



Pro gradu -tutkielma
Teoreettinen fysiikka

Epägaussisuusdet kurvatonimallissa

Tommi Tenkanen
2013

Ohjaaja: Prof. Kari Enqvist
Tarkastajat: Prof. Kari Enqvist, FT Sami Nurmi

HELSINGIN YLIOPISTO
FYSIKAN LAITOS

PL 64 (Gustaf Hällströmin katu 2)
00014 Helsingin yliopisto

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Fysiikan laitos	
Tekijä — Författare — Author			
Tommi Tenkanen			
Työn nimi — Arbetets titel — Title			
Epägaussisuusdet kurvatonimallissa			
Oppiaine — Läroämne — Subject			
Teoreettinen fysiikka			
Työn laji — Arbetets art — Level		Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma		11/2013	91
Tiivistelmä — Referat — Abstract			
<p>Tässä tutkielmassa tarkastelemme kosmista inflaatiota, jolla tarkoitetaan lyhyttä kiihtyvän laajenemisen ajanjaksoa varhaisessa maailmankaikkeudessa. Inflaatiosta on viimeisen 20 vuoden aikana muodostunut vallitseva paradigma maailmankaikkeuden rakenteiden synnyn selittäjänä.</p> <p>Kosmisen inflaation uskotaan saaneen alkunsa ja myös päättyneen inflatoniksi nimetyn skalaarikentän energiatiheyden vaikutuksesta. Tarkastelemme tilannetta, jossa inflaation jälkeen inflatonkenttä hajosi säteilyksi tuottaen tilanteen, jossa kaksi ainekomponenttia, säteily ja inflaation aikana energiatiheydeltään pienenä pysytellyt toinen skalaarikenttä, kurvatonin, alkoivat kilpailla maailmankaikkeuden energiatiheysbudjetista.</p> <p>Kurvatonin kasvattaessa energiatiheyttään suhteessa säteilyyn syntyi tilanne, jossa aika-avaruuteen alkoi syntyä alati kasvavia kaarevuusperturbaatioita. Tämä johti maailmankaikkeuteen muodostuvien tiheyserojen kasvuun, jolloin aine romahti kasaan ja muodosti paikallisesti gravitaation sitoman systeemin. Näin perturbaatiot alkoivat synnyttää maailmankaikkeuden suuren skaalan rakennetta ja jättivät jälkensä myös aineen ja säteilyn irtikykyssä syntyneeseen kosmiseen mikroaaltotaustasäteilyyn.</p> <p>Tässä tutkielmassa kuitenkin paneudumme inflaation aikana ja välittömästi sen jälkeen syntyneiden kaarevuusperturbaatioiden syntymekanismeihin pikemmin kuin niiden dynamiikkaan ja vaikutuksiin myöhemmässä maailmankaikkeudessa.</p> <p>Usein syntyneiden kaarevuusperturbaatioiden jakauma eroaa gaussisesta tapauksesta. Yksinkertaisimmassa tapauksessa epägaussista jakaumaa karakterisoidaan ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametrein, joilla saattaa olla näkyvät seurauksensa paitsi kosmisessa mikroaaltotaustasäteilyssä havaittavissa lämpötilavaihteluissa, myös suuren skaalan rakenteessa.</p> <p>Eri inflaatiomallien kannalta syntyvän epägaussisuuden määrä on olennainen malleja erottava tekijä. Laajennamme tarkastelumme toiseen kertalukuun, sillä tietyn tyyppisessä kurvatonimallissa tämä voi karakterisoida syntyvän epägaussisuuden määrää paremmin kuin ensimmäisen asteen epägaussisuus.</p> <p>Tutkielmassa käymme läpi inflaatiioskenaarion teoreettisen perustan, esittelemme kurvatonimallin ja sen päätulokset kosmologista perturbaatioteoriaa käyttäen, tarkastelemme yksityiskohtaisesti gaussisuutta ja epägaussisuutta, johdamme ΔN-formalismia hyväksikäyttäen yhtälöt kaarevuusperturbaation lausekkeessa esiintyvälle ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille, sekä tarkastelemme kurvatonimallin tuottamaa ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuutta tapauksessa, jossa kurvatonin potentiaali ei ole pelkästään kvadraattista muotoa, vaan sisältää myös pieniä itseisvuorovaikutuksia.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords			
Kosminen inflaatio, kurvatonimalli, ΔN -formalisi, kaarevuusperturbaatio, epägaussisuus			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited			
Kumpulan kampuskirjasto			
Muita tietoja — övriga uppgifter — Additional information			

Kiitokset

Haluan kiittää ohjaajaani, professori Kari Enqvistiä paitsi mielenkiintoisen ja innostavan aiheen ehdottamisesta, myös lukuisista hyödyllisistä kommenteista matkan varrella. Erityiskiitoksen ansaitsee tutkijatohtori Sami Nurmi niistä monista kerroista, jolloin olen kaivannut selvennystä kohtaamiini ongelmiin ja jolloin hän on kärsivällisyydellään ollut suureksi avuksi.

En olisi koskaan nauttinut fysiikan opiskelusta yhtä paljon ilman loistavia opiskelutovereita. Mitä suurimman kiitoksen haluan osoittaa erityisesti heille, joiden kanssa olen jakanut pitkien päivien pitkät illat paitsi laskuharjoitusten, myös vapaa-ajan merkeissä vuosi toisensa jälkeen. Kiitos Opa, Juho, Johann, Marko, Sebastian, Petri, Tuomas, Jarkko, Henri, Sara, Panu, Markus, Karoliina ja te kaikki muut, jotka olette ikinä istuneet samaan pöytään kanssani, jakaneet tietämystänne, pohtineet uusia mahdollisuuksia tai osoittaneet oman tietämykseni puutteelliseksi ja näin tehneet elämästäni yhtä rikkaan ja mielenkiintoisen kuin mitä se tänään on.

Perheelleni osoitan nöyrän kiitoksen kaikesta siitä tuesta ja kannustuksesta, jota olen aina saanut mihin tahansa pyrkiessäni. On ollut etuoikeus saada kasvaa perheessä, jonka moninaisuus ei ole ollut hajottavaa vaan kokoavaa ja jonka olen kokenut suurena rikkautena. Erityisen suuren kiitoksen haluan osoittaa veljelleni Tuomakselle kaikista niistä kerroista, jolloin hän on haastanut minua ja kykyjäni, sekä vastavuoroisesti kestänyt hänelle asettamiini haasteita, innostanut ajattelemaan ja kuvittelemaan ja jakanut samat huikeat kokemukset Miehikkälästä Ulaanbaatariin, oli kyse sitten fysiikasta, kuvataiteesta tai matkustuksesta.

Kiitos myös Sannille kaikista niistä vuosista, jotka sain jakaa kanssasi. Minua kohtaan osoittamasi huolenpito ja rakkaus ovat olleet korvaamattomia huolimatta siitä, etten koskaan pystynyt samaan.

Sisältö

1	Johdanto	3
1.1	Käytetyt konventiot	5
2	Kosminen inflaatio ja kaarevuusperturbaation synty	7
2.1	Vaatimukset inflaatiolle	8
2.2	Inflaation dynamiikkaa	10
2.2.1	Inflatonimalli	11
2.2.2	Inflatonikentän hidas vieriminen	13
2.2.3	Inflatonikentän hajoaminen	14
2.3	Inflatonikentän perturbaatioista kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihteluihin	16
2.3.1	Perturbaatioiden synty ja kehitys inflaation aikana	16
2.3.2	Perturbaatioiden kehitys inflaation jälkeen	22
2.4	Kosminen mikroaaltotaustasäteily	24
2.4.1	CMB:n lämpötilavaihtelut	25
2.4.2	Spektri-indeksi ja muut havaittavat suureet	27
3	Epäadiabaattiset perturbaatiot ja kurvatonimalli	30
3.1	Lyhyesti perturbaatioteoriasta	30
3.2	Kurvatonimalli	34
3.2.1	Kurvatonin dynamiikkaa	37
3.2.2	Kaarevuusperturbaation tehospektri	41
3.3	Kurvatonimallin modifikaatiot	43
4	Erillisten maailmankaikkeuksien malli	46
4.1	Gaussisuus ja epägaussisuus	47
4.2	Erillisten maailmankaikkeuksien malli	50
4.2.1	Kaarevuusperturbaatio ΔN -formalismissa	52

4.2.2	Kaarevuusperturbaatioiden epägaussisuus	55
4.3	Havaintojen asettamat rajat epälineaarisuusparametreille . . .	58
5	Epägaussisuuden synty kurvatonimallissa	61
5.1	Epägaussisuus kurvatonimallissa	61
5.1.1	Ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuus	62
5.2	Epäkvadraattinen kurvatonipotentiali	65
5.2.1	Erikoistapaus $n = 0$	69
5.2.2	Kurvatonimallin parametreista	72
6	Yhteenveto	74
A	Kaarevuusperturbaatio paikka-avaruudessa	76
B	f_{NL}, g_{NL} ja τ_{NL} erillisten maailmankaikkeuksien mallissa	80

Luku 1

Johdanto

Tässä tutkielmassa keskitymme yhteen varhaisen maailmankaikkeuden merkittävimmistä prosesseista, kosmiseen inflaatioon [1, 2, 3]. Kosmisella inflaatiolla tarkoitetaan lyhyttä kiihtyvän laajenemisen ajanjaksoa varhaisessa maailmankaikkeudessa ja siitä on viimeisen 20 vuoden aikana muodostunut vallitseva paradigma rakenteiden synnyn selittäjänä [3, 4, 5].

Kosmisen inflaation uskotaan saaneen alkunsa ja myös päättyneen kevyen, inflatoniksi nimetyn skalaarikentän energiatiheyden vaikutuksesta [2, 6]. Tarkastelemme tilannetta, jossa inflaation jälkeen maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoiva inflatonikenttä hajosi säteilyksi tuottaen tilanteen, jossa kaksi ainekomponenttia, inflatonista syntynyt säteily ja inflaation aikana energiatiheydeltään pienenä pysytellyt toinen skalaarikenttä, kurvatonin [7, 8, 9], kilpailivat varhaisen maailmankaikkeuden energiatiheysbudjetista.

Kurvatonin kasvattaessa energiatiheyttään suhteessa säteilyyn syntyi tilanne, jossa aika-avaruuteen alkoi syntyä kurvatonikentässä inflaation aikana esiintyneistä fluktuaatioista alkunsa saaneita, alati kasvavia kaarevuusperturbaatioita. Tämä johti maailmankaikkeuteen muodostuvien tiheyserojen kasvuun, jolloin suuremman tiheyden alueista kasvoi nopeasti huomattavasti keskimääräistä tiheämpiä alueita ja aine romahti kasaan muodostaen paikallisesti gravitaation sitoman systeemin. Näin perturbaatiot alkoivat synnyttää maailmankaikkeuden suuren skaalan rakennetta ja jättivät jälkensä myös aineen ja säteilyn irtikytkeytyessä syntyneeseen kosmiseen mikroaaltotaustasäteilyyn, kun maailmankaikkeus oli 380 000 vuoden ikäinen [3, 4, 5].

Kosmisesta mikroaaltotaustasäteilystä on tehty tarkkuushavaintoja vuodesta 1989 alkaen [10]. Euroopan avaruusjärjestön ESA:n vuonna 2009 avaruuteen laukaistu Planck-satelliitti on viime vuosien ajan mitannut kosmisen

mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilavaihteluita ja säteilyn polarisaatiota. Lämpötilavaihteluita koskevat tulokset julkistettiin maaliskuussa 2013, kun taas polarisaatiota käsittelevät tulokset on tarkoitus julkaista alkuvuodesta 2014 [11, 12]. Tulosten toivotaan tarjoavan arvokasta lisätietoa edellä käsitellyistä varhaisen maailmankaikkeuden mikrofysikaalisista ilmiöistä.

Tässä tutkielmassa paneudumme inflaation aikana ja välittömästi sen jälkeen syntyneiden kaarevuusperturbaatioiden syntymekanismeihin pikemmin kuin niiden yksityiskohtaiseen dynamiikkaan ja vaikutuksiin myöhemmässä maailmankaikkeudessa. Syntyvien kaarevuusperturbaatioiden funktionaalinen muoto on kysymys, joka tulee ymmärtää yksityiskohtaisesti maailmankaikkeuden kehityksen täsmälliseksi kvantitatiiviseksi ymmärtämiseksi. Kaarevuusperturbaatioiden jakauma voi skalaarikenttien kvanttifluktuaatioista alkunsa saaneena olla puhtaasti gaussista muotoa, mutta ellei näin ole, joudumme kysymään, miten ja miksi jakauma eroaa gaussisesta tapauksesta.

Epägaussista jakaumaa karakterisoidaan yksinkertaisimmassa tapauksessa, jossa jakauma muodostuu puhtaasti gaussisen muuttujan ja tämän korkeampien potenssien summasta, ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametrein. Parametrit kytkeytyvät jakaumaa karakterisoiiviin tilastollisiin momentteihin ja niillä saattaa olla näkyvät seurauksensa paitsi kosmisessa mikroaaltotaustasäteilyssä havaittavissa lämpötilavaihteluissa, myös maailmankaikkeuden suuren skaalan rakenteessa [4, 13].

Eri inflaatiomallien kannalta syntyvän epägaussisuuden määrä on olennainen malleja erottava tekijä [14]. Laajennamme tarkastelumme toiseen kertalukuun, sillä tietyn tyyppisessä kurvatonimallissa tämä voi karakterisoida syntyvän epägaussisuuden määrää paremmin kuin ensimmäisen asteen epägaussisuus [15, 16].

Tutkielman rakenne on seuraava: luvussa 2 käymme läpi inflaatiokeskenäriön teoreettisen perustan esitellen yksinkertaisen inflatonimallin, seuraamme inflatonikentän kvanttifluktuaatioista syntyneiden tiheusperturbaatioiden kehitystä kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihteluiksi ja luomme katsauksen näistä tehtäviin havaintoihin.

Luvun 3 aloitamme esittelemällä kosmologisen perturbaatioteorian [17, 18] tuloksia, joita käytämme samassa luvussa myöhemmin esiteltävän kurvatonimallin perusteiden ja sen ennustamien tulosten läpikäymiseen. Tarkastelemme erityisesti tapauksia, joissa kurvatonin energiatiheys suhteessa maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoivaan säteilyyn on kurvatonin hajoamishetkellä joko hyvin pieni tai hyvin suuri. Lopuksi luomme lyhyen katsauksen yksinkertaisimman kurvatonimallin laajennuksiin.

Luvussa 4 käsittelemme ensin yksityiskohtaisesti gaussisuutta ja epägaussisuutta, minkä jälkeen esittelemme syntyvän kaarevuusperturbaation laskemiseksi kehitetyn ei-perturbatiivisen lähestymistavan, niin kutsutun erillisten maailmankaikkeuksien mallin eli ΔN -formalismiin [19, 20, 21, 22]. Johdamme ΔN -formalismia hyväksikäyttäen yhtälöt syntyvän kaarevuusperturbaation lausekkeessa esiintyville ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille mielivaltaisen monen kentän tapauksessa. Luvun lopuksi luomme katsauksen havaintojen epälineaarisuusparametreille asetamille rajoituksille ja tarkastelemme lyhyesti parametrien mahdollisia vaikutuksia suuren skaalan rakenteessa.

Luvussa 5 tarkastelemme kurvatonimallin tuottamaa ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuutta tapauksessa, jossa kurvatonikentän potentiaali ei ole pelkästään kvadraattista muotoa, vaan sisältää myös pieniä itseisvuorovaikutuksia [15, 16]. Tarkastelemme itseisvuorovaikutuksia sisältävää potentiaalia tilanteessa, jossa kurvatonin energiatiheys sen hajoamishetkellä on edelleen pieni ja esittelemme ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille numeerisesti lasketut tulokset.

Luvussa 6 teemme yhteenvedon tutkielman sisällöstä kerraten esitetyt tulokset ja pohtien lyhyesti tulevaisuudessa tehtäviä havaintoja.

1.1 Käytetyt konventiot

Tässä tutkielmassa käytämme niin sanottua luonnollista yksikköjärjestelmää, jossa $c = 1$, $\hbar = 1$ ja $k_B = 1$. Käytämme usein Einsteinin summaussääntöä, $\sum_{\mu} x^{\mu} x_{\mu} \equiv x^{\mu} x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}$, jossa toistetun indeksin yli summataan aina, ellei toisin mainita. Kreikkalaisilla kirjaimilla (μ, ν, \dots) merkitsemme koko aika-avaruuden koordinaatteja ja latinalaisilla (i, j, \dots) pelkän avaruuosan koordinaatteja. Metriikan signatuurina käytämme muotoa $(-, +, +, +)$ ja konnektiona Riemannin (Christoffelin) konnektiota, joka määritelmän mukaan on [23]

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\rho\mu} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}), \quad (1.1)$$

jossa $g^{\sigma\rho}$ on metrinen perustensori ja ∂_{μ} osittaisderivaatta komponentin μ suhteen. Usein myös merkitsemme suureen N osittaisderivaattaa komponentin μ suhteen symbolilla $N_{,\mu}$. Kovarianttia derivaattaa Riemannin konnektion suhteen merkitsemme symbolilla ∇_{μ} .

Fourier-muunnosten yhteydessä käytämme normitusta

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k. \quad (1.2)$$

Derivaattaa ajan suhteen merkitsemme pisteellä

$$\dot{} \equiv \frac{d}{dt} \quad (1.3)$$

ja derivaattaa konformiajan η suhteen pilkulla

$$\dot{}' \equiv \frac{d}{d\eta}. \quad (1.4)$$

Alaindeksillä $_0$ viittaamme nykyhetkeen ja alaindeksillä $_*$ käsiteltävän suureen inflaationaikaiseen arvoon, ellei toisin mainita.

Luku 2

Kosminen inflaatio ja kaarevuusperturbaation synty

Tässä luvussa esittelemme inflaatiokeskenaarion [1, 2, 3] teoreettisen perustan käyden läpi yksinkertaisen yhden kentän inflatonimallin [2, 6], sekä tarkastelemme energiatiheys- ja kaarevuusperturbaatioiden syntyä ja kehitystä varhaisessa maailmankaikkeudessa. Käsittelemme kosmisesta inflaatiosta vastuussa olevaa inflatonia fenomenologisena mallina, jonka pohjalta johdamme likeyhtälöt sekä inflatonikentälle että tämän perturbaatioille, kvantitamme kentän ja havaitsemme, että kentässä esiintyvät kvanttifluktuaatiot ovat viime kädessä vastuussa myös syntyvästä kaarevuusperturbaatiosta.

Kaarevuusperturbaatiot jättävät jäljen paitsi säteilyn ja baryonisen aineen irtikytketyessä syntyvään kosmiseen mikroaaltotaustasäteilyyn, myös maailmankaikkeuden suuren skaalan rakenteeseen [3, 4, 5]. Havaitsemme kaarevuusperturbaatioiden olevan vastuussa suuren skaalan rakenteesta ja tämän havainnollistamiseksi – sekä myöhemmissä luvuissa eri inflaatioon liittyvistä malleista ennusteita tehdäksemme – luomme katsauksen kosmisesta mikroaaltotaustasta tehtyihin havaintoihin.

Käsittelemme lyhyesti myös adiabaattisia ja epäadiabaattisia perturbaatioita, joiden tarkastelu paitsi valaisee suuren skaalan rakenteen syntyyn liittyviä prosesseja, myös toimii johdatuksena seuraavassa luvussa käsiteltävään useamman kentän sisältävään kurvatonimalliin, jossa energiatiheyden epäadiabaattiset perturbaatiot voivat muuttaa syntyvää kaarevuusperturbaatiota merkittävästi.

On syytä korostaa, että tässä luvussa käsittelemme pelkästään yhden, hitaasti vierivän skalaarikentän ominaisuuksia ja sen dynamiikan seurauksia

maailmankaikkeuden myöhemmälle evoluutiolle. Aiheen käsittely ja fysikaaliset seuraukset muuttuvat myöhemmissä luvuissa huomattavalla tavalla, mutta tarkastelemmekin tässä luvussa esitettävää mallia puhtaasti esimerkkinä ja johdatuksena palvelevalla tasolla.

2.1 Vaatimukset inflaatiolle

Kosmisella inflaatiolla tarkoitetaan kiihtyvän laajenemisen ajanjaksoa varhaisessa maailmankaikkeudessa. Nykyisten havaintojen perusteella maailmankaikkeus saattaa olla tälläkin hetkellä laajenemassa kiihtyvästi [24, 25], mutta tässä tutkielmassa tarkoitamme inflaatiolla kiihtyvän laajenemisen ajanjaksoa, joka sijoittuu aikaan, jolloin maailmankaikkeus oli noin 10^{-36} – 10^{-33} sekunnin ikäinen [5].

Kosmologian niin kutsutussa Λ CDM-standardimallissa maailmankaikkeutta kuvataan Friedmann-Robertson-Walker -universumina, jossa avaruus on homogeeninen ja isotrooppinen sisältäen vain ainetta, jota voidaan kuvata ideaalisena fluidina [3, 23]. Koska meitä kosmologisessa mittakaavassa pienillä skaaloilla ympäröivät rakenteet eivät ole isotrooppisesti jakautuneet eikä avaruus ympärillämme ole homogeeninen, saattavat mallin oletukset kuulostaa lähtökohtaisesti merkillisiltä, mutta FRW-malli olettaa maailmankaikkeutemme nimenomaan statistisesti homogeeniseksi ja isotrooppiseksi.

Neliulotteisen aika-avaruuden mallintamiseen käytettävä Robertson–Walker-metriikka (RW-metriikka) on muotoa [23]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.1)$$

jossa t on mukanaliikkuvan havaitsijan mittaama aikakoordinaatti, r , θ ja ϕ ovat mukanaliikkuvat polaarikoordinaatit ja $a(t)$ dimensioton skaalatekijä. Parametri K kuvaa avaruudellisten hyperpintojen kaarevuutta siten, että tilanne $K > 0$ vastaa positiivista ja $K < 0$ negatiivista avaruudellista kaarevuutta. Tilanteessa $K = 0$ maailmankaikkeus on avaruudelliselta geometrialtaan laakea.

Einsteinin yhtälöstä¹

¹Tarkastelemme inflaatiota klassisen yleisen suhteellisuusteorian valossa. On epätodennäköistä, että muilla gravitaatioteorioilla olisi relevanttia kytkentää tarkastelemiimme inflaatiomalleihin, sillä inflaation aikaiset energiaskaalat olivat todennäköisesti paljon Planckin skaalaa pienempiä [19].

$$G_{\mu\nu} = M_{Pl}^{-2}T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

jossa

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

on Einsteinin tensori, $g_{\mu\nu}$ metrinen perustensori, $M_{Pl} = (8\pi G)^{-1}$ redusoitu Planckin massa ja $T_{\mu\nu}$ energia-liikemäärätensori, voidaan ideaalifluidioletuksella

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

jossa ρ on fluidin energiatiheys, p paine ja $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ fluidin nelinopeus mukanaaliikkuvissa koordinaateissa, johtaa maailmankaikkeuden dynamiikkaa kuvaavat Friedmannin yhtälöt

$$H^2 = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2} - \frac{K}{a^2} \quad (2.5)$$

ja

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 = -\frac{p}{M_{Pl}^2} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.6)$$

jossa $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ on Hubblen parametri.

Vähentämällä yhtälö (2.6) yhtälöstä (2.5) saadaan niin kutsuttu kiihtyvyyssyhtälö

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\rho + 3p}{6M_{Pl}^2}. \quad (2.7)$$

Määrittelemme inflaation yksinkertaisesti kiihtyvän laajenemisen aikakaute-na yhtälöllä

$$\ddot{a} > 0, \quad (2.8)$$

jolloin kiihtyvyyssyhtälön (2.7) perusteella maailmankaikkeuden energiatihettä hallitsevan ainekomponentin tulee täyttää ehto

$$\rho + 3p < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p < -\frac{1}{3}\rho, \quad (2.9)$$

eli inflaation aiheuttavalla ainekomponentilla tulee olla negatiivinen paine.

Inflaation määrittelevä yhtälö (2.8) voidaan kirjoittaa konformiajan η ($d\eta \equiv dt/a(t)$) ja konformaalisen Hubblen parametrin

$$\mathcal{H} \equiv aH = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \dot{a} \quad (2.10)$$

avulla myös toisella tavalla:

$$\ddot{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) < 0, \quad (2.11)$$

jolloin saamme uuden tulkinnan inflaatiota kuvaaville yhtälöille. Vaikka maailmankaikkeuden laajetessa fysikaaliset avaruudelliset etäisyydet kasvavat skaalatekijän $a(t)$ funktiona, pysyvät mukanaliikkuvat koordinaatit paikallaan. Tällöin kausaalisessa yhteydessä olevien alueiden maksimietäisyyden ilmoittava mukanaliikkuva Hubblen etäisyys \mathcal{H}^{-1} pienenee (yhtälö (2.11)), eli etäisyys, jolle mukanaliikkuva havaitsija voi vielä olla kausaalisessa yhteydessä, pienenee.

Koska maailmankaikkeus laajenee inflaation aikana kiihtyvällä nopeudella, menetetään lopulta kausaalinen yhteys riittävän kaukana oleviin alueisiin. Tämän seurauksena voimme riittävän pitkäkestoisen inflaation tuloksena odottaa koko havaitsemamme maailmankaikkeuden kehittyneen yhdestä, alun perin kausaalisessa yhteydessä olleesta alueesta, vaikka tänä päivänä kaikki havaitsemamme alueet eivät olisikaan Hubblen etäisyydellä toisistaan. Tulos toimii lähtökohtana myös niin kutsutulle erillisten maailmankaikkeuksien mallille, jota käsittelemme luvussa 4.

2.2 Inflaation dynamiikkaa

Lähdemme viitteitä [3, 26] seuraten tarkastelemaan inflaatioehdon (2.9) täyttävää materiaa lisäämällä malliimme skalaarisen kvanttikentän, jota kutsumme inflatoniksi ja jota merkitsemme symbolilla ϕ . Aloitamme johtamalla inflatonikentän likeyhtälön, minkä jälkeen tarkastelemme tiettyjä inflatonin inflaation aikaisen dynamiikan piirteitä kuten hidasta vierimistä. Lopuksi luomme katsauksen inflatonikentän hajoamiseen.

2.2.1 Inflatonimalli

Kentän Lagrangen tiheys on muotoa²

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (2.12)$$

jossa $g^{\mu\nu}$ on RW-metriikka ja $V(\phi)$ kentän potentiaali. Jätämme potentiaalin vielä tarkemmin määräämättömäksi, mutta toteamme sen sisältävän tavalliseen tapaan kentän mahdolliset vuorovaikutukset itsensä ja muiden kenttien kanssa. Esimerkkinä mainitsemme vapaan kentän tapauksen, jossa potentiaali on muotoa $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, jossa m on kenttää vastaavan eksitaation, inflatonihiuksien, massa.

Kentän liikeyhtälöt voidaan johtaa vaatimalla, että vaikutus ($g \equiv \det g_{\mu\nu}$)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (2.13)$$

on invariantti kentän variaatioiden suhteen. Sijoittamalla tuloksena saatavaan Eulerin-Lagrangen-yhtälöön inflatonikentän Lagrangen tiheyden saamme liikeyhtälöksi

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi) - V'(\phi) = 0, \quad (2.14)$$

jossa olemme merkinneet $V'(\phi) \equiv dV/d\phi$. Jatkossa merkitsemme samalla tavalla myös toista derivaattaa $V''(\phi) \equiv d^2V/d\phi^2$.

Avaruudellisesti laakeassa FRW-mallissa $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$, jolloin liikeyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi = -V'(\phi), \quad (2.15)$$

jossa $\ddot{\phi} = d^2\phi/dt^2$ ja $\nabla^2 \equiv \delta^{ij}\partial_i\partial_j$. Homogeeniselle kentälle $\nabla^2\phi = 0$, jolloin liikeyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (2.16)$$

Tekemällä jälleen yhtälön (2.4) mukaisen ideaalifluidioletuksen saamme inflatonikentän energiatiheydeksi [23]

²Periaatteessa Lagrangen tiheys voitaisiin valita muullakin tavoin, mutta yhtälö (2.12) on ainoa Lorentz-invariantti muoto, joka sisältää vain ensimmäisiä derivaattoja [3].

$$\rho = T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.17)$$

ja paineeksi

$$p = \frac{1}{3}T_i^i = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (2.18)$$

jossa T_{00} , T_i^i ovat Noetherin teoremaa hyväksikäyttäen johdetun energia-liikemäärätensoren $T_{\mu\nu}$ diagonaalitermit.

