. Lauseen 4.5 mukaan $\overline{U \cap V}$ on kompaktin avaruuden suljettuna osajoukkona kompakti. Siispä kaikilla $x \in A$ on olemassa sellainen ympäristö $Y = (U \cap V) \subset A$, että $\overline{Y}$ on kompakti. Näin ollen suljetun ja avoimen joukon leikkaus A on lokaalisti kompakti. $\square$

7 Kompaktisointi

Kompaktit avaruudet ovat monestikin kätevämpiä ja helpommin käsiteltäviä kuin ei-kompaktit avaruudet. Siksi ei-kompakteja avaruuksia usein *kompaktisoidaan* lisäämällä niihin pisteitä. Esimerkiksi reaaliakseli voidaan kompaktisoida lisäämällä siihen ∞ ja $-\infty$, jolloin luonnollisessa topologiassa siitä tulee homeomorfinen suljetun välin kanssa. Saatua avaruutta kutsutaan yleensä laajennetuiksi reaaliluvuiksi.

Funktioteoriassa kompaktisoidaan usein kompleksitaso lisäämällä siihen piste ∞. Erityisen hyödyllinen tämä on lokaalisti kompakteissa avaruuksissa, jolloin lopputulokseksi saadaan Hausdorffin avaruus.

Määritelmä 7.1. (Aleksandrovin kompaktisointi) Olkoon $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffin avaruus. Valitaan alkio, joka ei kuulu avaruuteen X ja annetaan sille merkinnäksi ∞. Määritellään joukossa $X^* = X \cup \{\infty\}$ topologia $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_\infty$, jossa kokoelman $\mathcal{T}_\infty$ jäseniä ovat ne joukot U, joilla $\infty \in U$ ja $X^* \setminus U$ on kompakti avaruuden X osajoukko. Avaruus $(X^*, \mathcal{T}^*)$ on *Aleksandrovin kompaktisointi* eli yhden pisteen kompaktisointi.

Lause 7.2. *Jos $(X, \mathcal{T})$ on Hausdorffin avaruus, niin topologisella avaruudella $(X^*, \mathcal{T}^*)$ on seuraavat ominaisuudet:*

(1) $\mathcal{T}^*|X = \mathcal{T}$.

(2) X^* on kompakti.

(3) X on kompakti, jos ja vain jos ∞ on avaruuden X^* erakkopiste.

(4) X^* on Hausdorff , jos ja vain jos X on lokaalisti kompakti.

Todistus. Huomataan, että määritelmästä seuraa seuraava $\mathcal{T}^*$:n ominaisuus:

(a) Jos $U \in \mathcal{T}^*$, niin $U \cap X \in \mathcal{T}$ ja $X \setminus U \subset_c X$.

Todistetaan aluksi, että $\mathcal{T}^*$ on avaruuden X^* topologia. Olkoon $U_j \in \mathcal{T}^*$ kaikilla $j \in J$. Merkitään $U = \cup\{U_j : j \in J\}$.

Osoitetaan, että topologian ehto (T1) pätee $\mathcal{T}^*$:lle jakamalla tarkastelu kahteen osaa.

1. Jos $\infty \notin U$, niin $U_j \in \mathcal{T}$ kaikilla $j \in J$. Siispä $U \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

2. Jos $\infty \in U$, niin $\infty \in U_k$ jollakin $k \in J$. Siispä Aleksandrovin kompaktisoinnin määritelmän mukaan $F = X \setminus U_k$ on nyt kompakti ja näin ollen myös suljettu avaruudessa X. Lisäksi $X \setminus U = \cap\{X \setminus U_j : j \in J\}$ on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu avaruudessa X. Koska $X \setminus U \subset F \subset X$, on $X \setminus U$ suljettu myös joukossa F ja koska F on kompakti, niin myös $X \setminus U$ on kompakti. Näin ollen Aleksandrovin kompaktisoinnin määritelmän perusteella $U \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}^*$.

Seuraavaksi todistetaan, että topologian ehto (T2) pätee. Olkoon $U \in \mathcal{T}^*$ ja $V \in \mathcal{T}^*$. Väitetään, että $U \cap V \in \mathcal{T}^*$. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan:

1. Oletetaan että $\infty \notin U$ ja $\infty \notin V$ eli $U, V \in \mathcal{T}$. Nyt siis myös $U \cap V \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

2. Oletetaan, että $\infty \notin U$ tai $\infty \notin V$ eli toinen joukoista kuuluu topologiaan $\mathcal{T}$. Riittää että todistamme väitteen toisessa tapauksista, sillä toinen menee ihan samoin. Jos siis $U \in \mathcal{T}$, niin $U \cap V = U \cap (V \cap X)$. Ominaisuuden (a) nojalla $V \cap X \in \mathcal{T}$. Siispä myös $U \cap (V \cap X) \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$.

3. Oletetaan, että $\infty \in V$ ja $\infty \in U$ eli $\infty \in U \cap V$. Nyt $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$. Ominaisuuden (a) perusteella sekä $X \setminus U$ että $X \setminus V$ ovat kompakteja. Siispä $X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$ on kahden kompaktin joukon yhdisteenä kompakti. Näin ollen $U \cap V \in T_\infty \subset \mathcal{T}^*$.

Lisäksi $\emptyset \in \mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ ja $X^* \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}^*$, joten $\mathcal{T}^*$ on avaruuden X^* topologia. Nyt voidaan alkaa todistamaan ominaisuuksia (1)-(4):

(1) Määritelmien mukaan $\mathcal{T} \subset P(X)$ ja $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$, joten $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*|X$. Lisäksi ominaisuuden (a) mukaan pätee, että jos $U \in \mathcal{T}^*$, niin $U \cap X \in \mathcal{T}$ eli $\mathcal{T}^*|X \subset \mathcal{T}$. Siispä $\mathcal{T}^*|X = \mathcal{T}$.

(2) Ominaisuus on suora seuraus lauseesta 4.16.

(3) Piste ∞ on avaruuden X erakkopiste, jos ja vain jos $\{\infty\} \in \mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}^*$. Määritelmän mukaan $\{\infty\} \in \mathcal{T}_\infty$ on yhtäpitävä sen kanssa, että

$X^* \setminus \{\infty\} = X$ on kompakti.

