



PRO GRADU -TUTKIELMA

Esimerkkejä stokastisista prosesseista ja niiden hyödyntäminen lukio-opetuksessa

Tuomas Nurmiainen

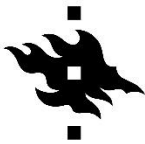
03.06.2021

Helsingin yliopisto

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Ohjaaja: Mika Koskenoja



HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme Matematiikan koulutusohjelma, aineenopettajan koulutus	
Tekijä – Författare – Author Tuomas Nurmiainen			
Työn nimi – Arbetets titel – Title Esimerkkejä stokastisista prosesseista ja niiden hyödyntäminen lukio-opetuksessa			
Työn laji – Arbetets art – Level Pro Gradu -tutkielma	Aika – Datum – Month and year 06/2021	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages 36	
Tiivistelmä – Referat – Abstract <p>Tämän tutkielman tavoitteena on tutustuttaa lukija yksinkertaisiin stokastisiin prosesseihin esimerkkien avulla. Tämän lisäksi esitellään stokastisten prosessien perusominaisuuksia. Stokastiset prosessit ovat matematiikassa osa todennäköisyyslaskennan osa-aluetta.</p> <p>Tutkielman alussa käydään läpi todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä, jotka ovat välttämättömiä stokastisten prosessien ymmärtämisessä. Tämän jälkeen esitellään stokastisten prosessien perusominaisuuksia.</p> <p>Tutkielmassa esiteltävät stokastiset prosessit ovat Bernoullin prosessi, satunnaiskulku ja Poissonin prosessi. Jokaisesta prosessista esitetään esimerkkejä ja niihin käytettäviä jakaumia.</p> <p>Lopuksi on pohdintaa stokastisten prosessien hyödyntämisestä lukio-opetuksessa lyhyen ja pitkän matematiikan osalta. Pohdinta on käyty uuden opetussuunnitelman LOPS19 tavoitteiden ja sisällön mukaan. Pitkässä ja lyhyessä matematiikassa on molemmissa yhden moduulin sisällössä määritelty binomijakauma, jota voidaan käyttää joidenkin stokastisten prosessien tutkimisessa.</p>			
Avainsanat – Nyckelord – Keywords Todennäköisyyslaskenta, stokastiset prosessit, lukiomatematiikka			
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited Helsinki, E-thesis			
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information			

Sisällys

1	Johdanto	3
2	Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä	4
2.1	Perusjoukko ja tapahtumat	4
2.2	Satunnaismuuttujat	5
2.3	Diskreetit satunnaismuuttujat, pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio	5
2.4	Jatkuvat satunnaismuuttujat ja tiheysfunktio	7
2.5	Odotusarvo ja varianssi	7
3	Mitä ovat stokastiset prosessit?	8
3.1	Ajan osuus stokastisissa prosesseissa	9
3.2	Tila-avaruus stokastisissa prosesseissa	9
3.3	Satunnaisuus stokastisissa prosesseissa	10
3.4	Stationaarisuus ja tasapaino	10
4	Bernoullin prosessi	12
4.1	Bernoullin koe ja Bernoullin jakauma	12
4.2	Binomijakauma	13
4.3	Geometrinen jakauma	15
4.4	Bernoullin prosessin määritelmä	17
5	Satunnaiskulku	19
5.1	Uhkapelaajan vararikko	21
6	Poissonin prosessi	23
6.1	Laskuriprosessi	23
6.2	Riippumattomien lisäysten prosessit	24
6.3	Stationaariset lisäykset	24
6.3.1	Poissonin jakauma	25
6.4	Poissonin prosessin määritelmät	26

7	Stokastiset prosessit matematiikan lukio-opetuksessa	28
7.1	Pitkän matematiikan opetussuunnitelma	28
7.2	Lyhyen matematiikan opetussuunnitelma	29
7.3	Tieteellisiä julkaisuja todennäköisyyslaskennan opettamisesta	30
7.4	Stokastisten prosessien hyödyntäminen lukio-opetuksessa	31

Luku 1

Johdanto

Tässä tutkielmassa esitellään stokastisten prosessien yksinkertaisia esimerkkejä ja niiden sovellusmahdollisuuksia lukiomatematiikassa. Stokastiset prosessit ovat todennäköisyyslaskennan osa-alue. Tutkielmassa pyritään mahdollisimman yksinkertaisiin esitystapoihin, joten ymmärtäminen ei tarvitse stokastisten prosessien aikaisempaa tuntemusta. Luvussa 2 esitellään todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä, jotka helpottavat stokastisten prosessien ymmärtämistä. Luvussa 3 esitellään stokastisten prosessien perusominaisuuksia, kuten ajan osuutta stokastisissa prosesseissa, tila-avaruutta ja millaista satunnaisuutta stokastiset prosessit sisältävät.

Luvuissa 4, 5 ja 6 esitellään kolme erilaista stokastista prosessia, Bernoullin prosessi, satunnaiskulku ja Poissonin prosessi. Näissäkin esittelyissä pyritään yksinkertaisuuteen, jotta prosesseja olisi mahdollista soveltaa lukiomatematiikkaan.

Viimeisessä luvussa käydään läpi lukion uuden opetussuunnitelman tavoitteita ja sisältöä, jotka liittyvät stokastisiin prosesseihin. Myös joitakin tieteellisiä julkaisuja käydään läpi, joita voidaan soveltaa stokastisten prosessien opettamiseen lukiossa. Stokastisista prosesseista yksinkertaisin on Bernoullin prosessi, johon käsittely pääasiassa keskittyy.

Tutkielmaan sisältyvät kuvaajat on tehty r-ohjelmistolla ja taulukot Google Sheetsillä.

Luku 2

Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Tässä luvussa käyn läpi todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä, joita esiintyy myös laajalti tutkielman edetessä. Määritelmässä on käytetty pääasiassa lähteinä Ibe Oliverin kirjaa *Fundamentals of Applied Probability and Random Processes* vuodelta 2014, James K. Lindeyn kirjaa *Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time* vuodelta 2014 sekä Ionut Florescun kirjaa *Probability and Stochastic Processes* vuodelta 2015.

2.1 Perusjoukko ja tapahtumat

Kokeet ja tapahtumat ovat keskeisiä käsitteitä todennäköisyyslaskennassa ja myös tässä tutkielmassa. Todennäköisyyksiä tutkittaessa koe on mikä tahansa havainnointiprosessi. Koetta, jonka lopputulosta ei voida etukäteen tietää, kutsutaan satunnaiskokeeksi. Satunnaiskokeen kaikkien mahdollisten tulosten joukkoa kutsutaan perusjoukoksi. Mahdollisia tuloksia voidaan esimerkiksi merkitä w_i , $i = 1, 2, 3, \dots$. Perusjoukosta käytetään usein merkintää Ω , eli perusjoukko annetaan muodossa $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Tapahtumiksi taas kutsutaan joko ennalta määritettyä tai mitä tahansa kokeen lopputulosta. Tapahtuma on siis perusjoukon osajoukko. Esimerkiksi yhden nopan heitossa mikä tahansa luvuista 1-6 voi olla lopputulos. Tällöin perusjoukko on

$$(2.1) \quad \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Voimme määritellä kokeen halutuksi tapahtumaksi parittomat luvut eli osajoukon $\Omega = \{1, 3, 5\}$.

2.2 Satunnaismuuttujat

Kuvitellaan satunnaiskoetta, jossa perusjoukkona on testiavaruus Ω . Olkoon w mallipiste avaruudesta Ω . Meitä kiinnostaa luoda reaaliarvo jokaiselle $w \in \Omega$. Satunnaismuuttuja $X(w)$ on reaalfunktio, joka antaa vain yhden arvon jokaiselle mallipisteelle $w \in \Omega$. Tällä tavoin saamme tila-avaruuden arvot muutettua reaalityyppisiksi, joka mahdollistaa niiden käsittelyn.

Esimerkki 2.2. Kolikonheitossa on kaksi erilaista mahdollista arvopistettä: kruuna ja klaava. Tällöin voimme määrittellä satunnaismuuttujan X seuraavasti:

$$X(\text{kruuna}) = 1,$$

$$X(\text{klaava}) = 0.$$

2.3 Diskreetit satunnaismuuttujat, pistetodennäköisyysfunktio ja kertymäfunktio

Diskreetti satunnaismuuttuja tarkoittaa äärellisen tai numeroituvasti äärettömän määrän arvoja saavaa satunnaismuuttuja. Diskreetille satunnaismuuttujalle X voidaan määrittellä pistetodennäköisyysfunktio $p_X(x)$ seuraavasti:

$$(2.3) \quad p_X(x) = P[X = x].$$

Kokonaistodennäköisyys jakaumalle on aina 1. Satunnaismuuttujan X kertymäfunktio voidaan määrittää $p_X(x)$ avulla seuraavasti:

$$(2.4) \quad F_X(x) = \sum_{k \leq x} p_X(k).$$

Esimerkki 2.5. Oletetaan, että olemme määrittäneet seuraavan pistetodennäköisyysfunktion X :lle,