Nyt havaitsemme inflaatioehdon (2.9) täyttyvän, mikäli

$$\rho + 3p = 2(\dot{\phi}^2 - V(\phi)) < 0, \quad (2.19)$$

eli mikäli

$$\dot{\phi}^2 < V(\phi). \quad (2.20)$$

Mikäli potentiaalin $V(\phi)$ muoto on riittävän laakea, jarruttaa likeyhtälössä (2.16) esiintyvä kitkatermi $3H\dot{\phi}$ kentän liikettä siten, että inflaatioehto täyttyy kentän ensimmäisen aikaderivaatan alkuarvosta riippumatta nopeasti. Tällöin pätee

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (2.21)$$

eli analogisesti klassisen mekaniikan yhtälöille voimme tulkita inflatonikentän liike-energian olevan paljon kentän potentiaalienergiaa pienempi [27]. Sanomme tällöin, että kenttä vierii hitaasti (engl. *slow-roll*).

Inflatonikentän ϕ tilanyhtälöparametriksi $\omega \equiv p/\rho$ saadaan potentiaalitermin dominoidessa $\omega_\phi \simeq -1$, jolloin Friedmannin yhtälöistä (2.5) ja (2.6) johdettava niin kutsuttu jatkuvuusyhtälö

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) = -3H(1 + \omega)\rho \quad (2.22)$$

antaa inflatonikentän, materian (kylmän pölyn) ja säteilyn energiatiheyksille lausekkeet

$$\rho_\phi = \text{vakio} \quad (2.23)$$

$$\rho_m \propto a^{-3} \quad (2.24)$$

$$\rho_r \propto a^{-4}, \quad (2.25)$$

kun $\omega_m = 0$ ja $\omega_r = \frac{1}{3}$, eli inflatonkentän energiatiheyden pysyessä vakiona ajaudutaan nopeasti tilanteeseen, jossa inflatonkenttä dominoi maailmankaikkeuden energiatiheyttä. Olettamalla potentiaali ja avaruuden geometria riittävän laakeiksi saadaan tällöin Friedmannin yhtälöstä (2.5) tulos

$$H^2 \approx \frac{1}{3M_{Pl}^2} V(\phi_*) = \text{vakio}, \quad (2.26)$$

jossa $\phi_* = \phi(t_{inf})$ on inflatonkentän arvo inflaation aikana. Havaitsemme tällöin maailmankaikkeuden laajenevan inflaation aikana lähes eksponentiaalisesti: $a(t) \sim e^{Ht}$, eli avaruuden geometria on lähellä de Sitter -avaruutta [23]. Tulos motivoi kuvaamaan maailmankaikkeuden kiihtyvän laajenemisen suuruutta niin kutsuttuina e-kertoina (engl. *e-folding*), jotka määrittelemme yhtälöllä

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t_{inf})}, \quad (2.27)$$

jossa t_{inf} on jokin inflaation aikainen referenssihetki ja t_{end} inflaation loppumishetki.

Tavallisesti eri mallien ennustama e-kertojen määrä vaihtelee suuresti, tyypillisesti välillä $N \sim 50 - 10^8$ [14]. Arviot e-kertojen määrästä ovat kuitenkin relevantteja kuvaamaan maailmankaikkeuden laajenemista vain suurimpien nykyisin havaittavien kokoskaalojen horisontista poistumisen³ ja inflaation päättymisen välillä, jolloin havaittavia vaikutuksia on arvoilla $N \sim 50 - 70$ [4]. Käytännössä maailmankaikkeuden laajenemiselle ja e-kerroille ennen näiden skaalojen horisontista poistumista ei tunneta ylärajaa.

2.2.2 Inflatonkentän hidas vieriminen

Edellä mainitsimme puhuvamme hitaasta vierimisestä, kun inflatonkentän liike-energia on paljon kentän potentiaalienergiaa pienempi. Derivoimalla inflatonkentän hidasta vierimistä kuvaavaa yhtälöä (2.21) ajan suhteen saamme ehdon $\dot{\phi}\dot{\phi} \ll \dot{V}(\phi) = V'(\phi)\dot{\phi} \Leftrightarrow \ddot{\phi} \ll V'(\phi)$, jolloin inflaation aikana päädytään yhtälön (2.16) kitkatermin vuoksi dynaamisesti tilanteeseen, jossa

³Esittelemme käsitteen osiossa 2.3.

voimme liikeyhtälöiden ratkaisemista helpottaaksemme approksimoida yhtälöitä (2.5) ja (2.16) niin kutsutuilla hitaan vierimisen yhtälöillä (*slow-roll*-yhtälöillä, SR-yhtälöillä)

$$H^2 = \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2} \quad (2.28)$$

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi). \quad (2.29)$$

Potentiaalia $V(\phi)$ karakterisoimaan on tapana määritellä niin kutsutut SR-parametrit $\epsilon(\phi)$ ja $\eta(\phi)$:

$$\epsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2}M_{Pl}^2 \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \quad (2.30)$$

$$\eta(\phi) \equiv M_{Pl}^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}. \quad (2.31)$$

Voidaan näyttää, että kiihtyvä laajeneminen on käynnissä niin kauan kuin ehdot $\epsilon, \eta \ll 1$ pätevät ja päättyy, kun jommalle kummalle parametreista pätee $\epsilon, \eta \simeq 1$.

SR-approksimaatio saadaan liitettyä myös vaadittuun e-kertojen lukumäärään, sillä

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t_{inf})} = \int_{t_{inf}}^{t_{end}} H(t) dt \approx M_{Pl}^{-2} \int_{\phi_{end}}^{\phi_{inf}} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi. \quad (2.32)$$

Vertaamalla tätä yhtälön (2.30) määritelmään ja ehtoon $\epsilon \ll 1$ nähdään, että vaadittu e-kertojen lukumäärä saavutetaan riittävän pienillä ϵ :n arvoilla.

Yhden kentän ja sopivasti valitun potentiaalilin tapauksessa SR-parametrit liittyvät suoraan myös kentän tiheysperturbaatioita kuvaavaan tehospektriin ja niiden avulla voidaan varsin helposti johtaa ennuste mm. inflaation energiaskaalalle. Palaamme asiaan osiossa 2.4.

2.2.3 Inflatonkentän hajoaminen

Inflaation päättymiseen on karkeasti ottaen kaksi tapaa: edellä käsitelty kentän kiihtyvä putoaminen potentiaalissa, jolloin SR-approksimaatio ei enää päde ja $\epsilon \simeq 1$ tai $\eta \simeq 1$, tai inflatonin kytkeytyminen toiseen kvanttikenttään

päättää inflaation. Jälkimmäisestä tapauksesta käytetään yleisesti nimeä hybridi-inflaatio ja lyhyt yleiskatsaus tällaisista malleista on löydettävissä esimerkiksi viitteistä [4, 28].

Seuraavaksi käsittelemme lyhyesti inflaation päättymistavasta riippumattonta tapausta, jossa inflatonkenttä inflaation päätyttyä hajoaa luovuttaen energiansa edelleen muille kentille. Käytämme prosessista nimeä termalisaatio (engl. *reheating*) [4, 28, 29] ja käymme tässä läpi sen pääkohdat.

Termalisaatiolla tarkoitetaan ajanjaksoa, jolloin inflatonkentän hajoamisessa syntyneet lopputuotteet – viime kädessä säteily – asettuvat termiseen tasapainoon. Tämä on tavallisesti ajankohta, johon inflaatiomallit päätyvät ja josta perinteisen Hot Big Bang -mallin voidaan katsoa alkavan [4].

Yksinkertaisimmassa tapauksessa inflatoni luovuttaa energiansa muille kentille oskillaatioprosessin kautta, kun inflatoni inflaation päätyttyä jää oskilloimaan potentiaalinsa minimikohdan ympärille. Oletamme, että minimikohdan ympärillä potentiaalimuoto on likimain kvadraattinen, $V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$, ja oskillaatioamplitudi on pieni. Oletamme myös, että inflatonkenttä on edelleen niin homogeeninen, että oskillointi on kaikkialla koherenttia. Tällöin voimme rajalla $m \gg H$ jättää kitkatermin huomiotta inflatonkentän liikeyhtälössä (2.16) ja havaitsemme kentän oskilloivan taajuudella m . Tällöin kentän paineen aikakeskiarvoksi yhden oskillaatiojakson yli saadaan

$$\langle p \rangle = m^{-1} \int_0^m \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right) dt = 0, \quad (2.33)$$

jolloin oskilloivan inflatonkentän energiatiheydelle saadaan jatkuvuusyhtälöä (2.22) käyttäen $\rho_\phi \propto a^{-3}$. Tulkitsemme inflatonkentän siis käyttäytyvän oskillointinsa aikana materian tavoin ja maailmankaikkeuden energiatiheyden olevan efektiivisesti kylmän pölyn dominoima. Tavallisesti tämä aikakausi kuitenkin päättyy pian oskillaatioiden vaimentuessa ja inflatonkentän hajoessa säteilyksi.

Oskillaatioprosessin kautta hajoavalle kentälle voidaan johtaa tulos [4]

$$\frac{T_{term}}{1 \text{ GeV}} = \left(\frac{m}{10^6 \text{ GeV}} \right)^{3/2}, \quad (2.34)$$

jossa T_{term} on termalisaatiolämpötila ja m oskilloivan kentän massa. Jotta termalisaatio tapahtuu ennen nukleosynteesiä, täytyy inflatonkentän massalle tämän arvion mukaan päteä $m \gtrsim 10^4 \text{ GeV}$. Tähän yksinkertaistavin

oletuksin johdettuun tulokseen on suhtauduttava korkeintaan viitteellisenä arviona, mutta todettakoon, että tiukimmat rajat termalisaatiomalleille tarjoavat nimenomaan nukleosynteesi ja tätä edeltävä baryogeneesi [4, 29]. Samalla ne tarjoavat keinon arvioida kokonaisten inflaatiomallien uskottavuutta.

Monissa malleissa termalisaatioprosessi ei ole yksinään riittävän tehokas, vaan malliin tulee liittää termalisaatiota edeltävä esilämmitys (engl. *preheating*) [29]. Kahden kentän tapauksessa on usein välttämätöntä käsitellä myös niin kutsuttua toista termalisaatiota, erityisesti jos toisen kentän energiatiheys kasvaa merkittäväksi suhteessa inflatonkentän hajotessa syntyneeseen säteilyyn [4].

Fenomenologinen inflatonimalli saattaa useine variaatioineen vaikuttaa keinotekoiselta ja havaintoihin hienosäädetyltä, mutta sen tärkein piirre on kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihteluiden ennustaminen, jotka COBE-satelliitti havaitsi ensimmäistä kertaa vuonna 1992 [10]. Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan näiden niin kutsuttujen anisotropioiden alkuperää ja kehitystä varhaisessa maailmankaikkeudessa.

2.3 Inflatonkentän perturbaatioista kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihteluihin

Vaikka tiedämme maailmankaikkeuden dynamiikkaa kuvattavan yksinkertaisimmillaan aineen energiatiheyden ja paineen, sekä näiden välillä vallitsevan tilanyhtälön avulla, on inflaation yhteydessä tausta-avaruuden ympärillä esiintyviä perturbaatioita tarkasteltaessa käytännöllisempää lähteä tarkastelemaan itse inflatonkentässä esiintyviä perturbaatioita energiatiheyden perturbaatioiden sijaan. Perturbaatioiden tarkastelun ideana on pyrkiä selittämään maailmankaikkeudessa esiintyvät, epälineaaristen prosessien tuloksena syntyneet rakenteet, sekä tarkastelumme kannalta erityisesti kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihtelut.

2.3.1 Perturbaatioiden synty ja kehitys inflaation aikana

Aloitamme jakamalla inflatonkentän tausta-avaruuden kenttään $\bar{\phi}(t)$ ja perturbaatioon $\delta\phi(t)$

$$\phi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \bar{\phi}(t) + \delta\phi(t, \mathbf{x}). \quad (2.35)$$

Sijoittamalla tämä inflatonkentän liikeyhtälöön (2.15) ja vähentämällä tausta-avaruuden ratkaisu⁴ saamme niin kutsutussa avaruudellisesti laakeassa mitassa perturbaatioiden kehitykselle yhtälön

$$\delta\ddot{\phi} + 3H\delta\dot{\phi} + \left[-\frac{1}{a^2}\nabla^2 + V''(\bar{\phi})\right]\delta\phi = 0. \quad (2.36)$$

Laskussa käytetyn mitan valintaan tulemme palaamaan seuraavassa luvussa.

Tarkastelemme jatkossa inflaation aikana massattomana pysyvää inflatonkenttää, jolle $V''(\bar{\phi}) = 0$. Liikeyhtälön (2.36) ratkaiseminen helpottuu tekemällä Fourier-muunnos, jolloin saamme perturboidun kentän Fourier-komponenteille yhtälön

$$\delta\ddot{\phi}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{\phi}_{\mathbf{k}} + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta\phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.37)$$

jossa $k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ on mukanaliikkuva aaltoluku. Sanomme perturbaation kokoskaalaa horisonttia suuremmaksi, kun $k < aH$ (sillä tällöin $k^{-1} > \mathcal{H}^{-1}$) ja pienemmäksi, kun $k > aH$. Sanomme skaalan olevan poistumassa tai palaamassa horisonttiimme, kun $k = aH$.

Arvioimalla Hubblen parametrin pysyvän inflaation aikana likimain vakiona saamme liikeyhtälön (2.37) ratkaisuna massattomalle kentälle

$$\delta\phi_{\mathbf{k}}(t) = A_{\mathbf{k}}\omega_k(t) + B_{\mathbf{k}}\omega_k^*(t), \quad (2.38)$$

jossa

$$\omega_k(t) = \left(i + \frac{k}{aH}\right) e^{i\frac{k}{aH}t}, \quad (2.39)$$

ω_k^* :lla merkitsemme ω_k :n kompleksista konjugaattia ja jossa $A_{\mathbf{k}}$ ja $B_{\mathbf{k}}$ ovat alkuehdoista määräytyviä vakioita.

Ratkaisusta on havaittavissa perturbaatioiden asymptoottinen käytös. Paljon horisonttia pienemmillä skaaloilla $k \gg aH$ ja kenttä oskilloi nopeasti, kun taas paljon horisonttia suuremmilla skaaloilla $k \ll aH$ ja kentän havaitaan lähestyvän vakioarvoa. Ratkaisu paljastaa inflatonimallin huomionarvoisen piirteen: paljon horisonttia suuremmilla skaaloilla perturbaatiot “jäätävät”

⁴Tarkkaan ottaen meidän tulisi tarkastella skalaarikentän liikeyhtälön yleistä muotoa (2.14), johon sijoittaisimme perturboidun metriikan, $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$. On kuitenkin osoitettavissa, että tuloksena saatava liikeyhtälö redusoituu tarkastelemassamme mitassa yhtälöön (2.36).

ylitettyään horisontin ja säilyvät kosmisen evoluution aikana muuttumattomina.

Havaintojen yhteydessä olemme kiinnostuneita ennen kaikkea niistä skaaloista, jotka ovat maailmankaikkeuden myöhemmän, “normaalin” laajenemisen seurauksena palanneet horisonttiimme kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn syntyhetkellä jättäen säteilyn lämpötilajakaumaan puhtaasti primordiaalisten perturbaatioiden tuottaman jäljen, johon muut varhaisen maailmankaikkeuden prosessit eivät ole päässeet vaikuttamaan.

Tähän saakka käsittelymme on ollut puhtaasti klassista. Tarkastellaksemme perturbaatioiden syntyä inflaation aikana siirrymme nyt tarkastelemaan inflatonikentässä esiintyviä kvanttifluktuaatioita. Aloitamme tarkastelemalla fluktuaatioita Minkowskin avaruudessa pitäytyen yksinkertaisuuden vuoksi Fourier-summissa integraalien sijaan ja siirtyen jatkumorajalle tarvittaessa.

Nojaudumme kvanttikenttäteorian tulokseen, jonka mukaan klassinen observaabeli

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \sum \phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.40)$$

voidaan korvata normitetulla kenttäoperaattorilla [30]

$$\hat{\phi}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(aL)^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{a}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}(t) e^{-i\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}{a}} \right), \quad (2.41)$$

jossa L on tarkasteltavan laatikon koko, $E_{\mathbf{k}} = k/a$ on aaltolukua k vastaava fysikaalinen liikemäärä ja $\hat{a}_{\mathbf{k}}(t)$ sekä tämän hermiittinen konjugaatti $\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)$ ovat inflatonikentän tuhoamis- ja luomisoperaattorit.

Yhtälössä (2.41) esiintyvän laatikon koko on puhtaasti matemaattinen konstruktio ja sen suuruus on periaatteessa vapaasti valittavissa, mutta käytännöllisintä on asettaa tarkasteluskaala hieman nykyisin havaittavaa maailmankaikkeutta suuremmaksi. Erityisesti äärettömän suuren laatikon koon salliminen johtaa alla määriteltävän tasaisen tehospektrin tapauksessa äärettömän suuriin perturbaatioihin [7], eikä näin ollen ole toivottavaa.

Sirryttäessä klassisesta formalismista kvanttikenttäteorian operaattoriformalismiin korvaamme kentän ϕ kenttäoperaattorilla $\hat{\phi}$ myös Lagrangen tiheydessä (2.12). On osoitettavissa, että kenttäoperaattori $\hat{\phi}$ ei kommutoi kanonista liikemäärää vastaavan operaattorin \hat{p} kanssa, jolloin se ei kommutoi myöskään teorian Hamiltonin operaattorin \hat{H} kanssa,

$$[\hat{H}, \hat{\phi}] \neq 0, \quad (2.42)$$

eli operaattorit eivät jaa samoja ominaistiloja ja inflatonkentässä voi esiintyä gaussisia fluktuaatioita vakuumin ympärillä.

Yleisesti gaussisella perturbaatiolla (jota merkitsemme tässä $g(x)$:llä) tarkoitamme reaalista suuretta, jonka Fourier-moodien $g_{\mathbf{k}}$ todennäköisyysjakauma on gaussinen

$$\text{Prob}(g_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2\pi s_{\mathbf{k}}^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{|g_{\mathbf{k}}|^2}{s_{\mathbf{k}}^2}} \quad (2.43)$$

ja jonka eri Fourier-moodien kaksipistekorrelaattori häviää

$$\langle g_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (2.44)$$

Lisäksi reaalisuusehdosta seuraa, että $g_{\mathbf{k}}^* = g_{-\mathbf{k}}$. Jakauman odotusarvon olettamme kvanttifluktuaatioiden luonteen perusteella olevan $\langle g_{\mathbf{k}} \rangle = 0$, jolloin todennäköisyysjakauman (2.43) ainoa vapaa parametri $s_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ määrää jakauman varianssin:

$$\langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = 2s_{\mathbf{k}}^2. \quad (2.45)$$

Gaussiselle suurelle voidaan Fourier-moodien avulla määritellä suureen kaiken tilastollisen informaation sisältävä tehospektri

$$\mathcal{P}_g(k) \equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 4\pi k^3 \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle, \quad (2.46)$$

jossa $k = |\mathbf{k}|$ ja L^3 on sen laatikon koko, jonka sisällä tehospektrin lauseke muodostetaan. Periaatteessa laatikon koko on jälleen vapaasti valittavissa, mutta olettamme sen niin suureksi (ja kuitenkin äärelliseksi), että tehospektri on isotrooppinen $\mathcal{P}(\mathbf{k}) = \mathcal{P}(k)$. Laatikon koon valintaan palaamme vielä luvussa 3.

Jatkumorajalle siirtymällä voimme kirjoittaa gaussisen suureen varianssin tehospektrin avulla muodossa

$$\langle g(x)^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k}} \langle |g_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \rightarrow \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_g(k), \quad (2.47)$$

jossa olemme paitsi käyttäneet tehospektrin määritelmää (2.46), myös hyödyntäneet ehtoa (2.44).

Integraalin (2.47) suppeneminen ei kuitenkaan ole itsestään selvää, eikä näin esimerkiksi myöhemmin käsiteltävän skaalavapaan tehospektrin tapauksessa käy lainkaan. Käytännössä varianssi lasketaan määrittelemällä kunkin suureen tehospektrille sopivat katkaisuskaalat (engl. *cutoff scale*) sekä yläettä alarajalle. Yleensä ylärajalla eli pienillä etäisyyksillä joudutaan määrittämään erillinen tasoituskaala, jolla perturbatiivista lähestymistapaa voidaan edelleen soveltaa. Alarajalla suurimmat skaalat ovat yleensä hieman nykyistä horisonttia suurempia [4, 26].

Siirrymme seuraavaksi käsittelemään perturbaatioita inflaation aikana. Inflaation aikana kiihtyvästi laajeneva maailmankaikkeus on lähempänä de Sitter -avaruutta kuin Minkowskin avaruutta, mutta odotamme tarkastelumme redusoituvan varhaisilla ajanhetkillä ja horisonttia paljon pienemmillä etäisyysskaaloilla Minkowskin avaruuden ratkaisuun.

Käsittelemme tausta-avaruuden kenttää edelleen klassisesti ja kvantitamme pelkät perturbaatiot edellä esiteltyä tapaa seuraten. Tehospektrin lausekkeessa (2.46) esiintyvaksi perturbaation neliön odotusarvoksi $\langle |\delta\phi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle$ saadaan perturbaatioiden likeyhtälön ratkaisun (2.38) yhteydessä esiintyvän, sopivasti normitetun moodifunktion

$$\omega_k(t) = L^{-3/2} \frac{H}{\sqrt{2k^3}} \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{-i\frac{k}{aH}} \quad (2.48)$$

avulla ilmaistuna

$$\langle |\delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \langle 0 | \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{k}}^\dagger | 0 \rangle = |\omega_k(t)|^2. \quad (2.49)$$

Ratkaisu on konstruoitu siten, että moodifunktio (2.48) palautuu rajalla $k \gg aH$ Minkowskin avaruuden kenttäoperaattorin lausekkeen (2.41) yhteydessä esiintyneeseen moodifunktioon.

Tarkastelemalla perturbaatioita paljon horisonttia suuremmilla skaaloilla, $k \ll aH$, näemme moodifunktion lähestyvän vakioarvoa

$$\omega_k(t) \rightarrow L^{-3/2} \frac{iH}{\sqrt{2k^3}}, \quad (2.50)$$

jolloin kvanttimekaanista alkuperää olevat perturbaatiot muuttuvat klassisiksi [4]. Tällöin saamme inflatonikentässä esiintyvien perturbaatioiden tehospektriä

$$\mathcal{P}_\phi(k) = L^3 \frac{k^3}{2\pi^2} |\omega_k(t)|^2 = \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2. \quad (2.51)$$

Tulos (2.51) on johdettu arvioimalla Hubblen parametrin H pysyvän vakiona inflaation ajan, vaikka tosiasiaassa tiedämme sen muuttuvan SR-inflaation tapauksessa hitaasti. Alaindeksillä $k = aH$ olemmekin korostaneet sitä, että laskussa käytettävä H :n arvo määräytyy tarkasteluskaalan horisontin ylityksen hetkellä.

Inflatonikentän perturbaatioille johdettu tehospektri (2.51) on yksi inflaatiomallin tärkeimpiä tuloksia ja pätee kaikille massattomille skalaarikentille, mutta koska kentän perturbaation arvo ei ole mittainvariantti suure vaan riippuu käytetyistä koordinaateista, on perturbaatioita tapana tarkastella määrittelemällä mukanaaliikkuva kaarevuusperturbaatio, joka avaruudellisesti laakealla hyperpinnalla saa muodon

$$\mathcal{R} = -H \frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} \quad (2.52)$$

ja joka liittää inflatonikentässä esiintyvät perturbaatiot aika-avaruuden kaarevuusperturbaatioihin ja jonka voidaan osoittaa olevan mittainvariantti. Palaamme mukanaaliikkuvan kaarevuusperturbaation ominaisuuksiin tarkemmin seuraavassa luvussa yleisemmän perturbaatioteorian yhteydessä.

Mukanaaliikkuvaa kaarevuusperturbaatiota vastaavaksi tehospektriiksi saamme kentän perturbaatioiden tehospektrin (2.51) avulla

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \mathcal{P}_\phi(k) = \left(\frac{H}{\dot{\phi}} \right)^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2. \quad (2.53)$$

Tulos on inflatonimallin keskeisin, sillä se palauttaa inflatonikentässä esiintyvien perturbaatioiden tarkastelun tausta-avaruuden kentän ja Hubblen parametrin kehityksen tarkasteluun. Kaarevuusperturbaation Fouriermoodin suunnasta \mathbf{k} riippumaton tehospektri (2.53) paljastaa myös toisen huomionarvoisen seikan: inflatonimallissa kaarevuusperturbaatiot perivät homogeenisuuden ja isotrooppisuuden suoraan FRW-taustamaailmankaikkeuden symmetriasta, eli inflatonimalli tuottaa lähes puhtaasti gaussisia perturbaatioita [26].

2.3.2 Perturbaatioiden kehitys inflaation jälkeen

Inflaation päätyttyä horisonttia pienemmän kokoskaalan kaarevuusperturbaatiot jatkavat kehitystään. Perturbaatioiden synnyn ja kehityksen yksityiskohdat riippuvat perturbaatiot generoivasta mallista – joista yhtä, kurvatonimallia, käsittelemme seuraavissa luvuissa –, mutta esittelemme jo tässä osiossa lyhyesti perturbaatioiden kehityksen pääpiirteet.

Inflaation päätyttyä alkaa maailmankaikkeuden normaalin laajenemisen vaihe, jolloin eri kokoskaalat alkavat yksi kerrallaan palata mukana liikkuvan havaitsijan horisonttiin⁵. Koska horisonttia paljon suuremman kokoskaalan perturbaatiot ovat jäätyneet muuttumattomiksi, ovat horisonttiin missä tahansa vaiheessa palaavat perturbaatiot primordiaalisessa tilassaan ja alkavat kokea muutoksia vasta horisonttiin paluunsa jälkeen. Nämä muutokset ovat tärkeä tekijä maailmankaikkeuden suuren skaalan rakenteen määrittämisessä, kuten tulemme näkemään.

Kosmologian Λ CDM-mallissa inflaation jälkeistä maailmankaikkeutta karakterisoidaan yleensä viiden ainekomponentin energiatihedden avulla. Relevantit ainekomponentit ovat kylmä pimeä aine, baryoninen aine, säteily, neutriinot ja pimeä energia, joiden kaikkien energiatiheddet voivat kaarevuusperturbaatioihin kytkeytyneinä perturboida paitsi toisistaan riippumatta eli adiabaattisesti, myös siten, että ainekomponenttien keskinäiset energiatiheddet muuttuvat maailmankaikkeuden kokonaisenergiatiheyden pysyessä vakiona [4]. Tällöin puhumme epäadiabaattisista perturbaatioista tai isokurvatuuri-perturbaatioista (engl. *isocurvature perturbations*).

Tarkkaan ottaen tarkoitamme adiabaattisuudella (ensimmäisen kertaluvun perturbaatioteorian yhteydessä) ehdon

$$\frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} \quad (2.54)$$

toteutumista. Yhtälössä (2.54) olemme jälleen merkinneet taustamaailmankaikkeuden suuretta viivalla ja vastaavan suureen perturbaatiota δ :lla. Voidaan näyttää, että mikäli ainekomponentti toteuttaa niin kutsutun barotrooppisen tilanyhtälön $p = p(\rho)$, eli mikäli paine määräytyy yksikäsitteisesti energiatihedden funktiona, ovat ainekomponentin energiatihedessä esiintyvät perturbaatiot väistämättä adiabaattisia.

⁵Jos maailmankaikkeus laajenee tällä hetkellä kiihtyvästi, ovat suurimmat, kosmologisessa aikaskaalassa hetki sitten horisonttiimme palanneet kokoskaalat itse asiassa jo poistumassa horisontistamme.

Olettamalla, ettei ainekomponenttien i ja j tausta-arvojen välillä esiinny energiansiirtoa, voimme johtaa adiabaattisille perturbaatioille tuloksen

$$\frac{\delta_i}{1 + \omega_i} = \frac{\delta_j}{1 + \omega_j}, \quad (2.55)$$

jossa $\delta_i \equiv \delta\rho_i/\bar{\rho}_i$ on ainekomponentin i tiheyskontrasti eli energiatiheyden vaihtelun suuruus suhteessa taustamaailmankaikkeuden arvoon ja ω_i saman ainekomponentin tilanyhtälöparametri.

