HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos/Institution– Department
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä/Författare – Author
Janne Ilari Heitto

Työn nimi / Arbetets titel – Title

Todennäköisyyslaskennan haasteet lukio-opetuksessa

Oppiaine /Läroämne – Subject

Matematiikka

Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages
Pro Gradu -tutkielma	05/2015	50 (+ 5)

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Tutkielman lähtökohtana oli kokemus siitä, että monet lukio-opiskelijat kokevat todennäköisyyslaskennan hyvin erilaisena muuhun lukion matematiikkaan verrattuna ja useimmat pitävät sitä todella haastavana. Tarkoituksena oli selvittää, mistä nämä vaikeudet voisivat johtua, ja pohtia miten asiaan voidaan mahdollisesti lukio-opetuksessa vaikuttaa. Lukion todennäköisyyslaskennan kurssin aihealueista tutkielmassa keskitytään klassiseen todennäköisyyteen ja todennäköisyyden laskusääntöihin. Koska suurin osa todennäköisyyslaskennan tehtävistä on sanallisia tehtäviä, todennäköisyyslaskentaa tarkastellaan myös niiden kautta.

Aikaisemmat tutkimukset osoittavat, että todennäköisyyslaskennan teorian oppimista vaikeuttavat erityisesti opiskelijoiden virheelliset todennäköisyyteen liittyvät ennakkokäsitykset. Ensimmäinen askel todennäköisyyslaskennan opettamisessa tulisikin olla näiden käsitysten korjaaminen, jotta opiskelijat voivat ymmärtää ja hyväksyä teoreettisten mallien perusteet. Sanallisten tehtävien ratkaisemisen on havaittu myös olevan monille opiskelijoille haastavaa todennäköisyyslaskennassa. Sanallisiin tehtäviin liittyvät vaikeudet johtuvat tutkimusten mukaan usein kouluissa opetetuista ratkaisustrategioista. Oppilaita ohjataan käyttämään sanallisten tehtävien ratkaisuissa suoraviivaisia ja kaavamaisia ratkaisumenetelmiä. Näin ollen oppilaiden matemaattinen ajattelu ja ongelman ratkaisuun vaadittavat monipuoliset taidot eivät pääse kehittymään. He pystyvät kyllä ratkaisemaan suoraviivaisesti opettelemiensa mallien mukaisia tehtäviä, mutta eivät osaa soveltaa taitojaan uudenlaisissa tilanteissa. Tähän ongelmaan on tarjottu ratkaisuksi muun muassa matematiikan kielentämisen suurempaa roolia osana opetusta.

Tutkielman tarkoituksen toteuttamiseksi, laadittiin tutkimuslomake, joka teetettiin tammikuussa 2015 Helsingin yliopistossa aloittaneilla matematiikan aineenopettajaopiskelijoilla. Lomakkeella oli lukion todennäköisyyslaskentaan liittyviä taustakysymyksiä, sekä kolme sanallista todennäköisyyslaskennan tehtävää. Vastauksia saatiin yhteensä kahdeksan kappaletta. Lisäksi haastateltiin kahta Johdatus todennäköisyyslaskentaan –kurssilla ohjaajana toiminutta opiskelijaa. Näiden haastattelujen tarkoituksena oli saada laajempi käsitys yliopisto-opiskelijoiden todennäköisyyslaskentaan liittyvistä ongelmista, sekä kartoittaa ohjaajien omia näkemyksiä siitä, miten lukio-opetusta tulisi kehittää näiden vaikeuksien välttämiseksi.

Lomakkeiden ja haastattelujen tuloksista ei noussut esiin mitään yksittäistä lukion todennäköisyyslaskennan osa-aluetta, jossa opiskelijoilla olisi ollut erityisesti hankaluuksia. Sen sijaan lomakkeiden vastauksissa esiintyi ongelmia tasaisesti monien eri käsitteiden kanssa. Tehtävien ratkaisuja analysoitiin jakamalla ne kolmeen eri vaiheeseen. Eniten vaikeuksia esiintyi ratkaisun toisessa vaiheessa, eli tilanteen matemaattisessa mallintamisessa. Nämä ongelmat johtuivat usein todennäköisyyslaskennan käsitteiden puutteellisesta hallinnasta ja olivat jakautuneet tasaisesti kaikkiin kolmeen tehtävään. Ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa, eli sanallisen tehtävän tulkinnassa, suurimmat vaikeudet osuivat ensimmäiseen, viiden nopan heittoa käsittelevään tehtävään. Siinä puolet vastaajista ratkaisit tehtävän muuten oikein, mutta he eivät ottaneet huomioon kolmen saman numeron olevan mahdollisia kaikille kuudella nopan silmäluvulla. Tämä havainto vahvistaa käsitystä siitä, että opiskelijat pyrkivät noudattamaan suoraviivaisesti oppimiaan ratkaisustrategioita, eivätkä välttämättä osaa hahmottaa todellista tilannetta. Ratkaisun kolmannessa vaiheessa, eli varsinaisessa laskemisessa ei esiintynyt juuri ongelmia.

Sekä lomakkeella, että haastatteluilla saadut tulokset noudattivat varsin hyvin aikaisempien tutkimuksien linjaa. Koska otos oli niin pieni, tuloksista ei voida kuitenkaan vetää kovin laajoja ja pitkälle meneviä johtopäätöksiä. Näiden tulosten, sekä teoriatietojen pohjalta voidaan kuitenkin pohtia, miten lukio-opetusta tulisi kehittää, jotta opiskelijoiden todennäköisyyslaskennan oppimistulokset olisivat nykyistä parempia.

Tämän tutkimuksen tulosten, sekä esitetyn teorian perusteella voitaisiin todennäköisyyslaskentaan liittyvät ongelmat lukiossa tiivistää siten, että opiskelijoille ei muodostu selkeää kokonaiskäsitystä todennäköisyyslaskennan teoriasta, eikä se rakennu muiden heidän oppimiensa matemaattisten käsitteiden varaan. Tähän vaikuttavat ainakin virheelliset ennakkokäsitykset, koulumatematiikan yksipuolinen tapa ratkaista sannallisia tehtäviä, todennäköisyyslaskennan vähäinen painoarvo lukiossa, sekä se, että todennäköisyyslaskennan tuloksia ei perustella riittävästi.

Keinoja näiden ongelmien ratkaisemiseen voisivat olla todennäköisyyslaskennan opetuksen lisääminen lukioissa, opiskelijoiden virhekäsitysten kartoittaminen, kokeellisempi lähestymistapa, omaa ajattelua vaativien tehtävien lisääminen muillekin kursseille, sekä kirjallisen kielentämisen systemaattinen opettaminen. Suurin osa näistä menetelmistä vaatii kuitenkin opettajalta paljon ja siinä mielessä ongelma ei ole yksin lukioiden. Myös matematiikan aineenopettajien koulutusta olisi todennäköisyyslaskennan osalta syytä kehittää.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Todennäköisyyslaskenta, sanalliset tehtävät, kielentäminen

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Todennäköisyyslaskennan haasteet lukio-opetuksessa

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Ilari Heitto

Ohjaaja: Juha Oikkonen

Toukokuu 2015

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Todennäköisyyslaskenta on aina kiinnostanut minua, koska se on niin konkreettinen matematiikan osa-alue ja sitä voi soveltaa arkielämässä monissa eri tilanteissa. Olen myös aina ollut kiinnostunut urheilusta ja erilaisista peleistä, joissa voidaan hyödyntää todennäköisyyslaskentaa monella tavalla. Olen kuitenkin huomannut, että yleisesti todennäköisyyslaskenta jakaa ihmisten mielipiteitä hyvin voimakkaasti. Muistan omalta lukioajaltani, kuinka joillekin todennäköisyyslaskennan kurssi oli todella helppo, kun taas monet, jotka pärjäsivät muuten hyvin matematiikassa, olivat sen kanssa suurissa ongelmissa. Omien kokemuksieni perusteella väittäisin, että selkeä enemmistö opiskelijoista koki kuitenkin todennäköisyyslaskennan hankalana. Tähän samaan ilmiöön olen törmännyt myöhemmin myös yliopistolla, opettajan sijaisena, sekä jutellessani tuttavieni kanssa.

Ennen lopullista aiheeni valintaa kyselin vielä joiltakin tuttaviltani, miten he olivat kokeneet todennäköisyyslaskennan lukiossa. Nämä käsitykset vastasivat varsin hyvin omaa kokemustani. Parin ystäväni mielestä kurssi oli ollut helppo ja he kokivat sen mukavan käytännönn läheisenä. Suurin osa tuttavistani piti todennäköisyyslaskentaa kuitenkin todella vaikeana. Lainaan tässä suoraan erään pitkän matematiikan lukeneen ystäväni kommenttia todennäköisyys ja tilastot -kurssista: ”Oli tosi vaikea kurssi, meidän ryhmästä oli kaikki ihan pihalla. Laskut sinänsä yksinkertaisia, mutta tehtävänantoja oli vaikea hahmottaa ja siten lausekkeen muodostaminen oli vaikeaa.” Viimeistään näiden palautteiden perusteella valitsin, että tämä oli sellainen aihe, johon halusin syventyä tarkemmin.

Tässä tutkielmassa pyrinkin selvittämään mikä tekee todennäköisyyslaskennasta erilaista muuhun lukio matematiikkaan verrattuna ja miksi se on joillekin niin vaikeaa. Pohdin myös voitaisiinko tähän vaikuttaa jotenkin opetuksellisin keinoin. Koska työn laajuden kurissa pitämiseksi jonkinlaisia rajauksia on pakko tehdä, keskityn tutkielmassani nimenomaan lukion pitkään matematiikkaan ja senkin osalta tarkastelen erityisesti klassista todennäköisyyttä ja todennäköisyyden laskusääntöjä.

Edellä mainituissa keskusteluissa tuttavieni kanssa huomasin myös, että monien mielestä todennäköisyyslaskennan vaikeudet johtuvat siitä, että on vaikeaa muodostaa sanallisessa muodossa olevasta konkreettisesta ongelmasta matemaattista kaavaa tai lausetta. Tästä syystä lähestyn aihetta osittain kielentämisen ja sanallisten tehtävien kautta. Tämä näkökulma on siinäkin mielessä perusteltu, että lähes kaikki lukion matematiikan todennäköisyyslaskennan tehtävät voidaan luokitella sanallisiksi tehtäviksi.

Tulevana matematiikan aineenopettajana toivoisin, että tämä tutkielma antaisi minulle eväitä auttaa tulevaisuudessa niitä oppilaitani, jotka kokevat todennäköisyyslaskennan haastavaksi. Omien opettajaopintojeni aikana minulle ei ole tullut missään vaiheessa vastaan todennäköisyyslaskentaan liittyviä pedagogisia havaintoja tai näkökulmia. Tässäkin mielessä koen tämän työn tärkeänä ja toivon, että siitä voi olla apua muillekin tuleville opettajille, jotka pohtivat todennäköisyyslaskentaan ja sen opettamiseen liittyviä kysymyksiä.

Luku 2

Todennäköisyyslaskenta

Tässä luvussa esitellään työn taustaksi hieman todennäköisyyslaskennan historiaa ja perusteita, aikaisempia tutkimuksia sekä todennäköisyyslaskennan kurssien sisältöjä lukiossa ja yliopistossa.

2.1 Todennäköisyyslaskennan historiaa

Todennäköisyyslaskennan katsotaan saaneen alkunsa uhkapeleistä ja juuri niihin liittyen todennäköisyyteen liittyviä kysymyksiä on pohdittu pitkään. Varhaisimmista kirjallisista tarkasteluista voidaan mainita italialaisen Cardanon noin vuonna 1526 kirjoittama kirja noppapeleistä, jossa hän esittää mm. todennäköisyyksien kertolaskusäännön. Vielä aikaisemmin on esitetty juutalaisessa laissa, Talmudissa, sääntöjä yhdistettyjen todennäköisyyksien laskemiseksi. Näitä käytettiin hyväksi juridisissa tarkasteluissa. (Lehtinen, 2012.)

Varsinaisen todennäköisyyslaskennan alkuna pidetään Chevalier de Meren Blaise Pascalille (1623-1662) 1600-luvulla esittämää kahta uhkapeleihin liittyvää kysymystä. Pascal käsitteli näitä kysymyksiä kirjeenvaihdossaan Pierre de Fermat'n (1601-1665) kanssa. Ensimmäinen kysymys käsitteli peliä, jossa jokaisessa erässä molemmilla pelaajilla on yhtä suuret mahdollisuudet voittaa. Panoksena olevan rahasumman voittaa se pelaaja, joka ensimmäisenä voittaa kuusi erää. Miten rahat tulisi jakaa, jos peli keskeytetään tilanteessa, jossa toisella on 5 erävoittoa ja toisella 3? Kirjeenvaihdossa molemmat päätyivät siihen tulokseen, että rahat tulisi jakaa suhteessa 7:1, tosin eri tavoilla. Toinen kysymys liittyi kahden nopan heittoon. He pohtivat kuinka monta kertaa noppia pitää heittää, että kannattaisi lyödä vetoa sen puolesta, että sarjassa on kaksoiskutonen. Tähän kysymykseen teoreettisen ratkaisun pystyi 1600-luvun puoli välissä esittämään hollantilainen Christiaan Huygens (1629-1695), joka hyödynsi ratkaisussaan odotusarvon ideaa ja sai vastaukseksi

25. Häntä pidetään Fermat'n ja Pascalin ohella ensimmäisinä klassisen todennäköisyyslaskennan kehittäjinä. 1700-luvun alussa todennäköisyyslaskennan kehitykseen vaikutti merkittävimmin saksalainen Jakob Bernoulli. Häneltä on peräisin muun muassa yleisen binomijakauman käsite ja hänen ansiokseen voidaan laskea myös todennäköisyyskäsityksen laajentaminen pelkistä uhkapeleistä arkitodellisuuteen. (Lehtinen, 2012.)