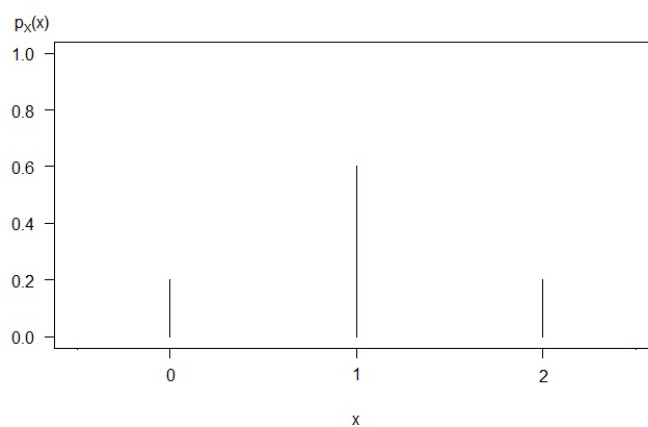
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & \text{kun } x = 0, \\ \frac{3}{5}, & \text{kun } x = 1, \\ \frac{2}{5}, & \text{kun } x = 2, \\ 0, & \text{muussa tapauksessa,} \end{cases}$$

josta malli kuvassa 2.1 ja kertymäfunktion,

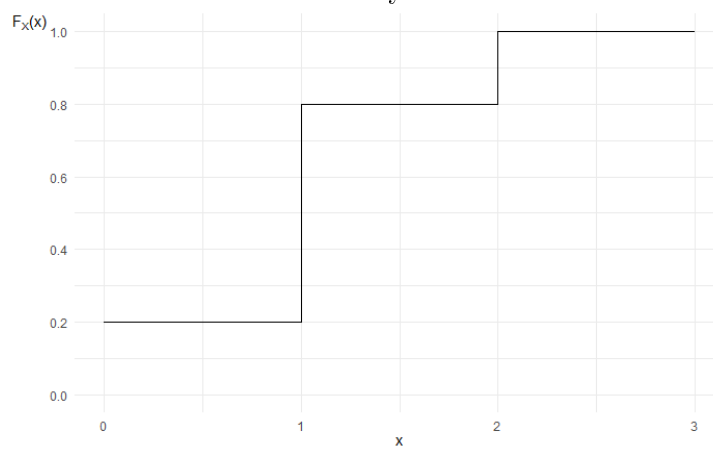
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ \frac{1}{5}, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ \frac{4}{5}, & \text{kun } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{kun } x \geq 2, \end{cases}$$

jonka kuvaaja löytyy kuvasta 2.2.

Kuva 2.1: Pistetodennäköisyysfunktio



Kuva 2.2: kertymäfunktio



2.4 Jatkuvat satunnaismuuttujat ja tiheysfunktio

Jatkuvat satunnaismuuttujat määritellään hieman eri tavalla kuin diskreetit satunnaismuuttujat. Jatkuvat satunnaismuuttujat määritellään jollakin reaalilukuakselin osavälillä ja niiden yhteydessä käytetään yleensä tiheysfunktioita kuvaamaan arvojen jakautumista. Määritellään satunnaismuuttuja X olemaan jatkuva satunnaismuuttuja, jos on olemassa epänegatiivinen funktio $f_X(x)$ määriteltynä kaikille arvoille $x \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikille osajoukoille A voidaan määritellä tiheysfunktio:

$$(2.6) \quad P[X \in A] = \int_A f_X(x) dx.$$

Funktioita $f_X(x)$ kutsutaan tiheysfunktioiksi. Funktion F_X ollessa derivoituva tiheysfunktio voidaan määritellä kertymäfunktion derivaattana,

$$(2.7) \quad f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

2.5 Odotusarvo ja varianssi

Odotusarvolla tarkoitetaan satunnaisen ilmiön arvojen odotettua arvoa. Yleensä odotusarvo on jakauman painotettu keskiarvo, jossa painoina ovat todennäköisyydet. Diskreetille satunnaismuuttujalle X , joka saa arvot x_k todennäköisyyksillä p_k , saadaan odotusarvo seuraavasti:

$$(2.8) \quad E(X) = \sum_k x_k p_k.$$

Jatkuvalle jakaumalle odotusarvo saadaan satunnaismuuttujan X tiheysfunktion $f(x)$ avulla,

$$(2.9) \quad E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Varianssilla kuvataan satunnaismuuttujan hajonnan mittaa. Varianssi saadaan satunnaismuuttujan toisen momentin $E[X^2]$ ja odotusarvon neliön $E[X]^2$ erotuksesta:

$$(2.10) \quad \text{var}(X) = \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2.$$

Luku 3

Mitä ovat stokastiset prosessit?

Stokastiset prosessit kuuluvat matematiikassa todennäköisyyslaskennan osa-alueeseen. Stokastiset prosessit kuvaavat jonkin satunnaisilmiön kehittymistä ajan edetessä. Stokastista prosessia tutkitaan tarkastelemalla muuttujien arvoja eri ajanhetkillä [3]. Stokastiset prosessit ovat siis vain kokoelma satunnaismuuttujia ja niiden analysoinnissa käytetään erilaisia jakaumia [4]. Yleisiä esimerkkejä stokastisista prosesseista on bakteerikannan kasvu tai kaasumolekyylin liike. Molempien esimerkkien ennustettavuus on hankalaa ja niihin liittyy monia erilaisia muuttujia. Määritellään aluksi stokastiset prosessit:

Määritelmä 3.1. Stokastinen prosessi $(x_t)_{t \in T}$ on satunnaismuuttujien x_t , $t \in T$, järjestetty jono, jossa aikaindeksi $t \in T$ määrittää satunnaismuuttujien x_t järjestyksen jonossa.

Käsittelen tutkielmassani lähinnä diskreettejä stokastisia prosesseja, eli aikaindeksit ovat kokonaislukuja, $T \subset \mathbb{Z}$. Stokastisten prosessien kuvailu onnistuu siihen liittyvien satunnaismuuttujien $x_t, t \in T$, tunnusluvuilla:

1. Odotusarvo: $E[x_t] = \mu_t$, $t \in T$.
2. Varianssi: $\text{var}(x_t) = E[(x_t - \mu_t)^2] = D^2(x_t) = \sigma_t^2$, $t \in T$.
3. Kovarianssi: $\text{cov}(x_t, x_s) = E[(x_t - \mu_t)(x_s - \mu_s)] = \gamma_{ts}$, $t, s \in T$.

Tässäkin tutkielmassa käytämme näitä erilaisien stokastisten prosessien läpikäynnissä.

Tärkeimmät ominaisuudet, joita stokastisissa prosesseissa tarkkaillaan, ovat:

1. Niiden aikapisteiden tiheys, joilla tarkkailua tehdään.
2. Kaikkien mahdollisten tutkittavien arvojen joukko ja havaintojen tila, tila-avaruus.
3. Satunnaisuuden eri muodot ja satunnaismuuttujan realisaation arvojen riippuvuudet.

4. Tarpeeksi suuri määrä kopioita prosesseista, jotta mallinnukseen saadaan riittävästi tietoa.

Käsitellään vielä hieman lisää näitä alakohtia.

3.1 Ajan osuus stokastisissa prosesseissa

Kuten jo aiemmin mainittiin, stokastisia prosesseja tutkitaan ajan edetessä. Havaintoja voidaan ottaa tasaisin väliajoin, jolloin aika on diskreettiä. Muussa tapauksessa havainnottava aika on jatkuvaa. Täysin jatkuvalla ajalla havaintoja ei kuitenkaan voida tehdä, sillä havaintoja tulisi tehdä ääretön määrä pienelläkin havaintovälillä. Diskreetin ajan mallit vaativat tasaisesti jaoteltuja havaintovälejä. Jatkuvan ajan malleja voidaan käyttää kaikkeen dataan, mutta niiden rakentaminen saattaa olla kompleksisempää. Huomio stokastisissa prosesseissa voi keskittyä eri asioihin, kuten:

1. havaintojen tila eri aikapisteissä,
2. tapahtumat eli havaintojen tilojen muutokset eri aikapisteissä tai
3. tapahtumien ilmaantumisaajat.

Esittelen kaksi yksinkertaista esimerkkiä:

- Voimme mitata jonkin alan työttömyyttä kuukausittain, missä aika on vain tasavälein jakautunut indikaattori, jolla havainnointia tehdään. Työttömyyden määrä voi vaihdella mitattuina kuukausina. Tällaisessa tilanteessa voimme kiinnittää huomiota esimerkiksi työttömyyden määrään, eli havaintojen tilaan tai muutoksen suuruuteen eli havaintojen tilojen muutoksiin.
- Kuvitellaan tilanne, jossa lääkäri tallentaa potilaan toistuvia infektioita. Tällöin havaintojen tila voidaan esimerkiksi määritellä infektioiden kokonaismääräksi ennen jokaista aikapistettä. Jokainen havainnointikerta on sama tapahtuma, potilas saa infektion. Tärkeää tilanteessa on infektioiden välinen aika.

3.2 Tila-avaruus stokastisissa prosesseissa

Kaikissa prosessin aikapisteissä prosessilla on jokin tila. Prosessin eri tiloja havainnoidaan tallentamalla vastemuuttujaa y_t arvoja ajan hetkellä t . Kaikkien mahdollisten tilojen joukkoa kutsutaan tila-avaruudeksi. Tila-avaruus voi olla rajoitettu, jolloin se tuottaa kategorisoidun vastemuuttujan, tai päättymätön tuottaen diskreetin tai jatkuvan vastemuuttujan. Jatkuvan vastemuuttujan tallentaminen on kuitenkin empiirisesti mahdotonta, sillä jokainen tallennus olisi tapahtuma, joista yksikään ei olisi samanlainen.

Kategorisoidulla tuloksella tarkoitetaan yleensä rajoitettua määrää erilaisia mahdollisia prosessin tiloja, joita tarkkaillaan. Kuitenkin yleensä kiinnostus keskittyy yhteen tiettyyn vastauksen tilaan ja tuloksia tallennetaan binäärisesti. Joissakin tilanteissa saatetaan määrittää useampi vastemuuttuja. Tällöin y_t on vektori sisältäen useampia arvoja. Esimerkkinä saatamme määrittää kategorisoidun arvon, kuten binääri-indikaattorin, jolla määritetään sataako vai ei, lisäksi kvantitatiivinen arvo sateen määrästä. Useimmiten jatkuvia malleja voidaan soveltaa diskreetteihin malleihin.

3.3 Satunnaisuus stokastisissa prosesseissa

Stokastisiin prosesseihin kuuluu satunnaisuus tai arvaamattomuus. Empiirisessä havainnoinnissa satunnaisuus voidaan rinnastaa tietämättömyyteen. Tällaista tietämättömyyttä pyritään käsittelemään todennäköisyysteorialla. Stokastisilla prosesseilla ei pystytä määrittämään tarkkoja lopputuloksia, mutta niiden todennäköisyyksiä voidaan kuitenkin laskea.