Epäadiabaattisen perturbaation S_{ij} määrittelemme poikkeamaksi yhtälön (2.55) ennusteesta:

$$S_{ij} \equiv \frac{\delta_i}{1 + \omega_i} - \frac{\delta_j}{1 + \omega_j}. \quad (2.56)$$

Esimerkiksi materian ja säteilyn täyttämässä maailmankaikkeudessa yhtälöstä (2.56) saadaan

$$S_{mr} = \frac{\delta_m}{1 + \omega_m} - \frac{\delta_r}{1 + \omega_r} = \frac{\delta\rho_m}{\rho_m} - \frac{3\delta\rho_r}{4\rho_r} = \frac{\delta n_m}{n_m} - \frac{\delta n_r}{n_r} = \frac{\delta(n_m/n_r)}{n_m/n_r}, \quad (2.57)$$

jossa arvioimme $\rho_m \approx mn_m$, kun n_i on komponentin i lukumäärätiheys ja jossa käytimme hyväksi tietoja $\rho_r \propto T^4 \Rightarrow \delta\rho_r \propto T^3\delta T$, $n_r \propto T^3 \Rightarrow \delta n_r \propto T^2\delta T$. Säteilyn dominoidessa maailmankaikkeuden entropiaosuutta ($s \propto n_r$) saadaan

$$S_{mr} = \frac{\delta(n_m/s)}{n_m/s}, \quad (2.58)$$

eli epäadiabaattinen perturbaatio S_{ij} kuvaa siis materian entropiaosuuden perturbaatioita. Vastaavasti adiabaattisissa perturbaatioissa entropia hiukasta kohti säilyy muuttumattomana, sillä ainekomponenttien suhteelliset runsaudet eivät muutu. Tästä nimitys adiabaattinen.

Tällä hetkellä ei ole varmuutta, syntyikö varhaisessa maailmankaikkeudessa merkittävää määrää epäadiabaattista tiheys- tai paineperturbaatiota [4, 12, 31]. Seuraavassa luvussa käsittelemässämme kurvatonimallissa niiden synty on kuitenkin luonnollinen osa kaarevuusperturbaatioiden generointia edustuen siten tyypillistä useamman kentän mallia. Yleisesti ottaen epäadiabaattisten perturbaatioiden tutkiminen on tärkeää myös hiukkasfysiikan näkökulmasta, sillä havaitut rajat varhaisessa maailmankaikkeudessa syntyneille epä-

adiabaattisille perturbaatioille rajoittavat myös mahdollisia hiukkasfysikaalisia malleja [4, 14].

Olettamalla perturbaatioiden olevan adiabaattisia, voidaan säteilyn dominoimalla aikakaudella ja horisonttia pienemmillä skaaloilla näyttää säteilyn ja tähän tiukasti sidoksissa olevan baryonisen aineen tiheyskontrasteille saatavan oskilloiva ratkaisu, kun taas kylmän pimeän aineen tiheyskontrastin havaitaan kasvavan logaritmisesti skaalatekijän a funktiona. Tämä johtuu siitä, että vain heikosti baryonisen aineen ja säteilyn kanssa vuorovaikuttava pimeä aine irtikytkeytyy termisestä tasapainosta paljon muita ainekomponentteja aiemmin ja alkaa kasvattaa maailmankaikkeudessa vallitsevia tiheyseroja.

Pimeä aine kuitenkin vuorovaikuttaa gravitaation välityksellä ja baryonien ja fotonien irtikytkeytymisen jälkeen baryonisen aineen tiheyskontrastin käytöksen havaitaankin siirtyvän oskilloivasta kasvavaan siten, että tiheyskontrasti alkaa lähestyä tällöin jo lineaarisesti kasvavan pimeän aineen tiheyskontrastia. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että baryoninen aine alkaa “vajota” pimeän aineen jättämiin potentiaaliuoppiin, mikä kasvattaa baryonisen aineen tiheyseroja⁶.

Kun tiheyserot kasvavat tietyssä alueessa liian suuriksi, $|\delta(\mathbf{x})| \sim 1$, alkaa suuremman tiheyden alueista nopeasti kasvaa huomattavasti keskimääräistä tiheämpiä alueita ja aine romahtaa kasaan muodostaen gravitaationaalisesti sidotun systeemin [3, 4]. Näin primordiaaliset, maailmankaikkeuden energiatiheyttä inflaation jälkeen dominoineen kentän kvanttifluktuaatioista alkunsa saaneet energiatheyden perturbaatiot alkavat synnyttää maailmankaikkeuden suuren skaalan rakennetta.

2.4 Kosminen mikroaaltotaustasäteily

Varhaisen maailmankaikkeuden ilmiömaailmaan liittyvän teorian ja astrofysikaalisten havaintojen välillä vallitsee eräänlainen takaisinkytkentä: inflaatiomalleista johdettavat suureet tarjoavat kvantitatiivisia ennusteita muun muassa kosmisesta mikroaaltotaustasäteilystä ja rakenteiden synnystä, joista tehtävät havainnot puolestaan tarjoavat lisätietoa varhaisen maailmankaikkeuden olosuhteista.

⁶Tietyillä skaaloilla baryoni-fotonifluidin aiemmat oskillaatiot jättävät lisäksi baryonien akustisiksi oskillaatioiksi kutsutun jäljen tiheysvaihteluihin [4].

Tähän mennessä olemme paitsi esitelleet inflaatiokeskenäriota selittävän inflatonimallin, myös maininneet joitakin piirteitä yksinkertaisimman mallin modifikaatioista. Koska inflaatiomallilta tulee vaatia sekä johdonmukaisuutta teorian tasolla että sen tarjoamien ennusteiden vastaavuutta havaintojen kanssa kvantitatiivisella tasolla, käsittelemme tässä osiossa lyhyesti kosmista mikroaaltotaustasäteilyä (engl. *cosmic microwave background radiation*, CMB) tehtäviä havaintoja.

2.4.1 CMB:n lämpötilavaihtelut

Kosminen mikroaaltotaustasäteily syntyi maailmankaikkeuden ollessa noin 380 000 vuoden ikäinen, jolloin baryoninen aine ja säteily irtikytkeytyivät päästään säteilyn kulkemaan vapaasti. Tältä niin kutsutulta viimeisen sironnan pinnalta maapallolle nykyään saapuvat fotonit ovat maailmankaikkeuden ikääntyessä jäähtyneet 2.725 K:n lämpötilaan ja niiden lämpötilajakauma noudattaa erittäin tarkasti mustan kappaleen säteilyn jakaumaa [3].

CMB:n on havaittu olevan erittäin suurella tarkkuudella isotrooppinen sisältäen kuitenkin pieniä, 10^{-5} K:n suuruisia lämpötilavaihteluita [32]. Havaittu lämpötilavaihtelu suhteessa koko taivaan keskiarvoon voidaan jakaa kahteen (mitasta riippuvaan) osaan

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{hav.} = \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{orig.} + \left(\frac{\delta T}{T}\right)_{matka}, \quad (2.59)$$

jossa yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi kuvaa baryoni-fotonifluidin alkuperäisiä lämpötilavaihteluita CMB:n syntyhetkellä $t = t_{dec}$ ja toinen termi fotonien matkan aikana syntyneitä lämpötilavaihteluita. Vaikka kumpikaan termeistä ei ole mittainvariantti, niiden summa havaittavana suureena on.

CMB:n lämpötilavaihtelut voidaan jatkumorajalla tulkita pallon pinnalla arvoja saavaksi funktioksi, jolloin lämpötilavaihteluiden analyysiä varten vaihtelut on Fourier-kehittelmän sijaan käytännöllistä kehittää palloharmoonisten funktioiden $Y_{\ell m}$ sarjaksi

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.60)$$

jossa $\ell \geq 2$ ja $m \in] -\ell, \ell[$. Tapaus $\ell = 1$ on jätettävä käsittelemättä, sillä aurinkokuntamme liike suhteessa kosmiseen mikroaaltotaustasäteilyyn ai-

heuttaa multipolikehitelmään dipoliosuuden, jota ei ole mahdollista erottaa aidosta CMB:n dipolista [3].

Lämpötilavaihteluiden esityksessä (2.60) esiintyvät kertoimet $a_{\ell m}$ ovat riippumattomia gaussisia suureita⁷ heijastaen primordiaalisten perturbaatioiden alkuperäistä gaussista luonnetta, jolloin $\langle a_{\ell m} \rangle = 0$ ja säteilyn isotroopisuuden vuoksi varianssi $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ on riippumaton m :stä. Voimmekin näin ollen määritellä kulmatehospektrin

$$C_\ell \equiv \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_m \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle, \quad (2.61)$$

jonka avulla voimme ilmaista lämpötilavaihteluiden varianssin multipoliluvun ℓ avulla:

$$\left\langle \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \right\rangle = \sum_\ell \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_\ell. \quad (2.62)$$

Gaussisen signaalin tapauksessa lämpötilavaihteluiden kaikki tilastollinen informaatio sisältyy kulmatehospektriin, eli lämpötilavaihteluiden varianssin ilmoittaminen tehospektrin ja multipoliluvun ℓ avulla on analoginen yhtälön (2.47) kanssa, jossa primordiaalisten tiheysperturbaatioiden varianssi ilmoitettiin tehospektrin ja Fourier-kehityksessä esiintyvän skaalan k avulla. Vastaavasti kuin skaala k , on multipoliluku ℓ kääntäen verrannollinen tarkasteltavaan fysikaaliseen kokoskaalaan.

Voidaan näyttää, että pienillä multipoliluvuilla havaitun ja teorian ennustaman kulmatehospektrin erotuksen neliö kasvaa voimakkaammin kuin suurilla multipoliluvuilla. Tämä niin kutsuttu kosminen varianssi vaikeuttaa merkittävästi havaintojen vertaamista ennustettuun arvoon suurilla kokoskaaloilla, sillä pienillä multipoliluvuilla käytössä oleva tilastollinen otos on pienempi kuin suuremmilla multipoliluvuilla [26]. Erityisesti suuren skaalan rakenteesta tehtävät havainnot kuitenkin mahdollistavat eri efektien suuruuden arvioinnin varsin tehokkaasti [33].

⁷Käsitlemme lämpötilavaihteluiden multipolikehitelmän kertoimia tässä kohdassa puhtaasti gaussisina suureina, vaikka myöhemmissä luvuissa tarkastelemme mahdollisuutta, jossa syntyvissä kaarevuusperturbaatioissa ja siten myös kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn lämpötilavaihteluissa esiintyy havaittavaa epägaussisuutta. Tarkastelumme onkin tässä kohdassa nähtävä vain viitteellisenä johdatuksena aiheeseen, tarkoituksenaamme liittää varhaisessa maailmankaikkeudessa syntynyt kaarevuusperturbaatio havaittaviin suureisiin.

Kulmatehospektri mahdollistaa myös primordiaalisen kaarevuusperturbaation tehospektrin (2.53) amplitudin laskemisen, sillä näiden välille voidaan johtaa tulos

$$C_\ell = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) j_\ell(kx_{l_s})^2, \quad (2.63)$$

jossa $j_\ell(kx_{l_s})$ on Besselin pallofunktio ja x_{l_s} etäisyys viimeisen sironnan pinnalle. Vakioarvoiselle tehospektrille $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A^2$, jolloin

$$C_\ell = A^2 \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_\ell(kx_{l_s})^2 = \frac{A^2}{25} \frac{2\pi}{\ell(\ell+1)} \quad (2.64)$$

ja primordiaalisten perturbaatioiden tehospektrin amplitudiksi saadaan havainnoista [32]

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = A^2 \approx 25 \times 10^{-10}. \quad (2.65)$$

Lämpötilavaihteluiden spektrin lisäksi kosmisen mikroaaltotaustasäteilyn ominaisuudet mahdollistavat myös kolmen muun säteilyyn liittyvän tehospektrin määrittelyn: kahden eri polarisaatio-spektrin ja lämpötila-polarisaatio-spektrin, jotka kaikki tarjoavat arvokasta lisäinformaatiota säteilyn ominaisuuksista ja siten varhaisen maailmankaikkeuden olosuhteista [4, 5, 32].

2.4.2 Spektri-indeksi ja muut havaittavat suureet

Kosmisesta mikroaaltotaustasta voidaan johtaa joukko myös muita havaittavia parametreja, jotka käsiteltävän inflaatiomallin tulee onnistuneesti ennustaa. Tällaisia parametreja ovat muun muassa spektri-indeksi ja sen juoksemisesta tehdyt ennusteet, sekä gravitaatioaaltojen esiintymistä kuvaava tensoriperturbaatioiden tehospektri ja perturbaatioiden tensori-skalaarisuhde [3, 4]. Tässä käsittelemme kuitenkin vain skalaariperturbaatioita.

SR-inflaation tapauksessa odotamme tehospektrin muuttuvan hitaasti skaalan k funktiona, mitä kuvaamaan määrittelemme spektri-indeksin $n(k)$ yhtälöllä

$$n(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k}. \quad (2.66)$$

Jos tehospektri ei riipu k :sta (tapaus $n = 1$), sanomme tehospektrin olevan skaalavapaa. Jos $n \neq 1$, sanomme tehospektriä vinoksi ja muussa tapauksessa skaalainvariantiksi. Jos $dn/dk \neq 0$, sanomme spektri-indeksin juoksevan. Spektri-indeksi havaittavana suurena ei vaadi SR-approksimaatiota eikä muitakaan oletuksia inflaation luonteesta, mutta tarjoaa lisäkeinon eri mallien vertailuun. Erityisesti havainto spektri-indeksin juoksemisesta tarjoaisi vahvan menetelmän arvioida eri inflaatiomallien uskottavuutta [4].

Eri mallien ennusteet spektri-indeksin suuruudesta vaihtelevat tyypillisesti pienellä välillä luvun 1 molemmin puolin [14]. Yksinkertaisin inflatonimalli ennustaa tehospektrin olevan hyvin lähellä skaalainvarianttia, sillä SR-inflaation tapauksessa saamme spektri-indeksiksi SR-parametrien avulla ilmaistuna ensimmäisen kertaluvun arvion

$$n - 1 = -6\epsilon + 2\eta \quad (2.67)$$

ja sen juoksemiseksi arvion

$$\frac{dn}{d \ln k} = 16\epsilon\eta - 24\eta^2 - 2\xi, \quad (2.68)$$

jossa määrittelimme uuden, SR-parametrien suhteen toista kertalukua edustavan parametrin

$$\xi \equiv M_{Pl}^4 \frac{V'}{V^2} V'''. \quad (2.69)$$

Inflatonimalli ennustaa siis paitsi hyvin tarkasti skaalainvarianttia tehospektriä, myös skaalasta riippumatonta spektri-indeksiä. Pieni k -riippuvuus ei tule yllätyksenä, sillä kuten tulosta (2.51) johtaessamme huomautimme, tiedämme SR-inflaation tapauksessa parametrin H muuttuvan inflaation aikana hitaasti. Tällöin tehospektrin lausekkeen yhteydessä esiintyvät yksittäiset tarkastelu-skaalat eivät voi vastata kaikkia tarkasteltavia H :n arvoja, vaan tehospektri tulee riippumaan skaalasta k . Tällaisenaan peruste tosin on vain kvalitatiivinen: parametrin $H(t)$ aikariippuvuus voidaan tarkemmissa laskuissa ottaa huomioon, mikä johtaa SR-parametrien suhteen toisen asteen korjauksiin spektri-indeksin lausekkeessa [26].

Planck-satelliitin uusimmat havainnot tukevat lievästi vinoa spektri-indeksiä, sillä tulokset antavat spektri-indeksiksi viiden σ :n luottamusvälillä

$$n = 0.96030 \pm 0073 \quad (2.70)$$

ja sen juoksemiseksi

$$\frac{dn}{d \ln k} = -0.0134 \pm 0.0090, \quad (2.71)$$

joista jälkimmäisessä tuloksessa ei ole havaittavissa tilastollisesti merkittävää spektri-indeksin juoksemista [12].

Näyttäisi siis siltä, että tehospektrin käsittely puhtaasti skaalainvarianttina ei tarkoissa laskuissa ole perusteltua, ellei muista lähteistä tulevien virheiden suuruuden katsota olevan merkittävästi suurempi ja siten jossain määrin oikeuttavan tehospektrin käsittelyn edelleen skaalainvarianttina. Käsittelyn oikeutus on arvioitava tapauskohtaisesti, kunhan virheanalyysi on suoritettu huolellisesti.

Luku 3

Epäadiabaattiset perturbaatiot ja kurvatonimalli

Tässä luvussa esittelemme kurvatonimallin [7, 8, 9] ja sen päätulokset. Aloitamme käsittelemällä lyhyesti kosmologista perturbaatioteoriaa [4, 17, 18], kaarevuusperturbaatioita ja epäadiabaattisuutta, minkä jälkeen siirrymme kurvatonimallin esittelyyn.

Esittelemme kurvatonimallin perusteet tarkastellen vasta inflaation jälkeen epäadiabaattisen energianvaihtoprosessin kautta syntyvän kaarevuusperturbaation ja tätä vastaavan tehospektrin suuruutta tapauksissa, joissa kurvatonin energiatiheys suhteessa maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoivaan säteilyyn on kurvatonin hajoamishetkellä joko hyvin pieni tai hyvin suuri. Lopuksi luomme lyhyen katsauksen yksinkertaisimman kurvatonimallin laajennuksiin arvioiden samalla tekemiemme oletusten uskottavuutta.

3.1 Lyhyesti perturbaatioteoriasta

Kosmologisen perturbaatioteorian tarkoituksena on kuvata eri suureiden poikkeamia tausta-avaruutena tarkasteltavan FRW-maailmankaikkeuden suureista [4, 17, 18]. Suuret voivat olla niin skalaari-, vektori- kuin tensorisuureitakin, mutta pääasiallinen kiinnostuksemme kohdistuu skalaarisuureisiin, joita ovat mm. energiatiheys, paine ja erilaiset aika-avaruuden kaarevuutta mittaavat kaarevuusskalarit kuten myöhemmin määriteltävä kaarevuusperturbaatio ζ . Perturbaatioteoria tarjoaa jo ensimmäisessä kertaluvus-

sa tehokkaan menetelmän näiden suureiden kehityksen tarkasteluun, vaikka myöhemmin laajennammekin tarkastelumme koskemaan tuloksia, jotka vaativat toisen kertaluvun tarkkuutta¹.

Perturbaatioteoriassa menetelmänä on jakaa maailmankaikkeus kuvitteelliseen FRW-taustamaailmankaikkeuteen ja perturboituun maailmankaikkeuteen, jolloin kirjoitamme metrisen tensorin formaalisti muodossa

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

jossa $\bar{g}_{\mu\nu}$ on tausta-avaruuden metriikka ja $\delta g_{\mu\nu}$ perturboitu metriikka, jonka ajattelemme kuuluvan samaan monistoon kuin $\bar{g}_{\mu\nu}$, mutta tuovan vain pienen kontribuution perturboidun maailmankaikkeuden metriikkaan $g_{\mu\nu}$.

Määritelmä mahdollistaa tilanteen, jossa perturboidun maailmankaikkeuden koordinaatteja vastaa useampi FRW-taustamaailmankaikkeuden koordinaattien valinta, eli jossa $\delta g_{\mu\nu}$ voidaan valita usealla eri tavalla². Kutsumme tällaista valintaa mitan valinnaksi. Suureiden tarkastelu eri mitoissa mahdollistaa erityisesti koordinaatistosta riippumattomien eli mittainvarianttien suureiden löytämisen ja niiden kehityksen tarkastelun ollen tehokas menetelmä kuvaamaan maailmankaikkeuden kehitystä sen varhaisissa vaiheissa. Käymme tässä luvussa kuitenkin läpi vain ne päätulokset, jotka ovat kurvatonimallin ja sen ennusteiden kannalta keskeisimpiä.

Ennen teorian tarkempaa formaalia esittelyä on kuitenkin syytä mainita perturbaatioteorian pätevyysalueesta ja taustametriikan määrittelyyn liittyvistä kysymyksistä. Perturbaatiot määritellään aina siten, että niiden avaruudellinen keskiarvo maailmankaikkeuden tilastollisen homogeenisuuden ja isotrooppisuuden takaamiseksi häviää, jolloin maailmankaikkeuden energiatiheyttä ja painetta voidaan kuvata vastaavilla tausta-arvoilla. Koska voimme kuitenkin tehdä havaintoja vain nykyisen horisonttimme sisäpuolella, vaatii havaitun tausta-arvon määrittäminen keskiarvoistamista korkeintaan H_0^{-1} -säteisen alueen sisäpuolella, jossa lisäksi normaalin perturbaatioteorian yhteydessä vaadimme käsiteltävän metriikan palautuvan taustatarkaisuunsa viimeistään jollakin riittävän suurella skaalalla.

¹Vähintään toisen kertaluvun tarkkuutta vaativat periaatteessa myös useat epälineaariset prosessit, kuten rakenteiden muodostuminen myöhemmässä maailmankaikkeudessa. Gravitationaalisesti sidottuja systeemejä kuitenkin mallinnetaan useimmiten numeerisesti [4].

²Tarkkaan ottaen kyse on viisiulotteisen moniston $\mathcal{N} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ FRW-alimoniston \mathcal{M}_0 ja epähomogeenisen alimoniston \mathcal{M}_λ välisen kuvauksen $\mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ valinnasta. Kuvauksista tarkemmin esim. viitteessä [34].

Inflaatiomallien yhteydessä on kuitenkin välttämätöntä tarkastella myös horisonttia suurempia kokoskaaloja, mikä pakottaa meidät laajentamaan esimerkiksi Fourier-kehityksen ja tehospektrin lausekkeen (2.46) yhteydessä tarkasteltavan laatikon koon muutamia kertaluokkia maailmankaikkeuden nykyistä horisonttia suuremmaksi. Laajennus on perusteltu, sillä perturbaatioiden paikkariippuvuus on suurilla skaaloilla pientä, eikä laajennus näin ollen muuta teorian tausta-arvoa merkittävästi. Tällöin voimme perustellusti pitää myös Fourier-kehityksessä esiintyviä aaltovektoreita jatkuvina ja käsitellä integraaleja Fourier-summien sijaan.

Lähdemme nyt tarkastelemaan edellä mainittujen skalaarisuureiden kehitystä perturboidussa maailmankaikkeudessa. Avaruudellisesti laakean FRW-maailmankaikkeuden ympärillä perturboitu metriikka voidaan esittää yleisessä muodossa [17, 18]

$$g_{00} = -a^2(\eta) (1 + 2A(\eta, \mathbf{x}))$$

$$g_{0i} = a^2(\eta) \partial_i B(\eta, \mathbf{x}) \quad (3.2)$$

$$g_{ij} = a^2(\eta) ((1 - 2\psi(\eta, \mathbf{x}))\delta_{ij} + 2\partial_i \partial_j E(\eta, \mathbf{x})),$$

jossa $a(\eta)$ on tausta-avaruuden skaalatekijä konformaalisessa ajassa, $\psi \equiv D + \frac{1}{3}\nabla^2 E$ on kaarevuusperturbaatio ja skalaarifunktiot A, B, D ja E kuvaavat ensimmäisen kertaluvun perturbaatioita.

Tasaisen energiatiheden hyperpinnalla voimme määritellä erillisen kaarevuusperturbaation

$$\zeta(t, \mathbf{x}) \equiv -\psi(t, \mathbf{x})|_{\delta\rho=0} = -\psi - \mathcal{H} \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = -\psi + \frac{\delta}{3(1+\omega)}, \quad (3.3)$$

jossa $\mathcal{H} = a'/a$ on Hubblen parametri konformaalisessa ajassa ja jossa viimeinen yhtäsuuruus olettaa barotrooppisen tilanyhtälön. Keskimmäisestä muodosta huomaamme, että suurilla skaaloilla tasaisen energiatiheden hyperpinnalla laskettu kaarevuusperturbaatio³ kuvaa perturbaatioita maailmankaikkeuden avaruudellisessa laajenemisessa.

Jatkon kannalta määrittelemme myös kunkin ainekomponentin i kaarevuusperturbaation ζ_i

³Tästä eteenpäin käytämme tasaisen energiatiheden hyperpinnan kaarevuusperturbaatiosta ζ yksinkertaisesti nimeä kaarevuusperturbaatio, ellei toisin mainita.

$$\zeta_i(t, \mathbf{x}) \equiv -\psi - \mathcal{H} \frac{\delta \rho_i}{\bar{\rho}_i} = -\psi + \frac{\delta_i}{3(1 + \omega_i)}, \quad (3.4)$$

jota tulemme käyttämään seuraavassa osiossa kurvatonimallin yhteydessä.

Kaarevuusperturbaation derivaataksi paljon horisonttia suuremmilla skaaloilla saadaan ensimmäisessä kertaluvussa

$$\zeta'(t, \mathbf{x}) = -\frac{\mathcal{H}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \delta p_{nad}, \quad (3.5)$$

jossa symbolilla δp_{nad} olemme merkinneet osiossa 2.3.2 esiteltäviä epäadiabaattisia paineperturbaatioita. Toisin kuin adiabaattisten perturbaatioiden tapauksessa, voivat epäadiabaattiset paineperturbaatiot aiheuttaa kaarevuusperturbaatioita siis myös horisonttia suuremmilla skaaloilla. Tarkastelemme tätä mahdollisuutta kurvatonimallin yhteydessä seuraavassa osiossa.

Niin kutsutussa mukanaliikkuvassa mitassa kaarevuusperturbaation esitykseksi saadaan mukanaliikkuvan kaarevuusperturbaation \mathcal{R} ja Bardeenin potentiaalin Ψ avulla ilmaistuna

$$\zeta = -\psi^C + \frac{\delta^C}{3(1 + \omega)} = \mathcal{R} + \frac{2}{9(1 + \omega)} \mathcal{H}^{-2} \nabla^2 \Psi, \quad (3.6)$$

jossa olemme merkinneet mukanaliikkuvassa mitassa ilmoitettuja suureita yläindeksillä C .

Yhtälön (3.6) Fourier-muunnoksena saadaan yhtälö

$$\zeta_k = \mathcal{R}_k - \frac{2}{9(1 + \omega)} \left(\frac{k}{\mathcal{H}} \right)^2 \Psi_k, \quad (3.7)$$

josta havaitsemme, että horisonttia suuremmilla skaaloilla ($k \ll \mathcal{H}$) mukanaliikkuva hyperpinta yhtyy tasaisen energiatiheyden hyperpintaan, eli

$$\zeta \simeq \mathcal{R}. \quad (3.8)$$

Mukanaliikkuva kaarevuusperturbaatio \mathcal{R} jakaa siis saman ominaisuuden kuin tasaisen energiatiheyden hyperpinnan kaarevuusperturbaatio ζ : horisonttia suuremmilla skaaloilla perturbaatioiden kehitys määräytyy yksinomaan epäadiabaattisten perturbaatioiden muutoksista, eli adiabaattisessa tapauksessa perturbaatioiden kehitys pysähtyy kokonaan ja ne jäätyvät vakioarvoon

jatkaen kehitystään vasta horisonttiin palatessaan. Tuloksen on skalaariper-
turbaatioiden tapauksessa osoitettu pätevän myös toisen kertaluvun tark-
kuudella [35].

3.2 Kurvatonimalli

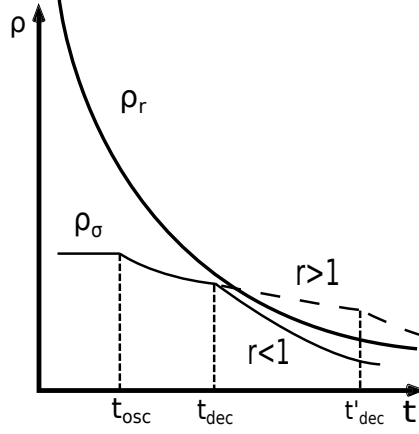
Lähdemme viitteitä [7, 36, 37] seuraten tarkastelemaan kurvatonimallia, jos-
sa tarkastelemme inflaation aikana oleellisesti massattomana pysyvää, kur-
vatoniksi nimettyä skalaarikenttää, joka on inflaation aikana suhteelliselta
energiatiheydeltään mitättömän pieni ja joka ei oleellisella tavalla vaikuta
maailmankaikkeuden laajenemiseen. Malli on inflaatiota ajavasta kentästä
tai mallista riippumaton, eikä yksinkertaisimmillaan ota kantaa siihen, miten
inflaatio tapahtui.

Kurvatonimallista on olemassa useita, keskenään hyvin erilaisia ja eri
lähtökohtiin perustuvia modifikaatioita, jotka eroavat toisistaan niin fenome-
nologialtaan kuin ennusteiltaan. Esittelemme tässä osiossa vain yksinker-
taisimman kurvatonimallin luoden osion lopuksi lyhyen katsauksen muihin
kirjallisuudesta löytyviin kurvatonimallin modifikaatioihin ja niiden uskot-
tavuuteen.

Tyypillisesti inflatonia ja kurvatonia käsitellään kahden kentän mallina,
jossa inflaation aikana inflatoni energiatiheyttä dominoivana komponenttina
ajaa inflaatiota kurvatonikentän pysytellessä vakioarvossa. Toisin kuin edel-
lisessä luvussa esitettyssä yhden kentän inflatonimallissa oletamme tässä, että
inflatonikentässä esiintyvät perturbaatiot ovat mitättömän pieniä⁴ ja voimme
jättää ne huomiotta. Sen sijaan kurvatonikentässä oletamme esiintyvän per-
turbaatioita, mutta koska oletamme kurvatonin suhteellisen energiatiheyden
olevan inflatonikentän energiatiheyteen nähden mitätön, oletamme myös kur-
vatonikentän perturbaatioista syntyvien kaarevuusperturbaatioiden olevan
vielä inflaation aikana mitättömiä.