(4) "$\Rightarrow$"Jos X^* on Hausdorff, niin lauseen 6.4 mukaan sen avoin osajoukko X on lokaalisti kompakti.

"$\Leftarrow$"Olkoon X lokaalisti kompakti ja $a, b \in X^*$, $a \neq b$. Jaetaan tarkastelu kahteen osaan:

(a) Jos $a, b \in X$, niin niillä on erilliset ympäristöt, koska X on Hausdorff.

(b) Olkoon $b = \infty$. Valitaan pisteen a sellainen ympäristö U, jonka X-sulkeuma $\overline{U}$ on kompakti. Nyt U ja $X^* \setminus \overline{U}$ ovat pisteiden a ja b erilliset ympäristöt.

Ehdoista (a) ja (b) seuraa, että X^* on Hausdorff.

$\square$

Määritelmä 7.3. (Metrisen avaruuden yhden pisteen laajennus) Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ sen topologia. Valitaan piste $\infty \notin X$ ja merkitään $\dot{X} = X \cup \{\infty\}$. Määritellään tälle avaruudelle topologia $\dot{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \dot{\mathcal{T}}_\infty$, jossa kokoelman $\dot{\mathcal{T}}_\infty$ jäseniä ovat ne joukot U, joilla $\infty \in U$ ja lisäksi $\dot{X} \setminus U$ on suljettu ja rajoitettu avaruuden X osajoukko. Nyt $\dot{\mathcal{T}}_\infty$ on avaruuden $\dot{X}$ topologia. Avaruutta $(\dot{X}, \dot{\mathcal{T}})$ sanotaan *yhden pisteen laajennukseksi.*

Jos $X = \mathbb{R}^n$, niin $(X^*, \mathcal{T}^*) = (\dot{X}, \dot{\mathcal{T}})$, sillä $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti , jos ja vain jos se on suljettu ja rajoitettu. Yleisessä tapauksessa topologiat $\mathcal{T}^*$ ja $\dot{\mathcal{T}}$ eivät kuitenkaan ole aina samat ja $(\dot{X}, \dot{\mathcal{T}})$ ei ole aina kompakti.

Lause 7.4. *Jos* (X, d) *on metrinen avaruus, niin* $(\dot{X}, \dot{\mathcal{T}})$ *on Hausdorffin avaruus.*

Todistus. Jos $a \in X$, niin esimerkiksi $B(a, 1)$ ja $\dot{X} \setminus \overline{B}(a, 1)$ ovat pisteiden a ja ∞ erilliset ympäristöt. Näin ollen $\dot{X}$ on Hausdorff. $\square$

8 Kompaktit tuloavaruudet

Tarkastellaan aluksi joukkojen tuloa joukko-opillisesti. Tämän jälkeen määritellään aluksi topologisten avaruuksien karteesisen tulon tulotopologia ja todistetaan kuuluisa Tihonovin lause.

Määritelmä 8.1. (Joukkojen tulo) Olkoon J mielivaltainen joukko sillä oletuksella, että $J \neq \emptyset$. Annetaan jokaista $j \in J$ kohti joukko X_j. Nyt $(X_j)_{j \in J}$ on joukkoperhe. Nyt tästä joukkoperheestä muodostetulla karteesisella tulolla $X = \prod_{j \in J} X_j$ on seuraavat ominaisuudet:

1. Karteesisen tulon $X = \prod_{j \in J} X_j$ alkioita ovat nyt funktiot $x : J \to \cup\{X_j : j \in J\}$, joilla $x(j) \in X_j$ kaikilla $j \in J$.
2. Indeksin j kuvaa $x(j)$ merkitään yleensä x_j.
3. Karteesisen tulon alkiota x voidaan taas merkitä perhemerkinnällä $x = (x_j)_{j \in J}$ tai lyhyemmin $x = (x_j)$.
4. Alkiota $x_j \in X_j$ sanotaan x:n $j-$koordinaatiksi.
5. Projektiot $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$ määritellään kaavalla $\mathrm{pr}_j(x) = x_j$.
6. Kun $J = \{1, \ldots, n\}$ saadaan äärellinen tulo.
7. Kun $J = \mathbb{N}$ saadaan numeroituva ääretön tulo.
8. Jos $X_j = Y$ on sama kaikilla $j \in J$, voidaan tulolle käyttää potenssimerkintää $X = Y^J$. Nyt siis $Y^J = \{x : x \text{ on kuvaus } x : J \to Y\}$. Joukko Y^J koostuu siis kaikista kuvauksista, joiden määrittelyjoukko on J ja maalijoukko Y. Nyt kuvauksen $x : J \to Y$ j-koordinaatti on x:n arvo alkiossa j eli $x(j)$.
9. Tulojoukon alkioiden koordinaattien merkintä saattaa aiheuttaa toisinaan sekaannusta. Esimerkiksi, jos tarkastellaan jonoa (x_n) tulojoukossa $X = \prod_{j \in \mathbb{N}} X_j$, niin jonon jäsenet x_n ovat tuloavaruuden X alkioita ja niillä on koordinaatit $(x_n)_j \in X_j$. Merkintä on täysin hyväksyttävä, mutta tarvittaessa voidaan asiaa selventää esimerkiksi käyttämällä $(x_n)_j$:lle merkintää $\mathrm{pr}_j(x_n)$.

Määritelmä 8.2. (Tulotopologia) Tarkastellaan topologista avaruusperhettä $(X_j, \mathcal{T}_j)_{j \in J}$. Karteesisen tulon $X = \prod_{j \in J} X_j$ *tulotopologialla* tarkoitetaan projektioiden $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$ indusoimaa avaruuden X topologiaa. Tulotopologian $\mathcal{T}$ määrää mikä tahansa seuraavista ehdoista:

a) $\mathcal{T}$ on karkein niistä avaruuden X topologioista, joiden suhteen jokainen projektio $\mathrm{pr}_j : X \to X_j$ on jatkuva.

b) Tulotopologian $\mathcal{T}$ esikannat muodostavat joukot $\mathrm{pr}_j^{-1} V$, jossa $j \in J$ ja $V \subset_o X_j$.

c) Tulotopologian $\mathcal{T}$ kannan muodostavat joukot $B = \bigcap_{j\in K} \mathrm{pr}_j^{-1} V_j$, jossa $K \subset J$ on äärellinen ja $V_j \subset_o X_j$ kaikilla $j \in K$.