1700-luvun puolenvälin jälkeen analyysin voimakas kehitys johti myös todennäköisyyslaskennan kehitykseen. Tällä ajanjaksolla todennäköisyyslaskentaan voidaankin liittää samoja nimiä, jotka olivat esillä muidenkin luonnontieteiden yhteydessä: Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827), Simeon Poisson (1781-1840) sekä Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Klassisen todennäköisyyslaskennan rinnalle tuli nyt tilastollisen todennäköisyyden käsite, jota pystyttiin hyödyntämään monissa eri tilanteissa mm. luonnontieteissä ja yhteiskuntatieteissä. Erityisesti tässä voisi nostaa esille normaalijakauman, jolla on hyvin monia eri sovellus mahdollisuuksia. (Lehtinen, 2012.; Koskenoja, 2002.)

1800-luvun alkupuolelle asti todennäköisyyslaskenta kehittyi siis pitkälti analyysin rinnalla ja sen itsenäisen kehityksen voidaan katsoa alkaneen 1800-luvun puolivälissä. Tässä merkittävässä roolissa olivat venäläiset matemaatikot, etunenässä Pafnuti Tsebysev (1821-1894). Hänen ansioikseen lasketaan mm. satunnaismuuttujan ja odotusarvon käsitteiden kehittäminen. Todennäköisyyslaskennan yleisen teorian loivat, niin ikään venäläiset, Andrej Kolmogorov (1903-1987) ja Aleksander Hintsin (1894-1959). Teoria perustuu Kolmogorovin vuonna 1933 julkaisemiin todennäköisyyslaskennan aksioomiin, jotka toimivat edelleen todennäköisyyslaskennan perustana. (Koskenoja, 2002.)

2.2 Klassinen todennäköisyyslaskenta

Klassisessa todennäköisyyslaskennassa tutkitaan tilanteita, tai ilmiöitä, joissa esiintyy satunnaisuutta. Näitä kutsutaan satunnaiskokeiksi. Klassiseen todennäköisyyteen liittyy, että satunnaiskoetta on voitava toistaa samoissa olosuhteissa rajattomasti siten, että toistot ovat toisistaan riippumattomia.

Satunnaikokeen mahdollisia tulosvaihtoehtoja kutsutaan alkeistapauksiksi. Klassisessa todennäköisyydessä alkeistapauksia on aina äärellinen määrä ja ne kaikki toteutvat yhtä suurella todennäköisyydellä, eli ovat symmetrisiä. Tästä esimerkkinä toimii yhden kuusisivuisen nopan heitto. Siinä alkeistapauksia ovat luvut 1,2,3,4,5,6 ja todennäköisyys kaikille luvuille on $\frac{1}{6}$.

Alkeistapauksista muodostettuja mielivaltaisia osajoukkoja kutsutaan todennäköisyyslaskennassa tapahtumiksi, ja niitä merkitään usein isolla alkukirjaimella. Esimerkiksi nopan heitossa merkinnällä, A=[2,4,6], tarkoitetaan tapahtumaa "nopanheiton tulos on parillinen". Yleisesti tapahtuman A klassinen todennäköisyys määritellään lukuna

$$P(A) = \frac{n(A)}{n},$$

jossa n(A) on joukon A alkioden lukumäärä, eli tapahtumalle A suotuisten alkeistapausten lukumäärä, ja n on kaikkien alkeistapausten lukumäärä. Tästä määrittelystä seuraa, että tapahtuman, joka ei sisällä yhtään suotuista alkeistapausta, todennäköisyys on 0, eli tapahtuma on mahdoton ja vastaavasti kaikki alkeistapaukset sisältävän joukon käsittävän tapahtuman todennäköisyys on 1, eli tapahtuma on varma. Kaikkien muiden tapahtumien todennäköisyys on jotain siltä väliltä. Tapahtuman A todennäköisyydelle pätee siis aina

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Klassisen todennäköisyyden määritelmää voidaan sellaisenaan soveltaa vain harvoihin, sen ehdot täyttäviin tilanteisiin. Tämä määritelmä toimii kuitenkin pohjana muun muassa geometrisen todennäköisyyden ja tilastollisen todennäköisyyden käsitteille, joiden avulla voidaan tutkia todennäköisyyksiä myös yleisemmissä tapauksissa, kuten tilanteissa, joissa alkeistapaukset eivät ole identtisiä. (Koskenoja, 2002.)

2.3 Todennäköisyyslaskennan aikaisempaa tutkimusta

Shaugnessy (1990) pyrkii kirjallisuuskatsauksessaan kokoamaan yhteen siihenastisen todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen opettamiseen liittyvän tutkimuksen tuloksia. Kuten edellä esitetystä katsauksesta todennäköisyyslaskennan historiaan käy ilmi, todennäköisyyslaskenta on kehittynyt muihin matematiikan haaroihin verrattuna varsin myöhään. Osittain tästä johtuen todennäköisyyslaskenta on kouluissakin varsin uusi aihe, eikä sille ole annettu muihin matematiikan osa-alueisiin verrattuna kovin paljon painoarvoa. Näin ollen myöskään todennäköisyyslaskennan opettamista ja oppimista ei ole tutkittu kovin paljon. Katsauksessa kuitenkin todetaan, että tulevaisuudessa todennäköisyyslaskennan ja tilastotieteen perusteiden arvo yhteiskunnassamme kasvaa, ja niiden hallintaa vaaditaan monilla eri aloilla. Tästä syystä Shaugnessy pitää sitä monille koululaisille jopa tärkeimpänä matematiikan haaraana, joten myös todennäköisyyslaskennan oppimisen tutkimusta olisi syytä lisätä. Hän jakaa todennäköisyyslaskennan tutkimuksen karkeasti kahteen eri toimintatapaan. Toisessa vain tarkkaillaan ja pyritään selvittämään tutkittavan ryhmän käsityksiä todennäköisyyslaskennasta, kun toisessa mallissa tutkijan ote on osallistuvampi ja hän pyrkii myös vaikuttamaan tutkittavien todennäköisyyslaskentaan liittyviin käsityksiin ja uskomuksiin. Artikkelin mukaan ensimmäistä tapaa hyödyntävät lähinnä psykologit ja jälkimmäistä matematiikan kouluttajat. Yhteistyötä näiden tahojen välillä olisi artikkelin mukaan kehitettävä, jotta päästään parhaaseen mahdolliseen lopputulokseen erityisesti todennäköisyyslaskennan opettamisen kannalta. (Shaugnessy, 1990.)

Kirjallisuuskatsauksessa käsitellyt tutkimukset osoittavat, että merkittävä tekijä, joka vaikuttaa todennäköisyyslaskennan oppimiseen, on oppilaiden virheelliset ennakkokäsitykset. Tämä kävi ilmi useissa erilaisissa tutkimuksissa. Yksi tyypillisimmistä virhekäsityksistä on se, että pienen otoksen pitäisi edustaa koko perusjoukon todennäköisyysjakaumaa. Esimerkiksi kuusilapsisen perheen kohdalla pidetään todennäköisempänä, että kolme lapsista on poikia ja kolme tyttöjä, kuin esimerkiksi tilannetta, jossa kaikki lapset olisivat poikia. Toinen yleinen virhekäsitys on, että jos toistokokeessa yksi vaihtoehto on toistunut useasti peräkkäin, vaihtoehtoisen tapahtuman todennäköisyys kasvaa. Jos esimekiksi kolikolla on heitetty monta klaavaa peräkkäin, monet uskovat, että seuraavaksi kruunan todennäköisyys on suurempi, vaikka todellisuudessa yksittäisen heiton kohdalla todennäköisyydet saada kruuna tai klaava ovat aina yhtä suuret. Monissa tilanteissa myös inhimilliset tekijät vaikuttivat koehenkilöiden vastauksiin tilastollisia faktoja enemmän. Esimerkiksi kokeessa, jossa henkilö valitttiin satunnaisesti joukosta, jossa 70 % oli lakimiehiä ja 30 % insinöörejä, suurin osa vastaajista piti henkilön kuvauksen perusteella todennäköisempänä, että hän oli insinööri. Koehenkilöiden mielipiteisiin vaikutti voimakkaasti sekin, kuinka helppo heidän oli muodostaa esimerkkejä annetuista joukoista. Tästä esimerkkinä suurin osa vastaajista oli sitä mieltä, että kymmenen henkilön joukosta voidaan muodostaa enemmän kahden henkilön pareja, kuin kahdeksan henkilön ryhmiä, vaikka todellisuudessa molempia voidaan muodostaa yhtä monta. Ihmiset perustavat usein arvionsa myös omiin henkilökohtaisiin kokemuksiinsa. Tämän tapaiset virhekäsitykset ovat usein vahvoja, ja niitä voi olla hankala muuttaa. Myös todennäköisyyslaskentaa opiskelleet henkilöt perustivat monissa tilanteissa arvionsa intuitioon matemaattisten mallien sijaan. Heille erityisen vaikeita käsitteitä näyttivät tutkimuksien mukaan olevan riippumattomuus ja ehdollinen todennäköisyys. Esille nousi myös vaikeudet sanallisten tehtävien tulkinnassa. Tähän vaikuttaa erityisesti se, että todennäköisyyslaskennassa on käytössä monia sellaisia termejä, jotka ovat oppilaille arkielämästä tuttuja, mutta joilla on matematiikassa hieman eri merkitys. (Shaugnessy, 1990.)

Matematiikan kouluttajien tekemät tutkimukset jaetaan katsauksessa edelleen kolmeen kategoriaan. Ensimmäisessä kategoriassa pyritään selvittämään, mitä todennäköisyyslaskennan sisältöjä oppilaat pystyvät missäkin iässä sisäistämään, toisessa etsitään yhteyksiä todennäköisyyslaskennan opettamisen sekä oppimisen, ja muiden tekijöiden, kuten asenteen tai matemaatiikan kielen käyttämisen välille ja kolmannessa vertaillaan erilaisten opetuksellisten lähestymistapojen toimivuutta. (Shaugnessy, 1990.)

Fischbein ja Gazit pyrkivät tutkimuksesessaan etsimään vastauksia ensimmäiseen kategoriaan liittyviin kysymyksiin. He järjestivät 10-13 -vuotiaille oppilaille 12 oppituntia sisältäneen todennäköisyyslaskennan kurssin, jossa käsiteltiin todennäköisyyslaskennan perusteita. Oppitunneilla tehtiin myös jonkin verran kokeellista työskentelyä, esimerkiksi heiteltiin noppia ja nosteltiin eri värisiä marmorikuulia. Tutkimukseen osallistui yhteensä noin kolmesataa oppilaista, joille ei oltu aikaisemmin opetettu todennäköisyyslaskentaa. Kurssin jälkeen oppilaat vastasivat kahteen kysymyslomakkeeseen, jotka sisälsivät erilaisia todennäköisyyteen liittyviä tehtäviä. Ensimmäisellä lomakkeella testattiin suoraan heidän kurssilla opiskelemiaan asioita. Toisen lomakkeen tarkoituksena oli selvittää, miten kurssi on vaikuttanut epäsuorasti heidän todennäköisyyteen liittyviin ennakkokäsityksiinsä. Tämän selvittämiseksi lomake teetettiin myös saman ikäisten oppilaiden verrokkiryhmällä, jotka eivät olleet saaneet minkäänlaista todennäköisyyslaskennan opetusta. Ensimmäisen lomakkeen vastauksista näkyi selvästi, että oppilaiden ikä vaikutti oppimistuloksiin merkittävästi. 10-vuotiaista jokaisen kysymyksen kohdalla oikein vastasi selvästi alle puolet oppilaista, kun taas 11-vuotiaista kysymyksestä riippuen oikean vastauksen tiesi 60-70 % vastaajista. 12-13 -vuotiailla vastaava luku oli jo 80-90 %. Tämän perusteella vaikuttaisi siis siltä, että 11-12 vuotta olisi otollinen ikä aloittaa todennäköisyyslaskennan opetus kouluissa. Toisella lomakkeella saadut tulokset olivat vähän ristiriitaisempia. Niissäkin oli nähtävissä iän selvä vaikutus, mutta todennäköisyyslaskennan opettamisen merkitys todennäköisyyskäsityksen kehitykseen ei ollut yhtä selkeä. Joidenkin kysymysten osalta tutkittava ryhmä selvisi kyllä verrokkiryhmää paremmin, mutta esimerkiksi tehtävässä, jossa kysyttiin, onko todennäköisempää voittaa lotossa käyttäen aina samaa riviä, kuin muuttamalla sitä, verrokkiryhmästä useampi vastasi oikein, eli että vaihtamisella ei ole merktystä voiton todennäköisyyteen, kaikissa ikäryhmissä. Näin ollen todennäköisyyslaskennan opettamisella näytti olevan osittain myös haitallisia vaikutuksia oppilaiden intuitiivisiin käsityksiin todennäköisyydestä. Tutkijat kuitenkin uskoivat, että kurssin opetusta kehittämällä tästä ongelmasta voitaisiin päästä eroon. Muuten kurssin vaikutukset olivat kuitenkin varsin positiivisia. (Fischbein & Gazit, 1984.)