Inflaation aikana maailmankaikkeuden laajeneminen venyttää kurvaton-
kentän kvanttifluktuaatioista syntyneet kaarevuusperturbaatiot horisonttia
suuremmiksi klassisiksi perturbaatioiksi tuottaen perturbaatioille lähes skaala-
invariantin tehospektrin. Kaarevuusperturbaatioiden tuotto ei yksinkertaisim-
millaan vaadi oletuksia inflaation luonteesta lukuun ottamatta jo aiemmin lu-
vussa 2 käsittelemäämme oletusta vakioarvossa pysyvistä Hubblen paramet-

⁴Tarkkaan ottaen tarkoitamme tällä yhtälöstä (2.53) ja tuloksesta (2.65) seuraavan
ehdon $H/\sqrt{\epsilon} \ll 10^{-5} M_{Pl}$ toteutumista.

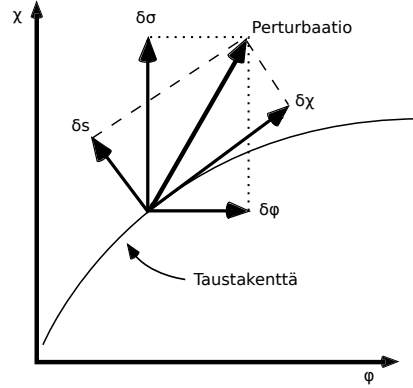


Kuva 3.1: Skemaattinen esitys kurvatonin ja säteilyn energiatiheyksistä ρ_σ , ρ_r ajan t funktiona inflaation jälkeisessä maailmankaikkeudessa. Kurvatoni alkaa oskilloida hetkellä t_{osc} ja hajoaa tapauksessa $r < 1$ hetkellä t_{dec} , tai tapauksessa $r > 1$ hetkellä t'_{dec} . Oskillaatioiden alkamisen ja kurvatonin hajoamisen välillä kurvatoni käyttäytyy efektiivisesti materian tavoin, jolloin kentän energiatiheydelle pätee $\rho_\sigma \propto a^{-3}$. Säteilyn energiatiheydelle pätee koko ajan $\rho_r \propto a^{-4}$.

rista. Sen sijaan inflaation jälkeisistä tapahtumista ja olosuhteista joudumme tässä kohdassa tekemään muutamia oletuksia viitteen [7] tavoin.

Inflaation jälkeen maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoiva inflatoni hajoaa pian inflaation jälkeen lähes yksinomaan säteilyksi tuottaen tilanteen, jossa säteily dominoi maailmankaikkeuden energiatiheyttä. Koska olemme inflatonikentässä esiintyvät perturbaatiot mitättömiksi, on myös syntyvä säteily täysin homogeenista. Inflaation jälkeen kurvatoni alkaa oskilloida käyttäytyen efektiivisesti materian tavoin kasvattaen samalla energiatiheyttään suhteessa säteilyyn (Kuva 3.1). Syntyvä epäadiabaattinen tilanne johtaa tällöin yhtälön (3.5) mukaisesti myös kaarevuusperturbaatioiden tuottoon (Kuva 3.2).

Huomionarvoista on, että yhden kentän inflatonimallista poiketen kurvatonin aiheuttamat kaarevuusperturbaatiot muuttuvat epäadiabaattisten paineperturbaatioiden vuoksi yhtälön (3.5) perusteella myös horisonttia suuremmilla skaaloilla, eli takaisin horisonttiin palaavat skaalat eivät välttämättä olekaan puhtaasti primordiaalisessa tilassaan. Yhtä tärkeää on huomata, että kurvatonimallissa kaarevuusperturbaatio tuotetaan inflatonimallista



Kuva 3.2: Mielivaltainen perturbaatio voidaan kenttäavaruudessa (ϕ, σ) jakaa adiabaattisen kentän χ ja entropiakentän s perturbaatioihin siten, että taustakenttien kenttäavaruuteen piirtämälle radalle ortogonaaliset entropiakentän flukтуаatiot δs esittävät kaarevuusperturbaatiota tuottavia epäadiabaattisia perturbaatioita. Tällöin tilanteessa, jossa $\delta s = 0$, ovat χ -kentän perturbaatiot taustakenttien radan suuntaisia esittäen puhtaasti adiabaattisia perturbaatioita. Kuva on mukaelma viitteestä [38].

poiketen vasta inflaation päätyttyä ja sen suuruus riippuu nimenomaan inflaation jälkeisestä kehityksestä.

Kurvatonin oskillointi päättyy toiseen termalisaatioon kurvatonin hajotessa. Syntyvien hajoamistuotteiden on päästävä ajoissa termiseen tasapainoon sekä itsensä että inflatonin hajotessa syntyneen säteilyn kanssa onnistuneen nukleosynteesin takaamiseksi [7, 37]. Kurvatonin hajotessa ennen neutriinon irtikytkeytymistä⁵ tullaan joka tapauksessa tilanteeseen, jolloin epäadiabaattisuutta ei enää synny ja horisonttia suuremman skaalan kaarevuusperturbaatiot jäävät jatkaen kehitystään vasta horisonttiin palatessaan.

Adiabaattiseen tilanteeseen on mahdollista palata myös tapauksessa, jossa efektiivisesti materian tavoin käyttäytyvä kurvatoni siirtyy dominoimaan maailmankaikkeuden kokonaisenergiatiheyttä (Kuva 3.1, tapaus $r > 1$).

⁵Teemme tämän lisäoletuksen yksinkertaisuuden vuoksi välttyäksemme neutriinon irtikytkeytymisestä mahdollisesti seuraavasta merkittävästä lisäyksestä syntyvissä epäadiabaattisissa kaarevuusperturbaatioissa. Aihetta on käsitelty tarkemmin mm. viitteissä [39, 40].

3.2.1 Kurvatonin dynamiikkaa

Lähdemme etsimään mekanisme, joka muuttaa eri ainekomponenttien välillä esiintyvät epäadiabaattiset energiatiheyden perturbaatiot kaarevuusperturbaatioiksi. Merkitsemme kurvatonia symbolilla σ ja inflatonia edellisen luvun mukaisesti symbolilla ϕ . Kurvatonikentän Lagrangen tiheys on muotoa

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - V(\phi, \sigma), \quad (3.9)$$

jossa potentiaalin ei oleteta sisältävän kytkentää muihin kenttiin, vaikka tarkastelumme sisältääkin toisen, inflaatiota ajavan kentän. Yksinkertaisinta on olettaa potentiaali kvadraattiseksi kuten vapaan kentän tapauksessa, jolloin koko potentiaali on muotoa

$$V(\phi, \sigma) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2, \quad (3.10)$$

jossa m_ϕ on inflatonin ja m_σ kurvatonin massa. Tyypillisesti $m_\phi > m_\sigma$ [37].

Samoin kuin edellisessä luvussa käsittelemämme inflatonikentän tapauksessa, voidaan yhtälöstä (3.9) nyt ensimmäisen kertaluvun tarkkuudella johtaa liikeyhtälöt sekä kentälle että perturbaatioille, jotka ovat täysin vastaavat kuin yhden kentän inflatonimallin yhteydessä (yhtälöt (2.16) ja (2.36)). Myös kurvatonikentän inflaation aikaiseksi tehospektriksi saadaan horisonttia suuremmilla skaaloilla sama lauseke kuin inflatonikentän yhteydessä (yhtälö (2.51)). Oletamme tässä kohdassa kurvatonikentän energiatiheyden niin pieneksi, että sen vaikutus tausta-avaruuden metriikkaan voidaan jättää huomiotta, mutta palaamme asiaan liittyviin ongelmiin myöhemmin. Oletamme myös, että inflatonikentän hajotessa syntyvä säteily on niin homogeenista, ettei sillä ole vaikutusta tausta-avaruuden metriikkaan.

Inflaation aikana kurvatonikenttä vierii hitaasti alas potentiaalissaan. Kun edetään tilanteeseen, jossa $H \sim m_\sigma$, alkaa kurvatonin oskilloida taajuudella m_σ osiossa 2.2.3 esitetyn tavan mukaisesti, jolloin kurvatonin energiatiheys käyttäytyy kuten $\rho_\sigma \propto a^{-3}$. Oletamme, että tämä tapahtuu vasta inflaation päätyttyä ja inflatonikentän hajottua, jolloin maailmankaikkeus on energiatiheydeltään säteilyn dominoima. Olettamalla vielä, että kurvatonikentän oskillaatiot jatkuvat riittävän pitkään, ajaudutaan lopulta dynaamisesti tilanteeseen, jossa kurvatonin energiatiheys alkaa olla merkittävä ja siten myös kurvatonikentän generoimat kaarevuusperturbaatiot alkavat kasvaa merkittäviksi.

Mikäli oskillointi on riittävän hidasta, voidaan kurvatonikentän energiatiheys ilmaista oskillaatioamplitudin avulla, jonka jaamme tässäkin taustaarvoon ja perturboituun arvoon, $\sigma_{amp} = \bar{\sigma}_{amp} + \delta\sigma_{amp}$, ja joiden avulla ilmaistuna energiatiheys saa muodon

$$\rho_\sigma = \frac{1}{2}m^2\sigma_{amp}^2 = \frac{1}{2}m^2(\bar{\sigma}_{amp}^2 + 2\bar{\sigma}_{amp}\delta\sigma_{amp} + \delta\sigma_{amp}^2) \equiv \bar{\rho}_\sigma + \delta\rho_\sigma. \quad (3.11)$$

Tällöin kurvatonin tiheyskontrastiksi δ_σ saadaan toisen kertaluvun tarkkuudella

$$\delta_\sigma \equiv \frac{\delta\rho_\sigma}{\bar{\rho}_\sigma} = 2\frac{\delta\sigma_{amp}}{\bar{\sigma}_{amp}} + \left(\frac{\delta\sigma_{amp}}{\bar{\sigma}_{amp}}\right)^2. \quad (3.12)$$

Vaikka kurvatonikentässä esiintyvät perturbaatiot ovat alun perin gaussisia, on yhtälön (3.12) viimeinen termi ensimmäinen esimerkki kurvatonimallisesta esiintyvistä epägaussisuudesta – niin sanotusta χ^2 -epägaussisuudesta eli gaussisen suureen neliöstä. Palaamme epägaussisuuteen jälleen seuraavissa luvuissa.

Yhtälö (3.12) tarjoaa myös toisen mielenkiintoisen tuloksen: kurvatonikentän tiheyskontrasti säilyy vakiona kentän perturbaatioiden ja kentän arvon suhteen pysyessä vakiona. Kvadraattisen tai sellaisen alueen sisältävän potentiaalin tapauksessa tämä toteutuu automaattisesti, sillä liikeyhtälöt (yhtälöt (2.16) ja (2.36)) ovat tällöin samat sekä kentälle että sen perturbaatioille. Tällöin yhtälön (3.4) perusteella kurvatonifluidin generoimat kaarevuusperturbaatiot säilyvät tasaisen energiatiheyden hyperpinnalla vakiona ja voimme ensimmäisessä kertaluvussa kirjoittaa

$$\zeta_\sigma = \frac{1}{3}\delta = \frac{2}{3}\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \frac{2}{3}q\left(\frac{\delta\sigma}{\sigma}\right)_*, \quad (3.13)$$

jossa olemme merkinneet tähdellä $*$ kurvatonikentän ja sen perturbaatioiden suhdetta inflaation loppumishetkellä ja jossa parametri q mittaa määrää, jolla suhde $\delta\sigma/\sigma$ muuttui kurvatonikentän siirtyessä potentiaalin epäkvadraattisesta osasta kvadraattiseen. Kvadraattisen potentiaalin tapauksessa kurvatonikentän dynamiikan analysointi muuttuu siis triviaaliksi inflaation päätymisen jälkeen.

Maailmankaikkeus koostuu kurvatonin oskilloidessa nyt siis kahdesta ainekomponentista, säteilystä ja efektiivisesti materian tavoin käyttäytyvästä kurvatonista, joiden kvadraattisen potentiaalin tapauksessa vakiona pysyville,

avaruudellisesti laakealla hyperpinnalla lasketuille kaarevuusperturbaatioille pätee yhtälön (3.4) mukaisesti

$$\zeta_r = \frac{\delta_r}{4} \quad \zeta_\sigma = \frac{\delta_\sigma}{3}, \quad (3.14)$$

jolloin kokonaiskaarevuusperturbaatioksi saadaan yhtälöstä (3.3)

$$\zeta = \frac{4\rho_r\zeta_r + 3\rho_\sigma\zeta_\sigma}{4\rho_r + 3\rho_\sigma}. \quad (3.15)$$

Koska oletimme inflatonkentässä esiintyvät perturbaatiot mitättömiksi, on myös inflatonkentän hajotessa syntyvä säteily täysin homogeenista ja säteilyn osalta pätee $\zeta_r \ll 10^{-5}$. Inflaation päättymishetkellä myös kurvatonin aiheuttama kaarevuusperturbaatio on pieni, $\zeta_\sigma \approx 0$, mutta kurvatonin kasvatessa suhteellista osuuttaan kokonaisenergiatiheydestä kasvaa myös syntyvä kaarevuusperturbaatio. Kasvun suuruus vaihtelee eri tapauksissa hieman eri tavoilla, jotka määritämme seuraavassa osiossa.

Maailmankaikkeuden energiatiheysbudjetissa esiintyvät vaihtelut eri ainekomponenttien välillä generoivat siis kaarevuusperturbaatioita. Piirre on yksi kurvatonimallin keskeisimpiä ja sitoaksemme vaihteluiden suuruuden havaintoihin johdamme seuraavassa osiossa myös kaarevuusperturbaatioita eri tilanteissa vastaavat tehospektrit. Tätä silmällä pitäen määrittelemme uuden parametrin

$$r \equiv \frac{4\rho_\sigma}{4\rho_r + 3\rho_\sigma}, \quad (3.16)$$

jolloin tapauksessa, jossa kurvatonin hajoaa välittömästi oskilloinnin päätteeksi siten, että sen energiatiheys pysyy koko ajan pienenä suhteessa säteilyyn, pätee

$$r \approx \frac{\rho_\sigma}{\rho_r}, \quad (3.17)$$

eli parametri r kuvaa kurvatonin suhteellista energiatiheyttä kurvatonin hajoamishetkellä. Kurvatonin hajottua oletamme kosmisen evoluution jatkuvan osiossa 2.3.2 kuvatun kaltaisena.

Tarkastelemme seuraavaksi yksinkertaista esimerkkiä kurvatonin suhteellisen energiatiheyden määrittämiseksi. Palauttaaksemme suhteellisen energiatiheyden ja syntyvän kaarevuusperturbaation suuruuden tarkastelun helpommin mitattaviin suureisiin lähdemme tarkastelemaan tilannetta, jossa

sekä inflatoni- että kurvatonikentän potentiaalit ovat kvadraattista muotoa ja jossa oletamme SR-inflaation ja kurvatonin välittömän hajoamisen. Tahdomme myös välttää kurvatonin ajamaa toista inflaatiojaksoa, eli oletamme, että vaikka kurvatonin ehtisi dominoida maailmankaikkeuden kokonaisenergiatiheyttä ennen hajoamistaan, ei tilanne johda maailmankaikkeuden kiihtyvään laajenemiseen. Tällöin kurvatonikentän voidaan arvioida pysyvän koko ajan inflaation aikaisessa vakioarvossa lähellä potentiaalinsa minimiä [37], joten merkitsemme $\sigma = \sigma_*$ ja toteamme, että tällöin myös $\dot{\sigma} \approx 0$.

Inflaation päättyessä saamme SR-inflaation päättymisehdosta $\epsilon \sim 1$ inflatonikentän arvoksi $\phi_{end} = \sqrt{2}M_{Pl}^2$ ja Hubblen parametriksi yhtälöä (2.28) käyttäen $H_{end}^2 = \frac{1}{3}m_\phi^2$, jolloin myös $(\rho_r)_{end} = m_\phi^2 M_{Pl}^2$. Säteilyn dominoimassa maailmankaikkeudessa pätee

$$H^2 = \frac{H_{end}^2 a_{end}^4}{a^4}, \quad (3.18)$$

jolloin kurvatonikentän alkaessa oskilloida hetkellä $H_{osc} = m_\sigma$ saamme tätä ajanhetkeä vastaavalle skaalatekijälle a_{osc}

$$\left(\frac{a_{osc}}{a_{end}}\right)^4 = \frac{1}{3} \left(\frac{m_\phi}{m_\sigma}\right)^2. \quad (3.19)$$

Jotta säteily edelleen dominoisi maailmankaikkeuden energiatiheyttä, täytyy edelleen samalla ajanhetkellä päteä $\rho_\sigma \ll \rho_r$. Tästä saamme ehdon kurvatonikentän arvolle inflaation aikana:

$$\sigma_*^2 \ll 6M_{Pl}^2, \quad (3.20)$$

mikä yhdessä ehdon $\dot{\sigma} \approx 0$ kanssa rajoittaa merkittävästi kurvatonikentän kaikkien mahdollisten inflaation aikaisten arvojen joukkoa.

Jatkamme seuraavaksi kohti tavoitettamme ja arvioimme, että $(\rho_\sigma)_{end} \sim (\rho_\sigma)_{osc} \sim \frac{1}{2}m_\sigma^2 \sigma_*^2$. Oletamme, että maailmankaikkeus on edelleen kurvatonin hajoamishetkellä säteilyn dominoima, jolloin kurvatonin suhteelliseksi energiatiheydeksi saadaan

$$r = \frac{\rho_\sigma}{\rho_r} = \frac{(\rho_\sigma)_{osc} \left(\frac{a_{osc}}{a_{dec}}\right)^3}{(\rho_r)_{end} \left(\frac{a_{end}}{a_{dec}}\right)^4} = \frac{1}{6} \left(\frac{\sigma_*}{M_{Pl}}\right)^2 \sqrt{t_{dec} m_\sigma}, \quad (3.21)$$

jossa olemme lisäksi arvioineet kurvatonin alkavan hajota, kun hajoamisvakioille Γ_σ pätee $\Gamma_\sigma \sim H$, eli kun $H_{dec}^{-1} \sim t_{dec}$, jolloin

$$\frac{a_{dec}}{a_{osc}} = \sqrt{\frac{H_{osc}}{H_{dec}}} = \sqrt{t_{dec} m_\sigma}. \quad (3.22)$$

Näin kurvatonin osuus energiatiheydestä kurvatonin hajoamishetkellä sekä syntyvien kaarevuusperturbaatioiden analyysi palautuu yhtälöiden (3.15) ja (3.16) mukaisesti teorian kolmen parametrin, kurvatonin massan ja hajoamisajan, sekä kentän inflaation aikaisen arvon selvittämiseen.

Tarkkaan ottaen arvio $(\rho_\sigma)_{end} \sim (\rho_\sigma)_{osc}$ johtaa tulokseen

$$\frac{a_{end}}{a_{osc}} = \sqrt{3} \frac{m_\sigma}{m_\phi} \sqrt{\frac{t_{osc}}{t_{dec}}} \approx 1, \quad (3.23)$$

jolloin inflatoni- ja kurvatonikentän massojen suhteen ollessa tunnettu saamme ennusteen kurvatonikentän oskillaatioiden alkamisen ja kentän hajoamisen väliselle aikaskaalalle. Kääntäen: aikaskaalan ollessa tunnettu saamme ennusteen inflatoni- ja kurvatonikentän massojen suhteelle. Tulosta voidaan kuitenkin pitää vain viitteellisenä, sillä tarkkojen tulosten saaminen vaatii täsmällistä mallia kurvatonin hajoamisprosessista. Myöskään käsittelemämme kolme parametria m_σ , t_{dec} ja σ_* , sekä inflatonin massa m_ϕ eivät ole tunnettuja, vaan eri mallit antavat parametreille eri arvioita [14, 37].

Inflaation jälkeisen kosmologian synnyttämien kaarevuusperturbaatioiden tarkastelun sitominen hiukkasten massoihin ja hajoamisvakioihin on kuitenkin tärkeää sellaisten ennusteiden luomiseksi, jotka muuttuvat testattaviksi silloin, kun inflaatiioskenaarioon liitettäviä malleja voidaan pitää hiukkasfyysiikan motivoimina ja ne saavat kokeellista pohjaa. Vaikka suurin osa malleista on tällä hetkellä puhtaasti fenomenologisia ja ne onnistuvat selittämään vain tiettyjä piirteitä inflaatiosta tai sen jälkeisestä kosmologiasta, on valmiiden ennusteiden olemassa olo välttämätöntä mallien relevanssin tarkastelemiseksi.

Siinä missä kurvatonin- ja inflatonihiukkasen massa sekä kurvatonin hajoamisaika ovat perustana olevan teorian parametreja ja siten kaikkialla maailmankaikkeudessa yhtä suuria, on kurvatonin inflaation aikainen arvo mahdollisesti sattumanvarainen alkuehto juuri meidän nykyisin havaittavalle maailmankaikkeudellemme.

3.2.2 Kaarevuusperturbaation tehospektri

Seuraavaksi johdamme kurvatonikentän generoimaa kaarevuusperturbaatiota vastaavan tehospektrin tapauksissa, joissa kurvatonikentän arvo inflaation

aikana on joko hyvin pieni tai hyvin suuri (tapaukset $H_* \gg \sigma_*$ ja $H_* \ll \sigma_*$, jossa H_* on Hubblen parametrin arvo inflaation aikana), sekä tapauksissa, joissa joko kurvatonikenttä tai homogeeninen säteily dominoi suhteellista energiatiheyttä kurvatonin hajoamishetkellä (tapaukset $r > 1$ ja $r < 1$). Tehospektrin laskeminen tarjoaa menetelmän arvioida parasta parametrikombinaatiota, jolla tuottaa havaittu perturbaatioamplitudi.

Tapauksessa, jossa $H_* \ll \sigma_*$, voidaan yhtälöä (3.12) ja kurvatonikentän perturbaatiospektriä (2.51) käyttäen johtaa energiatiheyden perturbaatiospektrille ensimmäisen kertaluvun tulos

$$\mathcal{P}_\delta = \left(\frac{H_*}{\pi\sigma_*} \right)^2. \quad (3.24)$$

Jos $H_* \gg \sigma_*$, ovat perturbaatiot suuria taustakenttään nähden. Tällöin yhtälöstä (3.12) nähdään energiatiheyden perturbaatioiden olevan vahvasti epägaussisia ja yhtälöä (3.11) käyttäen saamme arvion

$$\langle \sigma^2 \rangle = \langle \bar{\sigma}^2 \rangle + 2 \langle \bar{\sigma} \rangle \langle \delta\sigma \rangle + \langle (\delta\sigma)^2 \rangle \approx \langle (\delta\sigma)^2 \rangle. \quad (3.25)$$

Tällöin tiheyskontrastiksi saadaan

$$\delta_\sigma \approx \frac{(\delta\sigma)^2}{\langle (\delta\sigma)^2 \rangle} \quad (3.26)$$

ja tätä vastaavalle tehospektrille voidaan johtaa pienillä kokoskaaloilla pätevä tulos [41]

$$\mathcal{P}_\delta = 4 \frac{\mathcal{P}_\delta^2(k_{min})}{\langle (\delta\sigma)^2 \rangle} \ln \left(\frac{k}{k_{min}} \right), \quad (3.27)$$

jossa k_{min} on osiossa 2.3.1 käsitellyn mukainen sopiva katkaisuskaala.

Tapauksessa, jossa kurvatonikenttä dominoi suhteellista energiatiheyttä kurvatonin hajoamishetkellä, saadaan tasaisen energiatiheyden hyperpinnalla yhtälöstä (3.14) $\zeta = \frac{1}{3}\delta_\sigma$ ja näin ollen kaarevuusperturbaation tehospektri

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{1}{9}\mathcal{P}_\delta \quad (r > 1), \quad (3.28)$$

jossa \mathcal{P}_δ saadaan täysin gaussisten perturbaatioiden tapauksessa ($H_* \ll \sigma_*$) yhtälöstä (3.24) ja täysin epägaussisissa tapauksessa ($H_* \gg \sigma_*$) yhtälöstä

(3.27). Tulosta voidaan kuitenkin pitää korkeintaan viitteellisenä, sillä energiatiheyttä dominoivan kurtvatonin vaikutusta tausta-avaruuden metriikkaan ei enää voida pitää pienenä.

Tapauksessa, jossa adiabaattisuus saavutetaan vasta kurtvatonin hajoamishetkellä säteilyn edelleen dominoidessa suhteellista energiatiheyttä, saadaan yhtälöitä (3.15) ja (3.16) käyttäen

$$\zeta = \frac{1}{4} r \zeta_\sigma, \quad (3.29)$$

jossa oletimme kurtvatonin välittömän hajoamisen oskilloinnin päätteeksi. Tällöin kaarevuusperturbaation tehospektriksi saadaan lopulta

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{r^2}{16} \mathcal{P}_\delta \quad (r < 1), \quad (3.30)$$

eli kurtvatonin suhteellinen osuus koko maailmankaikkeuden energiatiheydestä kurtvatonin hajoamishetkellä määrittää syntyvien kaarevuusperturbaatioiden suuruuden. Tämä eroaa yhden kentän inflaatiomallista oleellisella tavalla, sillä nyt syntyvän kaarevuusperturbaation suuruutta ei määritä maailmankaikkeuden inflaation aikainen, vaan sen jälkeinen dynamiikka.

Koska kurtvatonikentän synnyttämät kaarevuusperturbaatiot muuttuvat ennen kurtvatonin hajoamista myös horisonttia suuremmilla skaaloilla, on niiden käyttäytymisen kvantitatiivinen ymmärtäminen erityisen tärkeää. Aiemmin inflatonimallin yhteydessä oletimme perturbaatioiden jäätyvän horisontista poistuessaan ja jatkavan kehitystään vasta sinne palatessaan, mutta mikäli kurtvatonin generoimat kaarevuusperturbaatiot jatkavat kehitystään myös horisonttia suuremmilla skaaloilla, eivät CMB:n syntyhetkellä horisonttiin palaavat skaalat enää myöhemmän kehityksensä johdosta ole puhtaasti primordiaalisessa tilassaan, eikä näistä voi tällöin tehdä aiempia tuloksia täysin vastaavia päätelmiä. Jätämme havaintoihin liittyvän analyysin kuitenkin väliin keskittyen vain kaarevuusperturbaatioiden syntyä selittävään teoriaan.

3.3 Kurtvatonimallin modifikaatiot

Edellä olemme keskittyneet vain yksinkertaisimpaan kurtvatonimalliin esitellem sen pääkohdat. Kurtvatonimallista on kuitenkin olemassa useita modifikaatioita, jotka pohjautuvat erilaisiin oletuksiin tai keskittyvät kurtvatonin

mallin tiettyihin yksityiskohtiin edellä esitettyä tarkemmin ja toisinaan onnistuvat selittämään joitakin piirteitä muita malleja paremmin.

Myös tässä tutkielmassa olemme kiinnostuneita kurvatonimallin tietynlaisesta modifikaatiosta, jossa kurvatonikentän potentiaali ei ole puhtaasti kvadraattista muotoa, vaan sisältää myös pieniä itseisvuorovaikutuksia. Pohjustaaksemme luvussa 5 esiteltävää laajennustamme teemme jo tässä vaiheessa lyhyen katsauksen kurvatonimallin erilaisiin modifikaatioihin.

Erilaisia paljon tutkittuja vaihtoehtoja ovat mm. Higgs-inflaatio ja kurvatonin kytketyminen Higgsin bosoniin (katso esim. [42]), nopean vierimisen inflaatio eli niin kutsuttu *fast roll* [43], useiden kurvatonien olemassa olo [44] ja inflatonikentässä esiintyvät perturbaatiot [45, 46], jolloin viimeisessä tapauksessa myös säteilyn perturbaatioiden vaikutus syntyvään kokonaiskaarevuusperturbaatioon on käsiteltävä edellä tarkasteltua huolellisemmin. Tällöin voidaan tarkastella myös mahdollisuutta, jossa energiatiheyttä dominoivan kurvatonin vaikutus metriikkaan on suuri, kurvatonin dominoivana komponenttina aloittaa uuden inflaatiojakson [47] tai tuottaa merkittäviä tensoriperturbaatioita [48] ja niin edelleen.

On syytä korostaa, että kurvatonin ja inflatonin ovat kuitenkin vain kuvailevia malleja vailla hiukkasfysiikan motivointia, eikä niitä ole havaittu. Säieteoria ja muut hiukkasfysiikan standardimallin laajennukset tarjoavat matalan energian rajoilla erityisesti kurvatonikandidaatteja [14, 49], mutta kokeellista pohjaa malleille ei ole.