Stokastisiin prosesseihin voi sisältyä satunnaisuuden erilaisia muotoja, joiden määrä voi kasvaa tarkkailumenetelmien epätarkkuuksista riippuen. Kuitenkin tieteellisessä mallintamisessa keskitytään prosessin kannalta tärkeimpään satunnaisuuteen.

Satunnaisuuden eri tyypit, jotka pitää sisällyttää stokastisen prosessin mallinnukseen, voivat olla muun muassa seuraavista lähteistä:

1. Monissa tieteellisissä systeemeissä on vaihtelua, jota ei ole mahdollista mitata. Esimerkiksi kvanttimekaniikassa ja monissa biologisissa prosesseissa.
2. Lähes poikkeuksetta kaikkia prosessin määrittäviä mitattavia tekijöitä ei voida ottaa huomioon. Esimerkkinä ympäristön olosuhteet voivat muuttua prosessin aikana.
3. Alkuolosuhteita voi olla hankala määrittää tarkasti.

Valitettavasti epäsopeva malli voi myös luoda ylimääräistä satunnaisuutta. Usein stokastisten prosessien mallintamisessa käytetään muun muassa Poissonin, binomi- ja normaalijakaumaa.

3.4 Stationaarisuus ja tasapaino

Stokastisen prosessin saamat arvot y_t ovat harvoin riippumattomia. Siksi käytetyillä menetelmillä on oltava mahdollista luoda asianmukaisia riippuvuuksia [3]. Tieteessä yritetään välttää liian kompleksisia malleja, joten tavoitteena on käyttää mahdollisimman yksinkertaisia menetelmiä. Stokastinen prosessi $(x_t)_{t \in T}$ on stationaarinen, jos [12]:

1. Odotusarvo ei riipu ajasta:

$$E(x_t) = \mu \quad \text{kaikilla } t \in T.$$

2. Varianssi on äärellinen, eikä riipu ajasta:

$$\text{var}(x_t) = \sigma^2 < \infty \quad \text{kaikilla } t \in T.$$

3. Satunnaismuuttujien x_t ja x_s välinen kovarianssi ei riipu ajanhetkistä t ja s , vaan ainoastaan näiden aikojen erotuksesta:

$$\text{cov}(x_t, x_s) = \gamma_{t-s} \quad \text{kaikilla } t \in T.$$

Näiden ominaisuuksien perusteella stokastista prosessia voidaan kutsua heikosti stationaariseksi. Stokastinen prosessi $X(t)$ on vahvasti stationaarinen, jos sen kertymäfunktio on invariantti ajan siirron suhteen. Toisin sanoen prosessi $X(t)$ kertymäfunktioilla $F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)$ on vahvasti stationaarinen jos kertymäfunktio on identtinen millä tahansa mielivaltaisella $X(t+\varepsilon)$. Näin ollen vahvasti stationaarisella prosessilla pätee

$$(3.2) \quad F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon)$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Stokastinen prosessi ei välttämättä ole stationaarinen alkaessaan. Se saattaa saavuttaa tasapainotilan riittävän ajan kuluessa riippumatta alkuolosuhteista. Toisin sanoen, kun tasapainotila on saavutettu, todennäköisyys, että prosessi on kussakin tietyssä tilassa tai kussakin tilassa vietetyn ajan osuus suppenee vakioksi, riippumatta lähtöolosuhteista.

Luku 4

Bernoullin prosessi

Bernoullin prosessi on sveitsiläisen matemaatikko Jacob Bernoullin mukaan nimetty stokastinen prosessi. Kyseinen prosessi on yksi yksinkertaisimmista stokastisista prosesseista. Bernoullin prosessi käsittelee yleisesti ottaen binääristä satunnaismuuttujaa eli se ottaa vain kaksi arvoa, yleensä 0 ja 1. Molemmilla tapahtumilla on oma todennäköisyytensä. Bernoullin prosessi koostuu joukosta riippumattomia Bernoullin kokeita.

4.1 Bernoullin koe ja Bernoullin jakauma

Bernoullin koe määritellään kokeena, jonka mahdollisia lopputuloksia ovat: onnistuminen ja epäonnistuminen. Esimerkkinä on kolikonheitto, jossa lopputuloksena on kruuna tai klaava. Bernoullin kokeessa epäonnistuminen ja onnistuminen määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}P[\text{Onnistuminen}] &= p, & 0 < p < 1, \\P[\text{Epäonnistuminen}] &= 1 - p.\end{aligned}$$

Määritellään Bernoullin koe satunnaismuuttuja X kanssa, jolloin kokeen tuloksen ollessa onnistuminen, $X = 1$, ja kokeen ollessa epäonnistuminen $X = 0$. Satunnaismuuttujaa X kutsutaan Bernoullin satunnaismuuttujaksi. Sen pistetodennäköisyysfunktio saadaan:

$$(4.1) \quad p_X(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

Pistetodennäköisyysfunktio voidaan esittää kuten kuvassa 4.1. Kertymäfunktio puolestaan saadaan seuraavasti:

$$(4.2) \quad p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ p, & x \geq 1. \end{cases}$$

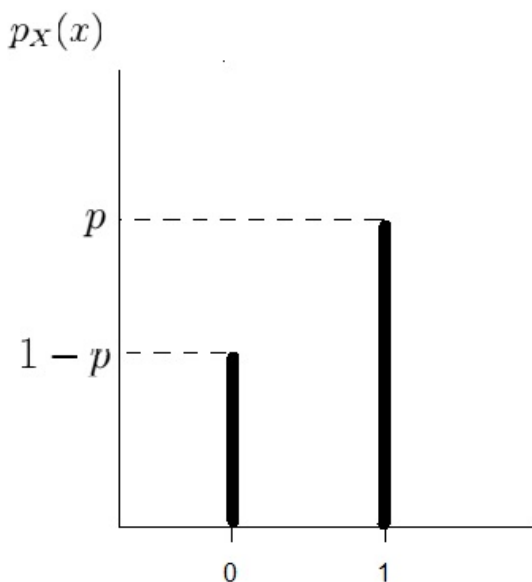
Odotusarvo satunnaismuuttujalle X on

$$(4.3) \quad E[X] = 0(1 - p) + 1(p) = p.$$

Varianssi lasketaan odotusarvon avulla:

$$(4.4) \quad \sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = 0^2(1 - p) + 1^2(p) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Kuva 4.1: Bernoullin kokeen pistetodennäköisyysfunktio



4.2 Binomijakauma

Kuvitellaan tilanne, jossa teemme n määrän Bernoullin kokeita ja kuvaamme onnistumisten määrää kokeissa satunnaismuuttujalla $X(n)$. Tällöin satunnaismuuttuja $X(n)$ on binomijakautunut parametreilla (n, p) . Pistetodennäköisyysfunktio satunnaismuuttujalle $X(n)$ saadaan seuraavasti:

$$(4.5) \quad p_{X(n)}(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, x = 0, 1, \dots, n.$$

Binomilauseen avulla saadaan

$$\sum_{x=0}^n p_{X(n)}(x) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1.$$

Odotusarvo binomijakaumalle voidaan johtaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} E[X(n)] &= \sum_{x=0}^n x p_{X(n)}(x) = \sum_{x=0}^n x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n x \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^n \frac{n!}{(n-x)!(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=1}^n \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^x (1-p)^{n-x} = np \sum_{x=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Olkoon $m = x - 1$, jolloin $x = 1$ kun $m = 0$, jos myös $x = n$ kun $m = n - 1$. Tällöin saamme

$$\begin{aligned} E[X(n)] &= np \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-m-1)!m!} p^m (1-p)^{n-m-1} = np \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m (1-p)^{n-m-1} \\ &= np [p + (1-p)]^{n-1} = np(1)^{n-1} \\ &= np. \end{aligned}$$

Varianssia varten selvitetään ensin toinen momentti:

$$\begin{aligned} E[X(n)\{X(n) - 1\}] &= \sum_{x=0}^n x(x-1) p_{X(n)}(x) = \sum_{x=0}^n x(x-1) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \frac{x(x-1)n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= p^2 \sum_{x=2}^n \frac{x(x-1)n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!x(x-1)(x-2)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x} \\ &= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-x)!(n-2)!} p^{x-2} (1-p)^{n-x}. \end{aligned}$$

Olkoon $m = x - 2$, jolloin kun $x = 2$, niin $m = 0$, ja kun $x = n$, niin $m = n - 2$. Tällöin saamme

$$\begin{aligned}
 E[X(n)\{X(n) - 1\}] &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-m-2)!m!} p^m (1-p)^{n-m-2} \\
 &= n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n-2}{m} p^m (1-p)^{n-m-2} \\
 &= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} \\
 &= n(n-1)p^2.
 \end{aligned}$$

Koska $E[X(n)X(n) - 1] = E[X^2(n)] - E[X(n)]$, niin

$$E[X^2(n)] = E[X(n)\{X(n) - 1\}] + E[X(n)] = n(n-1)p^2 + np.$$

Näin ollen saamme varianssin:

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad \text{var}(X(n)) &= \sigma_{X(n)}^2 = E[X^2(n)] - (E[X(n)])^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
 &= np(1-p).
 \end{aligned}$$

Esimerkki 4.7. Kuvitellaan tilanne, jossa sarja riippumattomia kolikonheittoja todennäköisyydellä p saadaan kruuna millä tahansa heitolla. Olkoon Y_n kruunien määrä, määrän n heittoa jälkeen. Arvioidaan todennäköisyyttä tapahtumalle $Y_{10} = 8$.