Tästä eteenpäin tuloavaruudessa käytetään aina tulotopologiaa, ellei toisin mainita.

***Huomautus* 8.3.** Ehdon (c) joukko B voidaan esittää myös muodossa $B = \prod_{j\in J} V_j$, jossa $V_j \subset_o X_j$, kaikilla $j \in J$ ja lisäksi $V_j = X_j$, kun $j \in J \setminus K$.

Lause 8.4. *Olkoon $X = \prod_{j\in J} X_j$, $a \in X$ ja (x_n) tuloavaruuden X jono. Tällöin $x_n \to a$, jos ja vain jos $pr_j(x_n) \to pr_j(a)$ kaikilla $j \in J$, kun $n \in \infty$.*

Lause 8.5. *Jonokompaktien avaruuksien numeroituva tulo on jonokompakti.*

Todistus. Oletetaan, että avaruudet X_1, X_2,... ovat jonokompakteja ja merkitään $X = \prod_{j\in N} X_j$. Olkoon $J = (x_n)$ jono avaruudessa X. Jonosta J saadaan projektioiden avulla avaruuteen X_1 sisältyvä jono $(\mathrm{pr}_1(x_1), \mathrm{pr}_1(x_2), \mathrm{pr}_1(x_3), \ldots)$. Koska X_1 on jonokompakti, on olemassa sellainen jonon J osajono $J_1 = (y_{11}, y_{12}, \ldots)$, että $\mathrm{pr}_1(y_{1k})$ suppenee kohti jotakin $a_1 \in X_1$.

Samalla tekniikalla on nähtävissä, että jonolla J_1 on olemassa sellainen osajono $J_2 = (y_{21}, y_{22}, \ldots)$, että $\mathrm{pr}_2(y_{2k})$ suppenee kohti jotakin $a_2 \in X_2$.

Näin jatkamalla saadaan lopulta sellainen jono $(J_1, J_2, \ldots)$ avaruuden X jonoja $J_j = (y_{j1}, y_{j2}, \ldots)$, että

1. J_j on jonon J_{j-1} osajono
2. $\mathrm{pr}_j(y_{jk}) \to a_j \in X_j$, kun $k \to \infty$.

Muodostetaan näistä jonoista lävistäjäjono $J' = (y_{11}, y_{22}, y_{33}, \ldots)$, joka on myös jonon J osajono. Jonon J' loppupää $(y_{jj}, y_{(j+1)(j+1)}, \ldots)$ on kullakin $j \in N$ myös jonon J_j osajono. Siispä kaikilla $j \in N$ pätee, että $\mathrm{pr}_j(y_{kk}) \to a_j$, kun $k \to \infty$. Merkitään $a = (a_j)_{j\in N}$. Nyt määritelmästä 8.4 seuraa, että J' suppenee kohti pistettä $a \in X$. Siispä X on jonokompakti. $\square$

Määritelmä 8.6. (Järjestys) Joukon H relaatio $\leq$ on *järjestys*, jos kaikilla $a, b, c \in H$ on voimassa

1. $a \leq a$
2. $a \leq b \leq a \Rightarrow a = b$
3. $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$

   Lisäksi järjestys $\leq$ on täysi tai totaalinen, jos on voimassa

4. Jos $a, b \in H$, niin $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Jos $\leq$ on joukon H järjestys, niin paria $(H, \leq)$ sanotaan *järjestetyksi joukoksi.*

***Huomautus* 8.7.** Jos $a \leq b$ ja $a \neq b$, niin tätä voidaan merkitä $a < b$.

Määritelmä 8.8. (Ketju) Olkoon $(H, \leq)$ järjestetty joukko ja olkoon K sen osajoukko, jolle järjestys $\leq$ indusoi järjestyksen. Jos joukon K järjestys on täysi, sanomme, että K on järjestetyn joukon H ketju.

Määritelmä 8.9. (Yläraja) Olkoon $A \subset H$. Alkio $b \in H$ on joukon A *yläraja*, jos $b \geq a$ kaikilla $a \in A$.

Alkio $b \in H$ on joukon A *aito yläraja*, jos $b > a$ kaikilla $a \in A$.

Määritelmä 8.10. (Maksimaalinen alkio) Järjestetyn joukon $(H, \leq)$ alkio a on *maksimaalinen*, jos ei ole ainoatakaan ehdon $a < x$ täyttävää alkiota $x \in H$ eli jos epäyhtälöstä $a \leq x$ seuraa aina, että $a = x$.

Määritelmä 8.11. (Valinta-aksiooma) Jos $(X_i)_{i \in I}$ on ei-tyhjien joukkojen kokoelma, niin on olemassa ainakin yksi kuvaus $h : I \to \cup_{i \in I} X_i$ siten, että $h(i) \in X_i$ kaikilla $i \in I$.

Toisin sanottuna, jos $(X_i)_{i \in I}$ on ei-tyhjien joukkojen kokoelma, niin $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Lemma 8.12. *(Zornin lemma) Olkoon $(H, \leq)$ sellainen järjestetty joukko, että $H \neq \emptyset$ ja joukon H jokainen ketju K on ylhäältä rajoitettu. Tällöin joukossa H on ainakin yksi maksimaalinen alkio.*

Todistus. Olkoon v kuvaus, joka liittää joukon H jokaiseen ei-tyhjään osajoukkoon S tähän joukkoon kuuluvan alkion $v(S)$. Eli $v(S) \in S \subset H$ kaikilla $S \neq \emptyset$. Olkoon K joukon H ketju. Liitetään jokaiseen ketjuun K ketju K' seuraavalla tavalla: Jos ketjun K kaikkien aitojen ylärajojen joukko A_K on tyhjä, niin $K' = K$. Jos taas $A_K \neq \emptyset$, niin $K' = K \cup \{v(A_K)\}$. Koska $v(A_K) \in A_K$, niin tapauksessa $A_K \neq \emptyset$ pätee, että ketju K sisältyy aidosti ketjuun K' eli $K \subsetneq K'$.

Oletetaan, että ketju K täyttää ehdon $K = K'$. Nyt ketjulla K on olemassa yläraja a. Jos olisi olemassa ehdon $a < x$ täyttävä alkio $x \in H$, olisi x joukon K aito yläraja. Tällöin pätisi $A_K \neq \emptyset$ ja siis $K \subsetneq K'$ eli päädyttäisiin ristiriitaan. Siispä a on joukon H maksimaalinen alkio.