Malleja voi kritisoida myös niiden periaattellisesta falsifiomattomuudesta: olivat havainnot millaisia tahansa, usein jonkin inflaatiomallin ennusteet ovat niiden kanssa yhteensopivia. Mallien erityispiirteitä tarkasteltaessa ei kuitenkaan voida keskittyä vain ennusteiden vastaavuuteen havaintojen kanssa, vaan tarkastelu on ulotettava laajemmalle. Inflaatiomallin vaatimien parametrien määrä ja sallitun parametriavaruuden koko, sekä ennusteiden stabiilius parametreja varioitaessa ovat usein kuvailevan mallin uskottavuutta arvioitaessa vähintään yhtä tärkeitä piirteitä kuin ennusteiden vastaavuus havaintojen kanssa [50]. Mallin tarjoamien testattavien ennusteiden runsaus on luonnollisesti myös tärkeä kriteeri mallin uskottavuuden arvioinnin kannalta.

Edellä esitetyt seikat herättävät kysymyksen, miksi yksinkertaisinkaan kurvatonimalli on millään tavalla motivoitu ja pohjimmiltaan erilainen kuin muut inflaatiomallit. Kurvatonimallin tekee kuitenkin kiinnostavaksi jo pelkkä havainto kaarevuusperturbaatioiden mahdollisesta tuotosta epäadiabaattisten energiatiheyden perturbaatioiden kautta, sekä havainto perturbaatiois-

sa mahdollisesti esiintyvistä epägaussisuuksista. Tällöin oma kysymyksensä on, millaisia epägaussisuuudet täsmällisellä, kvantitatiivisella tasolla ovat ja kuinka ne syntyvät. Seuraavissa luvuissa lähdemme hakemaan vastausta juuri näihin kysymyksiin.

Luku 4

Erillisten maailmankaikkeuksien malli

Tässä luvussa esittelemme niin kutsutun erillisten maailmankaikkeuksien mallin eli ΔN -formalismiin [19, 20, 21, 22] ja sovellamme sitä inflaation aikana syntyvien kaarevuusperturbaatioiden tarkasteluun.

Olemme kiinnostuneita ennen kaikkea kaarevuusperturbaation epägaussisuudesta, jolle on kurvatonimallin yhteydessä näytettävissä, että pienetkin potentiaalikorjaukset muuttavat yksinkertaisimman käsittelyn mukaisia ennusteita merkittävästi. Tämän tarkastelemiseksi lähdemme tässä luvussa rakentamaan formalismia, jota lopulta seuraavassa luvussa sovellamme.

Aloitamme käsittelemällä ensin gaussisuutta ja epägaussisuutta aiempaa syvemmin, minkä jälkeen siirrymme tarkastelemaan ΔN -formalismia. Johdamme ΔN -formalismia hyväksikäyttäen lausekkeen kaarevuusperturbaation lausekkeessa esiintyville ensimmäisen ja toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille mielivaltaisen monen kentän tapauksessa ja huomautamme tulosten [21, 51] vastaisesti, että ensimmäisen kertaluvun epälineaarisuusparametrin tarkastelu vaatii johtavan kertaluvun ulkopuolisissa tarkasteluissa myös niin kutsutun kolmannen sivuspektrin kontribuution huomioimista konsistentin tuloksen saamiseksi.

Luvun loppupuolella luomme katsauksen havaintojen epälineaarisuusparametreille asettamille rajoituksille ja tarkastelemme lyhyesti parametrien mahdollisia vaikutuksia suuren skaalan rakenteessa. Epägaussisuuden havaitsemiseen liittyen tarkastelemme lisäksi yhden hitaasti vierivän kentän tapaus-ta, jonka yksinään, ilman epäadiabaattista energianvaihtoa aiheuttamien kaarevuusperturbaatioiden päättelemme olevan poissuljettu tapaus, mikäli suur-

ta toisen asteen epägaussisuutta tullaan joskus havaitsemaan.

4.1 Gaussisuus ja epägaussisuus

Osiassa 2.3.1 määrittelimme gaussisen muuttujan $g(x)$ suureena, jonka Fourier-moodien g_k todennäköisyysjakauma on gaussinen

$$\text{Prob}(g_k) = \frac{1}{2\pi s_k^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{|g_k|^2}{s_k^2}} \quad (4.1)$$

ja jonka eri Fourier-moodien kaksipistekorrelaattori häviää

$$\langle g_k g_{k'}^* \rangle = \delta_{kk'}. \quad (4.2)$$

Totesimme todennäköisyysjakauman (4.1) varianssin määräävän parametrin $s_k \in \mathbb{R}$ olevan jakauman ainoa vapaa parametri, sillä jakauman toista astetta suuremmat parittomat momentit häviävät identtisesti [52]. Erityisesti näin tapahtuu jakauman kolmannelle momentille, vinokkuudelle (engl. *skewness*), joka on kätevästi kuvattavissa kolmipistekorrelaattorilla:

$$\langle g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3} \rangle = 0. \quad (4.3)$$

Jakauman huipukkuutta¹ (engl. *kurtosis*) kuvaava nelipistekorrelaattori sekä kaikki tätä korkeamman parillisen kertaluvun momentit voidaan liittää kaksipistekorrelaattoriin ja ovat siten täysin ilmaistavissa parametrin s_k funktiona [52]. Esimerkiksi nelipistekorrelaattorin tapauksessa

$$\langle g_{k_1} g_{k_2} g_{k_3} g_{k_4} \rangle = \langle g_{k_1} g_{k_2} \rangle \langle g_{k_3} g_{k_4} \rangle + \langle g_{k_1} g_{k_3} \rangle \langle g_{k_2} g_{k_4} \rangle + \langle g_{k_1} g_{k_4} \rangle \langle g_{k_2} g_{k_3} \rangle. \quad (4.4)$$

Alinta epägaussista kertalukua edustaa siis nollasta poikkeava kolmipistekorrelaattori, sillä yksipistekorrelaattori $\langle g_k \rangle$ voidaan aina upottaa perturbointomaan taustaan [4].

Keskitymme tästä eteenpäin ainoastaan korrelaattorien yhdistettyyn osaan, jolloin Diracin deltafunktion esitystä [53]

¹Tarkkaan ottaen suureen g jakauman vinokkuus määritellään usein muodossa $\gamma_1 = \langle g^3 \rangle / \langle g^2 \rangle^{3/2}$ ja huipukkuus muodossa $\gamma_2 = \langle g^4 \rangle_C / \langle g^2 \rangle^2$, jossa $\langle g^4 \rangle_C$ on yhtälöitä (4.6), (4.9) vastaava yhdistetty (engl. *connected*) nelipistekorrelaattori [4].

$$\delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) \cdot \mathbf{x}} d^3x, \quad (4.5)$$

ja gaussiselle suurelle asettamaamme reaalisuusehtoa käyttäen voidaan kaarevuusperturbaation n -pistekorrelaattori esittää jatkumorajalla muodossa [4]

$$\langle \zeta_{k_1} \dots \zeta_{k_n} \rangle = (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n) P_n(k_1, \dots, k_n), \quad (4.6)$$

jossa $P_n(k_1, \dots, k_n)$ on n :n satunnaismuuttujan jakaumaa vastaava, tapauskohtaisesti määriteltävä tehospektri.

Korrelaattorin yhdistämättömän (engl. *disconnected*) osan tapauksessa joutuisimme tarkastelemaan deltafunktioiden tuloon verrannollisia termejä (yhtälö (4.4)), mutta yleistä konventiota [18, 54, 55, 56] seuraten sivuutamme ne keskittyen vain yhdistettyyn osaan.

Lähdemme nyt tarkastelemaan eri kertaluvuissa esiintyvää epägaussisuutta aloittamalla kolmipistekorrelaattorin lausekkeessa esiintyvää sivuspektistä (engl. *bispectrum*), jota merkitsemme symbolilla $B(k_1, k_2, k_3) \equiv P_3(k_1, k_2, k_3)$. Sivuspektiä karakterisoi ensimmäisen kertaluvun epälineaarisuusparametri f_{NL} , jonka määrittelemme yhtälöllä

$$B(k_1, k_2, k_3) = \frac{6}{5} f_{NL}(k_1, k_2, k_3) \left(\mathcal{P}'(k_1) \mathcal{P}'(k_2) + \text{permutaatiot} \right), \quad (4.7)$$

jossa olemme tehospektrin määritelmää (2.46) seuraten määritelleet

$$\mathcal{P}'(k_i) \equiv \frac{2\pi^2}{k_i^3} \mathcal{P}(k_i) \quad (4.8)$$

ja jossa permutaatioilla tarkoitamme kaikkia mahdollisia tehospektrikombinaatioita $\mathcal{P}(k_i) \mathcal{P}(k_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, jossa $\mathcal{P}(k_i)$ on määritelty yhtälöllä (2.46) kaikilla $k_i \equiv |\mathbf{k}_i|$. Ylimääräinen kerroin $6/5$ johtuu suureen alkuperäisestä määritelmästä, jossa epälineaarisuusparametri f_{NL} määriteltiin Bardeenin potentiaalin Φ avulla [4].

Yleisesti ottaen epälineaarisuusparametrin f_{NL} skaalariippuvuus voi olla mitä tahansa, mutta oletamme sen vakioksi keskittyen parametrin niin sanottuun lokaaliin osaan tarkoituksenamme lopulta jakaa kaarevuusperturbaatio gaussiseen ja epälineaarisuusparametrein karakterisoitavaan epägaussiseen osaan (yhtälö (4.23)). Osiossa 4.2.2 paneudumme myös tilanteeseen,

jossa epälineaarisuusparametrin riippumattomuus tarkasteluskaalasta ei ole ilmiselvää.

Parillisen korrelaattorin tapauksessa puhtaasti gaussisten suureiden n-pistekorrelaattori voidaan aina jakaa kaksipistekorrelaattorien tulojen summaksi yhtälöä (4.4) vastaavalla tavalla, eikä muoto (4.6) ole näille korrelaattoreille erityisen kiinnostava², ellemmme lähde tarkastelemaan jakaumassa mahdollisesti esiintyvää epägaussista (mutta edelleen yhdistettyä) osaa. Jatkossa tutkimme siis mahdollisuutta, jossa myös nelipistekorrelaattorissa esiintyy epägaussisuutta ja esittelemme tämän suuruutta mittaavan toisen sivuspektrin, (engl. *trispectrum*). Nelipistekorrelaattorin lausekkeessa $T(k_1, k_2, k_3, k_4) \equiv P_4(k_1, k_2, k_3, k_4)$ spektriä karakterisoivat toisen kertaluvun epälineaarisuusparametrit g_{NL} ja τ_{NL} , jotka määrittelemme yhtälöllä

$$T(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{54}{25}g_{NL} (\mathcal{P}'(k_1)\mathcal{P}'(k_2)\mathcal{P}'(k_3) + 3 \text{ perm.}) + \frac{1}{2}\tau_{NL} (\mathcal{P}'(k_1)\mathcal{P}'(k_3)\mathcal{P}'(k_4) + 23 \text{ perm.}), \quad (4.9)$$

jossa olemme sivuspektrin lausekkeessa esiintyvän redusoidun tehospektrin $\mathcal{P}'(k_i)$ (yhtälö (4.8)) lisäksi määritelleet suureen

$$\mathcal{P}'(k_{ij}) \equiv \frac{2\pi^2}{k_{ij}^3} \mathcal{P}(k_{ij}), \quad (4.10)$$

jossa $k_{ij} \equiv |\mathbf{k}_{ij}| \equiv |\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j|$. Oletamme jatkossa myös parametrit g_{NL} ja τ_{NL} vakioiksi, vaikka periaatteessa myös näiden skaalariippuvuus voi olla epätriviaalia muotoa. Erityistä huomiota tulee kohdistaa parametrin τ_{NL} määrittelyyn lausekkeeseen, sillä redusoitu tehospektri (4.10) ei ole tarkastelusuunnasta riippumaton. Eri skaalojen yhdistelmillä saadaan hyvinkin erilaisia tuloksia, jotka luonnollisesti kaikki kontribuoivat koko spektrin lausekkeeseen (4.9).

Määrittelemme lopuksi vielä myös kolmannen sivuspektrin (engl. *quadranspectrum*), $Q(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) \equiv P_5(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5)$, yhtälöllä

$$Q(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = \frac{648}{125}h_{NL} (\mathcal{P}'(k_1)\mathcal{P}'(k_2)\mathcal{P}'(k_3)\mathcal{P}'(k_4) + 4 \text{ perm.}), \quad (4.11)$$

²Tarkasteltaessa ainoastaan korrelaattorin yhdistettyä osaa muuttuu tarkastelu itse asiassa triviaaliksi: kaikki gaussisten suureiden korrelaattorit häviävät kaksipistekorrelaattoria lukuun ottamatta.

jossa oletamme parametrin h_{NL} vakioksi. Voisimme viitteen [57] tavoin tarkastella myös kolmannen sivuspektrin riippuvuutta tarkastelusuunnasta \mathbf{k} määrittämällä toisen sivuspektrin lausekkeessa esiintyvää vakiota τ_{NL} vastaavat parametrit, mutta tulevan käsittelymme kannalta edellä esitetty määrittämämme on kaikkein tarkoituksenmukaisin.

Edellä esitetyt määritelmät tulevat tarpeellisiksi osiossa 4.2.2 tarkastellessamme epälineaarisuusparametrien esitystä ja siten myös epägaussisuutta erillisten maailmankaikkeuksien mallissa. Inflatoni- ja kurvatonikenttien inflaation aikaisia kvanttifluktuaatioita käsittelemme jatkossakin puhtaasti gaussisina, mutta kuten jo osiossa 3.2 huomasimme, syntyy kurvatonimallissa epägaussisuutta luonnollisella tavalla kenttien suhteellisten energiatihyysien muutoksista ja tätä kautta kenttien ja kaarevuusperturbaatioiden välisestä kytkennästä. Tätä epägaussisuutta karakterisoimaan tarvitsemme edellä esitettyjä epälineaarisuusparametreja.

4.2 Erillisten maailmankaikkeuksien malli

Tässä osiossa esittelemme niin kutsutun erillisten maailmankaikkeuksien mallin seuraten viitteitä [34, 58].

Kuten osiossa 2.4 mainitsimme, paljastavat kosmisesta mikroaaltotaustasäteilystä tehdyt havainnot primordiaaliset kaarevuusperturbaatiot erittäin pieniksi niiden suuruusluokan ollessa kertaluokkaa $\zeta \simeq 10^{-5}$. Ensimmäisen kertaluvun perturbaatioteoria on siis tähän kertaluokkaan saakka erinomainen approksimaatio ja lähtökohdiltaan perusteltu, mutta erityisesti epägaussisuuksien tarkastelu vaatii useimmissa tapauksissa vähintään toisen asteen perturbaatioteorian käyttöönottoa.

Toisen asteen perturbaatioteoria on kuitenkin teknisesti haastavaa, eikä sen käyttäminen ole useimmissa tapauksissa mielekästä³. Perturbaatioiden epägaussisuuksia päästäänkin tarkastelemaan ei-perturbatiivisin menetelmin ottamalla käyttöön niin kutsuttu erillisten maailmankaikkeuksien malli, joka tunnetaan myös nimellä ΔN -formalismi ja jossa maailmankaikkeutta hyvin suurilla skaaloilla mallinnetaan toisistaan riippumattomien FRW-maailmankaikkeuksien joukkona. Toinen paljon tarkasteltu ei-perturbatiivinen menetel-

³Erillisten maailmankaikkeuksien malli sisältää kuitenkin oletuksia, jotka tulee pystyä oikeuttamaan sillä, että ne tarjoavat samoja tuloksia kuin puhdas perturbaatioteoria, jonka tiedämme toimivaksi ja lähtökohdiltaan perustelluksi. Tässä mielessä korkeamman kertaluvun perturbaatioteoria ei ole menettänyt merkitystään.

mä on koordinaatiston valinnasta riippumaton niin kutsuttu kovariantti lähestymistapa, jota on käsitelty mm. viitteissä [59, 60]. Tässä keskitymme kuitenkin pelkkään ΔN -formalismiin.

Tarkastelemme seuraavaksi horisonttia suurempien skaalojen evoluutiota ja oletamme, että perturbaatioiden avaruudelliset gradientit ovat niin pieniä, että voimme jättää ne jonkin horisonttia suuremman tasoituskaalan $k_{tasoitus}^{-1}$ sisällä huomiotta. Toisin sanoen poistamme skaalaa $k_{tasoitus}^{-1}$ pienemmän rakenteen korvaamalla kunkin suureen niiden avaruudellisella keskiarvolla tasoituskaalan yli, eli maailmankaikkeus muuttuu käsittelyssämme tasoituskaalaa pienemmillä etäisyyksillä täysin homogeeniseksi.

Olettamalla jälleen myös isotrooppisuuden pystymme mallintamaan kuttakin tällaista aluetta erillisenä, itsenäisesti kehittyvänä FRW-maailmankaikkeutena, joka on lokaalisti perturboimaton ja joissa havaitaan eroja vasta verrattaessa eri alueita keskenään. Tämä onkin erillisten maailmankaikkeuksien mallin huomionarvoisimpia piirteitä: perturbaatio määritellään suureen arvojen vaihteluna eri FRW-alueiden välillä, ei lokaalina poikkeamana jostakin globaalista tausta-arvosta kuten perturbaatioteoriassa.

Mallin pätevyysalueena voidaan näillä oletuksilla pitää skaaloja $(a_0 H_0)^{-1} < k^{-1} < k_{tasoitus}^{-1}$, sillä huolimatta maailmankaikkeuden homogeenisuudesta ja isotrooppisuudesta myös horisonttia pienemmällä skaaloilla, emme oleta mallin kuvaavan horisonttia pienemmän skaalan rakenteiden kehitystä oikein. Tarkoituksemme on tarkastella vain horisonttia suuremman skaalan perturbaatioita, joiden kohdalla mallin pätevyysalue rajoittuu tilanteeseen, jossa metriikan gradienttien perturbaatiot eivät kasva liian suuriksi. Mikäli näin käy, eivät eri skaalat enää kehity toisistaan riippumattomasti ja mallin oletusten ei voida katsoa pitävän paikkaansa.

Koska tulemme soveltamaan mallia ensisijaisesti kurvatonimalliin, olemme jälleen inflatonikentästä syntyvän säteilyn niin homogeeniseksi ja kurvatonikentän energiatiheyden niin pieneksi, että kenttien vaikutukset tausta-avaruuden metriikkaan voidaan jättää huomiotta.

Edellä olemme esitelleet ainoastaan mallin idean. Formaalisti erillisten maailmankaikkeuksien malli esitetään gradienttiekspansiona, jossa jokainen avaruudellinen gradientti kerrotaan parametrilla ϵ ja jossa pienten gradienttien approksimaatio saavutetaan rajalla $\epsilon \ll 1$, jolloin kertalukua $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ olevat termit pudotetaan pois. Tulemme tukeutumaan juuri tällä tavalla saavutettuihin tuloksiin, mutta emme laajenna kehittelmää korkeamman kertaluvun termeihin, vaikka myös tämä olisi periaatteessa mahdollista. ΔN -formalismin mahdollistaa jo tällaisenaan perturbaatioiden tarkastelun ilman

toisen asteen perturbaatioteoriaa, joten oletamme tällaisen laajennuksen hyödyn olevan pientä.

4.2.1 Kaarevuusperturbaatio ΔN -formalismissa

Tarkasteltaessa pelkkiä skalaariperturbaatioita voidaan maailmankaikkeuden avaruudellisen osan metriikka kirjoittaa muodossa [58]

$$g_{ij} = a^2(t)e^{-2\psi(t,\mathbf{x})}\delta_{ij}, \quad (4.12)$$

jolloin määrittelemällä, että perturbaatio $\psi(t, \mathbf{x})$ häviää jossakin osassa maailmankaikkeutta – esimerkiksi omassamme –, voidaan $\tilde{a}(t) \equiv a(t)e^{-\psi(t,\mathbf{x})}$ tulkita lokaaliksi skaalatekijäksi ja sen avulla voidaan muodostaa lokaali Hubblen parametri H_{loc} . Tällöin mukanaliikkuvan havaitsijan kiihtyvästi laajenevassa maailmankaikkeudessa havaitsema e-kertojen lukumäärä voidaan yhtälön (2.27) mukaisesti kirjoittaa muodossa

$$N(t, t', \mathbf{x}) = \ln \frac{a(t)e^{-\psi(t,\mathbf{x})}}{a(t')e^{-\psi(t',\mathbf{x})}} = \psi(t', \mathbf{x}) - \psi(t, \mathbf{x}) + \ln \frac{a(t)}{a(t')}. \quad (4.13)$$

Valitsemalla tarkasteluajaväli siten, että alkutilanteessa maailmankaikkeus on avaruudellisesti laakea, $\psi(t', \mathbf{x}) = 0$, ja tarkastelemalla lopputilanteessa tasaisen energiatiheyden hyperpintaa, jolla $\delta\rho(\mathbf{x}) = 0$, saadaan tällä hyperpinnalla yhtälöstä (4.13)

$$\zeta(t, \mathbf{x}) \equiv -\psi(t, \mathbf{x}) \big|_{\rho=\rho(t)} = N(t, t', \mathbf{x}) - \ln \frac{a(t)}{a(t')} \equiv \Delta N(t, t', \mathbf{x}), \quad (4.14)$$

jossa olemme määritelleet suureen $\Delta N(t, t', \mathbf{x})$ kuvaamaan maailmankaikkeuden laajenemisesta johtuvaa eroa avaruudellisesti laakean ja tasaisen energiatiheyden hyperpintojen välillä. Toisin sanoen kaarevuusperturbaatio $\zeta(t, \mathbf{x})$ kuvaa perturbaatioita lokaalien e-kertojen lukumäärässä, eli laajenemisnopeuden vaihtelua toisistaan riippumattomien $H_{i,loc}^{-1}$ -säteisten (joissa parametrin $H_{i,loc}$ arvo on joka alueessa i erilainen) ympäristöjen välillä.

On kuitenkin huomionarvoista, että tarkkaan ottaen muoto (4.13) yhtyy omaan maailmankaikkeuteemme ja aiemmin esittämäämme e-kertojen vähimmäismäärään $N \sim 60$ ainostaan silloin, kun tarkastelukohteena oleva tasaisen energiatiheyden hyperpinta osuu inflaation päättymishetkeen. Muussa tapauksessa puhutaan ainostaan inflaation aikaisista referenssihetkistä,

jotka saattavat olla erityisesti useamman kentän tarkastelun yhteydessä kiinnostavia. Tässä esitetyn tarkastelun kannalta viimeisen hyperpinnan sijainti on kuitenkin epäolennaista, sillä sen ainoa vaikutus on parametrin N muuttuminen jollakin tapauskohtaisesti määräytyvällä vakioarvolla.

Voidaan osoittaa, että mikäli maailmankaikkeuden täyttää ideaalisena fluidina kuvattava, barotrooppisen tilanyhtälön toteuttava materia, säilyy suure

$$\zeta(\mathbf{x}) = -\psi(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{3} \int_{\rho(t)}^{\rho(t, \mathbf{x})} \frac{d\rho}{\rho + p} \quad (4.15)$$

vakiona riippumatta hyperpintojen leikkaustavasta [58]. Yhtälössä (4.15) esiintyvän integraalin alarajalla $\rho(t)$ tarkoitamme tausta-avaruuden energiatiheyden arvoa ja ylärajalla $\rho(t, \mathbf{x})$ saman ajanhetken perturboitua energiatiheyttä avaruudellisesti laakealla hyperpinnalla. Lineaarisen teorian rajalla tulos (4.15) redusoituu ensimmäisen kertaluvun perturbaatioteorian yhteydessä määriteltyyn yhtälöön (3.3), jolloin horisonttia suuremmilla skaaloilla myös yhtälö (3.8) on voimassa [58].

Erityisesti avaruudellisesti laakealla hyperpinnalla pätee

$$\zeta(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} \int_{\rho(t)}^{\rho(t, \mathbf{x})} \frac{d\rho}{\rho + p}, \quad (4.16)$$

jolloin lineaarisen teorian rajalla voidaan yhtälöitä (2.52), (3.3) ja (3.8), sekä näistä seuraavaa tietoa

$$N' = -\frac{H(t)}{\dot{\phi}}, \quad (4.17)$$

käyttäen kirjoittaa [22]

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{x}) &= \int_{\phi + \delta\phi}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = N'(\phi) \delta\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} N''(\phi) \delta\phi(\mathbf{x})^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} N'''(\phi) \delta\phi(\mathbf{x})^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.18)$$

jossa $N'(\phi) = dN/d\phi$, $\delta\phi(\mathbf{x})$ on skalaarikentän – esimerkiksi inflatonikentän – perturbaation arvo avaruudellisesti laakealla hyperpinnalla ja ϕ on vastaava tausta-avaruuden kenttä.

Yleisesti ottaen e-kertojen lukumäärän $N = N(\phi_1, \phi_2, \dots)$ ja tätä kautta kaarevuusperturbaation $\zeta(\mathbf{x})$ kirjoittaminen useamman (homogeenisen) skalaarikentän ϕ_i funktiona,

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{x}, t) &= \Delta N(\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, t) \\ &\equiv N(\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, t) - N(\phi_1, \phi_2, \dots, t),\end{aligned}\tag{4.19}$$

ei vaadi oletusta inflaation tai edes taustalla vallitsevan gravitaatioteorian luonteesta. Toisin kuin yhden kentän tapauksessa, riippuu tällöin kokonaiskaarevuusperturbaation suuruus kuitenkin hyperpinnan sijainnista (ajankohdesta t), jolloin lokaali painekaan ei välttämättä määräydy yksikäsitteisesti lokaalista energiatiheydestä [4].

Useamman kentän tapauksessa voimme kirjoittaa kaarevuusperturbaation yhtälöä (4.18) vastaavana kehitelmänä

$$\begin{aligned}\zeta(t, \mathbf{x}) &= \sum_i N_{,i} \delta\phi_i(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} N_{,ij} \delta\phi_i(t, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t, \mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} N_{,ijk} \delta\phi_i(t, \mathbf{x}) \delta\phi_j(t, \mathbf{x}) \delta\phi_k(t, \mathbf{x}) + \dots,\end{aligned}\tag{4.20}$$

jossa $N_{,i} \equiv \partial N / \partial \phi_i$, $N_{,ij} \equiv \partial^2 N / \partial \phi_i \partial \phi_j$ ja niin edelleen. Symbolilla $N(\rho(t), \phi_i(t_0))$ merkitsemme e-kertojen määrää lopputilanteen tasaisen energiatiheyden ja alkuhetken avaruudellisesti laakean hyperpinnan välillä. Lausekkeessa esiintyvien kenttien ϕ_i arvot määritetään alkutilanteessa hetkellä t_0 ja energiatiheyden arvo lopputilanteessa hetkellä t .

Olettamalla jälleen jokaisen skalaarikentän perturbaatiot puhtaasti gausisiksi, jolloin jokainen kenttä saa yhtälön (2.51) mukaisen spektrin, saamme yhtälöitä (2.53), (3.8) ja (4.17) käyttäen kaarevuusperturbaation tehospektriä ensimmäisen kertaluvun tarkkuudella

$$\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \left(\sum_i N_{,i} \right)^2 = \mathcal{P}_{\delta\phi} \left(\sum_i N_{,i} \right)^2,\tag{4.21}$$

eli kaarevuusperturbaation gaussinen osa tuottaa skaalainvariantin tehospektrin myös useamman kentän tapauksessa.

4.2.2 Kaarevuusperturbaatioiden epägaussisuus

Lähdemme seuraavaksi tarkastelemaan kaarevuusperturbaation jakaumas-
sa esiintyvää epägaussisuutta. Tarkasteltaessa χ^2 -epägaussisuutta edustaa
yksinkertaisinta mahdollista esimerkkiä muoto

$$f(x) = f_g + f_{epäg.}, \quad (4.22)$$

jossa olemme jakaneet suureen $f(x)$ puhtaasti gaussiseen ja puhtaasti epä-
gaussiseen osaan. Vastaavasti kokonaiskaarevuusperturbaatio $\zeta(t, \mathbf{x})$ voidaan
yhden kentän tapauksessa yhtälöitä (4.7), (4.9) ja (4.11) käyttäen kirjoit-
taa paikka-avaruudessa gaussisen ja epägaussisen osan avulla kolmannessa
kertaluvussa

$$\begin{aligned} \zeta(t, \mathbf{x}) = & \zeta_g(t, \mathbf{x}) + \frac{3}{5}f_{NL}\zeta_g(t, \mathbf{x})^2 + \frac{9}{25}g_{NL}\zeta_g(t, \mathbf{x})^3 \\ & + \frac{27}{125}h_{NL}\zeta_g(t, \mathbf{x})^4 + \dots, \end{aligned} \quad (4.23)$$

jossa kolmannella kertaluvulla viittaamme nimenomaan epägaussisuuden mää-
rään. Yhtälön johto on esitetty liitteessä A.