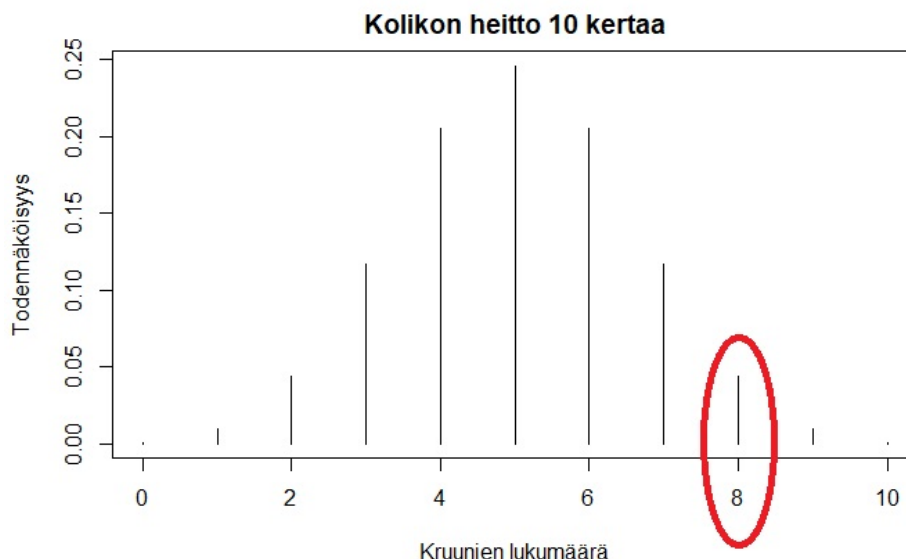
$$\begin{aligned}
 P[Y_{10} = 8] &= \binom{10}{8} 0.5^8 (1-0.5)^2 \\
 &= 45 \cdot 0.5^8 (0.5)^2 \\
 &= 0.0439453125.
 \end{aligned}$$

Kuvassa 4.1 on esitetty tilanne binomijakaumana.

4.3 Geometrinen jakauma

Bernoullin kokeissa käytetään geometrista jakaumaa kuvaamaan kokeiden määrää kunnes onnistutaan ensimmäisen kerran. Olkoon X satunnaisuuttuja, joka kuvaa kokeiden määrää ensimmäiseen onnistumiseen asti, mukaanlukien ensimmäinen onnistuminen. Ensimmäisen onnistumisen tullessa kokeessa x , tiedämme epäonnistumisia olleen $x - 1$.

Kuva 4.2: Esimerkki binomijakaumasta



Koska kokeet ovat riippumattomia, pistetodennäköisyysfunktio satunnaismuuttujalle X saadaan:

$$(4.8) \quad p_X(x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1, 2, \dots,$$

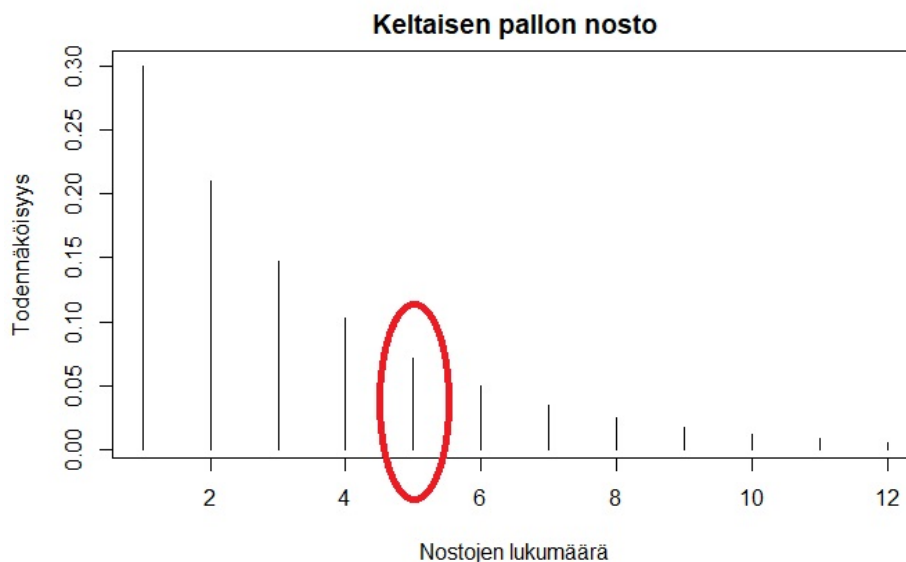
missä p on onnistumisen todennäköisyys. Kuten kuvasta 4.3 huomataan, pistetodennäköisyysfunktio on eksponentiaalisesti laskeva x :n kasvaessa.

Esimerkki 4.9. Repussa on 7 sinistä ja 3 keltaista palloa. Palloja nostetaan satunnaisesti repusta yksi kerrallaan, kunnes keltainen pallo nostetaan. Jokaisen noston jälkeen nostettu pallo korvataan ennen seuraavaa nostoa. Millä todennäköisyydellä ensimmäinen keltainen pallo nostetaan viidennellä yrityksellä. ratkaisu: Olkoon X nostojen kunnes haluamme nostaa keltaisen pallon. Koska pallot korvataan aina noston jälkeen, todennäköisyys keltaisen pallon nostolle pysyy vakiona $p = 3/10 = 0.3$. Sininen pallo nostetaan todennäköisyydellä $1-p = 0.7$. Ennen onnistumista tulisi siis nostaa sininen pallo 4 kertaa ennen keltaista palloa. Tällöin haluttu todennäköisyys saadaan:

$$(4.10) \quad P[X = 5] = p_X(5) = p(1-p)^{5-1} = p(1-p)^4 = (0.3)(0.7)^4 = 0.07203.$$

Kuvassa 4.3 geometrinen jakauma keltaisen pallon ensimmäisen noston todennäköisyydelle.

Kuva 4.3: Esimerkki binomijakaumasta



4.4 Bernoullin prosessin määritelmä

Määritelmä 4.11. Bernoullin prosessi on joukko satunnaismuuttujia $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$. Joukko itsenäisiä Bernoullin kokeita on X_i . Jokaisessa kokeessa X_i :

$$P(X_i = 1) = P(\text{onnistuminen kokeessa } i) = p,$$

$$P(X_i = 0) = P(\text{epäonnistuminen kokeessa } i) = 1 - p, \text{ missä } 0 < p < 1.$$

Bernoullin kokeessa on n määrä kokeita, joista jokaisella kokeella on vaihtoehtona onnistuminen tai epäonnistuminen. Onnistumisen todennäköisyyttä merkitään todennäköisyydellä p ja epäonnistumista todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Jokainen koe on riippumaton, eli se ei ole riippuvainen muiden kokeiden tuloksista. Oletetaan myös, että jokaisessa kokeessa todennäköisyys p pysyy samana, eikä se ole riippuvainen i :stä. Satunnaismuuttujan X noudattaessa Bernoullin jakaumaa, sen odotusarvo ja varianssi määritellään seuraavasti:

$$E(X) = p \quad \text{ja} \quad \text{var}(X) = pq,$$

sillä

$$E(X) = p \cdot 1 + q \cdot 0 = p, \quad E(X^2) = p \cdot 1^2 + q \cdot 0^2 = p$$

ja

$$\text{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Esimerkki 4.12. Heitetään kolikkoa 10 kertaa ja lasketaan kruunien määriä. Kolikko on painotettu ja todennäköisyys saada kruuna on 0.6 ja klaava 0.4. Jokainen kolikonheitto on koe ja voidaan olettaa, että kokeet ovat riippumattomia. Jokaisessa kokeessa on kaksi mahdollista lopputulosta, kruuna (onnistuminen) ja klaava (epäonnistuminen). Onnistumisen todennäköisyys on $p = 0.6$ ja epäonnistumisen todennäköisyys on $p = 0.4$.

Bernoullin prosessi on sarja satunnaismuuttujia $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$. Esimerkin 3.2 kaltaisissa Bernoullin prosesseissa voimme olla kiinnostuneita esimerkiksi onnistuneiden kokeiden määrästä, niiden määrästä ennen ensimmäistä onnistumista tai k määrän onnistumisia saamiseksi tarvittavan määrän kokeita.

Määritellään satunnaismuuttuja Y_n seuraavasti:

$$Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad n = 1, 2, \dots$$

Tällöin Y_n kuvaa Bernoullin kokeiden onnistumisten määrää n määrässä kokeita, jonka tiedämme olevan binomijakautunut. Satunnaismuuttujan Y_n pistetodennäköisyys saadaan tunnetusti seuraavasti:

$$p_{Y_n}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Määritetään satunnaismuuttuja L_1 kuvaamaan testien ensimmäisen onnistumisen aikaa. L_1 on siis kokeiden määrän ensimmäisen onnistumisen saapumiseen asti. L_1 on geometrisesti jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla p , tällöin pistetodennäköisyysfunktio L_1 :lle on:

$$(4.13) \quad p_{L_1}(l) = p(1-p)^{l-1}.$$

Esimerkki 4.14. Kuvitellaan tilanne, jossa sarja riippumattomia kolikonheittoja todennäköisyydellä p saadaan kruuna millä tahansa heitolla. Olkoon Y_n kruunien määrä n määrän heittoa jälkeen. Arvioidaan todennäköisyyttä tapahtumalle $Y_4 = 3, Y_7 = 4, Y_{15} = 10$. Ratkaistaan ongelma tutkimalla seuraavia ei-päällekkäisiä intervaleja ja niihin liittyviä onnistumisten määriä.

$$Y_4 = 3, Y_7 - Y_4 = 1, Y_{15} - Y_7 = 6.$$

Nämä ei-päällekkäiset intervallit $Y_4, Y_7 - Y_4$ ja $Y_{15} - Y_7$ ovat riippumattomia binomijakautuneita satunnaismuuttujia, joten

$$\begin{aligned} P[Y_4 = 3, Y_7 = 4, Y_{15} = 10] &= P[Y_4 = 3, Y_7 - Y_4 = 1, Y_{15} - Y_7 = 6] \\ &= P[Y_4 = 3]P[Y_7 - Y_4 = 1]P[Y_{15} - Y_7 = 6] \\ &= \binom{4}{3} p^3 (1-p) \binom{3}{1} p (1-p)^2 \binom{8}{6} p^6 (1-p)^2 \\ &= 336 p^{10} (1-p)^5. \end{aligned}$$