Pyritään nyt osoittamaan, että joukkoon H sisältyy ainakin yksi ehdon $K = K'$ täyttävä ketju K, jolloin lause tulee todistetuksi.

Valitaan joukkoon H sisältyvä ei-tyhjä ketju A. Pidetään tätä kiinteänä koko lopputodistuksen ajan. Sanotaan nyt, että joukon H ketjujen kokoelma $\mathcal{K}$ on täydellinen, jos se täyttää seuraavat neljä ehtoa:

1. $A \in \mathcal{K}$
2. $A \subset K$ kaikilla $K \in \mathcal{K}$
3. Jos $K \in \mathcal{K}$, niin myös $K' \in \mathcal{K}$
4. Jos $\mathcal{K}'$ on kokoelman $\mathcal{K}$ ei-tyhjä osajoukko, joka on inkluusion suhteen totaalisesti järjestetty , niin myös $\cup_{K \in \mathcal{K}'} K \in \mathcal{K}$.

On olemassa ainakin yksi täydellinen ketjukokoelma, sillä välittömästi nähdään, että kaikkien ehdon $A \subset K$ täyttävien joukon H ketjujen K joukko $\mathcal{K}_0$

on täydellinen. Koska on olemassa ainakin yksi täydellinen ketjukokoelma voidaan puhua joukon H kaikkien täydellisten ketjukokoelmien leikkauksesta $\mathcal{L}$, joka on myös joukon H ketjukokoelma. Myös $\mathcal{L}$ on täydellinen, joten se sisältyy määritelmänsä nojalla joukon H jokaiseen täydelliseen ketjukokoelmaan.

Jos nyt saadaan osoitettua, että $\mathcal{L}$ on inkluusion suhteen totaalisesti järjestetty, on Zornin lemma saatu todistettua, koska tällöin ehdon 4. nojalla $M = \cup_{K \in \mathcal{L}} K \in \mathcal{L}$ ja ehdon 3. nojalla myös $M' \in \mathcal{L}$ eli näin ollen $M' \subset M$ eli $M' = M$.

Täytyy siis osoittaa, että $\mathcal{L}$ on inkluusion suhteen totaalisesti järjestetty. Osoitetaan väite todeksi näyttämällä, että $\mathcal{L}$:ään sisältyvä ketjukokoelma

$$\mathcal{L}' = \{K \in \mathcal{L} |\text{ kaikilla } M \in \mathcal{L}\text{, joko } M \subset K \text{ tai } K \subset M\} \subset \mathcal{L}$$

yhtyy joukkoon $\mathcal{L}$. Koska $\mathcal{L}$ sisältyy jokaiseen täydelliseen ketjukokoelmaan, riittää osoittaa, että $\mathcal{L}'$ on täydellinen.

Jos $M \in \mathcal{L}$, niin $A \subset M$, koska $\mathcal{L}$ toteuttaa täydellisenä ketjukokoelmana ehdon 2. Siispä myös $A \in \mathcal{L}'$ eli $\mathcal{L}'$ toteuttaa ehdon 1. Lisäksi koska $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ ja koska $\mathcal{L}$ toteuttaa ehdon 2, niin myös $\mathcal{L}'$ toteuttaa ehdon 2.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{L}'$ toteuttaa ehdon 4. Oletetaan, että $\mathcal{K}'$ on joukon $(\mathcal{L}', \subset)$ ei-tyhjä, totaalisesti järjestetty osajoukko. Olkoon $K_0 = \cup_{K \in \mathcal{K}'} K$ ja $M \in \mathcal{L}$. Jokaisella $K \in \mathcal{K}' \subset \mathcal{L}'$ pätee joukon $\mathcal{L}'$ määritelmän nojalla joko $K \subset M$ tai $M \subset K$. Näin ollen voidaan jakaa tarkastelu kahteen tapaukseen.

1. Jokaisella $K \in \mathcal{K}'$ pätee $K \subset M$. Nyt siis myös $K_0 \subset M$.

2. On olemassa joku $K \in \mathcal{K}'$, jolla pätee $M \subset K$. Tällöin on voimassa $M \subset K \subset K_0$.

Näin ollen $K_0 \in \mathcal{L}'$. Siispä $\mathcal{L}'$ toteuttaa ehdon 4.

Nyt on vielä osoitettava, että $\mathcal{L}'$ toteuttaa ehdon 3. Oletetaan nyt, että K on joukon $\mathcal{L}'$ mielivaltainen alkio. Jos joukko

$$\mathcal{L}''_K = \{M \in \mathcal{L} |\text{ joko } M \subset K \text{ tai } K' \subset M\}$$

saadaan osoitettua täydelliseksi, niin väite on oikea, sillä joukko $\mathcal{L}$ oli kaikkien täydellisten joukkojen leikkaus. Tämän nojalla $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}''_K$ eli $\mathcal{L} = \mathcal{L}''_K$, joten jokaisella $M \in \mathcal{L}$ pätee joko $M \subset K \subset K'$ tai $K' \subset M$ ja näin ollen $K' \in \mathcal{L}'$.

Pyritään siis osoittamaan, että $\mathcal{L}''_K$ on täydellinen. Koska $\mathcal{L}$ on täydellinen, niin $A \in \mathcal{L}$ ja $A \subset K$ kaikilla $K \in \mathcal{L}$. Nyt lisäksi $\mathcal{L}''_K \subset \mathcal{L}$, joten $\mathcal{L}''_K$ toteuttaa ehdot 1 ja 2.

Osoitetaan, että $\mathcal{L}''_K$ toteuttaa ehdon 3, tarkastelemalla mielivaltaista ketjua $M \in \mathcal{L}''_K$. Tälle ketjulle pätee joko $M \subset K$ tai $K' \subset M$. Voidaan siis taas jakaa tarkastelu kahteen tapaukseen.

1. Oletetaan, että $K' \subset M$. Tällöin myös $K' \subset M'$ eli $M' \in \mathcal{L}''_K$.

2. Oletetaan, että $M \subset K$. Huomataan $M' \in \mathcal{L}$, sillä $M \in \mathcal{L}$ ja $\mathcal{L}$ on täydellinen. Lisäksi oletuksen mukaan $K \in \mathcal{L}''_K$. Siispä joukon $\mathcal{L}'$ määritelmän mukaan joko $M' \subset K$ tai $K \subset M'$. Tarkastellaan molempia tilanteita erikseen.