Shaugnessy tutki itse opiskelijoiden kehittymistä todennäköisyyslaskennassa järjestämällään kokeellisella kurssilla. Kurssilla käytettiin toimintamallia, jossa oppilaille aluksi kerrottiin, millainen satunnaiskoe aiottiin tehdä. Sen jälkeen oppilaat arvioivat itse, minkälaisia tuloksia kokeesta saadaan. Seuraavaksi koetta testattiin kokeellisesti pienryhmissä ja tulokset kirjattiin ylös. Näiden tulosten pohjalta sitten muodostettiin teoreettinen malli kyseisestä ilmiöstä. Lopuksi näitä tuloksia verrattiin keskenään ja Shaugnessyn kokemuksen mukaan tämä oli todella tehokas tapa virheellisten ennakkokäsitysten korjaamiseen. Muut tutkimukset ovat myös osoittaneet, että omien ennakkokäsitysten vertaaminen kokeellisesti saatuihin tuloksiin on varsin toimiva ratkaisu. Näissäkään tutkimuksissa virhekäsityksiä ei kuitenkaan kaikkien oppilaiden osalta saatu korjattua, mikä osoittaa kuinka hankalaa niistä on päästä eroon. Ensimmäinen askel oppilaiden virhekäsitysten korjaamiseen on kuitenkin opettajan omien virhekäsitysten korjaaminen, muuten oppilaita on vaikea auttaa. Tutkimuksessa nimittäin havaittiin, että myös monilla opettajilla oli edellä mainittuja vaikeuksia todennäköisyyden käsitteiden kanssa. Shaugnessy nostaakin opettajan roolin todennäköissyylaskennan opettamisessa todella tärkeään asemaan. Hän myös toteaa, että jotta oppilaat voisivat oppia käyttämään todennäköisyyden matemaattisia malleja, heidän on ensin pystyttävä luopumaan omista virheellisistä ennakkokäsityksistään. Juuri tässä ammattitaitoisen opettajan rooli korostuu. (Shaugnessy, 1990.)

Vaikka todennäköisyyslaskentaa on oppitunneillakin helppo tutkia kokeellisesti, on tämän lähestymistavan kanssa oltava varovainen. Kuten Shaugnessykin tutkimuksessaan huomasi, oppilaat sisäistävät ja uskovat helposti sen, minkä itse näkevät ja kokevat. Todennäköisyyden käsitteeseen liittyy kuitenkin aina satunnaisuutta, jota oppilaiden voi olla vaikea ymmärtää. Jos matematiikan tunnilla heitetään 12 kertaa kolikkoa, eikä saadakaan samaa määrää kruunia ja klaavoja, oppilaat eivät välttämättä hyväksy teorian paikkansapitävyyttä. Pahimmassa tapauksessa tällaiset kokeet saattavat jopa muuttaa oppilaiden alunperin oikeita käsityksiä, kuten kävi ilmi myös Fischbeinin ja Gazitin tekemästä tutkimuksesta. Toisaalta myöskään puhtaasti teoreettinen lähestymismalli ei ole tukimuksissa osoittautunut tehokkaaksi, joten opettajan on tasapainoiltava näiden välissä. Myös tämä tekee todennäköisyyslaskennan opettamisesta haastavaa. (Hawkins & Kapadia, 1984.)

Tehdään lopuksi vielä lyhyt katsaus Jani Kiviharjun tutkielmaan. Se on erityisen mielenkiintoinen, koska tutkimuksen lähtökohdat ovat siinä hyvin samankaltaiset oman tutkielmani kanssa. Kiviharju pyrkii selvittämään lukio-opiskelijoiden käsityksiä todennäköisyyslaskennasta ja lukion todennäköisyyslaskennan kurssista. Myös hän on tehnyt havainnon, että todennäköisyyslaskenta koetaan lukiossa hyvin poikkeavaksi muihin matematiikan aihealueisiin verrattuna ja hän etsii tälle näkemykselle vahvistusta sekä mahdollisia syitä opiskelijoiden todennäköisyyslaskentaan liittyville vaikeuksille. Tutkimusta varten haastateltiin yhdeksää vapaaehtoista Helsingin normaalilyseon lukion 3. vuosikurssin opiskelijaa, jotka olivat kaikki suorittaneet pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssin MAA6. Haastattelujen perusteella vastaajien käsitykset todennäköisyyslaskennasta ja todennäköisyyslaskennan kurssista jaettiin neljään pääluokkaan, jotka olivat erilainen ajattelutapa, epävarmuus, irrallisuus ja käytännönläheisyys. (Kiviharju, 2011.)

Kaikki haastateltavat kokivat, että todennäköisyyslaskennan tehtävien tekeminen ja teorian ymmärtäminen vaativat muusta matematiikasta poikkeavaa ajattelutapaa. Tätä näkemystä haastateltavat selittivät erityisesti sillä, että todennäköisyyslaskennassa ei ole juuri mekaanisia tehtäviä ja valmiiden ratkaisumallien puuttuminen korostaa oman ajattelun merkitystä. Tämän takia monen oli vaikea hahmottaa tehtävissä kuvattuja tilanteita, eivätkä he näin ollen päässeet etenemään ratkaisussa. Toisaalta osa vastaajista koki todennäköisyyslaskennan muuta matematiikkaa kevyempänä, koska laajojen teorioiden sijaan se perustuu heidän mukaansa tietyn perusajatuksen ymmärtämiseen. Epävarmuudella tarkoitetaan tässä sitä, että osa vastaajista koki ongelmalliseksi, että todennäköisyydet antavat vain arvion tilanteesta, eivätkä varmaa tulosta, kuten yleensä matematiikassa on totuttu. Tästä syystä jotkut haastateltavat kokivat todennäköisyyslaskennan jopa täysin hyödyttömäksi. Todennäköisyyslaskennan irrallisuus muusta matematiikasta tuli myös esille lähes kaikkien haastateltavien kohdalla. Kun muut matematiikan kurssit muodostivat yhtenäisen kokonaisuuden, todennäköisyyslaskennan kurssi ei vastaajien mielestä liittynyt oikastaan millään tavalla muihin kursseihin. Yksi vastaaja koki, että kurssin sisälläkin asiat jäivät irrallisiksi. Irrallisuus koettiin ongelmalliseksi, koska kurssilla opitut asiat unohtuivat nopeasti, kun niitä ei käsitelty muilla kursseilla. Osittain tästä johtuen moni sanoi, ettei aio kerrata todennäköisyyslaskentaa ylioppilaiskirjoituksia varten ollenkaan, tähän vaikutti tosin myös todennäköisyyslaskennan vähäinen painoarvo kirjoituksissa. Ensimmäiset kolme pääluokkaa toivat esille lähinnä negatiivisia käsityksiä todennäköisyyslaskentaa kohtaan, mutta käytännönläheisyys koettiin sen sijaan pelkästään positiivisena tekijänä. Lähes kaikki vastaajat olivat sitä mieltä, että todennäköisyyslaskentaa voi hyödyntää koulun ulkopuolellakin vastaan tulevissa tilanteissa, kuten työelämässä ja harrastuksissa. Haastatteluissa nousivat esille myös erilaiset havainnollistamiskeinot opetuksessa, kuten kappaleiden nostaminen laatikosta tai korttipakan käyttäminen dokumenttikameralla, jotka olivat lisänneet monien opiskelijoiden motivaatiota todennäköisyyslaskentaa kohtaan. (Kiviharju, 2011.)

2.4 Todennäköisyyslaskenta lukion opetussuunnitelman perusteissa

Tämänhetkiset lukion opetussuunnitelman perusteet on otettu käyttöön vuonna 2003 ja kaikkien lukioiden opetussuunnitelmat rakentuvat niiden varaan. Tästä syystä on hyvä käydä läpi, minkälaiset raamit tämä asiakirja antaa todennäköisyyslaskennan opetukselle lukiossa. Tarkastellaan tässä opetussunnitelman perusteita sekä pitkän, että lyhyen matematiikan kannalta.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa todetaan: ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja.” Kaikki edellä mainitut taidot ovat olennaisia myös todennäköisyyslaskennassa. Asiakirjassa mainitaan myös, että matematiikan opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä. Tässäkin todennäköisyyslaskenta on tärkeässä roolissa, koska siinä käsitellään nimenomaan jokapäiväisessä elämässä eteentulevia tilanteita, monilta elämän eri osa-alueilta.

Pitkässä matematiikassa varsinainen todennäköisyyslaskennan kurssi on MAA6, todennäköisyys ja tilastot. Lukion opetussuunnitelman perusteissa mainitaan, että kurssin keskeisiä sisältöjä todennäköisyyslaskennan osalta ovat: klassinen ja tilastollinen todennäköisyys, kombinatoriikka, todennäköisyyksien laskusäännöt, diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma, diskreetin todennäköisyysjakauman odotusarvo, sekä normaalijakauma. Kurssin tavoitteena on perehtyä edellämainittuihin osa-alueisiin ja oppia soveltamaan diskreetin jakauman odotusarvoa, sekä normaalijakaumaa. Lyhyessä matematiikassa todennäköisyyslaskenta on puolestaan sisällytetty kurssiin MAB5, tilastot ja todennäköisyys. Kuten kurssin nimestäkin käy ilmi, painotus on pitkän matematiikan kurssista poiketen tilastoissa. Kurssin keskeisiä sisältöjä ovat jatkuvien ja diskreettien jakaumien tunnuslukujen määrittäminen, normaalijakauma ja jakauman normittaminen, kombinatoriikka, todennäköisyyden käsite sekä todennäköisyyden laskulakien ja niitä havainnollistavien mallien käyttö. (Lukion opetussuunnitelman perusteet, 2003.)

Uudet lukion opetussuunnitelman perusteet otetaan käyttöön 1.8.2016 alkaen ja opetushallitus on laatinut niistä luonnoksen, joka julkaistiin 14.4.2015. Luonnoksesta järjestetään vielä virallinen lausuntokierros, jonka perusteella tehdään tarvittavat muutokset. Tehdään tässä kuitenkin lyhyt katsaus, miten lukion opetussuunnitelman perusteet todennäköisyyslaskennan osalta olisivat luonnoksen perusteella muuttumassa.

Pitkän matematiikan osalta todennäköisyyslaskennan kurssin keskeiset sisällöt ovat pysyneet täsmälleen samana. Kurssin tavoitteetkaan, eivät ole merkittävästi muuttuneet. Ainoa lisäys on, että opiskelijan tavoitteena on osata käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan käsittelemisessä, jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä, sekä todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman parametrien avulla. Kenties suurin muutos on kuitenkin se, että kurssien järjestystä on muutettu. Todennäköisyys ja tilastot on luonnoksessa nimetty kurssiksi MAA10, eli se opiskeltaisiin pakollisista matematiikan kursseista viimeisenä. Lyhyessä matematiikassa pakollinen Tilastot ja todennäköisyys -kurssi on edelleen MAB5, mutta uutena luonnoksessa on valtakunnallinen syventävä kurssi MAB8, Tilastot ja todennäköisyys II. Kyseinen kurssi nostaisi todennäköisyyslaskennan painoarvoa lyhyessä matematiikassa selvästi. Kurssien sisältöjä on muutettu siten, että esimerkiksi normaalijakauma on siirretty kokonaan kurssille MAB8, ja kurssille MAB5 on tilalle otettu regression ja korrelaation käsitteet. Syventävän kurssin muita keskeisiä sisältöjä ovat toistokoe ja binomijakauma sekä luottamusvälin käsite. Myös lyhyen matematiikan tavoitteisiin on lisätty teknisten apuvälineiden käyttö. Todennäköisyyslaskennan ulkopuolella merkittävin muutos tässä luonnoksessa on varmasti se, että jatkossa ensimmäinen matematiikan kurssi olisi kaikille lukiolaisille yhteinen ja vasta sen jälkeen jakaudutaan pitkän ja lyhyen matematiikan ryhmiin. (Lukion opetussuunnitelman perusteet, luonnos, 2015.)