Luku 5

Satunnaiskulku

Satunnaiskulku esittää satunnaisesti otettuja askelia jossakin matemaattisessa avaruudessa. Kuvitellaan Bernoullin kokeita, joissa p on onnistumisen todennäköisyys ja $p - 1$ kuvaa epäonnistumisen todennäköisyyttä. Koe tehdään jokaisessa ajan T hetkessä ja X_k kuvaa kokeen k lopputulosta. Oletetaan siis pistetodennäköisyysfunktion olevan seuraavanlainen:

$$p_{X_k}(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = -1, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

Määritellään satunnaismuuttuja Y_n seuraavasti:

$$(5.1) \quad Y_n = \sum_{k=1}^n X_k = Y_{n-1} + X_n, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ missä } Y_0 = 0.$$

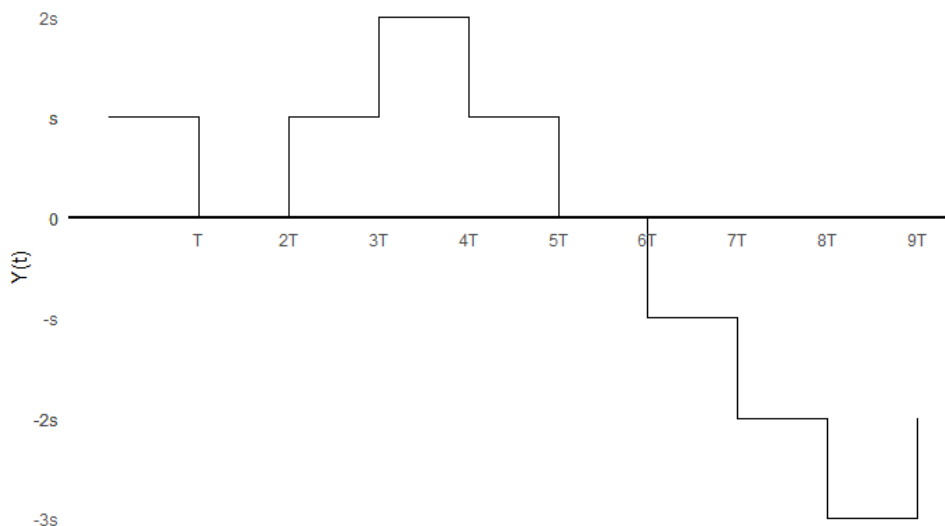
Käytetään X_k mallintamaan prosessia, jossa kokeen k ollessa onnistuminen, otetaan askel oikealle ja epäonnistuessa otetaan askel vasemmalle. Tällöin satunnaismuuttuja Y_n kuvaa prosessin tilaa suhteessa aloituspisteeseen kokeen n jälkeen yksiulotteisessa avaruudessa. Tuloksena saatavaa kuvaajaa xy -koordinaatistossa, missä x kuvaa aikaa ja y kuvaa sijaintia annetun ajan hetkellä, kutsutaan yksiulotteiseksi. Yhtälöstä (5.1) voimme tehdä yleisemmän määritelmän satunnaiskulusta prosessina, missä sen hetkinen satunnaismuuttujan arvo on edellisten arvojen ja uuden havainnon summa. Olkoon siis X_1, X_2, X_3, \dots sarja riippumattomia ja identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia. Jokaiselle kokonaisluvulle $n > 0$, olkoon $Y_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$. Tällöin sarjaa osittaisia summia Y_1, Y_2, Y_3, \dots kutsutaan satunnaiskuluksi.

Määrittelemme satunnaisprosessin

$$Y(t) = Y_n, \quad n \leq t \leq n + 1.$$

Tällöin kuva 5.1 näyttää esimerkkipolun Y_t , missä jokaisen askeleen pituus on s . Se

Kuva 5.1: Esimerkkipolku satunnaiskulusta



on portaikko, jossa on epäjatkuvuuksia hetkillä $t = kT$, $k = 1, 2, \dots$. Oletetaan, että hetkellä n on täsmälleen k määrää onnistumisia. Tällöin meillä on k askelta oikealle ja $n - k$ askelta vasemmalle. Siten

$$(5.2) \quad Y(nT) = ks - (n - k)s = (2k - n)s \equiv rs,$$

missä $r = 2k - n$. Tällöin $Y(nT)$ on satunnaismuuttuja, joka olettaa arvot rs , missä $r = n, n-2, n-4, \dots, -n$. Tämä tarkoittaa, että tapahtuma $\{Y(nT) = rs\}$ on $\{k$ onnistumista n määrässä tapahtumia $\}$, missä $k = (n + r)/2$. Nyt voimme muodostaa:

$$(5.3) \quad P[Y(nT) = rs] = P\left[\frac{n+r}{2} \text{ onnistumista}\right] = \binom{n}{\frac{n+r}{2}} p^{\frac{n+r}{2}} (1-p)^{\frac{n-r}{2}}.$$

Huomioidaan myös, että $n + r$ täytyy olla parillinen luku. Koska $Y(nT)$ on summa n määrästä riippumattomia Bernoullin satunnaismuuttujia, odotusarvo ja varianssi saadaan seuraavasti:

$$(5.4) \quad E[Y(nT)] = nE[X_k] = n[ps - (1-p)s] = (2p-1)ns,$$

$$(5.5) \quad E[X_k^2] = ps^2 + (1-p)s^2 = s^2,$$

$$(5.6) \quad \sigma_{Y(nT)}^2 = n\sigma_{X_k}^2 = n[s^2 - s^2(2p-1)^2] = 4p(1-p)ns^2. [1]$$

Erikoistapauksessa, missä $p = 1/2$, niin $E[Y(nT)] = 0$ ja $\sigma_{Y(nT)}^2 = ns^2$.

5.1 Uhkapelaajan vararikko

Äsken määritellyssä satunnaiskulussa oletetaan, että prosessi voi jatkua loputtoman pitkään. Oletetaan, että satunnaiskulku on rajoitettu, eli sille voidaan määrittää rajat. Rajat voidaan määritellä heijastaviksi, jolloin kulun osuessa rajaan kulku muuttaa suuntaansa. Voimme myös määritellä rajat niin, että kulku loppuu niihin osuttaessa [6].

Kuvitellaan seuraavassa tilanteessa, että kulun osuessa rajaan se pysähtyy. Tällaista tilannetta kutsutaan yleensä nimellä "Uhkapelaajan vararikko". Oletetaan, että uhkapelaaja pelaa sarjan pelejä vastustajaa vastaan. Hänellä on aluksi k euroa ja jokaisessa pelissä hän voittaa 1 euron todennäköisyydellä p ja häviää todennäköisyydellä $q = 1 - p$. Jos $p > q$, pelaaja todennäköisemmin voittaa. Pelaaja voi esimerkiksi olla taitavampi kuin vastustaja tai pelin säännöt ovat pelaajan puolella. Jos $p = q$, peli on reilu, kun taas jos $p < q$, vastustajalla on etu.

Oletetaan, että pelaaja lopettaa, kun hänellä on N euroa, jolloin hänellä on $(N - k)$ euroa aloitusmäärän k euroa lisäksi. Haluamme laskea todennäköisyyden r_k , jolla pelaaja häviää kaikki rahansa.

Huomioidaan, että ensimmäisen pelin jälkeen pelaajalla on $(k + 1)$ euroa, jos hän voittaa ja $(k - 1)$ euroa hänen hävitessään. Näin ollen pelaajan voittaessa ensimmäisen pelin todennäköisyys, että hän häviää kaikki rahansa on r_{k+1} ja häviön tilanteessa r_{k-1} . Tässä ongelmassa on kaksi rajatilannetta.

1. $r_0 = 1$, sillä pelaaja ei voi pelata, jos hänellä ei ole rahaa.
2. $r_N = 0$, sillä hän on hävinnyt kaikki rahansa.

Nyt voimme luoda seuraavan yhtälön:

$$r_k = qr_{k-1} + pr_{k+1}, 0 < k < N.$$

Koska $p + q = 1$, voimme merkitä:

$$(p + q)r_k = qr_{k-1} + pr_{k+1}, 0 < k < N.$$

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa:

$$p(r_{k+1} - r_k) = q(r_k - r_{k-1}),$$

joka saadaan muotoon:

$$r_{k+1} - r_k = (q/p)(r_k - r_{k-1}), 0 < k < N.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
 r_2 - r_1 &= (q/p)(r_1 - r_0) = (q/p)(r_1 - 1), \\
 r_3 - r_2 &= (q/p)(r_2 - r_1) = (q/p)^2(r_1 - 1), \\
 r_4 - r_3 &= (q/p)(r_3 - r_2) = (q/p)^3(r_1 - 1), \\
 &\vdots \\
 r_{k+1} - r_k &= (q/p)^k(r_1 - 1).
 \end{aligned}$$

Nyt,

$$\begin{aligned}
 r_k - 1 &= r_k - r_0 = (r_k - r_{k-1}) + (r_{k-1} - r_{k-2}) + \dots + (r_1 - 1) \\
 &= [(q/p)^{k-1} + (q/p)^{k-2} + \dots + 1](r_1 - 1) \\
 &= \begin{cases} \frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)}(r_1 - 1), & p \neq q, \\ k(r_1 - 1), & p = q. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Rajaehto $r_N = 0$ antaa, että

$$r_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1-(q/p)}{1-(q/p)^N}, & p \neq q, \\ 1 - \frac{1}{N}, & p = q, \end{cases}$$

joten

$$r_k = \begin{cases} \frac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1-(q/p)^N}, & p \neq q, \\ 1 - \frac{k}{N}, & p = q. \end{cases}$$

Esimerkki 5.7. Opiskelija haluaa mennä kylään isovanhemmilleen. Bussilippu maksaa 25 euroa, mutta opiskelijalla on vain 5 euroa. Läheisellä kasinolla on korttipeli, jossa yksi kierros maksaa 1 euron. Voitosta tienaa euron ja häviöstä menettää euron. Opiskelijan pelatessa yhden pelin voiton todennäköisyys on 0,6. Millä todennäköisyydellä opiskelija ei saa tarpeeksi rahaa matkaan? Tässä esimerkissä $k = 5$ ja $N = 25$. Määritetään $a = q/p$, missä $p = 0.6$ ja $q = 1 - p = 0.4$. Tällöin $a = 2/3$ ja todennäköisyys, että hän menettää kaikki rahansa on

$$(5.8) \quad r_{10} = \frac{(q/p)^5 - (q/p)^{25}}{1 - (q/p)^{25}} = \frac{(2/3)^5 - (2/3)^{25}}{1 - (2/3)^{25}} = 0.132\dots \approx 0.13$$

eli opiskelija pääsee suurella todennäköisyydellä matkalle.