(a) Jos $M' \subset K$, niin $M' \in \mathcal{L}''_K$.

(b) Jos taas $K \subset M'$, niin $M \subset K \subset M'$ ja siis joko $K = M$ tai $K = M'$, sillä joukossa M' on korkeintaan yksi joukkoon M kuulumaton alkio. Jaetaan tarkastelu jälleen kahteen osaan.

   i. Jos $K = M$, niin $K' = M'$ eli $K' \subset M'$. Siispä $M' \in \mathcal{L}''_K$.

   ii. Jos $K = M'$, niin $M' \subset K$ ja näin ollen $M' \in \mathcal{L}''_K$.

Siispä kaikissa tapauksissa $M' \in \mathcal{L}''_K$, joten $\mathcal{L}''_K$ toteuttaa ehdon 3.

Vielä pitää siis todistaa, että $\mathcal{L}''_K$ toteuttaa ehdon 4. Olkoon $\mathcal{K}'$ joukon $\mathcal{L}''_K$ mielivaltainen ei-tyhjä osajoukko, joka on inkluusion suhteen totaalisesti järjestetty. Jokaisella $M \in \mathcal{K}'$ pätee joko $M \subset K$ tai $K' \subset M$. Tarkastellaan tilanteita erikseen.

1. Jos $M \subset K$ kaikilla $M \in \mathcal{K}'$, niin myös $\cup_{M \in \mathcal{K}'} M \subset K$.

2. Jos $K' \subset M$ yhdelläkin $M \in \mathcal{K}'$, niin myös $K' \subset \cup_{M \in \mathcal{K}'} M$.

Siispä $\cup_{M \in \mathcal{K}'} M \in \mathcal{L}''_K$ ja $\mathcal{L}''_K$ toteuttaa ehdon 4. Nyt siis $\mathcal{L}'$ toteuttaa myös ehdon 3 ja on täydellinen. Tällöin $\mathcal{L}$ on inkluusion suhteen totaalisesti järjestetty. Nyt taas $M = \cup_{K \in \mathcal{L}} K \in \mathcal{L}$ ja myös $M' \in \mathcal{L}$ eli näin ollen $M' \subset M$ eli $M' = M$. Tämä taas tarkoitti, että joukko H sisältää ainakin yhden ehdon $K = K'$ täyttävän ketjun. Tämä taas osoitti, että joukolla H on maksimaalinen alkio. Lauseemme on siis todistettu. $\square$

Lause 8.13. *(Tihonovin lause) Kompaktien avaruuksien mielivaltainen tulo on kompakti.*

Todistus. Olkoon X_j, $j \in J$, kompakteja ja olkoon $X = \prod_{j \in J} X_j$. Osoitetaan lauseen 4.4 avulla, että X on kompakti. Olkoon $\mathcal{F}$ kokoelma avaruuden X suljettuja joukkoja ja olkoon kokoelmalla $\mathcal{F}$ ÄLO. Osoitetaan, että $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Jotta voimme todistaa lauseen, täytyy kokoelmaan $\mathcal{F}$ lisätä joukkoja. Merkitäänkin H:lla niiden kokoelmien $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ joukkoa, joilla

a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$,

b) kokoelmalla $\mathcal{A}$ on ÄLO.

Ei siis vaadita, että kokoelman $\mathcal{A}$ jäsenet ovat suljettuja. Joukko H on $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$:n osajoukko eli $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$:n jäsen. Relaatio $\subset$ tekee joukosta H järjestetyn joukon. Osoitetaan, että H toteuttaa Zornin lemman oletukset eli että se on ei-tyhjä järjestetty joukko, jonka jokainen ketju on ylhäältä rajoitettu.

Olkoon $K \subset H$ ketju ja $K \neq \emptyset$. Koska ketju on järjestetty inkluusiolla $\subset$ ja ketjun järjestys on määritelmän mukaan täysi, on $\cup K$ ketjun yläraja, sillä $A \subset \cup K$ kaikilla $A \in K$. Lisäksi $\cup K$ on jopa ketjun pienin yläraja sillä, jos C on myös ketjun K yläraja, niin selvästi tälle pätee $\cup K \subset C$. Siispä $\cup K = \sup K$. Väitetään, että kokoelma $\mathcal{A} = \cup K = \sup K$ kuuluu ketjuun H. Ehto (a) on nyt selvästi voimassa.

Olkoot $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. Koska $\mathcal{A}$ on yhdiste ketjun K jäsenistä, niin voidaan jokaisella $k \in \{1, \ldots, n\}$ valita sellainen $\mathcal{A}_k \in K$, että $A_k \in \mathcal{A}_k$. Koska K on relaatiolla $\subset$ järjestetty ketju, niin kokoelmien $\mathcal{A}_k$ joukossa on sellainen $\mathcal{A}_{k_0}$, joka sisältää kaikki muut. Siis $A_k \in \mathcal{A}_{k_0}$ kaikilla k. Koska $\mathcal{A}_{k_0} \in K \subset H$ eli $\mathcal{A}_{k_0} \in H$, sillä on ÄLO, joten $A_1 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$. Siis $\mathcal{A}$ toteuttaa ehdon (b), joten $\mathcal{A} \in H$.

Nyt H on sellainen järjestetty joukko, että $H \neq \emptyset$ ja jokaisella joukon H ketjulla K on pienin yläraja sup$K$. Siispä Zornin lemman nojalla joukossa H on maksimaalinen jäsen $\mathcal{M}$. Koska $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$, riittää osoittaa, että $\bigcap\{\overline{A} : A \in \mathcal{M}\} \neq \emptyset$.