Kirjallisuudesta on nykyään löydettävissä muutamia tarkasteluja [57, 61],
joissa kaarevuusperturbaation lausekkeessa esiintyy myös neljättä tai jopa
viidettä kertalukua edustavia, kuusi- ja seitsenpistekorrelaattoreihin kytket-
tyjä parametreja i_{NL} ja j_{NL} , mutta pidämme tarkastelussamme kolmatta
kertalukua tässä kohdassa riittävänä. Itse asiassa kolmannenkin kertaluvun
epälineaarisuusparametrin h_{NL} sisällytämme tässä kohdassa mukaan vain
tarkastellaksemme toisen kertaluvun korjausta epälineaarisuusparametrin f_{NL}
lausekkeessa.

On syytä huomauttaa, että kirjallisuudessa esiintyy paljon huomiota saa-
neita tuloksia [21, 51], joissa kolmannen kertaluvun kontribuutioita ei ole
huomioitu, vaikka tämän tarkastelu on ehdottoman välttämätöntä konsis-
tentin tuloksen saamiseksi johtavan kertaluvun ulkopuolisissa tarkasteluissa.
Uusimmissa julkaisuissa [62] tarkastelu on kuitenkin jo konsistenttia.

Saadaksemme yhtälössä (4.23) esiintyville epälineaarisuusparametreille
yleisen, useamman kentän tapaukseen soveltuvan suuruusarvion lähdemme
liitteen A tavoin tarkastelemaan ensin kaarevuusperturbaation Fourier-muun-
noston kolmipistekorrelaattoria $\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle$. Laajennamme tarkastelumme täs-
sä kohdassa toiseen kertalukuun, sillä joissakin kurvatonimalleissa ensim-
mäisen, puutason termin kontribuutio häviää ja luuppikorjausta vastaava
toisen kertaluvun termi paljastuukin epälineaarisuusparametrien lausekkeen

johtavaksi termiksi [62]. Emme tarkastele tällaista mahdollisuutta lähempää, mutta tulemme huomaamaan, ettei f_{NL} :n riippumattomuus tarkasteluskaalasta ole täysin yksiselitteistä.

Liitteessä B lasketulla tavalla saamme nyt ensimmäisen kertaluvun epälineaarisuusparametrille toisen kertaluvun tuloksen

$$\frac{3}{5}f_{NL} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij}}{(\sum_i N_{,i})^2} + \frac{1}{2} \mathcal{P}_\zeta \left((\sum_i N_{,i})^2 \right)^{-3} \times$$

$$\left(\sum_{i,j,l} (N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} + N_{,i} N_{,ij} N_{,jll} + 2N_{,i} N_{,jl} N_{,ijl} + \frac{1}{2} N_{,i} N_{,j} N_{,ijll}) \right) \ln \frac{k}{k_{min}}. \quad (4.24)$$

Epälineaarisuusparametri f_{NL} näyttäisi siis riippuvan katkaisuskaalan k_{min} valinnasta, mutta käsittelemillämme horisonttia suuremmilla skaaloilla voimme tehdä arvion $\ln(k/k_{min}) \approx 1$, jolloin epälineaarisuusparametri on hyvällä tarkkuudella skaalasta riippumaton ja voimme käsitellä sitä myös toisessa kertaluvussa likimain vakiona. Tulos on kuitenkin katkaisuskaalan valinnasta riippuvaisena selvästi vain approksimatiivinen.

Vastaavasti toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille saamme ensimmäisen kertaluvun tuloksen tarkastelemalla nelipistekorrelaattoria $\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle$, jolloin liitteessä B lasketun mukaisesti

$$\tau_{NL} = \frac{\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,il} N_{,jl}}{(\sum_i N_{,i})^3} \quad (4.25)$$

$$\frac{54}{25} g_{NL} = \frac{\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,il} N_{,ijl}}{(\sum_i N_{,i})^3}. \quad (4.26)$$

Havaitsemme, että myös toisen kertaluvun epälineaarisuusparametrit ovat hyvällä tarkkuudella skaalainvariantteja, mikäli sekä kenttien perturbaatio-spektrit että havaittu kaarevuustehospektri todella ovat skaalavapaita.

Esittelemme seuraavaksi yhden kentän tapauksen, jolloin kaarevuusperturbaatio on helppo kirjoittaa muodossa

$$\zeta(\mathbf{x}) = N'(\phi) \delta\phi(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} N''(\phi) \delta\phi(\mathbf{x})^2 + \frac{1}{6} N'''(\phi) \delta\phi(\mathbf{x})^3 + \dots$$

$$\equiv \zeta_g(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \frac{N''(\phi)}{N'(\phi)^2} \zeta_g(\mathbf{x})^2 + \frac{1}{6} \frac{N'''(\phi)}{N'(\phi)^3} \zeta_g(\mathbf{x})^3 + \dots, \quad (4.27)$$

jossa $N' \equiv dN/d\phi$ ja vastaavasti korkeammille derivaatoille, jolloin yhtälöistä (4.23) ja (4.27) saadaan ensimmäisessä kertaluvussa aiempaa suuremmin

$$f_{NL} = \frac{5}{6} \frac{N''(\phi)}{N'(\phi)^2} \quad (4.28)$$

$$g_{NL} = \frac{25}{54} \frac{N'''(\phi)}{N'(\phi)^3} \quad (4.29)$$

$$\tau_{NL} = \left(\frac{6}{5} f_{NL} \right)^2. \quad (4.30)$$

Tulos yhtyy aiemmin johdettuihin epälineaarisuusparametrien arvoihin ensimmäisen kertaluvun tarkkuudella. Hitaan vierimisen sisältävän inflaation tapauksessa voimme johtaa kokonaiskaarevuusperturbaatioksi

$$\zeta(x) = N' \delta\phi - \frac{1}{2}(\eta - 2\epsilon)(N' \delta\phi)^2 + \frac{1}{6}(2\eta^2 - 2\epsilon\eta - \xi)(N' \delta\phi)^3, \quad (4.31)$$

jossa ξ on määritelty yhtälöllä (2.69) ja jossa käytimme SR-yhtälöitä (2.28) ja (2.29). Yhtälöitä (4.23) ja (4.31) hyödyntäen saamme nyt

$$f_{NL} \simeq -\frac{5}{12}(2\eta - 4\epsilon), \quad (4.32)$$

$$g_{NL} \simeq \frac{25}{54}(2\eta^2 - 2\epsilon\eta - \xi) \quad (4.33)$$

$$\tau_{NL} \simeq \eta^2 - 4\epsilon\eta + 4\epsilon^2, \quad (4.34)$$

eli yhden kentän tapauksessa kaarevuusperturbaatiossa esiintyvä epägaussisuus häviää hitaan vierimisen rajalla ja on siten ainakaan lähitulevaisuudessa mahdotonta havaita [12]. Sen sijaan yhtälöt (4.24)–(4.26) mahdollistavat yleisemmässä tapauksessa helposti suurenkin epägaussisuuden olemassaolon. Palaamme näihin tuloksiin seuraavassa osiossa luotuamme ensin lyhyen katsauksen epälineaarisuusparametrien havaittuihin arvoihin.

4.3 Havaintojen asettamat rajat epälineaarisuusparametreille

Kosmisen mikroaaltotaustan lämpötilavaihtelut voidaan edellä esiteltyjen epälineaarisuusparametrien avulla yhdistää kaarevuusperturbaation tilastollisiin ominaisuuksiin [63]. Havaintojen epälineaarisuusparametreille antamat tulokset kuitenkin riippuvat tarkasteltavista korrelaattoreista siten, että n-pistekorrelaattoreita k -avaruudessa vastaavat monikulmiot tarjoavat erilaisia rajoja.

Tiukimmat rajat esimerkiksi ensimmäisen kertaluvun epälineaarisuusparametrille f_{NL} saadaan niin kutsutulla litistetyllä rajalla (engl. *squeezed limit*), jolle pätee $k_1 \ll k_2 \simeq k_3$ ja jolla kokoskaalaa $1/k_1$ vastaavat perturbaatiot ovat jo muuttuneet klassisiksi pienempien skaalojen ylittäessä horisontin. Usein tarkastellaan myös tasasivuista rajaa (engl. *equilateral limit*) $k_1 \simeq k_2 \simeq k_3$, joka on tärkeässä asemassa esimerkiksi ei-kanonisia kineettisiä termejä sisältävien mallien tapauksessa [4, 64].

Tässä keskitymme epälineaarisuusparametrien lokaaliin osaan, jolle havaitut rajat ovat

$$f_{NL} = 2.7 \pm 5.8 \quad (4.35)$$

$$g_{NL} = (-3.3 \pm 2.2) \times 10^5 \quad (4.36)$$

$$\tau_{NL} < 2800, \quad (4.37)$$

jossa f_{NL} on ilmoitettu 68% ja τ_{NL} 95% luottamusvälillä, molemmat Planck-satelliitin mittaamina [31]. Planck-satelliitti ei vielä vuoden 2013 tuloksissaan antanut rajoitteita parametrille g_{NL} , joten edellä esitetty arvo perustuu edellisen kosmista mikroaaltotaustaa mitanneen WMAP-satelliitin yhdeksän vuoden dataan ja on ilmoitettu 68% luottamusvälillä [65].

Kosmisesta mikroaaltotaustasta tehtäviä mittauksia rajoittaa ennen kaikkea osiossa 2.4.1 käsitelty kosminen varianssi. Kuitenkin myös suuren skaalan rakenteesta – esimerkiksi galaksien ja galaksijoukkojen jakaumasta [13, 66] –, tai jopa vedyn 21 cm:n spektriviivassa esiintyvistä anisotropioista [67] tehtävät havainnot rajoittavat kaarevuusperturbaatioissa esiintyvää epägaussisuutta ja toimivat vertailukohtana CMB:stä saadulle datalle ja havainnoissa

käytetyille metodeille. Esimerkiksi nollassa poikkeava vinokkuus ja huipukkuus kaarevuusperturbaation jakaumassa poikkeuttavat jakaumaa gaussisesta tapauksesta erityisesti jakauman hännissä, jolloin epägaussisuuden vaikutus on parhaiten nähtävissä harvinaisemmissa kohteissa. Tällaisia ovat esimerkiksi massiiviset galaksiklusterit ja suurten punasiirtymien kohteet [13].

Toisen kertaluvun perturbaatioteorian kontribuutio epälineaarisuusparametrin f_{NL} arvoon on tyypillisesti luokkaa $\mathcal{O}(1)$ [68], joten ensimmäisen asteen perturbaatioteoriaa voidaan pitää riittävänä vain, kun $f_{NL} \gg 1$. Edellä esitetyt havainnot kuitenkin osoittavat ensimmäisen asteen epäpägaussisuuden olevan niin pientä, että tällaista oletusta ei voida pitää perusteltuna. Tämä tukee korkeampiin kertalukuihin tai vaihtoehtoisiin ei-perturbatiivisiin menetelmiin kuten ΔN -formalismiin siirtymistä.

Hitaan vierimisen tapauksessa johdetut tulokset (4.32)–(4.34) osoittavat, että jos f_{NL} on pieni, täytyy toisen asteen vastaavien epälineaarisuusparametrien g_{NL} ja τ_{NL} olla vielä pienempiä. Nykyiset maailmankaikkeuden suuren skaalan rakenteesta saatavat rajoitukset [66, 69] kuitenkin sallivat suuren g_{NL} :n, mikä mahdollistaa tilanteen, ettei syntyvän kaarevuusperturbaation mahdollinen toisen asteen epägaussisuus olekaan yhden kentän tapauksessa inflaation aikaista alkuperää. Tulos ei eksplisiittisesti riipu kentän potentiaalista, mutta olettaa sen mahdollistavan hitaan vierimisen.

Kvanttikenttäteoriaa hyväksikäyttäen voidaan skalaarikentälle yhden kentän inflaatiossa johtaa puutason tulos [70]

$$f_{NL} \simeq -\frac{5}{12}(2\eta - 6\epsilon), \quad (4.38)$$

jonka pitäisi olla lähempänä epälineaarisuusparametrin oikeaa arvoa. Tulokset (4.32) ja (4.38) eivät yhdy, sillä tulosta (4.32) johtaessamme olettimme kentän perturbaatioiden olevan puhtaasti gaussisia. Toisen asteen epälineaarisuusparametreille saamamme tuloksen valossa oletus on perusteltu, eli koska hitaasti vierivän kentän inflaation aikaiset flukтуаatiot näyttävät vaikuttavan hyvin vähän syntyvän kaarevuusperturbaation epägaussisuuteen, on erityisesti toisen asteen epägaussisuuden tarkastelun ja edellä mainittujen oletusten kannalta jossain määrin merkityksetöntä, ovatko kentän alkuperäiset flukтуаatiot gaussisia vai epägaussisia. Ensimmäisen asteen epälineaarisuusparametrin tehtävät havainnot voisivat periaatteessa vaikuttaa oletuksen vakuuttavuuteen paljastaessaan f_{NL} :n erittäin pieneksi, mutta tulosten (4.32) ja (4.38) ero on joka tapauksessa vain SR-parametrien luokkaa ja siten tämänhetkisen havaintoresoluution ulottumattomissa [4].

Toisen asteen epälineaarisuusparametrien osalta havaitsemme yhtälöiden (4.24) ja (4.25) perusteella, että liitteessä A johdettu tulos $\tau_{NL} = (6/5f_{NL})^2$ ei automaattisesti päde useamman kentän tapauksessa⁴. Tällöin epälineaarisuusparametrien välille saadaan niin kutsuttu Suyama-Yamaguchi-epäyhtälö $\tau_{NL} \geq (6/5f_{NL})^2$ [73], jolloin välitön päätelmä on, että havainto $\tau_{NL} < (6/5f_{NL})^2$ sulkisi pois lukuisia usean kentän malleja [64]. Yhtälö $\tau_{NL} = (6/5f_{NL})^2$ saattaakin muodostua tärkeäksi testiksi arvioitaessa eri inflaatiomallien uskottavuutta.

Mikäli toisen asteen epägaussisuus tullaan joskus havaitsemaan ja se paljastuu hyvin suureksi, näyttävät toisen asteen epälineaarisuusparametreille saamamme tulokset tukevan yhden kentän sijaan vähintään kahden kentän mallia, jossa kaarevuusperturbaatiot ja niiden mahdolliset epägaussisuudet generoidaan vasta inflaation jälkeisessä maailmankaikkeudessa esimerkiksi luvussa 3 käsittelemiemme energiatihedessä esiintyvien epäadiabaattisten perturbaatioiden välityksellä. Seuraavassa luvussa tarkastelemmekin tätä mahdollisuutta vielä lähemmin erityisesti toisen asteen epägaussisuuden kannalta.

⁴Luuppikorjaukset voivat tosin joissakin tapauksissa rikkoa tämän yhtälön yhdenkin kentän tapauksessa [71, 72].

Luku 5

Epägaussisuuden synty kurvatonimallissa

Tässä luvussa tarkastelemme kurvatonimallin tuottamaa ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuutta tapauksessa, jossa kurvatonikentän potentiaali ei ole pelkästään kvadraattista muotoa, vaan sisältää myös pieniä itseisvuorovaikutuksia. Keskitymme erityisesti marginaalisesti renormalisoituvaan tapaukseen, jossa potentiaali on verrannollinen kentän neljänteen potenssiin.

Tarkastelemme itseisvuorovaikutuksia sisältävää potentiaalia tilanteessa, jossa kurvatonin energiatiheys sen hajoamishetkellä on edelleen pieni ($r \ll 1$) ja esittelemme epälineaarisuusparametreille f_{NL} , g_{NL} numeerisesti lasketut tulokset viitteitä [15, 16] seuraten. Havaitsemme parametrien, erityisesti g_{NL} :n, oskilloivan kurvatonikentän inflaation aikaisen arvon funktiona ja mahdollistavan havaittavan epägaussisuuden tuoton. Vastaavasti saamme tuloksen, jonka mukaan pienilläkin potentiaalikorjauksilla on mahdollista saavuttaa havaintojen vaatima tilanne $|f_{NL}| \lesssim 10$ myös rajalla $r \ll 1$.

5.1 Epägaussisuus kurvatonimallissa

Edellisen luvun lopussa huomasimme, että syntyvä epägaussisuus on tärkeä inflaatiomalleja ja kaarevuusperturbaatioita tuottavia malleja erottava seikka. Oleellisinta ei kuitenkaan ole huomata, onko tarkasteltavan mallin puitteissa mahdollista synnyttää epägaussisuutta vai ei, vaan tarkastella *kuinka suuria* epägaussisuuksia malli synnyttää. Edellisissä luvuissa keskityimme pääasiassa epägaussisuuksien tarkasteluun vaaditun formalismin kehittämi-

seen, mutta tässä luvussa keskitymme nimenomaan kvantitatiivisten ennusteiden luomiseen.

Vaikka kaarevuusperturbaation spektrissä esiintyvää ensimmäisen asteen epägaussisuus ei ole toistaiseksi havaittu [31], tekee sen mahdollinen paljastuminen pieneksi mielenkiintoiseksi paitsi toisen, myös kolmannen kertaluvun tarkastelun parametrien mahdollisista arvoista eri mallien generoimana. Laajennukset korkeampiin kertalukuihin tarjoavat yhä yksityiskohtaisempia rajoituksia eri mallien välille, vaikka hiukkasfysikaalinen pohjateoria puuttuisikin. Tässä keskitymme kuitenkin vain toisen kertaluvun epägaussisuuteen.

Havaintojen ensimmäisen asteen epägaussisuudelle tarjoamat rajat saattavat myös paljastua niin pieniksi, että tällaisen epägaussisuuden suorasta havaitsemisesta tulee periaatteessakin mahdotonta. Erityisen ajankohtaiseksi aiheen tekevät vuosina 2013–2014 julkaistavat Planck-satelliitin tulokset, jotka tulevat paitsi tarkentamaan ensimmäisen asteen epälineaarisuusparametreille saatavia rajoja, myös tarjoavat uusia rajoitteita erityisesti toisen asteen epägaussisuuden määrälle [31].

5.1.1 Ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuus

Lähdemme viitteitä [21, 74] seuraten tarkastelemaan syntyvän epägaussisuuden määrää kurvatonimallissa, jossa kaarevuusperturbaatio syntyy vasta inflaation jälkeen luvussa 3 esitetyllä tavalla. Keskitymme ensimmäisen ja toisen asteen epälineaarisuusparametreihin f_{NL} ja g_{NL} , joille kirjoitamme esityksen kurvatonikentän inflaation aikaisen arvon σ_* ja kurvatonin suhteellista energiatiheyttä sen hajoamishetkellä kuvaavan parametrin r funktiona. Tarkastelemme tässä luvussa mahdollisimman yleistä johtavan kertaluvun tapausta, jossa emme vielä ota kantaa kurvatonikentän inflaation aikaiseen potentiaaliin.

Koska oletamme kurvatonin inflaation aikana efektiivisesti massattomaksi, on kurvatonin inflaation aikana saama perturbaatiospektri edelleen puhtaan gaussinen ja epägaussiset efektit syntyvät vasta kurvatonin inflaation jälkeisestä dynamiikasta, kuten tulemme näkemään.

Aloitamme määrittelemällä erillisten maailmankaikkeuksien mallissa esiintyneen e-kertojen määrän uudelleen siten, että luku N mittaa ajanjaksoa kurvatonin oskillaatioiden alkamisesta kurvatonin hajoamiseen. Voimme tehdä näin, sillä e-kertojen määrä inflaation alusta kurvatonin oskillaatioiden alkamiseen on täysin perturboimaton homogeenisen säteilyn dominoimassa

maailmankaikkeudessa. Oletamme myös, että kurvatonikentän potentiaali on oskillaatioiden alkamishetkellä riittävän lähellä kvadraattista muotoa, vaikka se ei olisi sitä vielä inflaation aikana. Kurvatonin hajoamisen oletamme olevan äkillistä.

Nyt voimme yhtälöiden (2.24) ja (2.27) avulla ilmaista luvun N muodossa

$$N(\rho_{dec}, \rho_{osc}, \sigma_*) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{(\rho_\sigma)_{osc}}{(\rho_\sigma)_{dec}} \right) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{\frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}^2(\sigma_*)]}{(\rho_\sigma)_{dec}} \right), \quad (5.1)$$

jossa $(\rho_\sigma)_{osc}$ on kurvatonin energiatiheys oskillaatioiden alkaessa ja $(\rho_\sigma)_{dec}$ energiatiheys kurvatonin hajotessa, m_σ kurvatonin massa ja σ_{osc} kentän arvo (oskillaatioamplitudi) oskillaatioiden alkamishetkellä.

Arvo σ_{osc} ja tätä kautta syntyvän kaarevuusperturbaation suuruus määräytyvät täysin kurvatonin inflaation aikaisesta arvosta σ_* ilman inflatonin tuomaa kontribuutiota, sillä oletimme luvussa 3 inflatonin aiheuttaman kaarevuusperturbaation olevan mitätöntä. Näin ollen voimme mallintaa maailmankaikkeuden kehitystä yhden kentän mallilla, jolloin yhtälöt (4.28), (4.29) pätevät ja voimme kirjoittaa

$$f_{NL} = \frac{5}{6} \frac{N''(\sigma)}{N'(\sigma)^2} = \frac{5}{6} \left(\frac{\partial_{\sigma_{osc}}^2 N}{(\partial_{\sigma_{osc}} N)^2} + \frac{\sigma_{osc}''}{\sigma_{osc}'} \frac{1}{\partial_{\sigma_{osc}} N} \right) \quad (5.2)$$

$$g_{NL} = \frac{25}{54} \frac{N'''(\sigma)}{N'(\sigma)^3} = \frac{25}{54} \left(\frac{\partial_{\sigma_{osc}}^3 N}{(\partial_{\sigma_{osc}} N)^3} + 3 \frac{\sigma_{osc}''}{(\sigma_{osc}')^2} \frac{\partial_{\sigma_{osc}}^2 N}{(\partial_{\sigma_{osc}} N)^3} + \frac{\sigma_{osc}'''}{(\sigma_{osc}')^3} \frac{1}{(\partial_{\sigma_{osc}} N)^2} \right), \quad (5.3)$$

jossa $\partial_{\sigma_*} = \frac{\partial \sigma_{osc}}{\partial \sigma_*} \frac{\partial}{\partial \sigma_{osc}} \equiv \sigma_{osc}' \partial_{\sigma_{osc}}$ ja derivaatta otetaan kurvatonin inflaation aikaisen arvon suhteen, sillä σ_* määrää kentän myöhemmän kehityksen.

Hyödyntämällä nyt lausekkeesta $(\rho_\sigma)_{osc} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}^2(\sigma_*)]$ ja yhtälöistä (2.24), (2.25) seuraavaa tietoa

$$(\rho_\sigma)_{dec} = \frac{1}{2} m_\sigma^2 [\sigma_{osc}^2(\sigma_*)] \left(\frac{\rho_{dec} - (\rho_\sigma)_{dec}}{(\rho_r)_{dec}} \right)^{3/4}, \quad (5.4)$$

saamme epälineaarisuusparametrien lausekkeissa esiintyvälle ensimmäiselle derivaatalle

$$\partial_{\sigma_{osc}} N = \frac{r}{2\sigma_{osc}}, \quad (5.5)$$

jossa $r = 4(\rho_\sigma)_{dec} / (4(\rho_r)_{dec} + 3(\rho_\sigma)_{dec})$ on yhtälössä (3.16) määritelty kurvatonin suhteellinen energiitiheys kurvatonin hajoamishetkellä¹. Myös N :n korkeamman kertaluvun derivaatoista saamme parametriin r ja sen korkeampiin potensseihin verrannollisen tuloksen, jolloin yhtälöt (5.2) ja (5.3) antavat epälineaarisuusparametreille tuloksen

$$f_{NL} = \frac{5}{3r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{(\sigma'_{osc})^2} \right) - \frac{5}{3} - \frac{5}{8}r \quad (5.6)$$

$$g_{NL} = \frac{25}{54} \left[\frac{4}{r^2} \left(\frac{\sigma_{osc}^2\sigma'''_{osc}}{(\sigma'_{osc})^3} + \frac{3\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{(\sigma'_{osc})^2} \right) - \frac{12}{r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{(\sigma'_{osc})^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma''_{osc}}{(\sigma'_{osc})^2} \right) + \frac{30r}{4} + \frac{27r^2}{16} \right], \quad (5.7)$$

joka yhtyy toisen kertaluvun perturbaatioteoriassa laskettuun tulokseen [18, 21, 74].

Kokonaiskaarevuusperturbaatioksi saadaan nyt yhtälöä (4.20) käyttäen ensimmäisessä kertaluvussa

$$\zeta(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma'_{osc}}{2\sigma_{osc}} r \delta\sigma_* + \frac{1}{4} \left[\left(-\frac{3}{8}r^3 - r^2 + r \right) \left(\frac{\sigma'_{osc}}{\sigma_{osc}} \right)^2 + r \frac{\sigma''_{osc}}{\sigma_{osc}} \right] \delta\sigma_*^2. \quad (5.8)$$

Ensimmäisen kertaluvun epälineaarinen osa kokonaiskaarevuusperturbaation lausekkeessa koostuu siis paitsi lineaarisen osan neliöstä $((\sigma'_{osc}/\sigma_{osc})\delta\sigma_*)^2$, myös ylimääräisistä, maailmankaikkeuden inflaation jälkeisestä dynamiikasta riippuvista termeistä. Syntyvän epägaussisuuden suurus on siis gaussista osaa riippuvaisempi paitsi kurvatonin suhteellisesta energiitiheydestä sen hajoamishetkellä, myös inflaation loppumisen ja oskillaatioiden alkamisen välistä ajanjaksosta. Tämä on luonnollista, sillä syntyvän kaarevuusperturbaation gaussisen osan voidaan katsoa riippuvan perturbaatioiden absoluuttisesta suuruudesta siinä missä epägaussinen osa riippuu perturbaatioiden suhteellisesta suuruudesta taustakentän arvoon nähden [75].

Yhtälöistä (4.21) ja (5.5) saamme myös tehospektrille tuloksen,

¹Parametrin r määritelmä vaihtelee hieman, samoin epälineaarisuusparametrien f_{NL} ja g_{NL} etumerkki. Tässä tutkielmassa seuraamme viitteiden [15, 16, 75] määritelmää sekä r :n että epälineaarisuusparametrien etumerkin osalta. Vaihtoehtoista määritelmää käyttävät mm. viitteet [21, 55].

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{H_*}{2\pi} \partial_{\sigma_*} N = \frac{H_* r}{4\pi} \frac{\sigma'_{osc}}{\sigma_{osc}}, \quad (5.9)$$

eli tapauksessa, jossa kurvatonin energiatiheys on kurvatonin hajoamishetkelä edelleen pieni, $r \ll 1$, on spektri luonnostaan skaalainvariantti ja amplitudiltaan pieni.

Tulokset (5.6) ja (5.7) sen sijaan ennustavat merkittävän suuruisia epälinearisuusparametrien arvoja, $f_{NL} \gg 1$, $g_{NL} \gg 1$, kun $r \ll 1$ ja $\sigma_{osc} \sigma''_{osc} / (\sigma'_{osc})^2 \neq -1$ tai $\sigma'_{osc} \sigma''_{osc} / \sigma'''_{osc} \neq -1$. Tapaus $r \ll 1$ on inflaation jälkeisen maailmankaikkeuden kehitykselle tekemiemme oletusten pohjalta mielenkiintoinen ja perusteltu, mutta erityisesti f_{NL} :lle saatava ennuste on selvässä ristiriidassa havaintojen asettamien rajoitusten kanssa.

On kuitenkin huomioitava, että tulos pätee vain kvadraattiselle potentiaalille, eikä tilanteita $\sigma_{osc} \sigma''_{osc} / (\sigma'_{osc})^2 = -1$, $\sigma'_{osc} \sigma''_{osc} / \sigma'''_{osc} = -1$ voida perustellusti pitää epätodennäköisinä ilman tietoa taustalla vallitsevasta teoriasta. Siirrymmekin seuraavaksi tarkastelemaan epäkvadraattisen potentiaalin vaikutusta syntyvän epägaussisuuden määrään.

5.2 Epäkvadraattinen kurvatonipotentiali

Lähdemme viitteitä [15, 16, 75] seuraten käsittelemään mallia, jossa kurvatonikentän potentiaali ei ole vapaan hiukkasen tapausta (3.10) vastaava, vaan sisältää myös itseisvuorovaikutuksia. Malli on puhtaan fenomenologinen, mutta teorian kannalta luonnollinen: kurvatonipotentialissa on esiinnyttävä ainakin jonkinlaisia vuorovaikutuksia, jotta kurvatonikenttä voisi hajota ja osallistua nykyisin havaittavien standardimallin hiukkasten tuottoon.