2.5 Todennäköisyyslaskenta lukion pitkän matematiikan oppikirjoissa

Tarkastellaan tässä vähän lukion pitkän matematiikan oppikirjoja, lähinnä siltä kannalta, mitä lukiossa aiheesta opetetaan. Alussa käytiin toki jo läpi lukion opetussuunnitelman perusteiden antamat raamit, mutta ne ovat varsin suurpiirteiset ja siksi on syytä tutustua lukion pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan sisältöihin vähän tarkemmin.

Katsotaan ensin kirjaa Pyramidi 6, lukion pitkä matematiikka, todennäköisyys ja tilastot, vuoden 2012 painos. Kirjan todennäköisyyslaskennan osio on jaettu lukuihin: Johdanto todennäköisyyteen, Joukko-oppia, Kombinatoriikkaa, Todennäköisyys käsite, Todennäköisyyden laskusääntöjä ja Jakauma. Jätetään kuitenkin viimeinen luku, Jakauma, tässä käsittelemättä, koska en käsittele tutkimuksessani jakaumia.

Ensimmäisessä luvussa, Johdanto todennäköisyyteen, kerrotaan lyhyesti todennäköisyyslaskennan historiasta. Varsinaisesti aihe aloitetaan kappaleella Joukko-oppia, jossa esitellään todennäköisyyslaskennassa tarvittavia joukko-opin käsitteitä ja merkintöjä, kuten joukko, alkio, yhdiste, leikkaus ja komplementti.

Luvussa Kombinatoriikkaa käydään ensin läpi tulo- ja summaperiaatteet yksinkertaisten esimerkkien avulla. Sen jälkeen siirrytään permutaation käsitteeseen. Permutaatioiden lukumäärän laskeminen johdetaan tuloperiaatteen avulla ja näin kertoman idea on helppo ymmärtää. Kappaleessa esitetään ja johdetaan vielä k-permutaatioiden, sekä kombinaatioiden lukumäärän laskeminen. Permutaatiot ovat siis jonkun joukon A alkioista muodostettuja jonoja, joissa alkioiden järjestys on oleellinen. Kombinaatiot taas ovat joukon A osajoukkoja, joten alkioiden järjestyksellä ei ole merkitystä.

Seuraava kappale, Todennäköisyyskäsite, aloitetaan satunnaisilmiöiden mallintamisella, ja siinä käydään selkeästi läpi mallintamisen vaiheet: 1. alkeistapausten määrittäminen, 2. tapahtuman valinta ja 3. todennäköisyyksien määrittäminen. Tämän jälkeen käydään erikseen läpi tilastollinen, geometrinen ja klassinen todennäköisyys, jotka kuitenkin kaikki perustuvat samaan ajatukseen, eli jaetaan suotuisten alkeistapausten lukumäärä kaikkien alkeistapausten lukumäärällä. Alkeistapausten määrittämistavat vain poikkeavat toisistaan näissä kolmessa eri tapauksessa.

Luvussa Todennäköisyyden laskusääntöjä harjoitellaan sitten laskemaan todennäköisyyksiä erillaisissa tilanteissa. Aluksi käsitellään komplementti– ja yhteenlaskusäännöt, jotka myös perustellaan selkeästi. Seuraavaksi esitellään ehdollinen todennäköisyys ja sen yhteydessä kertolaskusääntö. Tämän jälkeen käsitellään riippumattomuutta ja kertolaskukaava riippumattomille tapahtumille. Kappaleen lopuksi esitellään vielä toistokoe ja binomitodennäköisyys. (Kontkanen ym., 2012.)

Tarkastellaan vertailun vuoksi myös kirjaa Pitkä matematiikka 6, Todennäköisyys ja tilastot, vuoden 2015 painos. Toisin kuin Pyramidissa, tässä kirjassa tilastoja ja todennäköisyyksiä ei ole jaoteltu erikseen omiksi kokonaisuuksikseen, vaan niitä käsitellään osittain lomittain. Kirja on jaettu seuraaviin lukuihin: Todennäköisyys, Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla, Geometrinen todennäköisyys, Satunnaismuuttujan odotusarvo, Tuloperiaate, Järjestysten lukumäärä, Osajoukkojen lukumäärä, Pascalin kolmio, Todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla, Kertolaskusääntö, Yhteenlaskusääntö, Toistokoe, Diskreetti tilastollinen jakauma, Jatkuva tilastollinen jakauma, sekä Normaalijakuma. Keskitytään taas klassiseen todennäköisyyslaskentaan, joten jätetään tarkastelematta luku Satunnaismuuttujan odotusarvo, sekä jakaumia käsittelevät luvut. Luku Pascalin kolmio on kirjassa opetussuunnitelman perusteiden ulkopuolisena, syventävänä asiasisältönä. Ei mennä siihenkään tässä sen tarkemmin, mutta on hauska idea, että opiskelijat voivat nähdä binomikertoimien ja potenssin $(a + b)^n$ välisen yhteyden.

Ensimmäinen luku, Todennäköisyys, vastaa sisällöltään pitkälti Pyramidi-kirjan lukua Todennäköisyyskäsite. Tosin geometrinen todennäköisyys on erotettu tästä omaksi luvukseen ja toisaalta tässä käsitellään vastatapahtuman todennäköisyyden laskeminen, joka Pyramidissa tulee vasta loppupuolella kirjaa. Luvussa Todennäköisyyksiä alkeistapauksia laskemalla harjoitellaan nimen mukaisesti laskemaan todennäköisyyksiä tilanteissa, joissa alkeistapausten määrät pitää laskea erikseen. Sen jälkeen päästään lukuun Geometrinen todennäköisyys.

Seuraavaksi ovat vuorossa luvut Tuloperiaate, Järjestysten lukumäärä ja Osajoukkojen lukumäärä. Nämä kolme lukua vastaavat sisällöltään Pyramidin lukua Kombinatoriikkaa. Näiden aiheiden käsittelyjärjestys on molemmissa kirjoissa käytännössä sama, mutta eroja löytyy termien käytössä. Pitkä matematiikka-kirjassa käytetään pääasiassa suomenkielisiä termejä järjestysten lukumäärä ja osajoukkojen lukumäärä, kun taas Pyramidissä puhutaan enimmäkseen permutaatioista ja kombinaatioista. Mielestäni tässä asiassa suomenkieliset termit ovat selkeämpiä ja antavat opiskelijoille selkeämmmän kuvan, mistä todella on kyse. Luvussa todennäköisyyksiä kombinatoriikan avulla harjoitellaan sitten laskemaan alkeistapauksien määrää vasta opituilla menetelmillä.

Luvut Kertolaskusääntö, Yhteenlaskusääntö ja Toistokoe puolestaan vastaavat sisällöltään pitkälti Pyramidin lukua Todennäköisyyden laskusääntöjä. Suurin ero näissä tulee lähinnä siinä, että Pyramidissa kertolaskusääntö ja yhteenlaskusääntö käsitellään toisin päin. (Kangasaho ym., 2015.)

Yleisesti voidaan sanoa, että sisällöltään nämä kirjat eivät juuri poikkea toisistaan, joka on tosin ymmärrettävää, koska molempien tulee noudattaa lukion opetussuunnitelman perusteita. Aiheiden käsittelyjärjestyksessä on sen sijaan varsin suuriakin eroja. Merkittävimpänä ehkä se, että Pyramidi alkaa joukko-opin käsitteillä ja kombinatoriikalla, joita voidaan sitten hyödyntää todennäköisyyslaskennassa. Pitkässä matematiikassa taas lähdetään suoraan liikkeelle todennäköisyyslaskennan perusteista ja opetellaan sitten joukko-oppia ja kombinatoriikkaa sen mukaan, kun ne tulevat tarpeellisiksi. Pitkä matematiikka -kirjassa pyritään myös karsimaan uusien termien ja merkintöjen käyttöä. Jo mainittujen seikkojen lisäksi kirjassa ei esimerkiksi käytetä ollenkaan yhdiste- ja leikkaustermejä eikä -merkintöjä, vaan pelkästään sanoja ”ja” ja ”tai”. Tämä saattaa osaltaan helpottaa opiskelijoita keskittymään olennaiseen, mutta toisaalta jatkon kannalta voisi olla myös hyödyllistä oppia käytämään matematiikassa yleisesti käytettäviä termejä ja merkintöjä.

2.6 Todennäköisyyslaskenta Helsingin yliopiston matematiikan aineenopettajan opinnoissa

Tutustutaan vertailun vuoksi lyhyesti myös todennäköisyyslaskennan opetukseen Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella. Matematiikan aineenopettajaopiskelijoiden opintoihin kuuluu pakollisena kurssi Johdatus todennäköisyyslaskentaan (5 op). Koska aineenopettajaopiskelijoilla on varsin vähän (35 op) vapaavalinnaisia matematiikan opintoja, eikä muita todennäköisyyslaskennan kursseja ole myöskään aineenopettajille suositeltavien kurssien listalla, on kyseinen kurssi monelle opettajalle ainoa suoritettu todennäköisyyslaskennan kurssi. (Tutkintovaatimukset, 2014). Tästä syystä tarkastellaan todennäköisyyslaskennan opetusta yliopistossa nimenomaan kyseisen kurssin kannalta.

Keväällä 2015 pidetyn Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssin kotisivujen mukaan kurssikokeessa kysyttävät asiasisällöt löytyvät luentokalvoilta, sekä Pekka Tuomisen kirjasta Todennäköisyyslaskenta 1, josta on erikseen määritelty kurssilla käsiteltävät luvut. Luennoilla käydään kotisivujen mukaan läpi seuraavia asiasisältöjä mainitussa järjestyksessä: todennäköisyyden aksioomat, ehdollinen todennäköisyys, riippumattumuus, toistokoe, kombinatoriikka ja otantamallit, satunnaismuuttujat ja niiden tiheys- ja kertymäfunktiot, Bayes-päättely, Poisson-aproksimaatio, odotusarvo ja muita jakauman tunnuslukuja, varianssi, sekä keskeinen raja-arvolause ja normaalijakauma. (Johdatus todennäköisyyslaskentaan, 2015)

Kuten edellä esitetyistä kurssin sisällöistä havaitaan, niissä esiintyy paljon samoja asioita ja käsitteitä kuin lukio matematiikassakin. Matemaattisen sisällön osalta kyseisellä kurssilla erityisesti erilaisia jakaumia ja niiden sovellusmahdollisuuksia käsitellään huomattavasti lukiota laajemmin. Tässä työssä keskitytään kuitenkin erityisesti klassiseen todennäköisyyteen ja todennäköisyyden laskusääntöihin, ja näiden osalta yliopiston kurssilla käsiteltävät aihekokonaisuudet eivät juurikaan ole lukion oppimäärää laajempia. Todennäköisyyden käsitettä kuitenkin tarkastellaan kyseisellä kurssilla lukiosta poikkeavasta näkökulmasta, joka selviää Tuomisen kirjaa tarkastelemalla. Lähtökohtana kirjassa ovat todennäköisyyden aksioomat, joiden varaan koko todennäköisyyslaskennan teoria rakentuu. Aksiomaattinen tarkastelu perustuu todennäköisyysavaruuden käsitteeseen, joka on riittävän yleinen erilaisten satunnaisilmiöiden matemaattisen käsittelyn perustaksi. Todennäköisyysavaruuden muodostaa kolmikko (Ω, F, P), jossa Ω on kaikki alkeistapaukset sisältävä perusjoukko, F on kokoelma Ω:n osajoukkoja, joita kutsutaan tapahtumiksi ja P on kuvaus $P : F \to \mathbb{R}$, jota kutsutaan todennäköisyydeksi, jos se täyttää tietyt ehdot. Kyseinen kolmikko on siis todennäköisyysavaruus, mikäli se täyttää tietyt määritellyt ehdot. Juuri näitä ehtoja kutsutaan todennäköisyyden aksioomiksi. (Tuominen, 1990.)

Todennäköisyysavaruuden käsitteen ja todennäköisyyden aksioomien avulla pystytään perustelemaan ja todistamaan monia lauseita ja tuloksia, jotka jäivät lukiossa vaille selityksiä. Tässä onkin suurin ero yliopiston ja lukion todennäköisyys kurssien välillä. Yliopistossa kaikki perustellaan huolellisesti ja uudet käsitteet rakentuvat jo opitun tiedon varaan, koska uusien lauseiden todistuksessa käytetään jo oppittuja sisältöjä. Näin todennäköisyyslaskennasta muodostuu varmasti opiskelijoille selkeämpi kokonaisuus. Toisaalta tämä edellyttää sen verran syvempää matemaattista osaamista, ettei vastaava toimintamalli ole ainakaan suoraan siirrettävissä lukio-opiskeluun.