Ennenkuin kyseisen ominaisuuden osoittaminen onnistuu, täytyy saada osoitettua, että maksimaalisella jäsenellä $\mathcal{M}$ on seuraavat ominaisuudet:

1. Jos $A \in \mathcal{M}$ ja $B \in \mathcal{M}$, niin $A \cap B \in \mathcal{M}$.

2. Olkoon $B \subset X$. Jos kaikilla $A \in \mathcal{M}$ pätee $B \cap A \neq \emptyset$, niin $B \in \mathcal{M}$.

Jos $A, B \in \mathcal{M}$, niin $\mathcal{M} \cup \{A \cap B\}$ toteuttaa ehdot (a) ja (b), joten $\mathcal{M} \cup \{A \cap B\} \in H$ ja nyt ominaisuus (1) seuraa $\mathcal{M}$:n maksimaalisuudesta. Soveltamalla kohtaa (1), nähdään kohdassa (2), että $\mathcal{M} \cup \{B\} \in H$ ja nyt myös ominaisuus (2) seuraa $\mathcal{M}$:n maksimaalisuudesta.

Olkoon $j \in J$. Koska $\mathcal{M}$:llä on ÄLO, niin sama ominaisuus on kokoelmalla $\{\mathrm{pr}_j A : A \in \mathcal{M}\}$, ja siis myös kokoelmalla $\{\overline{\mathrm{pr}_j A} : A \in \mathcal{M}\}$. Koska X_j on kompakti kaikilla $j \in J$, niin lauseen 4.4 nojalla joukko $Y_j = \bigcap\{\overline{\mathrm{pr}_j A} : A \in \mathcal{M}\}$ on epätyhjä. Valinta-aksiooman nojalla on olemassa alkio $y \in \prod_{j \in J} Y_j$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $y \in \overline{A}$ kaikilla $A \in \mathcal{M}$. Tämän jälkeen Tihonovin lauseen todistus on valmis.

Olkoon $A \in \mathcal{M}$ ja V alkion y ympäristö. Valitaan alkion y kantaympäristö $B \subset V$, joka on muotoa $B = \bigcap_{j \in K} \mathrm{pr}_j^{-1} U_j$. Tässä $K \subset J$ on äärellinen ja $y_j \in U_j \subset_o X_j$ kaikilla $j \in K$. Koska $y_j \in \overline{\mathrm{pr}_j A}$, niin $U_j \cap \mathrm{pr}_j A \neq \emptyset$. Siispä $A \cap \mathrm{pr}_j^{-1} Uj \neq \emptyset$ kaikilla $j \in K$. Kohdan (2) nojalla kaikilla $j \in K$ pätee $\mathrm{pr}_j^{-1} U_j \in \mathcal{M}$. Tästä seuraa kohdan (1) avulla, että $B \in \mathcal{M}$. Koska $\mathcal{M}$:llä oli ÄLO, niin $B \cap A \neq \emptyset$. Siispä $y \in \overline{A}$ eli alkuperäinen väite $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$ pätee eli Tihonovin lause on nyt saatu todistettua.

$\square$

9 Kompaktius ja jonokompaktius

On olemassa useita erilaisia topologisia käsitteitä, jotka metrisissä avaruuksissa ovat yhtäpitäviä kompaktiuden kanssa. Yleisissä topologisissa avaruuksissa ne eivät kuitenkaan aina ole yhtäpitäviä. Kuten aiemmissa kappaleissa onkin jo mainittu, on jonokompaktius yksi näistä käsitteistä. Tässä kappaleessa konstruoidaan kaksi esimerkkiavaruutta, joista toinen on kompakti, muttei jonokompakti, ja toinen on jonokompakti, muttei kompakti.

Myös numeroituva kompaktius on metrisissä avaruuksissa kompaktiuden kanssa yhtäpitävä ominaisuus. Yleisissä topologisissa avaruuksissa numeroituvasti kompaktit avaruudet eivät kuitenkaan ole välttämättä kompakteja. Kuitenkin aina pätee, että sekä jonokompaktit että kompaktit avaruudet ovat numeroituvasti kompakteja. Numeroituvan kompaktiuden käsitettä ei kuitenkaan käsitellä tässä tutkielmassa tämän syvällisemmin eli nämä ominaisuudet jäävät todistamatta.

Määritelmä 9.1. (Cantorin joukko) Olkoon $Y = \{0, 1\}$ kahden alkion muodostama diskreetti avaruus. Avaruutta $X = Y^{\mathbb{N}}$, joka on varustettu tulotopologialla, sanotaan *Cantorin joukoksi*. Cantorin joukoksi voidaan kutsua myös avaruuden X kanssa homeomorfista reaalilukujoukkoa.

Avaruuden X alkiot ovat päättymättömiä bittijonoja $x : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ eli $x = (x_1, x_2, \ldots)$, jossa $x_j \in Y$. Esimerkiksi $x = 01001111010110\ldots$ on Cantorin joukon alkio.

***Esimerkki* 9.2.** Todistetaan, että on olemassa topologinen avaruus Z, joka on kompakti, muttei jonokompakti.

Olkoon X tuloavaruus $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ eli Cantorin joukko. Tuloavaruus $Z = \{0, 1\}^X$ on kompakti, sillä diskreetti avaruus $\{0, 1\}$ on kompakti ja Tihonovin lauseen mukaan kompaktien avaruuksien mielivaltainen tulo on kompakti. Osoitetaan siis, ettei Z ole jonokompakti.

Projektiot $\mathrm{pr}_n : X \to \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, ovat avaruuden Z alkioita ja $\mathrm{pr}_n(x) = x_n$, kun $x \in X$. Osoitetaan käänteistodistuksella, ettei jonolla (pr_n) ole suppenevaa osajonoa. Tehdään siis vastaoletus eli oletetaan, että jonolla (pr_n) on osajono $(\mathrm{pr}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, joka suppenee avaruudessa Z. Lauseen 8.4 nojalla tämä tarkoittaa, että jokaisella $x \in X$, jono (x_{n_k}) suppenee avaruudessa $\{0, 1\}$. Olkoon nyt x sellainen avaruuden X alkio, jolla pätee:

1. $x_{n_k} = 1$, kun k on parillinen
2. $x_j = 0$, missä $j = n_k$ ja k on pariton tai j:tä ei voida esittää muodossa n_k.

Nyt $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$. Tämä ei selvästikään suppene eli myöskään $(\mathrm{pr}_{n_k}(x))_{k\in\mathbb{N}}$ ei suppene eli ollaan saatu ristiriitä. Näin ollen jonolla (pr_n) ei ole suppenevaa osajonoa eli Z ei ole jonokompakti.