Tarkastelemme muotoa

$$V(\sigma) = \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \lambda \frac{\sigma^{n+4}}{M^n} \quad (5.10)$$

olevaa potentiaalia, jossa n on parillinen kokonaisluku ja M vuorovaikutustermissä esiintyvä leikkausskaala. Arvoilla $n > 6$ potentiaalin epäkvadraattisessa osassa ei esiinny oskillaatioita, emmekä käsittele näitä tapauksia lainkaan. Renormalisoitumattomassa tapauksessa, jossa $n > 0$, asetamme leikkausskaalan Planckin skaalaa vastaavaksi, eli $M = M_{Pl}$ ja käsittelemme kytkentävakiota λ vakiona skaalaten sen arvoon $\lambda = 1$. Renormalisoituvassa tapauksessa, jossa $n = 0$, käsittelemme kytkentävakiota vapaana parametrina.

Kurvatonin kytkeytyessä heikosti muihin hiukkasiin edustavat pienet, $n = 2 + \epsilon$ -tyyppiset korjaukset luuppikorjauksista syntyviä efektejä [75], mikä tuottaa lisämotivaatiota kvadraattisesta tapauksesta poikkeavan potentiaalin tarkasteluun. Huomaamme, että korjauksen pienuus suhteessa vapaan kentän tapaukseen vaatii potentiaalilta muotoa $V(\sigma) = (1 + s) \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2$, jossa

$$s \equiv 2\lambda (\sigma_*/m_\sigma)^{n+2} \ll 2/n. \quad (5.11)$$

Säteilyn dominoidessa taustamaailmankaikkeuden energiatiheyttä saadaan yhtälöä (5.10) käyttäen linearisoiduksi liikeyhtälöksi

$$\ddot{\sigma} + (3H + \Gamma) \dot{\sigma} + m_\sigma^2 \sigma + \lambda (n + 4) \sigma^{n+3} = 0, \quad (5.12)$$

jossa Γ on kurvatonin hajoamisleveys. Vastaavasti saamme säteilyn ja kurvatonin energiatiheyksille edellisen yhtälön kanssa kytketyt yhtälöt²

$$\dot{\rho}_r = -4H\rho_r + \Gamma\dot{\sigma}^2 \quad (5.13)$$

$$3H^2 = \rho_r + \rho_\sigma, \quad (5.14)$$

jolloin kurvatonin suhteellisen energiatiheyden $r \equiv \rho_\sigma/\rho_r$ nähdään määräytyvän itseisvuorovaikutuksen tyyppin määräävästä parametrilla n . Vastaavasti kuin luvussa 3 esitellyssä tapauksessa, riippuvat liikeyhtälöt jälleen paitsi n :stä ja parametreista m_σ ja Γ , myös inflaation aikaisista alkuehdoista³ H_* ja σ_* . Tulos motivoi tarkastelemaan inflaation jälkeisen maailmankaikkeuden dynamiikkaa juuri erillisten maailmankaikkeuksien mallilla, jossa voimme tarkastella inflaatiomallin lähtökohtaisten oletusten sallimista alkuarvoista syntyneitä eroja eri FRW-maailmankaikkeuksien välillä ja siten määrittää esimerkiksi suureen ΔN käytöksen H :n funktiona.

Liikeyhtälöiden analyyttinen ratkaisu mielivaltaisilla parametrilla n arvoilla ei ole mahdollista, mutta kurvatonikentän dynamiikkaa voidaan analysoi-

²Käytämme tästä lähtien yksiköitä, joissa $M_{Pl} \equiv 1$.

³Olettamalla, että inflaatiota käynnissä pitävän, hitaasti vierivän inflatonikentän kontribuutio syntyvään kaarevuusperturbaatioon on mitätöntä ja inflaatiomallimme tuottaa oikean spektri-indeksin, saamme Hubbleen skaalalle ehdot $H_* \ll 10^{-5} \sqrt{\epsilon}$ ja $\epsilon = -\dot{H}_*/H_*^2$. Spektri-indeksiin $n - 1 = 2\epsilon - 2\eta_{\sigma\sigma}$ kurvatonin tuoma kontribuutio on tyypillisesti mitätöntä tarkastelemassamme tilanteessa, jossa kurvatonin energiatiheys on kurvatonin hajoamishetkellä edelleen pientä [15].

da numeerisesti [15, 16]. Emme tässä yhteydessä käsittele liikeyhtälöiden numeerisia ratkaisuja, mutta toteamme, että esimerkiksi havaittu perturbatioamplitudi $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq 10^{-5}$ voidaan tuottaa kaikilla käsitellyillä vuorovaikutustermeillä, joissa $n = 0, 2, 4, 6$ [16].

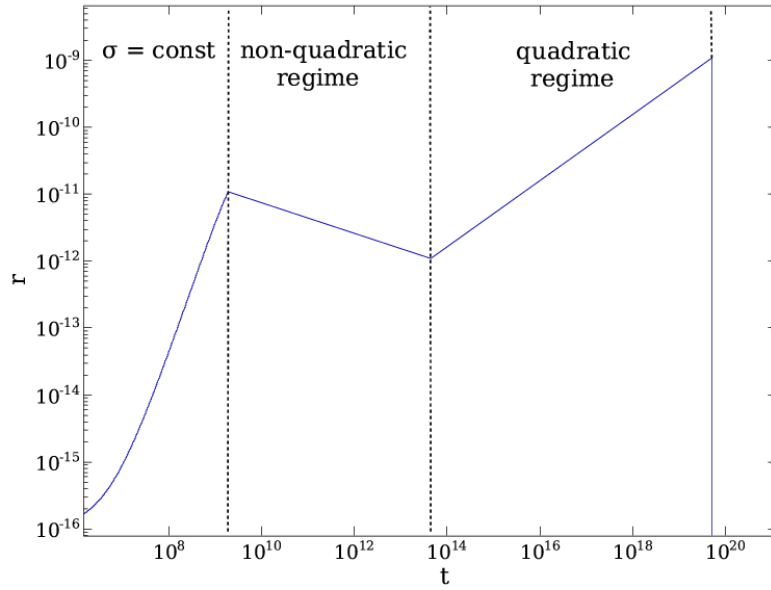
Seuraavassa osiossa esittelemme puolianalyttisen ratkaisun erikoistapaukselle $n = 0$, mutta ennen tätä teemme vielä muutaman huomion kurvatonikentän energiatiheyden käytöksestä inflaation jälkeisessä maailmankaikkeudessa. Kurvatonikentän energiatiheyden voidaan muotoa $V \sim \sigma^{n+4}$, $n < 6$, olevan potentiaalin tapauksessa näyttää skaalautuvan kuten [76]

$$\rho_{\sigma} \propto a^{-6\frac{n+4}{n+6}}, \quad (5.15)$$

jolloin vuorovaikutustermien dominoidessa potentiaalia kurvatonin oskillaatioiden alkamishetkellä⁴, skaalautuu energiatiheys juuri yhtälön (5.15) antamalla tavalla, mutta oskillaatioiden siirtyessä kvadraattisen potentiaalin alueelle skaalautuu energiatiheys aiemmin käsiteltyyn tapaan $\rho_{\sigma} \propto a^{-3}$. Inflatonin termalisaation hetkellä ennen kurvatonikentän oskillaatioiden alkua kurvatonin on edelleen efektiivisesti massaton ja kentän arvo muuttuu vain hitaasti, jolloin kurvatonin energiatiheyskin pysyy likimain vakiona.

Potentiaalin sisältämät vuorovaikutustermit siis muuttavat tapaa, jolla kurvatonin energiatiheys kasvaa suhteessa maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoivaan säteilyyn ja siten parametrin r lopullinen arvo ei välttämättä määräydy yhtä yksinkertaisesti kuin luvussa 3 käsitellyssä tapauksessa. Kurvatonin suhteellisen energiatiheyden skemaattinen käytös ajan funktiona on esitetty kuvassa (5.1) olettaen, että potentiaalia dominoi kulloinkin vain yksi termi.

⁴Koska korjaus kvadraattiseen potentiaaliin on pientä, oletamme kurvatonin oskilloinnin alkavan likimain samalla hetkellä kuin puhtaasti kvadraattisen potentiaalin tapauksessa.



Kuva 5.1: Kurvatonin suhteellinen energiatiheys ajan funktiona inflaation jälkeisessä maailmankaikkeudessa. Kuvassa σ on kurvatonikentän arvo, t aika ja $r \equiv \rho_\sigma/\rho_r$ kurvatonin suhteellinen osuus maailmankaikkeuden energiatiheydestä. Kuvaan on valittu $n = 2$ -tyyppinen kurvatonikentän itseisvuorovaikus parametrin r arvojen määräytyessä valintojen $m = 10^{-13}$, $\Gamma = 10^{-20}$, $r_* = 10^{-16}$, $H_* = 10^{-7}$ mukaisesti, jolloin kurvatonin hajoaa hetkellä $\Gamma = H$. Kuvan vasemmanpuoleisessa lohossa kurvatonin energiatiheys säilyy vakiona ja $r \propto a^4$, keskimmaisessä lohossa kurvatonin oskillon potentiaalinsa epäkvadraattisessa osassa ja $r \propto a^{-1/2}$. Kuvan oikeanpuoleisessa lohossa kurvatonin oskillon potentiaalinsa kvadraattisessa osassa, jolloin $r \propto a$. Kuva on peräisin viitteestä [16].

5.2.1 Erikoistapaus $n = 0$

Lähdemme nyt viitteitä [15, 16] seuraten tarkastelemaan erikoistapausta $n = 0$, jolloin potentiaali on renormalisoituvaa muotoa

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \lambda\sigma^4. \quad (5.16)$$

Tapauksen tekee erityiseksi paitsi potentiaalin renormalisoituvuus, myös kurvatonikentän liikeyhtälölle löydettävä puolianalyttinen ratkaisu, jonka johdon seuraavaksi esitämme.

Säteilyn dominoidessa taustamaailmankaikkeuden energiatiheyttä voidaan homogeneisen kurvatonikentän liikeyhtälö kirjoittaa muodossa

$$\frac{d^2f(a)}{da^2} + c_1f(a)^3 + c_2a^2f(a) = 0, \quad (5.17)$$

jossa $a = (t/t_*)^{1/2}$ on skaalatekijä, funktio $f(a)$ on määritelty lausekkeella $f = a\sigma/\sigma_*$ ja vakiot c_1, c_2 on määritelty yhtälöillä $c_1 = 4\lambda\sigma_*^2/H_*^2$, $c_2 = m^2/H_*^2$.

Tapauksessa, jossa kurvatoni on efektiivisesti massaton ja vakio c_2 siten häviää, on differentiaaliyhtälölle (5.17) löydettävissä tulos, joka muutamien approksimaatioiden kautta [16] motivoi tarkastelemaan oleellisesti saman informaation sisältävää, mutta huomattavasti yksinkertaisempaa yhtälöä

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} + (c + x^2)f(x) = 0, \quad (5.18)$$

jossa $x = ac_2^{1/4}$ ja $c \simeq 1.435\sqrt{2\lambda}\sigma_*/m$. Rajalla $m \rightarrow 0$ voidaan hyvällä tarkkuudella osoittaa approksimaation (5.18) eroavan alkuperäisen liikeyhtälön (5.17) tuloksesta vain hitaasti muuttuvalla vaihetekijällä.

Yhtälön (5.18) asympotoottiseksi ratkaisuksi rajalla $x = \sqrt{2mt} \gg c, x \gg 1$ saadaan

$$\sigma_{as}(t) \sim \frac{\sigma_{osc}}{(mt)^{3/4}} \sin\left(mt + \frac{\pi}{8} + \delta\right), \quad (5.19)$$

jossa

$$\sigma_{osc} = \sigma_* \frac{b\sqrt{\pi}e^{-\pi c/8}2^{-3/4}}{|\Gamma(\frac{3}{4} + i\frac{c}{4})|}, \quad (5.20)$$

$$\delta = \frac{c}{4} \ln(2mt) - \arg(\Gamma(\frac{3}{4} + i\frac{c}{4})) \quad (5.21)$$

ja jossa symbolilla b olemme merkinneet suuretta $b = 2K(-1)^{-1} \simeq 1.1981$.

Ratkaisu on johdettu olettamalla, että $\lambda\sigma_*^2 \gtrsim m^2$, joten kurvatonin siirtyessä potentiaalin kvadraattiseen osaan yhtälöstä (5.11) saatavalla rajalla $\lambda\sigma_*^2 \ll m^2$, voidaan tuloksen katsoa kuvaavan oskillaatioamplitudia enää vain kvalitatiivisesti.

Kurvatonin energiatiheyden ollessa edelleen kurvatonin hajoamishetkellä pieni, $r \ll 1$, saadaan potentiaalilin kvadraattisessa osassa asymptoottiselle ratkaisulle kuitenkin arvio [15]

$$\sigma_{as}(t) \simeq \frac{\sigma_{osc}}{(mt)^{\frac{3}{4}}}. \quad (5.22)$$

Tuloksen avulla saamme ennusteen epälineaarisuusparametreille f_{NL} ja g_{NL} , jotka johtavassa kertaluvussa saavat yhtälöitä (5.6), (5.7) vastaavan muodon

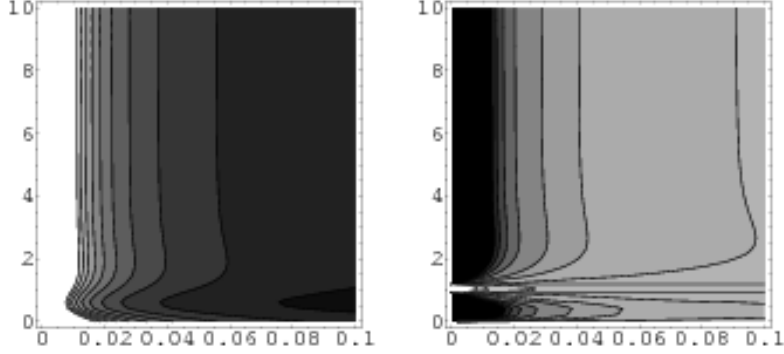
$$f_{NL} \simeq \frac{5}{3r} \left(1 + \frac{\sigma_{osc}\sigma_{osc}''}{(\sigma_{osc}')^2} \right) \quad (5.23)$$

$$g_{NL} \simeq \frac{50}{27r^2} \left(\frac{\sigma_{osc}^2\sigma_{osc}'''}{(\sigma_{osc}')^3} + \frac{3\sigma_{osc}\sigma_{osc}''}{(\sigma_{osc}')^2} \right), \quad (5.24)$$

kun $r \ll 1$. Numeeriset tulokset epälineaarisuusparametreille on esitetty kuvassa (5.2).

Tuloksissa havaitaan selvää oskilloivaa käytöstä alueen $\lambda\sigma_*^2 \sim m^2$ ympäristössä. Erityisesti toisen asteen epälineaarisuusparametri g_{NL} vaikuttaa muotoa $n = 0$ olevan potentiaalilin tapauksessa olevan ensimmäisen asteen epälineaarisuusparametria f_{NL} herkempi inflaation aikaiselle alkuarvolle σ_* , sillä oskillaatiot ovat kuvaajan y-suunnassa voimakkaampia ja käytös erityisesti alueessa $\lambda\sigma_*^2 < m^2$ parametrin f_{NL} käytöstä epätriviaalimpaa. Rajalla $s \rightarrow 0$ epägaussisuuden havaitaan puhtaasti kvadraattiselle potentiaalille ominaisesti häviävän.

Tapauksessa $\lambda\sigma_*^2 \sim m^2$ kurvatonikentän siirtymä potentiaalilin kvadraattiseen osaan tapahtuu pian oskillaatioiden alkamisen jälkeen, jolloin kurvatonikenttä σ ja sen derivaatta $\dot{\sigma}$ ovat edelleen toisistaan riippumattomia, eikä niiden riippuvuus alkuehdosta σ_* ole identtistä. Tämän alueen ympäristössä alkuarvon σ_* variointi muuttaa oskilloivan kurvatonikentän efektiivistä



Kuva 5.2: Tasa-arvokäyräesitys epälineaarisuusparametreille f_{NL} (vasen kuva) ja g_{NL} (oikea kuva). Kuvien y-akselina on suure $\sqrt{\lambda}\sigma_*/m$ ja x-akselina kurvatonin suhteellinen energiatiheys $r = \rho_\sigma/\rho_r$ kurvatonin hajoamishetkellä. Vasemmassa kuvassa tasa-arvokäyrien arvojoukko on väli $0-100$ (musta–valkoinen) 10 yksikön mittaisin välein. Oikeassa kuvassa tasa-arvokäyrien arvojoukko on väli $-5000-0$ (musta–valkoinen) 500 yksikön mittaisin välein. Kuva on peräisin viitteestä [15].

likeyhtälöä tavalla, joka ei ole täysin ymmärretty, mutta joka pitää kuvassa (5.2) esitetyt tulokset edelleen voimassa.

Mainittakoon, että kaarevuusperturbaation lausekkeessa (4.20) ei käsittelemässämme erikoistapauksessa $n = 0$ havaita oskilloivaa käytöstä, vaikka renormalisoitumattomissa tapauksissa $n = 2, 4, 6$ näin havaitaan käyvän [15, 16]. Kaikissa tapauksissa kuitenkin havaitaan, että vuorovaikutustermien dominoidessa potentiaalia tulokset poikkeavat selvästi kvadraattiselle potentiaalille ominaisista tilanteista $f_{NL} \sim r^{-1}$, $g_{NL} \sim r^{-2}$. Toisin sanoen epälineaarisuusparametrien, erityisesti f_{NL} :n, havaitsemattomuus ei sulje kurvatonimallia pois, sillä pienilläkin potentiaalikorjauksilla on mahdollista saavuttaa tilanne $|f_{NL}| \ll 1$, kuten kuvasta (5.2) nähdään.

Erityisesti kuvasta (5.2) havaitaan tulos, jonka mukaan g_{NL} on usein nolasta poikkeava pienilläkin f_{NL} :n arvoilla, eli tietyllä alkuarvojoukolla toisen asteen epälineaarisuusparametri g_{NL} karakterisoi syntyvän epägaussisuuden määrää paremmin kuin f_{NL} . Tulevaisuudessa tehtävät havainnot saattavat näin ollen tarjota keinon arvioida sallitun parametriavaruuden suuruutta aiempaa yksityiskohtaisemmin.

Potentiaalikorjausten merkitys näkyy myös parametrille r asetettavissa

ehdoissa. Toisin kuin kvadraattisen potentiaalin tapauksessa, jossa $r \gtrsim \mathcal{O}(10^{-2})$ jotta liian suurta epägaussisuutta ei syntyisi [68], eivät korjausten myötä saavutettavat tulokset aseta tiukkoja rajoja parametrille r . Tämä johtuu osittain mallin vapaiden parametrien lukumäärästä, mutta on perusteltujen lähtökohtiensa myötä tärkeä tulos.

Tulokset asettavat rajoitteen myös inflaation energiaskaalan arvioinnille, sillä energiaskaalaa ei voi perustellusti arvioida kvadraattisesta kurvatonipotentiaalista tekemättä lisäoletuksia potentiaalin korkeamman kertaluvun termeistä [75].

5.2.2 Kurvatonimallin parametreista

Edellä olemme tarkastelleet kurvatonimallissa syntyvää epägaussisuutta parametrien n , m_σ ja Γ , sekä inflaation aikaisten alkuehtojen H_* ja σ_* funktiona. Yksityiskohtainen analyysi mallissa käytettyjen parametrien mahdollisista arvoista on esitetty viitteissä [15, 16], mutta Planck-satelliitin uusimmat tulokset tulevat päivittämään sallittua parametriavaruutta. Sellaisinaan tulokset eivät kuitenkaan tarkenna taustalla vallitsevaa teoriaa, vaan sallittu parametriavaruus kuvaa jatkossakin vain fenomenologista inflaatiomallia. Paneudumme nyt lyhyesti muutamaiin edellä mainituista parametreista taustateorian kannalta.

Edellä olemme käsitelleet kurvatonin hajoamislevyettä periaatteessa vapaana parametrina, jonka suuruus on sovitettu tuottamaan oikea perturbaatioamplitudi [15]. Yksityiskohtaisempi käsittely kuitenkin sisältäisi kurvatonin kytkeytymisen tunnettuihin hiukkasfysiikan standardimallin hiukkasiin ja tarjoaisi parhaimmillaan keinon laskea hajoamisleveys teorian pohjalta. Tällä hetkellä asiaan liittyviä tarkasteluja onkin jo olemassa muutamia [77, 78].

Tiettyjä ehtoja kurvatonin hajoamislevyedelle voidaan primordiaalisten perturbaatioiden adiabaattisuuden pohjalta kuitenkin antaa, sillä kurvatonin täytyy hajota ennen pimeän aineen irtikytkeytymistä epäadiabaattisten kaarevuusperturbaatioiden synnyn välttämiseksi. Esimerkkinä hajoamislevyeden suuruusluokasta saadaan kurvatonimallille edellä esitettyjen oletusten ja pimeän aineen irtikytkeytymislämpötilalle tehtävän oletuksen $T_{DM} \sim \mathcal{O}(10)$ GeV pohjalta arvio [15]

$$\Gamma \gtrsim 10^{-15} \text{ GeV}. \quad (5.25)$$

Arvio on kuitenkin vain suuntaa-antava, sillä inflaatio- ja kurvatonimallille tehtävät oletukset voivat muuttaa rajaa huomattavasti [15].

Näiden pelkän inflatoni- ja kurvatonikentän sisältävien tilanteiden lisäksi voisimme tarkastella tilannetta, jossa kurvatonin kytkeytyy esimerkiksi jo varhaisen maailmankaikkeuden prosesseissa tärkeässä asemassa olevaan Higgsin bosoniin tai mahdolliseen pimeään aineen hiukkaseen. Tarkasteltavia piirteitä olisivat paitsi kytkennän luonne ja mahdolliset havaittavat vaikutukset nykypäivän hiukkaskiihdyttimissä, myös vaikutukset kurvatonin hajoamisen ja syntyvän kaarevuusperturbaation tuoton kannalta.

Tämä kuitenkin lisäisi teorian parametrien määrää: paitsi että tarkasteltavaksi tulisi kurvatonin itseisvuorovaikutuksen tyyppiä kuvaava parametri n , jouduttaisiin useamman kenttien välisen kytkennän sisältävän potentiaalin tapauksessa määrittämään myös näiden vuorovaikutusten tyypit erillisillä, lähtökohtaisesti vapailla parametreilla. Pimeän aineen hiukkasen tapauksessa vapaiden parametrien määrä lisääntyisi myös toisesta syystä vähintään kahdella: hajoamisleveys Γ_{DM} ja massa m_{DM} eivät ole pimeän aineen hiukkaselle tunnettuja, mikäli pimeää ainetta hiukkasfysikaalisella mallilla voidaan kuvatakaan.

Edelleen olisi mahdollista tarkastella esimerkiksi tilannetta, jossa kurvatonin oskillointi ei pääty kurvatonin hajoamiseen ja toiseen termalisaatioon, vaan jossa kurvatonin efektiivisesti materiaan tavoin käyttäytyvänä komponenttina jatkaa oskillointiaan myös paljon myöhemmässä maailmankaikkeudessa. Tämä asettaa kysymyksen, voisiko kurvatonin olla pimeän aineen hiukkanen.

Edellä esitetyt näkökohdat ovat kuitenkin vain hypoteettisia ja vaativat tulevaisuudessa lisää tutkimusta, sekä ennen kaikkea yhä tarkentuvia ja parhaimmassa tapauksessa täysin uusia havaintoja. Sama pätee myös inflaation aikaisille alkuarvoille H_* ja σ_* , vaikka emme voisikaan näitä koskaan suoraan mitata. Inflaation aikaiset arvot voidaan kuitenkin tehospektrin (2.51) kaltaisten tulosten kautta sitoa havaittaviin suureisiin ja siten johdonmukaisen teorian avulla mahdollisesti selvittää. Tulevaisuudessa saavutettavat edistysaskeleet määräävät, onko tämä mahdollista.

Luku 6

Yhteenveto

Tässä tutkielmassa olemme tarkastelleet kosmisen inflaation dynamiikkaa yhden ja kahden kentän tapauksissa. Olemme olettaneet inflaation tapahtuneen yhden maailmankaikkeuden energiatiheyttä dominoivan, inflatoniksi nimetyn skalaarikentän vaikutuksesta ja tarkastelleet syntyvän kaarevuusperturbaation ominaisuuksia tapauksessa, jossa inflatonin hajottua säteilyksi alkaa inflaation aikana energiatiheydeltään pienenä pysytellyt toinen skalaarikenttä, kurvaton, kasvattaa suhteellista osuuttaan maailmankaikkeuden kokonaisenergiatiheydestä.

Erityisesti olemme keskittyneet syntyvän kaarevuusperturbaation mahdolliseen epägaussisuuteen. Olemme esitelleet tavan karakterisoida ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuutta kaarevuusperturbaation jakaumassa esiintyvien epälineaarisuusparametrein ja laskeneet näille mielivaltaisen momentin kentän tapauksessa pätevät ennusteet erillisten maailmankaikkeuksien mallia käyttäen.

Kaarevuusperturbaation jakaumassa esiintyvää epägaussisuutta ei ole tois-taiseksi havaittu, mutta havainnot asettavat tiukkoja rajoja poikkeamille gaussisesta tapauksesta [31, 32]. Olemme johtaneet ennusteen ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuudelle yhden kentän tapauksessa ja todenneet, että mikäli selvästi nolasta poikkeavaa toisen asteen epägaussisuutta tullaan joskus havaitsemaan, sulkee tämä pois sellaisen yhden kentän inflaatiomallin, jossa kaarevuusperturbaatio generoidaan inflaatiota ajaneen kentän inflaation aikaisista kvanttifluktuaatioista.

Olemme tarkastelleet kurvatonimallin tuottamaa ensimmäisen ja toisen asteen epägaussisuutta tapauksessa, jossa kurvatonikentän potentiaali sisältää pieniä itseisvuorovaikutuksia. Olemme esitelleet kurvatonikentälle joh-

dettujen liikeyhtälöiden perusteella saadut numeeriset ratkaisut epägaussisuutta karakterisoiville epälineaarisuusparametreille ja todenneet, että epäkvadraattisen potentiaalin tapauksessa pienilläkin potentiaalikorjauksilla on mahdollista saavuttaa epätyypillinen tilanne $|f_{NL}| \ll 1$ [15, 16]. Epälineaarisuusparametrien havaitsemattomuus ei siis täysin sulje kurvatonimallia pois edes rajalla $r \ll 1$, eli kun kurvatonin suhteellinen energiatiheys on kurvatonin hajoamishetkellä edelleen pieni. Tulevaisuudessa tehtävät havainnot erityisesti toisen asteen epägaussisuudesta tulevat kuitenkin tarkentamaan mallille asetettavia rajoituksia [31].

Tarkastelumme ohessa olemme havainneet, että inflaatiota luonnehtivia piirteitä ja niihin eri tavoilla pohjautuvia inflaatiomalleja on olemassa lukematon määrä [14]. Varhaisen maailmankaikkeuden hiukkaskosmologia onkin jatkuvasti tarkentuvasta luonteestaan huolimatta toistaiseksi melko kuvailevaa esimerkiksi moderniin alkeishiukkafysiikkaan verrattuna ja usein on vaikea arvioida eri inflaatiomallien uskottavuutta tai edes niiden täsmällistä pätevyysaluetta.

Kosmisen inflaation ja sen jälkeisen maailmankaikkeuden dynamiikka on kuitenkin jatkossakin rikas tutkimusaihe. Dynamiikan syvällisempi ymmärrys vaatii tulevaisuudessa entistä tarkempien kvantitatiivisten ennusteiden luomista ja ennen kaikkea lisää havaintoja, tulivat ne sitten kosmisesta mikroaaltotaustasäteilystä, maailmankaikkeuden suuren skaalan rakenteesta, hiukkaskiihdyttimistä tai esimerkiksi maan alle sijoitetuista pimeän aineen hiukkasilmaisimista.

Liite A

Kaarevuusperturbaatio paikka-avaruudessa

Tässä liitteessä johdamme kaarevuusperturbaatiolle osiossa 4.2.2 esitetyn kolmannen kertaluvun yhtälön (4.23). Tulemme käyttämään konvoluutioteoreemaa, joka osiossa 1.1 valitsemallamme Fourier-muunnoksen normituksella saa muodon [53]

$$(fg)_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q f_{\mathbf{q}} g_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}, \quad (\text{A.1})$$

jossa olemme alaindeksein merkinneet Fourier-muunnettujen suureiden argumentteja.