Luku 6

Poissonin prosessi

Poisson-prosessia käytetään useimmiten jonoon saapumisen mallintamisessa [5]. Poissonin prosessia voidaan esimerkiksi käyttää satunnaistapahtumien mallintamiseen, kuten asiakkaan saapuminen liikkeeseen. Ennen Poissonin prosessin määrittelyä, käsitellään muutama perusmääritelmä.

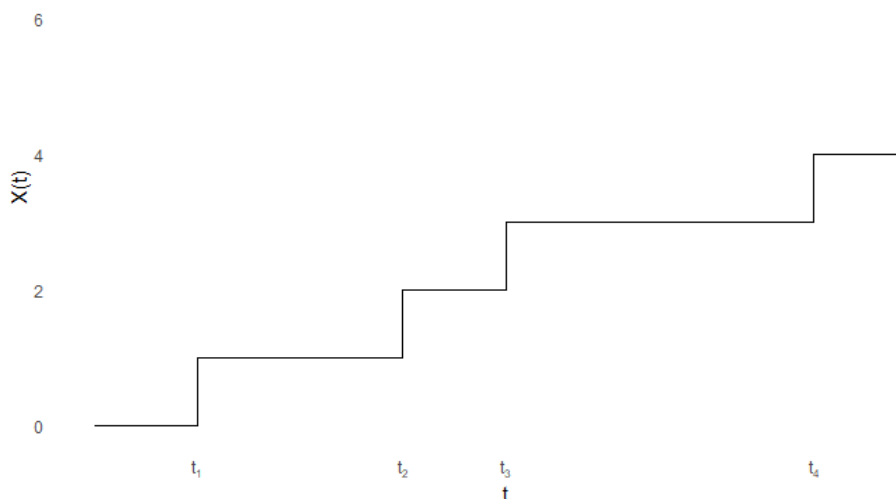
6.1 Laskuriprosessi

Satunnaisprosessi $X(t)$, $t \geq 0$ on laskuriprosessi, jos $X(t)$ kuvaa tapahtumien kokonaismäärää, jotka ovat ilmentyneet välillä $[0, t)$. Esimerkkinä laskuriprosessista on asiakkaiden saapuminen kauppaan sen aukeamisesta johonkin ajanhetkeen t . Laskuriprosessi noudattaa seuraavia vaatimuksia:

1. $X(t) \geq 0$, joten tapahtumat eivät saa negatiivisia arvoja.
2. $X(0) = 0$, eli tapahtumat alkavat ajan hetkellä 0.
3. $X(t)$ saa vain kokonaislukuarvoja.
4. Jos $s < t$, niin $X(s) \leq X(t)$. Tällöin funktio on kasvava ajan suhteen.
5. $X(t) - X(s)$ kuvaa niiden tapahtumien määrää, jotka tapahtuvat aikavälillä $[s, t]$

Kuvassa 8.1 on esimerkipolku laskuriprosessista. Ensimmäinen tapahtuma on ajan hetkellä t_1 . Seuraavat tapahtumat ovat ajanhetkillä t_2, t_3, t_4 . Tällöin tapahtumien määrä välillä $[0, t_4]$ on neljä.

Kuva 6.1: Laskuriprosessin esimerkkipolku



6.2 Riippumattomien lisäysten prosessit

Laskuriprosessi määritellään riippumattomien lisäysten prosessiksi, jos tapahtumien määrät erillisillä aikaväleillä ovat riippumattomia satunnaismuuttujia. Esimerkiksi kuvassa 7.1 voidaan tarkastella kahta erillistä aikaväliä $[0, t_1]$ ja $[t_2, t_4]$. Jos tapahtumien määrät molemmilla aikaväleillä ovat riippumattomia toisistaan, niin prosessi on riippumattomien lisäysten prosessi. Tällöin $\{X_t, t \geq 0\}$ on riippumattomien lisäysten prosessi, jos jokaiselle ajanhetkelle $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ lisäykset $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ ovat keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia.

6.3 Stationaariset lisäykset

Laskuriprosessilla $\{X(t), t \geq 0\}$ on stationaariset lisäykset, jos jokaisella ajanhetkellä $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$ lisäykset $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(t_n) - X(t_{n-1})$ ovat identtisesti jakautuneet [1]. Yleisesti odotusarvo riippumattomien lisäysten prosessille $\{X(t)\}$ stationaarisilla lisäyksillä on muodossa

$$(6.1) \quad E[X(t)] = mt,$$

missä vakio m on odotusarvo ajanhetkellä $t = 1$. Eli $m = E[X(1)]$. Myös varianssi saadaan muotoon

$$(6.2) \quad \text{Var}[X(t)] = \sigma^2 t,$$

missä vakio σ^2 on varianssi ajanhetkellä $t = 1$, eli $\sigma^2 = \text{Var}[X(1)]$.

6.3.1 Poissonin jakauma

Diskreettiä satunnaismuuttujaa K kutsutaan Poissonin satunnaismuuttujaksi parametrilla λ , missä $\lambda > 0$, jos sen pistetodennäköisyys on muotoa:

$$(6.3) \quad p_K(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Kertymäfunktio puolestaan saadaan seuraavasti:

$$(6.4) \quad F_K(k) = P[K \leq k] = \sum_{n=0}^k \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

Odotusarvo satunnaismuuttujalle K saadaan muotoon:

$$\begin{aligned} E[K] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Toinen momentti satunnaismuuttujalle K on muodossa:

$$E[K^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^{k-1}}{(k-1)!},$$

mutta

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{\lambda} \\ \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{d}{d\lambda} \{\lambda e^{\lambda}\} = e^{\lambda}(1 + \lambda). \end{aligned}$$

Näin ollen toinen momentti saadaan muotoon:

$$(6.5) \quad E[K]^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} (1 + \lambda) = \lambda^2 + \lambda,$$

joten varianssi satunnaismuuttujalle K on:

$$(6.6) \quad \text{var}(K) = \sigma_k^2 = E[K^2] - (E[K])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Esimerkki 6.7. Matin kiinteistövälitysfirma myy keskimäärin 2 taloa päivässä. Millä todennäköisyydellä firma myy 3 taloa huomenna? Odotusarvo myynnille on $E[K] = \lambda = 2$. Tutkittu määrä myytyjä taloja on $k = 3$. Tällöin

$$(6.8) \quad p_K(k) = p_K(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.180.$$

6.4 Poissonin prosessin määritelmät

Nyt voimme määritellä Poissonin prosessin. Määritellään prosessi kahdella eri tavalla, joista ensimmäinen menee seuraavasti. Poissonin prosessi on laskuri prosessi $\{X(t)\}$, missä tapahtumien määrä millä tahansa välillä $(0, t)$ on Poisson jakautunut odotusarvolla λt . Tällöin kaikilla $s, t > 0$,

$$(6.9) \quad P[X(s+t) - X(s) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Määritellään Poissonin prosessi $\{X(t)\}$ myös seuraavasti. Olkoon prosessi laskuri prosessi stationaarisilla ja riippumattomilla lisäyksillä. Tällöin saapumisintensiteetille $\lambda > 0$ pätee:

1. $P[X(t + \Delta t) - X(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$. Tämä tarkoittaa, että yhden tapahtuman todennäköisyys pienellä aikavälillä on arviolta $\lambda \Delta t$, missä $o(\Delta t)$ on funktio, joka lähestyy nollaa nopeammin kuin Δt . Tällöin $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.
2. $P[X(t + \Delta t) - X(t) \geq 2] = o(\Delta t)$, jolloin kahden tai useamman tapahtuman todennäköisyys pienellä aikavälillä Δt on $o(\Delta t)$. Todennäköisyys on siis häviävän pieni.
3. $P[X(t + \Delta t) - X(t) = 0] = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

Asetetaan nyt odotusarvo ja varianssi Poissonin prosessille seuraavasti:

$$(6.10) \quad E[X(t)] = \lambda t,$$

$$(6.11) \quad \text{Var}(X(t)) = \lambda t.$$

Odotusarvon ollessa λt voimme päätellä, että λ on oletettu saapumisten määrä aikayksikössä Poissonin prosessissa. Tästä syystä parametria λ kutsutaan prosessin saapumistiheydeksi. Jos λ on riippumaton ajasta, Poissonin prosessia kutsutaan homogeeniseksi Poissonin prosessiksi. Saapumistiheyden ollessa riippuvainen ajasta esitetään se muodossa $\lambda(t)$. Tällaisia prosesseja kutsutaan epähomogeenisiksi Poissonin prosesseiksi.