Määritelmä 9.3. (Alkusegmentti) Olkoon $(X, \leq)$ järjestetty joukko. Joukko $U \subset X$ on sen alkusegmentti, jos sillä on seuraava ominaisuus:

$$\text{Jos } a \in U \text{ ja } b \leq a, \text{ niin } b \in U, \text{ kaikilla } a, b \in X.$$

On hyvä huomata, että tyhjä joukko on aina järjestetyn joukon alkusegmentti.

Määritelmä 9.4. (Hyvä järjestys) Joukon järjestys on *hyvä*, jos sen jokaisella epätyhjällä osajoukolla on pienin alkio.

Lause 9.5. *(Hyvän järjestyksen lause) Jokaisessa joukossa on olemassa hyvä järjestys.*

Todistus. Olkoon X epätyhjä joukko. Olkoon $\mathcal{B}$ kaikkien X:n epätyhjien osajoukkojen kokoelma. Lisäksi olkoon $c : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ valintafunktio eli sellainen funktio, että $c(B) \in B$ kaikilla $B \in \mathcal{B}$. Nyt funktio c on siis karteesisen tuloavaruuden $B^{\mathcal{B}}$ alkio. Tarkoituksena on nyt konstruoida sellainen järjestys $\leq$, että jokaista alkusegmenttiä A järjestyksessä seuraavana tuleva alkio on $c(X \setminus A)$.

Olkoon $\mathcal{C}$ kaikkien täysien järjestyksien $\leq$ kokoelma, joilla pätee seuraava ehto:

> Olkoon $D \subset X$ ja $\leq$ siihen liitetty järjestys. D on siis järjestyksen $\leq$ määrittelyjoukko. Nyt jokaisella joukon D alkusegmentillä $A \neq D$ pätee, että joukon $D \setminus A$ pienin alkio on $c(X \setminus A)$.

On melko selvää, että jokainen kokoelman $\mathcal{C}$ jäsen on hyvä järjestys seuraavan päättelyn perusteella. Olkoon D on järjestyksen $\leq \in \mathcal{C}$ määrittelyjoukko ja $\emptyset \neq E \subset D$. Olkoon lisäksi $A = \{y : y \leq x \text{ ja } y \neq x \text{ kaikilla } x \in E\}$. Nyt $c(X \setminus A)$ on joukon E pienin alkio, sillä A on alkusegmentti, jonka pienimpänä ylärajana on joukon E pienin alkio.

Olkoon nyt $\leqq$ ja $\leq$ kokoelman $\mathcal{C}$ jäseniä ja olkoon D järjestyksen $\leqq$ määrittelyjoukko ja H järjestyksen $\leq$ määrittelyjoukko. Olkoon A joukko, joka sisältää kaikki pisteet x siten, että joukot $\{y : y \leqq x\}$ ja $\{y : y \leq x\}$ ovat identtisiä ja näissä joukoissa olevat järjestykset täsmäävät keskenään. Nyt A on siis alkusegmentti molemmissa järjestyksissä $\leqq$ ja $\leq$. Jos $A \neq D$ ja $A \neq H$, niin $c(X \setminus A)$ on molempien joukkojen pienin alkio, joka ei sisälly joukkoon A. Nyt kuitenkin segmentin A määrittelyn mukaan $c(X \setminus A) \in A$. Siispä täytyy päteä joko $A = D$ tai $A = H$. Kokoelman $\mathcal{C}$ kahdella jäsenellä on siis aina seuraava yhteys: toisen jäsenen $\leqq$ määrittelyjoukko D on toisen jäsenen $\leq$ määrittelyjoukon H alkusegmentti ja lisäksi molempien järjestykset täsmäävät määrittelyjoukossa D.

Otetaan nyt tarkasteluun kaikkien kokoelman $\mathcal{C}$ jäsenten yhdiste $\prec$. Äsken saadun tiedon perusteella huomataan heti, että $\prec \in \mathcal{C}$ ja lisäksi se on laajin kokoelman $\mathcal{C}$ jäsenistä. Jos F on järjestyksen $\prec$ määrittelyjoukko, niin $F = X$, sillä muussa tapauksessa alkio $c(X \setminus F)$ tulee järjestyksen perään eli järjestys $\prec$ määrittelyjoukolla $F \cup \{c(X \setminus F)\}$ on kokoelman $\mathcal{C}$ sellainen jäsen, joka sisältää jäsenen $\prec$ määrittelyjoukolla F.

Nyt siis $\prec$ on hyvä järjestys joukossa $F = X$ eli lause on todistettu. □

***Huomautus* 9.6.** *Hyvän järjestyksen lause* on yhtäpitävä Zornin lemman ja valinta-aksiooman kanssa.

Määritelmä 9.7. (Järjestystopologia) Olkoon $(H, \leq)$ täysin järjestetty joukko. Yleistetään reaaliakselilta tutut välien merkinnät joukkoon H. Otetaan siis käyttöön merkinnät:

$$\begin{aligned}
]a, b[\quad &= \{x \in H : a < x < b\} \\
[a, b[\quad &= \{x \in H : a \leq x < b\} \\
]a, b] \quad &= \{x \in H : a < x \leq b\} \\
[a, b] \quad &= \{x \in H : a \leq x \leq b\} \text{ ,missä } a, b \in H \text{ ja } a < b.
\end{aligned}$$

Jos joukossa H on pienin alkio m, niin välin $[m, b[$ tulkitaan kuuluvan muotoa $]a, b[$ olevien välien kokoelmaan. Samoin jos joukossa H on suurin alkio M, niin väli $]a, M]$ kuuluu muotoa $]a, b[$ olevien välien kokoelmaan. Nyt välien $]a, b[$ muodostama kokoelma $\mathcal{B}$ on erään joukon H:n topologian kanta. Tätä topologiaa kutsutaan *järjestystopologiaksi.*

Määritelmä 9.8. (Ensimmäinen ylinumeroituva ordinaali) On olemassa sellainen ylinumeroituva joukko Ω', joka on täysin järjestetty relaatiolla $\leq$ siten, että sillä on seuraavat ominaisuudet:

a. Jokaisella epätyhjällä joukon Ω' osajoukolla on pienin alkio eli Ω' on hyvin järjestetty. Tämä ominaisuus on seurausta hyvän järjestyksen lauseesta.

b. Joukossa Ω' on suurin alkio Ω.

c. Jos $x \in \Omega'$ ja $x \neq \Omega$, niin joukko, joka koostuu kaikista pistettä x edeltävistä Ω':n alkioista, on numeroituva.