Oletamme seuraavaksi vain yhden kaarevuusperturbaatioita synnyttävän kentän ja kirjoitamme kaarevuusperturbaation ζ puhtaasti gaussisen ja epägaussisen osan summana muodossa

$$\begin{aligned} \zeta(t, \mathbf{x}) = & \zeta_g(t, \mathbf{x}) + a (\zeta_g^2(t, \mathbf{x}) - \langle \zeta_g^2(t, \mathbf{x}) \rangle) \\ & + b \zeta_g^3(t, \mathbf{x}) + c (\zeta_g^4(t, \mathbf{x}) - \langle \zeta_g^4(t, \mathbf{x}) \rangle), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

jossa $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tarkoituksemme on osoittaa, että parametrit a , b ja c yhtyvät yhtälön (4.23) kertoimiin. Tekemällä Fourier-muunnos, sekä käyttämällä konvoluutioteoreemaa ja gaussiselle suureelle asettamaamme reaalisuusehtoa saamme

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathbf{k}} &= (\zeta_g)_{\mathbf{k}} + a \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3q (\zeta_g)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} (\zeta_g)_{\mathbf{q}}^* \\
&+ b \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q d^3q' (\zeta_g)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\zeta_g)_{\mathbf{q}'}^* (\zeta_g)_{\mathbf{q}}^* \\
&+ c \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \int d^3q d^3q' d^3q'' (\zeta_g)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\zeta_g)_{\mathbf{q}''+\mathbf{q}} (\zeta_g)_{\mathbf{q}'}^* (\zeta_g)_{\mathbf{q}''}^* \\
&\equiv (\zeta_g)_{\mathbf{k}} + a (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}} + b (\zeta_{NL2})_{\mathbf{k}} + c (\zeta_{NL3})_{\mathbf{k}}.
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Koska olemme kiinnostuneita ainoastaan tausta-arvosta poikkeavista perturbaatioista, eli tarkastelemme ainoastaan nollasta poikkeavia Fourier-moodeja, voimme tästä eteenpäin unohtaa termien $\langle \zeta_g^2(t, \mathbf{x}) \rangle$ ja $\langle \zeta_g^4(t, \mathbf{x}) \rangle$ vaikutuksen.

Kaarevuusperturbaation Fourier-moodien kolmipistekorrelaattoriksi saadaan nyt ensimmäisessä kertaluvussa

$$\langle \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} \rangle = \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} \rangle + a \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_3} \rangle + 2 \text{ perm.} \rangle, \tag{A.4}$$

jossa ensimmäinen termi on kaarevuusperturbaation puhtaasti gaussisen osan kontribuutio ja siten häviää, mutta jossa seuraava korrelaattori edustaa häviämätöntä epägaussista osaa. Oletamme edelleen, että kaikki Fourier-moodit ovat nollasta poikkeavia, jolloin konvoluutioteoreemasta ja yhtälöstä (4.4) seuraavaa tulosta

$$\begin{aligned}
\langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_3} \rangle \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\int d^3q \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}} \rangle \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{q}} \rangle \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{q}} \rangle \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}} \rangle \rangle \right),
\end{aligned} \tag{A.5}$$

sekä tehospektrin määritelmää (2.46) käyttäen saamme kolmipistekorrelaattorille tuloksen

$$\begin{aligned}
a \langle \langle \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_3} \rangle + 2 \text{ perm.} \rangle \rangle &= \\
2a (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\frac{4\pi^4}{k_1^3 k_2^3} \mathcal{P}(k_1) \mathcal{P}(k_2) + 2 \text{ perm.} \right).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Nyt määritelmään (4.7) vertaamalla havaitsemme, että tosiaankin $a = 3/5 f_{NL}$.

Vastaavasti nelipistekorrelaattoriksi saamme kolmannessa kertaluvussa

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle &= \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_4} \rangle \\
&+ a \left(\langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_4} \rangle + 3 \text{ perm.} \right) \\
&+ a^2 \left(\langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_3} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_4} \rangle + 5 \text{ perm.} \right) \\
&+ b \left(\langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_{NL2})_{\mathbf{k}_4} \rangle + 3 \text{ perm.} \right).
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Tarkasteltaessa pelkästään korrelaattorin yhdistettyä osaa häviää ensimmäinen termi suoraan. Samoin ensimmäinen epägaussisuus edustava, parametriin a verrannollinen termi häviää gaussisten suureiden parittomana viisipistekorrelaattorina suoraan. Aloittamalla siis parametrin a neliöön verrannollisella termillä saamme jälleen konvoluutioteoremaa ja Isserlisin lausetta kuusipistekorrelaattorille soveltamalla

$$\begin{aligned}
&a^2 \left(\langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_3} (\zeta_{NL1})_{\mathbf{k}_4} \rangle + 5 \text{ perm.} \right) = \\
&2a^2 (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \left(\frac{8\pi^6}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \mathcal{P}(k_1) \mathcal{P}(k_2) \mathcal{P}(k_3) + 23 \text{ perm.} \right),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

jossa $k_{ij} \equiv |\mathbf{k}_{ij}| \equiv |\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j|$. Määritelmään (4.9) vertaamalla havaitsemme¹, että $\tau_{NL} = (6/5 f_{NL})^2$. Vastaavasti parametriin b verrannollinen termi antaa konvoluutioteoremaa kahdesti soveltamalla yhdistetyn osan kontribuutioksi

$$\begin{aligned}
&b \left(\langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_{NL2})_{\mathbf{k}_4} \rangle + 3 \text{ perm.} \right) = \\
&6b (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \left(\frac{8\pi^6}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \mathcal{P}(k_1) \mathcal{P}(k_2) \mathcal{P}(k_3) + 3 \text{ perm.} \right).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Jälleen määritelmään (4.9) vertaamalla havaitsemme, että $b = 9/25 g_{NL}$.

Viisipistekorrelaattoriksi saamme ensimmäisessä kertaluvussa

¹Tämä muoto pätee toisen kertaluvun epälineaarisuusparametrille τ_{NL} ainoastaan sellaisessa yhden kentän tapauksessa, jossa kaarevuusperturbaatio on annettu yksinkertaisimmassa lokaalissa muodossa (A.2), mutta ei välttämättä yleisemmin. Käsittelemme aihetta tarkemmin osiossa 4.2.2.

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \zeta_{\mathbf{k}_5} \rangle &= \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_4} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_5} \rangle + \\ &c \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_4} (\zeta_{NL3})_{\mathbf{k}_5} \rangle + 4 \text{ perm.} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

jossa ensimmäinen termi häviää jälleen suoraan puhtaasti gaussisten suureiden parittomana korrelaattorina. Toinen termi on kahdeksanpistekorrelaattori, jolle saamme

$$\begin{aligned} c \langle (\zeta_g)_{\mathbf{k}_1} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_2} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_3} (\zeta_g)_{\mathbf{k}_4} (\zeta_{NL3})_{\mathbf{k}_5} \rangle + 4 \text{ perm.} \rangle &= \\ 24c (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_5) \times & \\ \left(\frac{16\pi^8}{k_1^3 k_2^3 k_3^3 k_4^3} \mathcal{P}(k_1) \mathcal{P}(k_2) \mathcal{P}(k_3) \mathcal{P}(k_4) + 4 \text{ perm.} \right). & \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Vielä määritelmään (4.11) vertaamalla havaitsemme, että $c = 27/125 h_{NL}$, kuten pitääkin.

Liite B

f_{NL} , g_{NL} ja τ_{NL} erillisten maailmankaikkeuksien mallissa

Tässä liitteessä johdamme luvun 4 yhtälössä (4.23) esiintyville epälineaarisuusparametreille f_{NL} , g_{NL} ja τ_{NL} yleisen, useamman kentän tapaukseen soveltuvan suuruusarvion. Lähdemme liitteen A tavoin tarkastelemaan ensin kaarevuusperturbaation Fourier-muunnosten

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathbf{k}} = & \sum_i N_{,i}(\delta\phi_i)_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{i,j} N_{,ij} \int d^3q (\delta\phi_i)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} (\delta\phi_j)_{-\mathbf{q}} \\ & + \frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{i,j,k} N_{,ijk} \int d^3q d^3q' (\delta\phi_i)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\delta\phi_j)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi_k)_{-\mathbf{q}} \\ & + \frac{1}{24} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \sum_{i,j,k,l} N_{,ijkl} \times \\ & \int d^3q d^3q' d^3q'' (\delta\phi_i)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\delta\phi_j)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi_k)_{\mathbf{q}''-\mathbf{q}'} (\delta\phi_l)_{-\mathbf{q}''} \dots,\end{aligned}\tag{B.1}$$

kolmipistekorrelaattoria. Olettamalla, että eri kenttien perturbaatiot ovat toisistaan riippumattomia, saamme toisessa kertaluvussa

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle &= (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \right) \times \\
&\quad \left(\frac{4\pi^4}{k_1^3 k_2^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) + 2 \text{ perm.} \right) \\
&\quad + \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \left(\sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} \right) \times \\
&\quad \int d^3 q d^3 q' d^3 q'' \langle (\delta\phi)_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}''} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}''} \rangle \\
&\quad + \frac{1}{12} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} (N_{,jl} N_{,ijl} + N_{,ij} N_{,jil}) \right) \times \\
&\quad \int d^3 q d^3 q' d^3 q'' \langle (\delta\phi)_{\mathbf{k}_1} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}'+\mathbf{q}''} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}''} \rangle + 5 \text{ perm.} \\
&\quad + \frac{1}{24} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \left(\sum_{i,j,l,m} N_{,i} N_{,j} N_{,ijlm} \right) \times \\
&\quad \int d^3 q d^3 q' d^3 q'' \langle (\delta\phi)_{\mathbf{k}_1} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_2} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{\mathbf{q}''-\mathbf{q}} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}''} \rangle + 2 \text{ perm.}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

jossa olemme merkinneet $\mathcal{P}_{\delta\phi} \equiv \mathcal{P}_{\delta\phi_i}$ kaikilla i , sillä oletamme jokaisen skaalarikentän perturbaatiot puhtaasti gaussisiksi. Tarkastelemme seuraavaksi edellisen lausekkeen termejä yksitellen.

Olettamalla perturbaatiotehospektrin olevan skaalainvariantti ja kaikkien aaltovektorien likimain samansuuruisia saamme ensimmäiseksi termiksi

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \right) \left(\frac{4\pi^4}{k_1^3 k_2^3} \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) + 2 \text{ perm.} \right) \\
&= (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{12\pi^4}{k^6} \left(\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^2,
\end{aligned} \tag{B.3}$$

ja toiseksi

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} \frac{1}{(2\pi)^{9/2}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} \right) \times \\
& \int d^3q d^3q' d^3q'' \langle (\delta\phi)_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}'} (\delta\phi)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}''} (\delta\phi)_{-\mathbf{q}''} \rangle \\
& = \frac{64\pi^6}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3q \frac{1}{q^3 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} \\
& \approx (2\pi)^{3/2} \frac{12\pi^4}{k^6} (N_{,ij} N_{,il} N_{,jl}) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \ln \frac{k}{k_{min}}, \tag{B.4}
\end{aligned}$$

jossa toisen rivin integraalin arvo lasketaan muutaman kertaluokan havaittavaa maailmankaikkeutta suuremmassa laatikossa $k^{-1} < k_{min}^{-1} \lesssim 10^2 (a_0 H_0)^{-1} \equiv L$ siten, että tätä suuremmilla etäisyyskaaloilla $k^{-1} > L$ perturbaatiot häviävät ja skaalainvariantti tehospektri $\mathcal{P}_{\delta\phi}$ asetetaan nolllaksi. Pienillä, mutta nykyisin havaittavaa maailmankaikkeutta suuremmilla¹ etäisyyskaaloilla, joilla $k^{-1} \ll L \Leftrightarrow k \gg L^{-1}$, voimme viitettä [51] seuraten arvioida integraalin suuruutta integrandin napojen ympäriltä saatavalla kontribuutiolla

$$\begin{aligned}
& \int d^3q \frac{1}{q^3 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} \approx \int_{L^{-1} < q < p \ll k} d^3q \frac{1}{q^3 |\mathbf{k}_1|^3 |\mathbf{k}_2|^3} + \\
& \int_{L^{-1} < q < p \ll k} d^3q \frac{1}{|\mathbf{k}_1|^3 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1|^3} + \int_{L^{-1} < q < p \ll k} d^3q \frac{1}{|\mathbf{k}_2|^3 |\mathbf{k}_1 - \mathbf{q}|^3 |\mathbf{k}_2 - \mathbf{q}|^3} \tag{B.5} \\
& \approx 3 \int_{\Omega} d\Omega \int_{L^{-1}}^p \frac{dq}{qk^6} = \frac{12\pi}{k^6} \ln(pL) \approx \frac{12\pi}{k^6} \ln(kL) \equiv \frac{12\pi}{k^6} \ln \frac{k}{k_{min}},
\end{aligned}$$

jossa napojen osuus on laskettu pisteiden $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1$, $\mathbf{q} = -\mathbf{k}_2$ ympärillä L^{-1} - ja p -säteisten pallonkuorten välissä ja jossa olemme paitsi hyödyntäneet tietoja $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{0}$, $|\mathbf{k}_i| = k \forall i$, myös lopuksi arvioineet tulosta lähemmäs alkuperäistä integraalia asettamalla $p \rightarrow k$, jolloin tarkasteluvälillä syntyvä virhe on ainoastaan luokkaa $\mathcal{O}(p^{-9})$.

Kolmanneksi termiksi saamme

¹Tämä oletus johtuu osion 4.2 johdannossa käsittelemästämme erillisten maailmankaikkeuksien mallin pätevyysalueesta, jonka arvioimme sijoittuvan etäisyyskaaloille $(a_0 H_0)^{-1} < k^{-1} < k_{tasoitus}^{-1}$.

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi^6}{(2\pi)^{3/2}k^6} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,ij} N_{,jll} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3q \frac{1}{q^3} + \\
& \frac{4\pi^6}{(2\pi)^{3/2}k^3} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,jll} N_{,ijl} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3q \frac{1}{q^3 |\mathbf{k}_2 + \mathbf{q}|^3} + 5 \text{ perm.} \\
& \approx (2\pi)^{3/2} \frac{12\pi^4}{k^6} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \times \\
& \left(\sum_{i,j,l} 2N_{,i} N_{,jl} N_{,ijl} + \sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,jll} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \ln \frac{k}{k_{min}},
\end{aligned} \tag{B.6}$$

jossa olemme jälleen arvioineet integraaleja edellä esitetyin metodein.
Neljänneksi termiksi saamme jälleen vastaavalla tavalla

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi^6}{(2\pi)^{3/2}k^6} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,ijll} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \int d^3q \frac{1}{q^3} + 2 \text{ perm.} \\
& \approx \frac{1}{2} (2\pi)^{3/2} \frac{12\pi^4}{k^6} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,ijll} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \ln \frac{k}{k_{min}}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Yhteensä saamme siis

$$\begin{aligned}
\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle &= (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{12\pi^4}{k^6} \left(\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^2 + \\
& (2\pi)^{3/2} \frac{12\pi^4}{k^6} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \left(\sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} + \right. \\
& \left. \sum_{i,j,l} 2N_{,i} N_{,jl} N_{,ijl} + \sum_{i,j,l} N_{,ij} N_{,jll} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,ijll} \right) \mathcal{P}_{\delta\phi}^3 \ln \frac{k}{k_{min}}.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Vertaamalla tätä määritelmistä (4.6) ja (4.7) skaalainvariantin tehosppektrin tapauksessa seuraavaan tulokseen

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \frac{6}{5} f_{NL} \frac{12\pi^4}{k^6} \mathcal{P}_{\zeta}^2, \tag{B.9}$$

sekä käyttämällä tulosta (4.21) saamme ensimmäisen kertaluvun epälineariisuusparametrille toisen kertaluvun tuloksen

$$\frac{3}{5}f_{NL} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} N_{,ij}}{(\sum_i N_{,i})^2} + \frac{1}{2} \mathcal{P}_\zeta ((\sum_i N_{,i})^2)^{-3} \times$$

$$\left(\sum_{i,j,l} (N_{,ij} N_{,il} N_{,jl} + N_{,i} N_{,ij} N_{,jll} + 2N_{,i} N_{,jl} N_{,ijl} + \frac{1}{2} N_{,i} N_{,j} N_{,ijll}) \right) \ln \frac{k}{k_{min}} \quad (\text{B.10})$$

Vastaavasti toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille saamme ensimmäisen kertaluvun tuloksen tarkastelemalla nelipistekorrelaattoria

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle = \frac{1}{4} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i,j} N_{,i} N_{,j} \sum_{l,m} N_{,lm} \sum_{n,p} N_{,np} \right) \times$$

$$dq d^3 q' \langle (\delta\phi_i)_{\mathbf{k}_1} (\delta\phi_j)_{\mathbf{k}_2} (\delta\phi_l)_{\mathbf{k}_3+\mathbf{q}} (\delta\phi_m)_{-\mathbf{q}} (\delta\phi_n)_{\mathbf{k}_4+\mathbf{q}'} (\delta\phi_p)_{-\mathbf{q}'} \rangle + 5 \text{ perm.}$$

$$\frac{1}{6} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,l} \sum_{m,n,p} N_{,mnp} \right) \times$$

$$\int dq d^3 q' \langle (\delta\phi_i)_{\mathbf{k}_1} (\delta\phi_j)_{\mathbf{k}_2} (\delta\phi_l)_{\mathbf{k}_3} (\delta\phi_m)_{\mathbf{k}_4+\mathbf{q}+\mathbf{q}'} (\delta\phi_n)_{-\mathbf{q}} (\delta\phi_p)_{-\mathbf{q}'} \rangle + 3 \text{ perm.} \quad (\text{B.11})$$

Laskemalla korrelaattorit auki saamme ensimmäiseksi termiksi

$$(2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \frac{1}{2} \frac{8\pi^6}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \times \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,il} N_{,jl} + 23 \text{ perm.}$$

ja toiseksi

$$(2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \frac{8\pi^6}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \times \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{P}_{\delta\phi}(k_1) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_2) \mathcal{P}_{\delta\phi}(k_3) \sum_{i,j,l} N_{,i} N_{,j} N_{,l} N_{,ijl} + 3 \text{ perm.},$$

jolloin arvioimalla tehospektri jälleen skaalainvariantiksi saamme määritelmästä (4.9) ja usean kentän tehospektristä (4.21) seuraavaan tulokseen

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle = (2\pi)^{3/2} \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \times \quad (\text{B.14})$$

$$\left(\frac{8\pi^6}{k^9} \mathcal{P}_\zeta^3 \left(\frac{54}{25} g_{NL} + 3 \text{ perm.} \right) + \frac{8\pi^6}{k_1^3 k_2^3 k_3^3} \mathcal{P}_\zeta^3 \left(\frac{1}{2} \tau_{NL} + 23 \text{ perm.} \right) \right)$$

vertaamalla toisen kertaluvun epälineaarisuusparametreille tuloksen

$$\tau_{NL} = \frac{\sum_{i,j,l} N_i N_j N_{il} N_{jl}}{((\sum_i N_i)^2)^3} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{54}{25} g_{NL} = \frac{\sum_{i,j,l} N_i N_j N_l N_{ijl}}{((\sum_i N_i)^2)^3}. \quad (\text{B.16})$$

Kirjallisuutta

- [1] A.A. Starobinsky. A new type of isotropic cosmological models without singularity. *Phys.Lett.*, B 91, 1980.
- [2] A.H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys.Rev.*, D 23, 1981.
- [3] A.R. Liddle and D.H. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [4] D.H. Lyth and A.R. Liddle. *The Primordial Density Perturbation*. Cambridge University Press, 2009.
- [5] S. Bonometto, V. Gorini, and U. Moschella. *Modern Cosmology*. Institute of Physics Publishing, 2002.
- [6] V.F. Mukhanov and G.V. Chibisov. Quantum fluctuations and a non-singular universe. *JETP*, 33, 1981.
- [7] D.H. Lyth and D. Wands. Generating the curvature perturbation without an inflaton. *Phys.Lett.*, B 524, 2002.
- [8] K. Enqvist and M. S. Sloth. Adiabatic cmb perturbations in pre-big bang string cosmology. *Nucl.Phys.*, B 626, 2002.
- [9] T. Moroi and T. Takahashi. Effects of cosmological moduli fields on cosmic microwave background. *Phys.Lett.* [Erratum-ibid.B 539, 303 (2002)], B 522, 2001.
- [10] N.W. Boggess et al. The coBE mission - its design and performance two years after launch. *Astrophys.J.*, 397, 1992.

- [11] P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *arXiv:1303.5062*, 2013.
- [12] P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. xxii. constraints on inflation. *arXiv:1303.5082*, 2013.
- [13] S. Yokoyama, N. Sugiyama, S. Zaroubi, and J. Silk. Modification of the halo mass function by kurtosis associated with primordial non-gaussianity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 417, 2011.
- [14] A. Mazumdar and J. Rocher. Particle physics models of inflation and curvaton scenarios. *Phys.Rept.*, 497, 2011.
- [15] K. Enqvist, S. Nurmi, O. Taanila, and T. Takahashi. Non-gaussian fingerprints of self-interacting curvaton. *JCAP*, 1004, 2010.
- [16] K. Enqvist, S. Nurmi, G. Rigopoulos, O. Taanila, and T. Takahashi. The subdominant curvaton. *JCAP*, 0911, 2009.
- [17] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman, and R.H. Brandenberger. Theory of cosmological perturbations. *Phys.Rept.*, 215, 1992.
- [18] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto. Non-gaussianity from inflation: Theory and observations. *Phys.Rept.*, 402, 2004.
- [19] M. Sasaki and E.D Stewart. A general analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation. *Prog.Theor.Phys.*, 95, 1996.
- [20] D. Wands, K.A. Malik, D.H. Lyth, and A.R. Liddle. A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales. *Phys.Rev.*, D 62, 2000.
- [21] D.H. Lyth and Y. Rodriguez. The inflationary prediction for primordial non-gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 95, 2005.
- [22] D.H. Lyth and D. Wands. Conserved cosmological perturbations. *Phys.Rev.*, D 68, 2003.
- [23] S.M. Carroll. *Spacetime and Geometry - An Introduction to General Relativity*. Addison Wesley, 2004.

- [24] S. Perlmutter et al. Cosmology from type ia supernovae. *Bull.Am.Astron.Soc*, 29, 1997.
- [25] A.G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron.J.*, 116, 1998.
- [26] S. Räsänen. *Cosmology I & II*. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto, 2011-2012.
- [27] H. Koskinen ja R. Vainio. *Klassinen mekaniikka*. Limes ry, 2010.
- [28] R.H. Brandenberger. A status review of inflationary cosmology. *hep-ph/0101119*, 2001.
- [29] B.A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands. Inflation dynamics and reheating. *Rev.Mod.Phys.*, 78, 2006.
- [30] M.E Peskin and D.V Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [31] P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. xxiv. constraints on primordial non-gaussianity. *arXiv:1303.5084*, 2013.
- [32] E. Komatsu et al. [Planck Collaboration]. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 180, 2009.
- [33] P.A.R. Ade et al. [Planck Collaboration]. Planck 2013 results. xix. the integrated sachs-wolfe effect. *arXiv:1303.5079*, 2013.
- [34] S. Nurmi. *Aspects of Inflationary Models at Low Energy Scales*. University of Helsinki - Report Series in Physics, 2008.
- [35] K.A. Malik and D. Wands. Evolution of second-order cosmological perturbations. *Class.Quant.Grav.*, 21, 2004.
- [36] H. Kurki-Suonio. *Cosmological Perturbation Theory*. Luentomuistiinpanot, Helsingin yliopisto, 2012.
- [37] N. Bartolo and A.R. Liddle. The simplest curvaton model. *Phys.Rev.*, D 65, 2002.

- [38] C. Gordon, D. Wands, B.A. Bassett, and R. Maartens. Adiabatic and entropy perturbations from inflation. *Phys. Rev.*, D 63, 2000.
- [39] W. Hu. An isocurvature mechanism for structure formation. *Phys. Rev.*, D 59, 1999.
- [40] D.H. Lyth, C. Ungarelli, and D. Wands. The primordial density perturbation in the curvaton scenario. *Phys.Rev.*, D 67, 2003.
- [41] D.H. Lyth. Axions and inflation: Vacuum fluctuations. *Phys. Rev.*, D 45, 1992.
- [42] F. Bezrukov. The higgs field as an inflaton. *arXiv:1307.0708*, 2013.
- [43] L. Kofman and S. Mukohyama. Rapid roll inflation with conformal coupling. *Phys.Rev.*, D77, 2008.
- [44] H. Assadullahi, J. Väliviita, and D. Wands. Primordial non-gaussianity from two curvaton decays. *Phys.Rev.*, D 76, 2007.
- [45] D. Langlois and F. Vernizzi. Mixed inflaton and curvaton perturbations. *Phys.Rev.*, D 70, 2004.
- [46] K. Enqvist and T. Takahashi. Mixed inflaton and spectator field models after planck. *arXiv:1306.5958*, 2013.
- [47] K. Dimopoulos, K. Kohri, D. H. Lyth, and T. Matsuda. The inflating curvaton. *JCAP*, 1203, 2012.
- [48] M. Kawasaki, N. Kitajima, and S. Yokoyama. Gravitational waves from a curvaton model with blue spectrum. *JCAP*, 08, 2013.
- [49] A. Mazumdar and S. Nadathur. Curvaton scenario within the minimal supersymmetric standard model and predictions for non-gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 108, 2012.
- [50] S. Nurmi. *Ei-gaussiset perturbaatiot kurvatonimallissa*. Pro gradu - tutkielma, Helsingin yliopisto, 2005.
- [51] L. Boubekeur and D.H. Lyth. Detecting a small perturbation through its non-gaussianity. *Phys.Rev.*, D 73, 2005.

- [52] L. Isserlis. On a formula for the product-moment coefficient of any order of a normal frequency distribution in any number of variables. *Biometrika*, 12, 1918.
- [53] G.B. Arfken and H.J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 1995.
- [54] T. Okamoto and W. Hu. The angular trispectra of cmb temperature and polarization. *Phys.Rev.*, D 66, 2002.
- [55] C. Byrnes, M. Sasaki, and D. Wands. Primordial trispectrum from inflation. *Phys.Rev.*, D 74, 2006.
- [56] D. Seery, J.E. Lidsey, and M.S. Sloth. The inflationary trispectrum. *JCAP*, 2007, 2007.
- [57] C. Lin and Y. Wang. Quadra-spectrum and quint-spectrum from inflation and curvaton models. *JCAP*, 1007, 2010.
- [58] D.H. Lyth, K.A. Malik, and M. Sasaki. A general proof of the conservation of the curvature perturbation. *JCAP*, 0505, 2005.
- [59] D. Langlois and F. Vernizzi. Evolution of non-linear cosmological perturbations. *Phys.Rev.*, D 72, 2005.
- [60] K. Enqvist, J. Högdahl, S. Nurmi, and F. Vernizzi. Covariant generalization of cosmological perturbation theory. *Phys.Rev.*, D 75, 2007.
- [61] Y. Wang. Inflation, cosmic perturbations and non-gaussianities. *arXiv:1303.1523*, 2013.
- [62] G. Tasinato, C.T. Byrnes, S. Nurmi, and D. Wands. Loop corrections and a new test of inflation. *Phys. Rev.*, D 87, 2013.
- [63] N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto. Gauge-invariant temperature anisotropies and primordial non-gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 93, 2004.
- [64] E. Komatsu. Hunting for primordial non-gaussianity in the cosmic microwave background. *Classical and Quantum Gravity*, 27, 2010.
- [65] T. Sekiguchi and N. Sugiyama. Optimal constraint on gnl from cmb. *arXiv:1303.4626*, 2013.

- [66] K. Enqvist, S. Hotchkiss, and O. Taanila. Estimating fnl and gnl from massive high-redshift galaxy clusters. *JCAP*, 2011, 2011.
- [67] A. Cooray. 21-cm background anisotropies can discern primordial non-gaussianity. *Phys.Rev.Lett.*, 97, 2006.
- [68] D.H. Lyth and Y. Rodriguez. Non-gaussianity from the second-order cosmological perturbation. *Phys.Rev.*, D 71, 2005.
- [69] M. Maggiore and A. Riotto. The halo mass function from excursion set theory with a non-gaussian trispectrum. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 405, 2010.
- [70] J. Maldacena. Non-gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models. *JHEP*, 2003, 2003.
- [71] C. T. Byrnes, S. Nurmi, G. Tasinato, and D. Wands. Inhomogeneous non-gaussianity. *JCAP*, 1203, 2012.
- [72] N.S. Sugiyama. Consistency relation for multifield inflation scenario with all loop contributions. *JCAP*, 1205, 2012.
- [73] T. Suyama and M. Yamaguchi. Non-gaussianity in the modulated reheating scenario. *Phys.Rev.*, D 77, 2008.
- [74] M. Sasaki, J. Valiviita, and D. Wands. Non-gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model. *Phys.Rev.*, D 74, 2006.
- [75] K. Enqvist and S. Nurmi. Non-gaussianity in curvaton models with nearly quadratic potential. *JCAP*, 0510, 2005.
- [76] M. S. Turner. Coherent scalar-field oscillations in an expanding universe. *Phys.Rev.*, D 28, 1983.
- [77] K. Enqvist, D.G. Figueroa, and R.N. Lerner. Curvaton decay by resonant production of the standard model higgs. *JCAP*, 1301, 2013.
- [78] K. Enqvist, R.N. Lerner, and S. Rusak. Reheating dynamics affects non-perturbative decay of spectator fields. *arXiv:1308.3321*, 2013.