Esimerkki 6.12. Erääseen pieneen kalastusliikkeeseen tulee päivässä keskimäärin 4 asiakasta. Millä todennäköisyydellä liikkeeseen tulee eräänä päivänä 6 asiakasta. Odotusarvo tilanteessa on $\lambda = 4$ ja $n = 6$,

$$(6.13) \quad P(n = 6) = \frac{(4)^6}{6!} e^{-4} = 0.1042\dots \approx 0.104.$$

Todennäköisyys 6 asiakkaan saapumiselle on siis vain hieman yli 10%.

Luku 7

Stokastiset prosessit matematiikan lukio-opetuksessa

Luvussa pohditaan, miten stokastisia prosesseja voitaisiin soveltaa lukion todennäköisyyslaskennan kursseilla. Lukiossa otetaan käyttöön uusi opetussuunnitelma syksystä 2021 alkaen [9]. Ennen syksyä 2021 lukion aloittaneet käyvät lukion loppuun vanhan opetussuunnitelman mukaan, mutta tässä tutkielmassa käsitellään vain uutta opetussuunnitelmaa. Uudessa opetussuunnitelmassa nimitys ”kurssi” on korvattu termillä ”moduuli”. Käsitellyistä stokastisista prosesseista Bernoullin prosessi ja satunnaiskulku yksinkertaisilla esimerkeillä voisivat soveltua lukio-opiskelijoille ja varsinkin pitkän matematiikan opiskelijoille. Opetussuunnitelman sisällöt ja tavoitteet on otettu suoraan lukion uudesta opetussuunnitelmasta [8].

7.1 Pitkän matematiikan opetussuunnitelma

Uuteen opetussuunnitelmaan sisältyy moduuli MAA8 - Tilastot ja todennäköisyys. Moduulin tavoitteissa määritellään kohdat:

- Opiskelija osaa havainnollistaa diskreettiä tilastollista jakaumaa sekä määrittää ja tulkita jakauman tunnuslukuja
- Opiskelija perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja laskusääntöihin
- Opiskelija ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja tulkitsemaan sitä

Kurssin sisällössä on myös määritely:

- binomijakauma

- diskreetti todennäköisyysjakauma
- diskreetin jakauman odotusarvo

Yksinkertaisia stokastisia prosesseja voi soveltaa MAA8 -kurssille, sillä ne sisältävät todennäköisyyslaskennan laskusääntöjä ja diskreettejä todennäköisyysjakaumia. Myös odotusarvoja voidaan selvittää ja laskea. Yksinkertaisena stokastisena prosessina Bernoullin prosessi sisältää binomijakaumia, diskreettejä todennäköisyysjakaumia sekä diskreetin jakauman odotusarvon laskemista, jotka on suoraan määritelty kurssin sisällössä. Esimerkissä (4.7) käytettiin binomijakaumaa ja myös jakauman kuvaajan tulkintaa, jotka löytyvät suoraan opetussuunnitelman tavoitteista ja sisällöstä. Binomijakauma määritellään Bernoullin prosessin kautta ja Bernoullin prosessin määritelmä soveltuisi käytäväksi binomijakauman esittämisen yhteydessä.

7.2 Lyhyen matematiikan opetussuunnitelma

Lyhyen matematiikassa on kaksi todennäköisyyslaskennan moduulia ”MAB5 Tilastot ja todennäköisyys” ja ”MAB9 Tilastolliset ja todennäköisyysjakaumat”. Moduuli MAB5 on kaikille pakollinen, mutta sen sisällössä ei ole stokastisiin prosesseihin soveltuvia aihealueita. Valinnaisessa moduulissa ”MAB9” on määritelty tavoitteissa:

- Opiskelija tutustuu binomijakaumaan matemaattisena mallina
- Opiskelija tietää, kuinka lasketaan tilastollisiin jakaumiin liittyviä tunnuslukuja ja todennäköisyyksiä

Moduulin sisällössä on määritetty seuraavat kohdat:

- Toistokoe
- Binomijakauma

Aivan kuten pitkän matematiikan MAA8- kurssilla, tälläkin kurssilla voidaan käydä Bernoullin prosessia ainakin pintapuolisella tasolla. Satunnaiskulku ei suoraan sovellu opetussuunnitelman tavoitteisiin tai sisältöihin, mutta sen pintapuolinen läpikäynti voisi soveltua lukioon. Varsinkin kappaleessa 5.1 käsitelty ”Uhkapelaajan vararikko” voi herättää mielenkiintoa oppilaissa.

7.3 Tieteellisiä julkaisuja todennäköisyyslaskennan opettamisesta

Ymmärtääksemme jokapäiväiseen elämään kuuluvia satunnaisilmiöitä meidän on opittava joitakin todennäköisyyslaskennan konsepteja. Trevethan, Kataoka ja Oliveira käsittelevät artikkelissaan satunnaiskulun opettamista high schoolissa. High school on rinnastettavissa suomen lukioon, sillä USA:ssa high school kattaa vuosiluokat 9-12. Todennäköisyyslaskennan ymmärtämisen pohjalla on kolme perusasiaa: sattuman käsite, ajatus satunnaiskokeesta sekä todennäköisyyden käsite [13]. Seuraavassa luvussa käsitellään ”Monican satunnaiskulku”, joka auttaa näiden käsitteiden ymmärtämisessä.

Taufiq, Sulistyowati ja Usman käsittelevät artikkelissaan ”Binomial distribution at high school: An analysis based on learning trajectory” high schoolissa tapahtuvaa oppimista binomijakaumaa opetellessa [10]. Artikkelissa nostetaan esille ongelmana opiskelijoiden ymmärrys binomijakaumasta. Jos oppilailta kysytään, mikä on binomijakauma, vastaus on useimmiten:

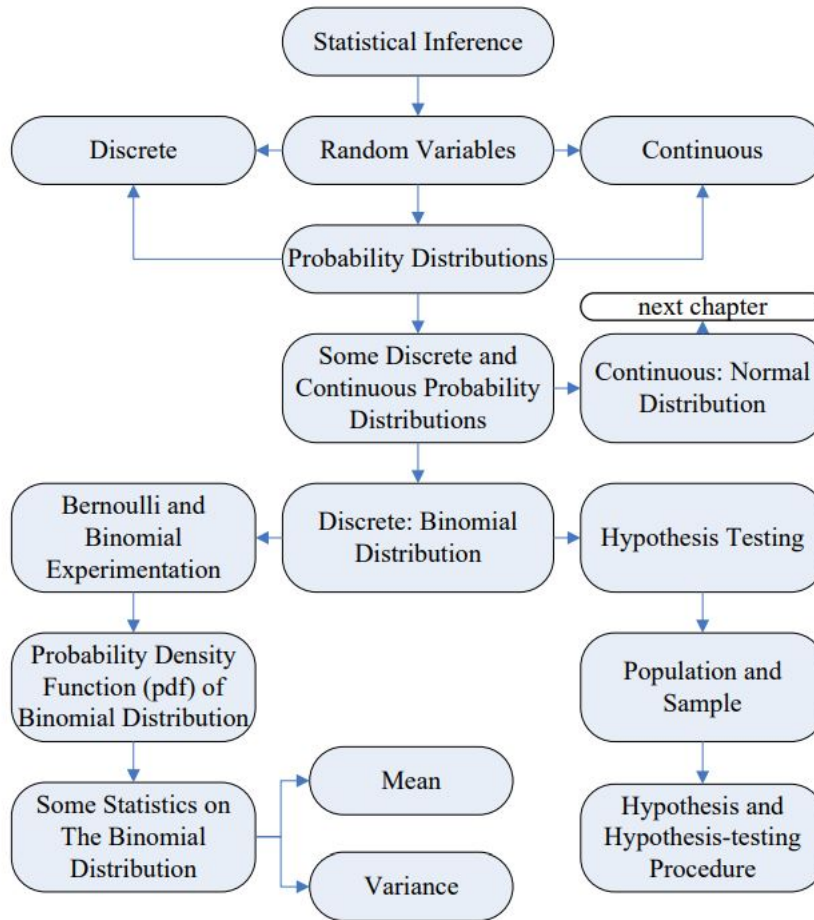
$$\text{”binomijakauma on: } b(n; p, x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n.\text{”}$$

Vastaus ei ole väärin, mutta osoittaa oppilaiden ymmärryksen binomijakaumasta olevan vajavainen. Binomijakauman opetuksessa ei käytetä tarpeeksi selvää rakennetta ja oppiminen tapahtuu ulkoa opettelemalla. Kuvassa 7.1 on malli mahdollisesta oppimispolusta, joka opiskelijoiden pitäisi käydä läpi. Ymmärtääkseen binomijakaumaa on ensin ymmärrettävä satunnaisuuttajat, jotka jaetaan vielä alaluokkiin jatkuvat sekä diskreetit. Tämän jälkeen voidaan siirtyä tutkimaan erilaisia todennäköisyysjakaumia. Binojakauman kautta päästään Bernoullin kokeisiin, joita käsiteltiin luvussa 4.1. Bernoullin toistokokeista on suomalaisissa lukiokirjoissa hyvin vähän mainintoja. Bernoullin kokeet ovat binonilaskennan perusta ja käsitteenä Bernoullin kokeet on hyvä käydä läpi perustasolla. Binomijakauma myös määritellään Bernoullin prosessin kautta, joten sekin on käsitteenä erittäin soveltuva lukion todennäköisyyslaskennan kurssille.

Carmen Batanero ja Manfred Borovenik käsittelevät kirjassaan ”Statistics and probability in high school” erilaisia esimerkkejä todennäköisyyslaskennan opetustilanteista, joiden avulla opettajat voivat kehittää omaa opetustaan. Kirja keskittyy 14-18-vuotiaiden koululaisten opetukseen. Binomijakauman opettamista voi lähestyä tutkimalla sitä ensin käytännössä eli kokeilemalla kolikonheittoa ja taulukoimalla tuloksia [2]. Tämän jälkeen voidaan analysoida tuloksia ja niiden luotettavuutta.

Opettajan tulee aina miettiä, miten asiat opetetaan. Seuraavassa luvussa on kaksi esimerkkiä stokastisten prosessien esille tuomisesta lukion matematiikan opetuksessa.