Luku 3

Matemaattinen osaaminen

Jotta voidaan ymmärtää, mikä tekee todennäköisyyslaskennasta oppilaille haastavaa, on tarpeellista tietää, mitä matemaattisella osaamisella yleisesti tarkoitetaan. Otetaan tässä esiin Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin esittämä näkemys, jonka mukaan yksilön matemaattinen pätevyys koostuu viidestä osa-alueesta, jotka ovat käsitteelinen ymmärtäminen (conceptual understanding), proseduraalinen sujuvuus (procedural fluency), strateginen kompetenssi (strategic competence), mukautuva päättely (adaptive reasoning), sekä yritteliäisyys (productive disposition). Nämä piirteet eivät kuitenkaan ole erillisiä, vaan ne ovat kietoutuneet toisiinsa ja ne kaikki riipuvat toisistaan. (Joutsenlahti, 2005, 96.)

Käsitteellisellä ymmärtämisellä tarkoitetaan tässä matemaattisten käsitteiden, operaatioiden ja relaatioiden ymmärtämistä. Proseduraalinen sujuvuus taas on taitoa käyttää proseduureja joustavasti, huolellisesti, tehokkaasti ja tarkoituksenmukaisesti. Käytännössä tämän osa-alueen voi kiteyttää laskemisen sujuvaksi osaamiseksi. Strateginen kompetenssi on kyky formuloida, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Erityisesti se liittyy tilanteisiin, joissa oppilas ei tiedä etukäteen, mitä ongelman ratkaisumenetelmää hänen tulee käyttää. Tällaisessa tilanteessa oppilaan on hallittava useita eri ratkaisustrategioita ja osattava tunnistaa tehtävästä ratkaisun kannalta olennaiset piirteet. Lisäksi hänen pitää pystyä muotoilemaan ongelma matemaattisesti ratkaistavaan muotoon. Mukautuva päättely on pystyvyyttä loogiseen ajatteluun, reflektointiin, selittämiseen ja todistamiseen. Toisin sanoen se on kykyä ajatella loogisesti eri käsitteiden ja tilanteiden välisistä suhteista. Yksi sen ilmenemismuodoista on taito osoittaa riittävät perustelut omille ratkaisuilleen eri tilanteissa. Viimeinen osa-alue, eli yritteliäisyys on kykyä nähdä luontaisesti matematiikka järkevänä, hyödyllisenä ja arvokkaana, sekä uskoa ahkeruuden merkitykseen ja omiin kykyihin. (Joutsenlahti, 2005.)

Monet muutkin tutkijat ovat esittäneet omia versioitaan matematiikan osaamiseen vaa-

dittavista taidoista. Termit ja esitysasu näiden teorioiden välillä vaihtelevat, mutta usein ne ovat sisällöltään varsin samanlaisia. Otetaan tässä vertailun vuoksi esimerkkinä Krutetskiin vuonna 1976 julkaisema malli, jonka mukaan matemaattinen kyvykkyys koostuu yhdeksästä eri komponentista. Ne ovat:
1. Kyky erottaa matemaattisesta ongelmasta formaalit rakenteet ja operoida niillä.
2. Kyky yleistää matemaattisia tuloksia
3. Kyky käyttää matemaattisia symboleita, sisältäen numerot.
4. Kyky hahmottaa avaruudellisia käsitteitä.
5. Kyky ajatella loogisesti.
6. Kyky tiivistää ajattelu prosessia.
7. Kyky vaihtaa joustavasti matemaattisesta lähestymistavasta toiseen.
8. Kyky saavuttaa selkeys, yksinkertaisuus, taloudellisuus sekä järkevyys matemaattisissa perusteluissa ja todistuksissa.
9. Kyky muistaa hyvin matemaattisia sisältöjä ja ideoita.
(Orton, 2004, s.143.)

Luku 4

Sanalliset tehtävät ja kielentäminen

Tässä työssä on tarkoitus tarkastella todennäköisyyslaskentaa nimenomaan sanallisten tehtävien ja kielentämisen näkökulmasta. Tässä luvussa esitellään teoriaa näiltä alueilta tutkimuksen pohjaksi.

4.1 Sanalliset tehtävät

Todennäköisyyslaskennan tehtävät ovat usein sanallisia tehtäviä, joten tarkastellaan tässä hieman niitä ja sitä, minkälaisia haasteita ne asettavat opiskelijoille.

Sanallisia tehtäville on vaikea antaa tarkkaa ja yksiselitteistä määritelmää. Niiden voidaan kuitenkin ajatella olevan sanallisia kuvauksia ongelmatilanteista, jotka pyritään ratkaisemaan tehtävässä annettujen numeeristen tietojen avulla, soveltamalla matemaattisia operaatioita (Verschaffel, 2000). Sanalliset tehtävät ovat olennainen osa koulumatematiikkaa ja siksi onkin syytä hieman pohtia miksi niitä hyödynnetään muun muassa oppikirjoissa niin paljon.

Sanallisilla tehtävillä pyritään kehittämään opiskelijoiden valmiuksia hyödyntää matematiikan taitojaan arkielämässä. Sanalliset tehtävät käsittelevät usein käytännönläheisiä tilanteita, jotta opiskelijat näkisivät, että matematiikkaa on tarpeellista monilla elämän eri osa-alueilla. Samalla tällaiset tehtävät voivat motivoida opiskelijoita matematiikan opiskeluun. Sanallisten tehtävien avulla voidaan myös kehittää opiskelijoiden luovaa ajattelua ja ongelmanratkaisukykyä. Parhaimillaan opiskelijat saattavat sanallisia tehtäviä ratkaistessaan myös oivaltaa itse heille uusia matemaattisia rakenteita ja taitoja. Sanalliset tehtävät voivat tarjota opiskelijoille onnistumisen elämyksiä ja siten kohottaa heidän luottamustaan omiin matematiikan taitoihinsa. (Verschaffel, 2000.)

Sanalliset tehtävät vaativat oppilailta monia erilaisia taitoja ja siksi ne koetaan usein vaikeiksi. Sanallista tehtävää ratkaistaessa oppilaan tulee ainakin ymmärtää lukemansa, määrittää tehtävässä annettujen käsitteiden väliset yhteydet, karsia tarpeeton tieto, tunnistaa tuntematon muuttuja, valita oikeat matemaattiset operaattorit, sekä mahdollisesti muodostaa ja ratkaista yhtälö. Vaikka matematiikan opiskelun tarkoituksena voidaankin pitää matemaattisten käsitteiden ja niiden välisten yhteyksien syvällistä ymmärtämistä, eli käsitteellistä ymmärtämistä, niin tämän tavoitteen saavuttamiseksi tarvitaan myös peruslaskutoimitusten kaavamaista opettelua, jota nimitettiin edellä proseduraaliseksi sujuvuudeksi. Jotta oppilaat pystyisivät ratkaisemaan vaativia matemaattisia ongelmia, täytyy muun muassa edellä mainittujen taitojen osaamisen olla lähes automaattista. Muuten kaikki ajattelu täytyy kohdentaa näihin perusasioihin, eikä kapasiteettia jää enää todellisen ongelman pohtimiseen. Tästä syystä koulumatematiikalle ominainen yksinkertaisten tehtävien runsas harjoittelu ja tietyn tyyppisen ratkaisumallin ulkoaopettelu on osittain perusteltua. (Reed, 1999.)

Sanallisten tehtävien kaavamaisesta ratkaisemisesta seuraa kuitenkin usein se, että opiskelijat eivät ymmärrä niiden yhteyttä reaalimaailmaan, eivätkä tehtävissä esiintyvien matemaattisten käsitteiden todellista merkitystä. Tästä johtuen monet ratkaisevat sanallisia tehtäviä poimimalla tehtävänannossa annetut lukuarvot ja muodostavat näiden välille jonkinlaisia laskutoimituksia, joilla ei ole välttämättä mitään tekemistä itse tehtävän kanssa. Tämä havainto tehtiin muun muassa tutkimuksessa, jossa 13-14 -vuotiaille oppilaille useasta eri maasta annettiin ratkaistavaksi sanallisia tehtäviä, josta oli selvästi nähtävissä, että niitä ei voida ratkaista. Tästä huolimatta suurin osa oppilaista tarjosi vastaukseksi jotain numeerista ratkaisua. (Verschaffel, 2000.)

Vaikka sanallisten tehtävien avulla pyritään mallintamaan todellisen maailman tilanteita ja luomaan yhteyksiä matematiikan ja oppilaiden arkielämän välille, nämä kaksi erillistä todellisuutta eivät aina kohtaa. Sanallisten tehtävien tehtävänannoissa käytetään usein tietyntyyppistä kieltä, jossa eri sanojen ja ilmaisujen merkitys matemaattisessa viitekehyksessä on opettajalle ilmeistä. Vastaava kieltä ei kuitenkaan käytetä todellisessa maailmassa ja joillakin sanoilla ja termeillä saattaa olla arkikielessä jopa täysin erilaisia merkityksiä. Tästä syystä oppilaiden voi olla joissain tilanteissa vaikea ymmärtää, mitä sanallisissa tehtävissä tarkoitetaan, eikä näin yhteyttä matematiikan maailman ja reaalimailman välille synny. Sanallisia tehtäviä laadittaessa olisikin tärkeää pohtia, onko kyseinen tilanne todella mallinnus reaalimaailmasta vai vain irrallinen matemaattinen versio todellisesta ilmiöstä. (Roth, 2009.)

Oppilaille pienestä pitäen opetetussa sanallisten tehtävien ratkaisumallissa myös suositaan mahdollisimman tiivistä, matemaattisiin symboleihin perustuvaa esitystä. Tällainen ratkaisutapa ei tue parhaalla tavalla oppilaiden matemaattisen ajattelun kehitystä. Ratkaisuna tähän voisi olla matematiikan kielentämisen systemaattinen opettaminen jo alaluokilta alkaen. (Joutsenlahti, 2003.)

4.2 Kielentäminen matematiikassa

Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielen avulla suullisesti tai kirjallisesti (Joutsenlahti, 2010). Tällä hetkellä ollaan yleisesti sitä mieltä, että suullisella ja kirjallisella ilmaisulla on suuri rooli myös matematiikan oppimisessa. Kouluissa tätä ei usein kuitenkaan oteta riittävästi huomioon, vaan opetus perustuu pitkälti kaavamaiseen symboleilla ja luvuilla laskemiseen. Matematiikan puhumista harjoitellaan jonkun verran kotitehtävien tarkastuksen yhteydessä, kun oppilaat esittelevät omia ratkaisujaan, sekä mahdollisten kysymysten muodossa, mutta koska oppitunneilla aika on varsin rajallista, vain hyvin harva oppilas pääsee tälla tavoin ääneen. Hyvä tapa lisätä keskustelua ja matematiikka-aiheista puhetta oppitunneilla ovat erilaiset ryhmätyöt ja -keskustelut, joissa oppilaat puhuvat matematiikasta keskenään ja joutuvat selittämään omia ajatuksiaan ja käsityksiään muille. Tällaisen työskentelyn käyttömahdollisuudet ovat kuitenkin rajalliset, ja lisäksi opettajan on vaikea valvoa ja ohjata useaa ryhmää yhtä aikaa. Näistä syistä oppilaita olisikin hyvä ohjata myös kirjalliseen kielentämiseen. Sen harjoittamiseen ei ole ulkopuolisia esteitä, vaikka monet saattavatkin kokea sen työlääksi. (Morgan, 2001)

Kirjallinen kielentämisen voidaan koulumatematiikassa ajatella koostuvan kolmesta eri osa-alueesta: matematiikan symbolikielestä, luonnollisesta kielestä, sekä matemaattisista kuvioista. Erityisesti peruskoulussa oppilaita ohjataan oppikirjoissa käyttämään sanallisten tehtävien ratkaisuissa käytännössä pelkästään matematiikan symbolikieltä. Oppilaiden ohjaaminen käyttämään symbolikielen rinnalla ratkaisuissaan luonnollista kieltä ja kuviokieltä, voisi auttaa heitä heidän matemaattisen ajattelunsa kehittymisessä ja matemaattisten käsitteiden ymmärtämisessä. Opettajan on myös helpompi arvioida oppilaiden osaamista ja auttaa heitä, jos oppilaat avaavat ajatuksenjuoksuaan kirjallisesti tehtävää ratkaistessaan. (Joutsenlahti, 2010.)

Kun oppilas selvittää ratkaisuaan suullisesti, esitys on usein suurpiirteinen ja ajatus saattaa poukkoilla paikasta toiseen sen mukaan, missä järjestyksessä ratkaisuun liityvät asiat tulevat mieleen. Yksityiskohtia saatetaan jättää myös mainitsematta, koska yleisöllä on halutessaan mahdollisuus esittää tarkentavia kysymyksiä. Tässäkin mielessä kirjallinen kielentäminen on tehokas tapa kehittää matemaattista ajattelua. Kirjallisen esityksen on oltava sellainen, että lukija saa siitä selvää ilman lisäselvityksiä. Tästä syystä sen on oltava kattava ja selkeä. Lisäksi kirjallista ratkaisua laatiessa on enemmän aikaa ajatella ja esitystä voi myös tarvittaessa korjata jälkikäteen, joten lopputulos on usein sanallista selitystä johdonmukaisempi. Kirjalliseen ratkaisuun voi myös aina palata jälkikäteen. Näin oppilaan on helpompi jäsentää ja ymmärtää ratkaisuun liityviä matemaattisia käsitteitä ja niiden välisiä suhteita. (Morgan, 2001).