Alkiota Ω kutsutaan *ensimmäiseksi ylinumeroituvaksi ordinaaliksi* ja sen voidaan ajatella jatkavan luonnollisten lukujen joukkoa. Joukon Ω' ja alkion Ω olemassaolo osoitetaan Theral O. Mooren teoksen *Elementary General Topology* sivuilla 135-140.

***Esimerkki* 9.9.** Joukossa Ω' on olemassa hyvä järjestys $\leq$ eli kaikilla $\emptyset \neq A \subset \Omega'$ on olemassa pienin alkio $\min A$. Erityisesti tällöin on olemassa $\min \Omega' = 0$. Olkoon joukko $X = [0, \Omega[\subset \Omega'$ varustettu järjestystopologialla. Koska Ω' on hyvin järjestetty, on myös X hyvin järjestetty. Nyt X:llä on seuraavat ominaisuudet:

1. X on ylinumeroituva.

2. Jos $x \in X$, niin $[0, x[$ ja myös $[0, x]$ on numeroituva. Jos joukolla X olisi suurin alkio b, niin silloin $X = [0, b]$ ja X olisi numeroituva. Tämä on kuitenkin ristiriidassa kohdan (1) kanssa, joten joukolla X ei ole suurinta alkiota.

3. Jos $\emptyset \neq A \subset X$ ja A on numeroituva, niin tällöin A:lla on yläraja joukossa X. Koska järjestys on hyvä, niin tämä tarkoittaa, että A:lla on myös pienin yläraja $\sup A$, sillä A:n ylärajojen joukossa $B = \{x : \text{ on A:n yläraja}\}$ on pienin alkio.

Todistus. Jos joukolla A ei ole ylärajaa, niin $X = \cup\{[0, a[: a \in A\}$. Kohdan (2) mukaan X olisi siis nyt numeroituva, mikä on ristiriidassa kohdan (1) kanssa.

4. Jos (x_n) on nouseva jono joukossa X, niin se suppenee kohti alkiota $b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, joka ominaisuuden (3) nojalla on olemassa.

   Todistus. Olkoon U alkion b ympäristö. Koska X oli varustettu järjestystopologialla, sisältää U jonkin muotoa $]u, v[$ olevan b:n ympäristön. Tällöin $u < b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, joten u ei ole joukon $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ yläraja. Siispä $x_k > u$, jollakin $k \in \mathbb{N}$ ja koska kyseessä on nouseva jono, niin $x_n > u$ kaikilla $n \geq k$. Lisäksi b:n määritelmän mukaan $x_n \leq b < v$ kaikilla $n \in N$. Näin ollen $x_n \in]u, v[\subset U$ kaikilla $n \geq k$.

5. Jos (x_n) on laskeva jono joukossa X, niin on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että $x_n = x_{n_0}$ kaikilla $n \geq n_0$.

   Todistus. Koska joukko X on hyvin järjestetty, niin on olemassa alkio x_{n_0} =min$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Koska jono (x_n) on lisäksi laskeva, niin $x_n = x_{n_0}$ kaikilla $n \geq n_0$.

6. X ei ole Lindelöf.

   Todistus. Koska joukossa X ei ole suurinta alkiota, niin kokoelma $\mathcal{D} = \{[0, x[: x \in X\}$ on joukon X avoin peite. Sillä ei ole numeroituvaa osapeitettä, koska muutoin X olisi numeroituva yhdiste numeroituvista joukoista $[0, x[$ ja näin ollen numeroituva. Tämä on ristiriidassa kohdan (1) kanssa eli X ei voi olla Lindelöf.

7. X ei ole kompakti.

   Todistus. X ei ole Lindelöf eli ei siis myöskään kompakti, sillä jos peitteellä $\mathcal{D}$ ei ole numeroituvaa osapeitettä, ei sillä voi olla myöskään äärellistä osapeitettä.

8. X on jonokompakti.

   Todistus. Olkoon (x_n) jono joukossa X. Jos saadaan osoitettua, että jonolla (x_n) on nouseva osajono $x_{n(1)}, x_{n(2)}, \ldots$, niin kohdan (4) mukaan osajono suppenee eli X on jonokompakti. Lähdetään todistamaan induktiolla, että tällainen osajono löytyy.

   Alkuaskel: Koska järjestys on hyvä, niin joukossa $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ on pienin alkio. Siispä voidaan valita luku $n(1)$, jolla $x_{n(1)} = \min\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

   Induktioaskel: Tehdään induktio-oletus, eli oletetaan, että löydetään luvut $n(1) < \cdots < n(k)$, joilla $x_{n(1)} \leq \cdots \leq x_{n(k)}$.

   Nyt valitaan $n(k+1) > n(k)$ siten, että $x_{n(k+1)} = \min\{x_i : i > n(k)\}$. Tällöin selvästi $x_{n(k+1)} \geq x_{n(k)}$ eli $x_{n(1)} \leq \cdots \leq x_{n(k)} \leq x_{n(k+1)}$.

   Siispä jono $(x_{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ on nouseva. Siispä jonolla (x_n) on suppeneva osajono, joten X on jonokompakti.

Viitteet

[1] Gemignani *Elementary Topology*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1967

[2] Kelley, John L. *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955.

[3] Lipschutz, Seymour *General Topology*, McGraw-Hill, Inc., 1965

[4] Moore, Theral O. *Elementary General Topology*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1964

[5] Nieminen, Toivo *Joukko-opin ja algebran alkeet 1*, Limes ry, 1972

[6] Nieminen, Toivo *Joukko-opin ja algebran alkeet 2*, Limes ry, 1973

[7] Pervin, William J. *Foundations of General Topology*, Academic Press Inc. (London) Ltd., 1964

[8] Schubert, Horst *Topology*, Macdonald and Co. Ltd., 1968

[9] Suominen, Kalevi; Vala, Klaus *Topologia I*, 5. painos. Limes ry, 1987.

[10] Väisälä, Jussi. *Topologia I*, 3. painos. Limes ry, 2004.

[11] Väisälä, Jussi. *Topologia II*, 1. painos. Limes ry, 1999.

[12] Väisälä, Jussi. *Topologia II*, 2. korjattu painos. Limes ry, 2005.