Kuva 7.1: Binomijakauman oppimispolku (I Taufiq et al 2020)



7.4 Stokastisten prosessien hyödyntäminen lukio-opetuksessa

Stokastisen prosessit ovat todennäköisyyslaskennan osa-alue. Stokastiset prosessit tarkoittavat sattumanvaraisesti eteneviä prosesseja, eli tapahtumia tai tapahtumien sarjaa, jonka lopputulosta ei voida varmasti tietää. Stokastisiin prosesseihin kuuluu paljon erilaisia prosesseja, joista esimerkkeinä toimivat satunnaiskulku ja Bernoullin prosessi. Yksinkertaisin mahdollinen esimerkki Bernoullin kokeesta on kolikonheitto. Kolikkoa heitettäessä, lopputuloksena voi olla kruuna tai klaava. Lopputulosta emme voi tietää varmasti, mutta voimme selvittää sille todennäköisyyden.

Esimerkki 7.1. Jokainen luokan opiskelija heittää kolikkoa 100 kertaa ja taulukoi tu-

Taulukko 7.1: Malli opiskelijan kokoamasta taulukosta

1. Esimerkki yhden opiskelijan 20 ensimmäisestä heitosta					
Heitto		Kruunien määrä otoksissa:			
N	Tulos	5	10	20	
1	0				
2	0				
3	1				
4	0				
5	1	2			
6	1				
7	1				
8	1				
9	0				
10	1	4	6		
11	1				
12	0				
13	0				
14	1				
15	1	3			
16	0				
17	0				
18	1				
19	0				
20	0	1	4	10	

lokset ylös kruunalle arvon 1 ja klaavalle arvon 0. Tämän jälkeen opiskelijat analysoivat saamiaan tuloksia.

1. Jaetaan 100 saatua tulosta 5 ryhmiiin ja määritellään kruunien määrä (0, 1,...,5) jokaisessa otoksessa (taulukossa 7.1 esimerkkinä oppilaan 20 ensimmäistä heittoa).
2. Lasketaan suhteellinen frekvenssi kruunille jokaisessa viiden otoksen joukossa ja käytetään sitä todennäköisyyden p arviointiin. Taulukkoon 7.2 on koottu esimerkki 10 oppilaan saamista tuloksista.
3. Rakennetaan saamistamme tuloksista pylväsdiagrammi ja verrataan sitä ohjelmistolla tehtyyn binomijakaumaan tilanteesta.

Esimerkissä 7.1 käsiteltiin todennäköisyyslaskentaa kirja ”Statistics and probability in high school” esimerkkien mukaan. Esimerkki auttaa havainnollistamaan satunnaismuuttujan ja Bernoullin kokeen käsitettä. Otoskoon kasvaessa todennäköisyys lähestyy bino-

Taulukko 7.2: 10 oppilaan tulokset kokeessa

b. 10 oppilaan havaintojen frekvenssitaulukko			
Todennäköisyyden p arviot 5 heiton otoksista			
Kruunien määrä	Otoksen osuus	Frekvenssi	Suhteellinen frekvenssi
0	0.00	6	0.030
1	0.20	22	0.110
2	0.40	77	0.385
3	0.60	56	0.280
4	0.80	32	0.160
5	1.00	7	0.035
Yhteensä		200	1.000

mijakauman mallia ja pienellä otoskoolla ei saada välttämättä vielä selviä yhteneväisyyksiä. Tapahtumille voidaan laskea todennäköisyyksiä, mutta tehtävä auttaa ymmärtämään satunnaisuuden läsnäolon todennäköisyyslaskennassa. Kuten tutkielman luvussa 3 mainittiin, stokastinen prosessi vaatii tarpeeksi monta kopiota prosessista, jotta sitä voidaan analysoida riittävän luotettavasti.

Bernoullin kokeessa ei kuitenkaan tarvitse olla yhtä suuri todennäköisyys molemmilla vaihtoehdoilla, kuten edellisessä esimerkissä. Bernoullin kokeessa mahdollinen lopputulos on onnistuminen, jota merkitään luvulla 1 ja todennäköisyydellä p tai epäonnistuminen, jota merkitään luvulla 0 todennäköisyydellä $1-p$. Bernoullin kokeita toistettaessa n määrä saadaan aikaiseksi binomijakauma. Binomijakauma määritellään siis Bernoullin prosessin kautta.

Esimerkki 7.2. Jaakko, Pekka ja Marja ovat yhtä taitavia koulussa. Heidän mahdollisuutensa saada vähintään arvosana 9 kokeesta noudattaa Bernoullin jakaumaa todennäköisyydellä 0.8. Mikä on todennäköisyys, että:

1. Täsmälleen yksi heistä saa vähintään arvosanan 9.
2. Täsmälleen kaksi heistä saa vähintään arvosanan 9.
3. Kaikki kolme saavat vähintään arvosanan 9.

4. Kaikki saavat arvosanaa 9 huonomman arvosanan.

Ratkaisu:

Kyseessä on binomijakautunut muuttuja, jota voimme kutsua nimellä B . Tällöin

$$B \sim \text{Bin}(3, 0.8)$$

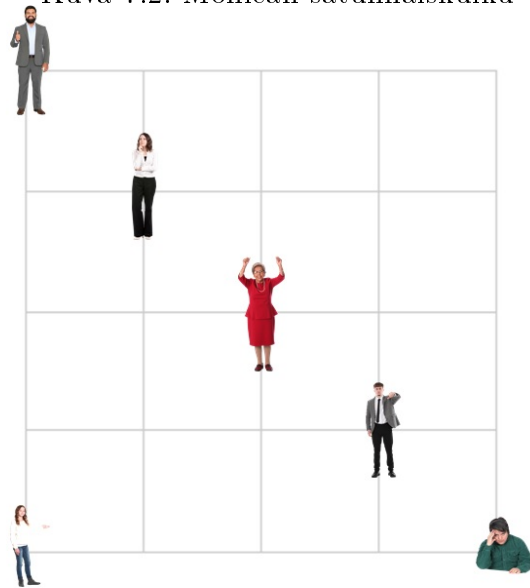
1. Lasketaan todennäköisyys $P(B = 1)$. Jos yksi opiskelijoista onnistuu, kahden muun pitää epäonnistua. Todennäköisyys yhden opiskelija onnistumiselle on siis $0.8 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.032$.
Koska kuka tahansa kolmesta opiskelijasta voi saada arvosanaksi 9, lasketaan:
 $P(B = 1) = 3 \cdot 0.032 = 0.096$.
2. Lasketaan todennäköisyys $P(B = 2)$. Todennäköisyys kahdelle onnistumiselle saadaan seuraavasti: $0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.128$. Tässäkin tehtävässä pitää muistaa, että mahdollisia kombinaatioita on $\binom{3}{2}$, joten $P(B = 2) = \binom{3}{2} \cdot 0.128 = 0.384$.
3. Lasketaan $P(B = 3)$. $P(B = 3) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.512$.
4. Lopuksi lasketaan todennäköisyys $P(B = 0) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 = 0.008$.

Käsitellään lopuksi vielä esimerkkit tehtävä yksinkertaisesta satunnaiskulusta.

Esimerkki 7.3. Monica on kuvassa 7.2 vasemmassa alakulmassa. Hän asuu samalla alueella kavereidensa kanssa, joiden asunnot ovat neljän korttelin päässä Monican talosta. Järjestyksessä vasemmasta yläkulmasta oikeaan allakulmaan asuvat: Ari, Mira, Maarit, Pekka ja Panu. Monica päätti, että hän menee jollekin ystävistään kylään satunnaisuuden avulla. Monica heittää jokaisessa risteyksessä kolikkoa. Kruunan tullessa Monica menee pohjoiseen ja klaavan tullessa Monica menee itään yhden korttelin verran. Tässä tilanteessa ruudut kuvaavat kortteleita. Tehtävässä voitaisiin esimerkiksi selvittää kaikkien reittien määrää tai todennäköisyyksiä, että kenelle kaverilleen Monica päätyy.

Todennäköisyyslaskennassa satunnaisuus ja stokastiset prosessit ovat mukana useissa tehtävissä. Lukio-opetuksessa niitä ei kuitenkaan mainita. Satunnaisuuden parempi ymmärtäminen voisi olla mahdollista varsinkin yllä olevien esimerkkien avulla ja samalla voidaan käydä läpi stokastisten prosessien käsite.

Kuva 7.2: Monican satunnaiskulku



Kirjallisuutta

- [1] Oliver Ibe: Fundamentals of Applied Probability and Random Processes. 2014.
- [2] Carmen Batanero, Manfred Borovenik: Statistics and Probability in High School. 2016.
- [3] James K Lindsey: Statistical Analysis of Stochastic Processes in Time. 2004.
- [4] Ionut Florescu: Probability and Stochastic Processes.
- [5] J. Virtamo: Jonoteoria / Poisson-prosessi, luentomoniste. Aalto yliopisto. n.d.
- [6] Victor Grech ja Neville Calleja: Early Human Development, Volume 123, Pages 46-47. 2018.
- [7] Guy Katriel: Gambler's ruin: the duration of play. 2014
- [8] Opetushallitus 2019: Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.
- [9] Opetushallitus 2019: Lukiokoulutus uudistuu vuonna 2021 - Mikä muuttuu lukiossa?
- [10] Taufiq, I ; Sulistyowati, F ; Usman, A: Binomial distribution at high school: An analysis based on learning trajectory. 2020.
- [11] Delta 4g company: High School Mathematics Extensions. n.d.
- [12] Heikki Seppälä: Ennustaminen ja Aikasarja-analyysi, luentomoniste. Aalto yliopisto. n.d.
- [13] Hugo Mael Hernandez Trevethan, Verônica Yumi Kataoka ja Marcelo Silva de Oliveira: Random walks in teaching probability at the high school. 2010.