Jorma Joutsenlahti on konstruoinut neljä kirjallisen kielentämisen mallia, joita voi käyttää matematiikan tehtävien ratkaisemiseen. Hän myös kannustaa opettajia systemaattisesti opettamaan näiden mallien käyttöä oppilailleen. Kyseiset mallit hän on nimennyt seuraavasti: ”standardi-”, ”kertomus-”, ”tiekartta-” ja ”päiväkirjamalli”.

Standardimallissa käytetään pelkästään matematiikan symbolikieltä. Tässä mallissa ratkaisu esitetään muodossa, jossa ensin laitetaan paperille tarvittava lauseke, sitten laskut ja lopuksi vastaus yksikköineen. Näin ratkaisijan oma ymmärtämisen prosessi ei tule vastauksessa näkyviin. Kyseinen malli on tyypillinen erityisesti peruskoulun oppikirjoissa.

Kertomusmallia käytetään usein lukion oppikirjojen sanallisten tehtävien esimerkkiratkaisuissa. Siinä ratkaisun perusteiden ja etenemisen kuvaamiseen käytetään lunnollista kieltä ja/tai kuvioita. Mallissa selitetään vaiheittain mitä ja miksi ollaan seuraavaksi tekemässä ja myös käytetyt merkinnät esitellään sanallisesti. Tätä mallia käyttämällä ratkaisijan on helppo jäsentää omaa ratkaisuprosessiaan ja toisaalta myös lukijan on helppo seurata sitä.

Tiekarttamallissa ratkaisu esitetään ensin luonnollisen ja kuviokielen avulla ja sen jälkeen matematiikan avulla. Ratkaisuprosessi kuvataan ensin kokonaan sanoin, mahdollisesti kuvioita apuna käyttäen. Näin lukija pääse heti kärryille, mihin ratkaisu perustuu ja mitä tekijä on sitä tehdessään ajatellut. Toisen vaiheen matemaattinen ratkaisu noudattaa standardimallia.

Päiväkirjamallissa ratkaisija etenee pääsääntöisesti standardimallin mukaisesti, mutta kohdatessaan vaikeuksia, hän jäsentää ja avaa omaa ajatteluaan sanallisesti tai kuvion avulla. Kyseisessä mallissa kirjoittamisprosessin tarkoituksena onkin ensisijaisesti omien ajatusten selkeyttäminen, eikä niinkään lukijan huomioiminen. (Joutsenlahti, 2010.)

Jorma Joutsenlahti toteutti keväällä 2009 tutkimuksen, jossa kahdelle eri lyhyen matematiikan ryhmälle opetettiin kyseisten kielentäismallien käyttöä ja opiskelijat harjoittelivat sitä kurssin, Matemaattisia malleja I, ajan. Tarkoituksena oli selvittää, miten opiskelijat kokevat kielentämismallien käyttökelpoisuuden sanallisten tehtävien ratkaisemisessa. Tutkimus osoitti, että lähes kaikki (93 %) vastaajista kokivat, että eri kielentämismallien harjoittelu on hyvä asia. Erityisen hyödyllisenä kirjallinen kielentäminen koettiin oman ajattelun jäsentämiseksi, sekä opettajan arvioinnin helpottamiseksi. Huonoina puolina nousivat esiin lähinnä vastausten pituus ja työläys. Noin viidesosa oppilaista koki, että heille ei itselleen ole kirjallisesta kielentämisestä hyötyä, eivätkä he tule sitä jatkossa käyttämään. Vastaavasti noin kolmas osa vastaajista ilmoitti, että he aikovat jatkossakin hyödyntää kirjallista kielentämistä matematiikan opiskelussaan. Jäljelle jäävät puolet vastaajista eivät olleet vielä muodostaneet selvää kantaa asiaan, eivätkä osanneet sanoa, aikovatko käyttää tulevaisuudessa kielentämismalleja apunaan. (Joutsenlahti, 2010.)

Maiju Väyrynen tutki Pro Gradu -tutkielmassaan kielentämistä avaruusgeometrian opetuksessa. Tutkimus toteutettiin siten, että kahdelle 9. luokan matematiikan ryhmälle, joissa oli yhteensä 20 opiskelijaa, luotiin kahden kuukauden pituiselle avaruusgeometrian kurssille kurssisuunnitelma, jonka keskeisinä työtapoina olivat suullinen ja kirjallinen kielentäminen. Tutkimusaineistoa kerättiin kahden kuukauden havainnoinnin lisäksi kursseilla opiskelleille oppilaille suunnatulla kyselylomakkeella. Oppilaat myös palauttivat kurssin aikana kirjallisena viisi avaruusgeometriaan liittyvää kielentämisen harjoitustehtävää. Kyselylomakkeen vastausten perusteella suurin osa oppilaista koki, että sekä kuvien piirtämisestä, että omin sanoin ongelman selittämisestä on apua tehtävän ratkaisemisessa. Lähes 80 % vastaajista aikoi käyttää kirjallista kielentämistä apunaan jatkossakin. Avoimissa vastauksissa kirjallisesta kielentämisestä koettiin olevan eniten hyötyä oman ajattelun jäsentämisessä ja vastaavasti haittapuolena pidettiin, että se vie paljon aikaa. Kirjallisisten harjoitustehtävien vastauksista Väyrynen puolestaan tutki edellä esiteltyjen erilaisten kielentämismallien käyttöä. Ratkaisuissa esiintyi kaikkia malleja, sekä niiden yhdistelmiä, mutta kaikkein eniten käytetty oli silti kertomusmalli. Toiseksi eniten käytettiin tiekarttamallia. Väyrynen itse koki kirjallisten kielentämismallien systemaattisen opettamisen erittäin hyödyllisenä, paitsi oppilaiden, myös opettajan kannalta. Hänen oli helpompi arvioida oppilaiden suorituksia ja ennen kaikkia hän ymmärsi paremmin heidän ajatteluprosessiaan tehtävän ratkaisun eri vaiheissa, jolloin myös mahdollisiin virhekäsityksiin oli helpompi puuttua. (Väyrynen, 2012.)

Luku 5

Tutkimuskysymykset ja -menetelmä

Tässä luvussa esitellään tutkimuskysymysten ja tiedonkeruumenetelmän lisäksi laadullisen tutkimuksen teoriaa.

5.1 Tutkimuskysymykset

Omien kokemusteni perusteella olen huomannut, että todennäköisyyslaskenta on monille lukiolaisille hankalaa. Tämän tutkimuksen avulla pyrin selvittämään, pitääkö tämä kokemus paikkansa ja mitkä tekijät tähän mahdollisesti vaikuttavat. Keskityn erityisesti klassiseen todennäköisyyslaskentaan ja todennäköisyyslaskennan laskusääntöihin. Tutkimuskysymykset olen asettanut seuraavaan muotoon:

1. Mitkä todennäköisyyslaskennan a) sisällöt ja b) tehtävien ratkaisuvaiheet ovat lukion matematiikassa yliopistossa juuri aloittaneille matematiikan aineenopettajaopiskelijoille haastavia?

2. Miten mahdollisesti esille nouseviin ongelmiin voidaan vaikuttaa lukio-opetuksessa?

5.2 Laadullinen tutkimus

Kun kyseessä on kvalitatiivinen, eli laadullinen, tutkimuskeino, voidaan tiedonkeruumenetelmänä käyttää tutkimuslomakkeen lisäksi myös haastattelua. Toisin kuin kvantitatiivisessa tiedonkeruussa, kvalitatiivisessa tutkimuksessa haastatellaan yleensä ennaltavalittuja henkilöitä. Haastattelun ja kyselylomakkeen perusmuotona käytetään avointa kysymystä tai teemaa, minkä vuoksi laadullinen aineisto esitetään usein tekstimuodossa. Objektiivisuus on tärkeää laadullisen tutkimuksen aineiston kokoamisessa. Tutkijan tulee pyrkiä pitämään erillään omat uskomukset, asenteet ja arvostukset tutkimusaiheesta, pyrkien ymmärtämään haastateltavan henkilön omat näkökulmat ja ilmaisut. (Virsta, 2002.)

Tiedonkeruuvaiheessa tutkija pyrkii vuorovaikutukseen kohteensa kanssa ja tulkintavaiheessa saatua aineistoa pyritään järjestämään ja ymmärtämään. Tällöin taustateoria on aineiston lukemisen, tulkinnan ja ajattelun lähtökohtana (Virsta 2002). Alasuutari (2007) jakaa tulkintavaiheen vielä kahteen osioon: havaintojen pelkistämiseen ja arvoituksen ratkaisemiseen. Havaintojen pelkistäminen perustuu siihen, että kerättyä aineistoa tarkastellaan vain tietystä näkökulmasta, joka määräytyy teoreettisen viitekehyksen ja valitun tutkimusmetodin pohjilta. Näin analyysin kohteena oleva laaja aineisto voidaan pelkistää hallittavammaksi määräksi erillisiä raakahavaintoja. Pelkistämistä voidaan jatkaa edelleen yhdistämällä näitä havaintoja. Tähän päästään etsimällä havainnoille yhteisiä piirteitä ja muotoilemalla näiden pohjalta sääntöjä, jotka pätevät poikkeuksetta koko aineistoon. Arvoituksen ratkaisemisella tarkoitetaan tuotettujen johtolankojen ja käytettävissä olevien vihjeiden pohjalta tulkitaan tutkittavaa ilmiötä. Johtolangoilla ja vihjeillä Alasuutari tarkoittaa aineistosta pelkistämällä saatuja havaintoja sekä teoreettisen viitekehyksessä esille nostettuja tutkimustuloksia ja kirjallisuutta. Mitä enemmän samaan ratkaisumalliin sopivia johtolankoja voidaan löytää, sitä todennäköisemmin tutkimuksen johtopäätökset ovat paikkansapitäviä. (Alasuutari, 2007.)

Haastattelua verrataan usein keskusteluun. Yksinkertaisin tapa määritellä haastattelu, on nimetä se keskusteluksi, jolla on ennalta päätetty tarkoitus. Olennaisin ero keskustelun ja haastattelun välillä on, että haastattelu tähtää informaation keräämiseen ja on siksi ennalta suunniteltua, päämäärähakuista toimintaa. Olennaista on myös, että haastattelu tapahtuu haastattelijan johdolla. Erilaisi haastattelumalleja on useita, mutta keskitytään tässä teemahaastatteluun. Siinä ideana on haastatella yksittäistä ihmistä. Haastattelija suunnittelee etukäteen aiheeseen liittyviä teema-alueita, joita kysymykset käsittelevät. Kysymyksiä ei välttämättä suunnitella valmiiksi, vaan haastattelu etenee eri teema-alueiden pohjalta. Kysymysten tulisi aluksi olla hyvin avoimia, jotta ne eivät rajoittaisi haastateltavan ajatusten ja mielipiteiden ilmaisua. Vastausten perusteella haastattelija voi sitten esittää tarkentavia kysymyksiä, joilla päästään käsiksi tutkittavaan asiaan ja mielenkiintoisiin yksityiskohtiin. Teemahaastattelua voisikin kuvata eräänlaisen suppilomallin avulla. (Hirsjärvi ja Hurme, 1988.)

5.3 Tutkimuksen toteutus

Toteutin tutkimuksen laadullisen tutkimuksen keinoin. Tutkimuskysymysten selvittämiseksi laadin tutkimuslomakkeen, jossa on aluksi kahdeksan taustatietokysymystä, joilla pyrin taustojen lisäksi selvittämään opiskelijoiden henkilökohtaisia kokemuksia ja asenteita todennäköisyyslaskennasta. Lomakkeen toisessa osiossa on kolme sanallista todennäköisyyslaskennan tehtävää, jotka vastaavat vaativuudeltaan lukion pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssin perustehtäviä. Tutkimuslomake kokonaisuudessaan löytyy tutkielman liitteistä.

Tutkittavaksi ryhmäksi valikoitui tammikuussa 2015 Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella aloittaneet matematiikan aineenopettajaopiskelijat. Tämä oli käytännön järjestelyiden kannalta helppo järjestää, ja myös tutkimuksen tavoitteiden kannalta tämä joukko oli otollinen. Suurin osa heistä on juuri päättänyt lukion ja näin ollen lukio matematiikan sisältöjen voisi olettaa olevan heillä vielä suhteellisen tuoreessa muistissa. Toisaalta heillä ei myöskään ole vielä yliopisto-opintoja takana, joten heidän matemaattinen osaamisensa perustuu enimmäkseen lukion opetukseen. Koska he ovat hakeutuneet opiskelemaan matematiikkaa yliopistoon, voidaan myös olettaa, että he ovat kiinnostuneita matematiikasta yleisesti ja todennäköisesti ovat pärjänneet lukiossa hyvin matematiikassa. Jos siis osoittautuu, että heillä on ongelmia todennäköisyyslaskennan kanssa, vastaava ilmiö on luultavasti havaittavissa yleisemminkin lukio-opiskelijoiden keskuudessa. Lisäksi he ovat itse mahdollisesti tulevia lukion tai peruskoulun matematiikan opettajia ja ovat näin tulevaisuudessa siirtämässä omia käsityksiään ja näkemyksiään todennäköisyyslaskennasta opiskelijoille.

Teetin siis laatimani tutkimuslomakkeen kyseiselle ryhmälle heidän ohjaajatuutorointitapaamisensa yhteydessä 26.1.2015. Vastauksia sain yhteensä kahdeksan kappaletta ja niitä lähdin analysoimaan ja etsimään niistä vastauksia tutkimuskysymyksiini.

Tutkimuslomakkeen avulla pystyn vastamaan varsin kattavasti 1. tutkimuskysymykseeni, mutta 2. tutkimuskysymystä varten haastattelin vielä Helsingin Yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella keväällä 2015 järjestetyn, Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssin ohjaajia. Kyseinen kurssi on esitelty jo edellä. Tällä kertaa kurssilla ei ollut ollenkaan perinteisiä laskuharjoitusten tarkastus kertoja, vaan ohjaajat avustivat opiskelijoita laskuharjoituksissa tarvittaessa ennalta sovittuina kellon aikoina. Viikon päätteeksi opiskelijat palauttivat laatimansa harjoitustehtävien ratkaisut kirjallisena ohjaajille, jotka tarkastivat kaikilta samat, viikoittain satunnaisesti valitut tehtävät. Näin ollen ohjaajat saivat hyvän kuvan kurssilla opiskelevien opiskelijoiden yleisestä tasosta todennäköisyyslaskennan osalta. Noudatin haastattelussa teemahaastattelun periaatteita, vaikka varsinaisten teema-alueiden sijasta suunnitelinkin kysymykset osittain etukäteen. Haastattelua varten laadin haastattelulomakkeen, jossa oli yhteensä viisi kysymystä. Pyrin siihen, että kysymykset ovat riittävän avoimia, etteivät ne rajoita haastateltavien antamia vastauksia turhaan. Haastattelun aikana kysymyksiä pystyi sitten tarvittaessa tarkentamaan haastateltavien vastausten pohjalta. Varsinaisessa haastattelutilanteessa minulla oli edessäni lomake, jonne kirjasin suoraan ylös haastateltavan vastaukset. Haastattelulomake kokonaisuudessaan löytyy tutkielman liitteistä.

Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssilla oli yhteensä seitsemän ohjaajaa, joista haastattelin kahta. Haastattelut järjestettiin Matematiikan ja tilastotieteen laitoksen kokoustilassa 21.4.2015.

Luku 6

Lomaketutkimuksen tulokset

Esittelen tässä kappaleessa ensin taustakysymysten vastaukset ja niistä tekemäni johtopäätökset. Sen jälkeen käsittelen laskutehtävät yksi tehtävä kerrallaan. Koska olen kiinnostunut nimenomaan todennäköisyyslaskennan sanallisista tehtävistä, analysoin ratkaisuja sanallisten tehtävien ratkaisuina.

Kuten aikaisemmin työssäni kirjoitin, Stephan Reed on listannut sannallisten tehtävien ratkaisemiseen vaadittavan ainakin seuraavia taitoja: luetun ymmärtäminen, tehtävässä annettujen käsitteiden välisten yhteyksien määrittäminen, tarpeettoman tiedon karsiminen, tuntemattoman muuttujan tunnistaminen, oikeiden matemaattisten operaattoreiden valitseminen, sekä yhtälön muodostaminen ja ratkaiseminen. Tältä pohjalta pyrin jakamaan vastaajien ratkaisut erillisiin vaiheisiin ja tutkimaan, missä näistä ratkaisun vaiheista vastaajilla on mahdollisesti vaikeuksia. Todennäköisyyslaskennan kontekstiin sovellettuna noudatan ratkaisujen analysoinnissa seuraavaa jakoa: 1. tehtävänannon ymmärtäminen, 2. tilanteen matemaattinen mallintaminen ja 3. muodostetun laskutoimituksen ratkaiseminen. Tässä voidaan ajatella, että 1. vaihe pitää sisällään Reedin listasta kolme ensimmäistä kohtaa, 2. vaihe kolme seuraavaa kohtaa ja 3. vaihe yhtälön, eli laskutoimituksen ratkaisun. Jako on tällä tavalla pelkistetty siitä syystä, että kirjallisista vastauksista on hankalaa tarkemmin nähdä vastaajan ajattelun kulkua ja eritellä näin ratkaisun vaiheita tarkemmin.

Lopuksi pohdin tutkimuksen tuloksia ja sitä, mitä ne kertovat. Etsin myös yhteyksiä taustakysymysten ja vastaajien laskutehtävissä menestymisen välille. Taulukossa 6.1. on esitetty tutkimuksen tulokset tiivistetysti. Taulukkoon on valittu monivalintataustakysymyksistä olennaisimmat ja lisäksi on esitetty jokaisen tehtävän kohdalta, onko ratkaisu ollut oikein. Jos tehtävän ratkaisu on virheellinen, taulukkoon on merkitty, missä edellä esitetyissä ratkaisunvaiheessa virheet ovat tapahtuneet.

	Valmistunut ylioppilaaksi	päättö-todistuksen arvosana	MAA6 kurssin arvosana	Kurssin vaativuus	Kiinnostus kurssia kohtaan	1. Tehtävä	2. Tehtävä	3. Tehtävä
1.	1990	9	9	vaati-vampi	vähän kiinnostunut	1. ja 2. vaihe	2. ja 3. vaihe	2. vaihe
2.	2014	10	10	sama	kiinnostunut	1. vaihe	3. vaihe	OIKEIN
3.	2012	9	8	sama	vähän kiinnostunut	2. vaihe	OIKEIN	2. vaihe
4.	2014	10	10	sama	kiinnostunut	1. vaihe	OIKEIN	OIKEIN
5.	2014	9	10	sama	kiinnostunut	1. vaihe	2. vaihe	1. ja 2. vaihe
6.	2010	8	9	sama	vähän kiinnostunut	2. vaihe	2. vaihe	1. ja 2. vaihe
7.	2014	9	10	helpompi	kiinnostunut	1. vaihe	OIKEIN	OIKEIN
8.	2014	10	10	helpompi	kiinnostunut	2. vaihe	OIKEIN	OIKEIN

Taulukko 6.1.

6.1 Taustakysymykset

Taustakysymykset sisälsivät seitsemän monivalintakysymystä ja yhden avoimen kysymyksen. Ohjeena oli, että vaikka vastaaja ei muistaisikaan johonkin kysymykseen tarkkaa vastausta, siihen tulisi vastata parhaan arvion mukaan. Kaikki kahdeksan vastaajaa vastasivat kaikkiin kysymyksiin.

Kaikki vastaajat olivat suorittaneet lukiossa matematiikan pitkän oppimäärän ja he olivat päässeet opiskelemaan Helsingin Yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitokselle aineenopettajan suoravalinnan kautta. Suurin osa vastaajista oli kirjoittanut ylioppilaaksi vuonna 2014 ja heillä todennäköisyyslaskennan sisältöjen lukion osalta voisi olettaa olevan hyvin muistissa. Lisäksi yksi vastaajista oli kirjoittanut ylioppilaaksi vuonna 2012, yksi vuonna 2010 ja yksi vuonna 1990. Kuten oli odotettavissakin, kaikki vastaajat olivat saaneet lukion päättötodistukseen matematiikasta korkean arvosanan. Puolilla vastaajista arvosana oli yhdeksän (9), kolmella kymmenen (10) ja yhdellä kahdeksan (8).

Todennäköisyyslaskennan kurssista puolet vastaajista oli saanut lukion päättötodistuksen pitkän matematiikan arvosanaa vastaavan tuloksen. Kolmella vastaajista todennäköisyyslaskennan kurssin arvosana oli yhden numeron korkeampi ja yhdellä vastaajalla yhden numeron matalampi. Vastaavasti kysyttäessä, kuinka vaativaksi he olivat kyseisen kurssin kokeneet muihin pitkän matematiikan kursseihin verrattuna, viiden vastaajan mielestä kurssi oli samantasoinen, kahden mielestä helpompi ja yhden vastaajan mukaan vaativampi. Nämä vastaukset eivät kuitenkaan suoraan korreloineet kurssista saatujen arvosanojen kanssa, koska vastaajista, joiden mielestä kurssi oli muita helpompi, vain toinen oli saanut siitä lukion päättötodistuksen arvosanaa paremman arvosanan ja myös vastaaja, joka koki kurssin vaikeammaksi, sai kyseisestä kurssista päättötodistusta vastaavan arvosanan. Vastaavasti viidestä henkilöstä, jotka kokivat kurssin samantasoiseksi, kolme oli saanut päättötodistuksen arvosanasta poikkeavan tuloksen. Sen sijaan kiinnostuksella todennäköisyyslaskentaa kohtaan oli joidenkin vastaajien osalta merkitystä sekä kurssimenestykseen, että kurssin haasteelliseksi kokemiseen. Kysyttäessä vastaajien kiinnostusta todennäköisyyslaskennan kurssin sisältöjä kohtaan asteikolla, olin erittäin kiinnostunut, kiinnostunut, vähän kiinnostunut tai en lainkaan kiinnostunut, kolme vastaajaa ilmoitti olleensa vain vähän kiinnostunut. Heistä yksi sai kurssista lukion päättötodistusta matalamman arvosanan ja toinen koki kyseisen kurssin muita kursseja haastavammaksi. Tämä havainto tukee myös edellä esitettyä näkemystä matematiikan osaamisesta, jonka yhtenä osa-alueena on motivaatio. Loput viisi vastaajaa ilmoittivat olleensa kiinnostuneita kurssin sisältöjä kohtaan.

Avoimessa kysymyksessä vastaajilta kysyttiin, mitkä asiat he kokivat lukion todennäköisyyslaskennassa vaikeiksi ja mitkä taas helpoiksi. Yhden vastaajan mielestä todennäköisyyslaskennassa ei ollut mitään vaikeaa, mutta muut löysivät sieltä itselleen haasteellisia asioita. Eräs vastaajista koki tässä todennäköisyyslaskennan yleisesti haastavaksi, vaikka oli aikaisemmin ilmoittanut, ettei se ollut sen vaikeampaa kuin muu lukiomatematiikka. Muuten useammasta vastauksesta kävi ilmi hieman eri sanoin, että todennäköisyyslaskennan tehtäviä ratkaistaessa on hankala valita, mitä kaavaa tulisi milloinkin käyttää. Yhdessä vastauksessa tätä perusteltiin sillä, että opetettavia asioita ei kurssilla perusteltu riittävän hyvin. Myös toinen vastaaja koki, että menestyminen kurssilla oli muistin varassa. Yhdessä vastauksessa tätä perusteltiin sillä, että todennäköisyyslaskenta vaatii erilaista lähestymistapaa, koska intuitiivinen ajattelu tuottaa vääriä tuloksia. Yksi vastaaja kertoi puolestaan että oli hankalaa, kun tuli niin paljon uusia termejä ja merkintöjä. Esille nousi myös sanallisten tehtävien tulkinta. Helpoiksi koettujen asioiden lista on sen sijaan paljon lyhyempi. Sama henkilö, jonka mielestä mikään ei kurssilla ollut vaikeaa, mainitsi loogisesti, että kaikki oli helppoa. Muista vastaajista suurin osa koki helpoksi varsinaisten laskutoimitusten suorittamisen. Tämä on ymmärrettävää, koska todennäköisyyslaskennan laskutoimitukset ovat useimmiten todella yksinkertaisia. Eräs vastaaja myös mainitsi, että kaikki taisi olla haastavaa. Tämä on siinä mielessä yllättävää, että kyseinen henkilö sai todennäköisyyslaskennan kurssista arvosanaksi kymmenen (10).

Yleisesti voidaan todeta, että monivalintakysymysten perusteella näyttäisi siltä, että suurimmalla osalla vastaajista ei ole ollut merkittäviä ongelmia todennäköisyyslaskennan kanssa lukiossa. Avoimen kysymyksen vastaukset ovat siinä mielessä vähän ristiriidassa tämän kanssa, koska niissä suurin osa vastaajista kertoi vaikeuksista todennäköisyyslaskennan keskeisten osa-alueiden kanssa. Osittain tämä voisi selittyä sillä, että hyvistä arvosanoista huolimatta, vastaajat ovat kokeneet lukion pitkän matematiikan yleisestikin haastavaksi. Tutkimukseni kannalta on mielenkiintoista, että avoimissa kysymyksissä esille nousivat vaikeudet sanallisten tehtävien kanssa. Tärkeä havainto on myös se, että osa vastaajista koki todennäköisyyslaskennan kaavojen ja termien ulkoaopetteluksi, koska tällainen mielikuva minulle on itsellenikin lukiosta muodostunut. Tällä menetelmällä saattaa saada kurssikokeesta hyvän arvosanan, mutta todellista todennäköisyyslaskennan käsitteiden hallintaa sillä ei saavuteta, koska matemaattinen osaaminen ei voi rakentua pelkän ulkoaopettelun varaan, vaan se on monen toisiinsa kietoutuneen tekijän summa, kuten aikaisemmin esitellystä, Kilpatrickin, Swaffordin ja Findellin teoriasta käy ilmi.

6.2 1. Tehtävä

Yatzy-pelissä heitetään yhtä aikaa viittä noppaa. Millä todennäköisyydellä pelaaja saa yhdellä heitolla kolme samaa numeroa?

Tehtävä on mielestäni varsin yksinkertainen ja tämän tyyppisiä tehtäviä, joissa tutkitaan nopan heittoa, lasketaan myös lukiossa paljon. Tehtävä voidaan ratkaista usealla eri tavalla, mutta yksinkertaisin tapa on tulkita tilannetta toistokokeena. Tutkimuslomakkeen kaavakokoelmassa löytyi myös toistokokeen laskukaava. Edellä mainituista syistä johtuen olikin yllättävää, että kukaan kahdeksasta vastaajasta ei saanut ratkaistua tehtävää oikein.

Suurimmaksi ongelmaksi tässä tehtävässä osoittautui tehtävänannon tulkinta, eli aiemmin esittelemäni jaon mukaan tehtävän ratkaisun 1. vaihe. Peräti viisi vastaajista on laskenut todennäköisyyden pelkästään yhdelle erilliselle nopan silmäluvulle. Tehtävänannosta käy kuitenkin mielestäni selvästi ilmi, että kolme samaa numeroa voivat olla mitkä tahansa nopan silmäluvuista 1-6. Näistä viidestä ratkaisusta neljä on tehty muuten täysin oikein toistokokeen laskukaavaa hyödyntämällä.

Muissa kolmessa ratkaisussa tehtävänanto oli ymmärretty oikein ja ratkaisuissa pyrittiin ottamaan huomioon kaikki mahdolliset silmäluvut. Näissä ratkaisuissa, ongelmat ilmenivät kuitenkin ratkaisun 2. vaiheissa, eli tilanteen matemaattisessa mallintamisessa. Lisäksi yhdellä vastaajista, joka tulkitsi tehtävän annon väärin, oli vaikeuksia myös tässä vaiheessa. Kahdessa näistä ratkaisuista ei otettu huomioon noppien erilaisia järjestysmahdollisuuksia, vaikka idea oli muuten oikea.

Kaksi muuta ratkaisua eteni puolestaan ihan omia raiteitaan ja molemmissa tilannetta lähdettiin käsittelemään niin monimutkaisesti, että mallinnus ei enää onnistunut. Toisessa ideana oli ilmeisesti, että kolme ensimmäistä noppaa voivat olla silmäluvuiltaan mitä vain, kunhan kaksi viimeistä ovat silmäluvuiltaan yhden niistä kanssa samat. Vastaaja oli myös kirjoittanut, että pitäisi ottaa huomioon eri järjestykset, mutta hän ei osaa sitä tehdä. Periaatteessa idea tässä on oikein, mutta vastaaja ei osannut muodostaa tilannetta kuvaavaa laskukaavaa. Toisessa ratkaisussa tilannetta lähdettiin taas käsittelemään klassisen todennäköisyyden käsitteen kautta. Ongelmaksi osoittautui kuitenkin se, että vastaaja ei osannut määrittää kaikkien alkeistapausten, eikä suotuisten alkeistapausten lukumäärää.

Yhteenvetona voidaan siis todeta, että ratkaisun 1. vaiheessa ongelmia oli viidellä vastaajista ja 2. vaiheessa neljällä vastaajista. Muodostamansa laskutoimitukset kaikki osasivat kyllä laskea oikein, joten 3. vaiheessa ei tässä tehtävässä ilmennyt ongelmia.

6.3 2. Tehtävä

Viikonloppuna pidettäville opettaja-messuille osallistuu yhteensä 547 opettajaa. Lauantaina osanottajia oli 489 ja sunnuntaina 423. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opettaja osallistui messuille vain yhtenä päivänä?

Tämä tehtävä on luonteeltaan varsin saman tyyppinen, kuin pitkän matematiikan ylioppilaskokeiden 8. tehtävä syksyllä 2013. Valitsin tehtävän tutkimuslomakkeeseen, koska olen kiinnostunut erityisesti siitä, miten vastaajat selviävät todennäköisyyslaskennan sanallisista tehtävistä ja kyseisen tehtävän ratkaisemiseen ei voida suoraan hyödyntää mitään todennäköisyyslaskennan laskukaavaa. Minulle tuli hieman yllätyksenä, että tämä tehtävä osattiin paremmin kuin ensimmäinen. Vastaajista neljä sai ratkaistua tehtävän täysin oikein.

Oikein vastanneista kaksi lähti tutkimaan tilannetta joukko-opin kautta. He perustivat ratkaisunsa siihen, että molempina päivinä paikalla olleiden joukko on lauantaina paikalla olleiden ja sunnuntaina paikalla olleiden joukkojen leikkaus. Näin he saivat määritettyä niiden opettajien määrän, jotka olivat paikalla vain toisena päivänä ja siten klassisen todennäköisyyden määritelmän avulla laskettua oikean vastauksen. Kaksi muuta taas päätteli, että henkilöt, jotka ovat paikalla vain lauantaina, saadaan selville kun vähennetään kaikkien messuilla kävijöiden lukumäärästä sunnuntaina messuilla käyneet. Samalla tavalla saadaan selville vain sunnuntaina paikalla olleet ja laskemalla nämä yhteen voidaan klassisen todennäköisyyden määritelmän mukaan laskea oikea vastaus.

Kolmessa virheellisistäkin ratkaisuista tehtävänanto on tulkittu oikein ja on lähdetty määrittämään erikseen niitä, jotka ovat olleet paikalla vain lauantaina ja vain sunnuntaina, eli ratkaisun 1. vaiheessa ongelmia ilmeni vain yhdellä vastaajista. Tilanteen matemaattinen mallintaminen, eli ratkaisun 2. vaihe on kuitenkin osoittautunut joillekin hankalaksi. Yksi vastaaja on yrittänyt ratkaista tehtävän siten, että todennäköisyys sille, että opettaja on paikalla vain lauantaina, on lauantaina paikallaolon todennäköisyys kerrottuna todennäköisyydellä, että henkilö ei ole paikalla sunnuntaina. Samalla tavalla on laskettu todennäköisyys sille, että opettaja on paikalla vain sunnuntaina. Vastaaja käyttää ratkaisussaan siis kertolaskusääntöä. Sen ehtona on kuitenkin tapahtumien välinen riippumattomuus, joka ei tässä kohtaa toteudu ja siitä syystä ratkaisu on väärä. Sama vastaaja jättää myös saamansa tulokset yhdistämättä ja tekee virheen murtolukujen kertolaskussa, joten hänellä on vaikeuksia myös ratkaisun 3. vaiheessa.

Muista ratkaisuista kahdessa tilannetta tarkastellaan joukko-opin kautta. Toisessa vastaaja lähtee ratkaisemaan tapahtumien, että opettaja osallistuu messuille lauantaina ja opettaja osallistuu messuille sunnuntaina, yhdistettä. Tämähän on kuitenkin sama asia, kuin kaikki messuilla kävijät. Ratkaisu päättyy yhdisteen kaavaan, jonka hän on ilmeisesti kopioinut suoraan lomakkeen kaavakokoelmasta. Tästä ratkaisusta on siis hankala tulkita, onko vastaaja ymmärtänyt tehtävänannon väärin, vai onko yhdisteen käsite hänelle vieras. Toisessa ratkaisussa taas vastaaja on oikeaoppisesti saanut selville molempina päivinä paikalla olevien opettajien määrän, mutta ei ole osannut jatkaa ratkaisua siitä eteenpäin.

Viimeisessä ratkaisussa vastaaja on laskenut erikseen vain lauantaina ja sunnuntaina paikalla olevien opettajien määrät oikein. Ratkaisun loppuvaiheessa vastaaja kuitenkin laskee todennäköisyyden pelkästään sille, että henkilö on paikalla vain sunnuntaina ja saa näin väärän vastauksen. Kyseessä saattaa olla vain huolimattomuusvirhe, mutta joka tapauksessa se sattuu ratkaisun 3.vaiheessa. Eli vielä koottuna tässä tehtävässä yhdellä vastaajista oli vaikeuksia ratkaisun 1. vaiheessa, kolmella 2. vaiheessa ja kahdella 3. vaiheessa.

6.4 3. Tehtävä

Koripallon pelaaja heittää ensimmäisen vapaaheiton koriin 70 prosentin todennäköisyydellä. Onnistuneen heiton jälkeen hän tekee korin 80 prosentin todennäköisyydellä ja epäonnistuneen heiton jälkeen 50 prosentin todennäköisyydellä. Kyseistä pelaajaa rikotaan kolmen pisteen heitossa ja hän saa kolme vapaaheittoa. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin kaksi vapaaheitoista koriin?

Tämän tehtävän valitsin siksi, että vastaajat joutuvat käsittelemään tilanteita, jossa alkeistapaukset eivät ole identtisiä. Tehtävän ratkaisemiseksi ei myöskään ole mitään valmista ratkaisukaavaa, vaan vastaajat joutuvat itse määrittämään tapahtumalle suotuisat alkeistapaukset. Muuten tehtävän ratkaisu on varsin suoraviivainen ja laskennallisesti yksinkertainen. Neljä vastaajista sai ratkaistua tehtävän täysin oikein.

Oikein vastanneista yksi ratkaisi tehtävän käyttäen hyväksi joukon, A="ainakin kaksi heitoista menee koriin", komplementtia. Hän siis laski erikseen kaikkien sellaisten tilanteiden todennäköisyydet, joissa pelaaja teki yhden tai ei yhtään koria, ja vähensi näiden yhteen lasketun summan ykkösestä. Joissain tilanteissa tämä voi helpottaa ratkaisua huomattavasti, mutta tässä tilanteessa siitä ei ollut hyötyä, koska molemmilla tavoilla laskettaessa joudutaan laskemaan erikseen neljän eri tapauksen todennäköisyydet. Kaikki muut vastaajat lähtivät laskemaan todennäköisyyttä suoraan tapahtumalle A.

Virheellisistä ratkaisuista kahdessa on lähdetty oikein laskemaan erikseen todennäköisyyksiä tilanteissa, joissa pelaaja saa kaksi tai kolme koria, eli tehtävänannossa esiintyvä ilmaisu, "ainakin kaksi", on tulkittu oikein. Yhdessä ratkaisussa vastaaja on luetellut oikein kaikki mahdolliset tapaukset ja myös ympyröinyt niistä oikein ne vaihtoehdot, joissa tehtävässä annettu ehto toteutuu. Tämän perusteella näyttäisi siltä, että hän on ymmärtänyt tehtävän oikein, mutta jostain syystä hän laskee kuitenkin todennäköisyydet vain kahden korin tapauksissa. Viimeinen vastaajista on puolestaan tulkinnut tehtävän väärin ja käsittelee alusta asti vain kahden korin tapauksia.

Kaikissa neljässä virheellisessä vastauksessa on ongelmia ratkaisun 2. vaiheessa, eli matemaattisessa mallintamisessa. Kolme näistä vastaajista on lähtenyt oikeaoppisesti ratkaisemaan todennäköisyyksiä eri tapauksille kertolaskusääntöä hyödyntämällä. Pisimmälle heistä päässyt on saanut laskettua muut tapaukset oikein, mutta tilanteessa, jossa kaksi ensimmäistä heittoa menee koriin ja kolmas ohi, hän jättää kolmannen heiton laskussaan kokonaan huomioimatta. Hän ei myöskään ole laskenut saamiaan tuloksia yhteen. Sama vastaaja on jättänyt myös edellisessä tehtävässä ratkaisun kesken samassa vaiheessa, joka viittaisi siihen, että todennäköisyyksien yhteenlaskukaava ei ole hänellä hallinnassa. Toinen vastaaja on myös laskenut kolmen korin tapauksen oikein, mutta kahden korin tapauksissa hän ei ole ottanut mahdollisia erilaisia järjestyksiä huomioon, vaan on laskenut todennäköisyyden vai yhdelle tapaukselle. Kolmannessa ratkaisussa vastaaja on pyrkinyt laskemaan todennäköisyydet kolmelle eri tapaukselle, joissa pelaaja saa kaksi koria. Hän on kuitenkin muodostanut lausekkeet väärin kaikissa tilanteissa. Ongelmana näyttäisi olevan, ettei hän osaa määrittää vastatapahtuman, eli sen, että pelaaja ei saa jollakin heitolla koria, todennäköisyyttä. Vastauksessa esiintyy pelkästään tehtävässä annettuja todennäköisyyden arvoja. Edellisestä vastauksesta voidaan tehdä sama huomio. Vastaaja ei myöskään osaa yhdistää tuloksia. Viimeinen vastaaja puolestaan pyrkii ratkaisemaan tehtävän suoraan klassisen todennäköisyyden määritelmän avulla, jakamalla suotuisten alkeistapausten lukumäärän kaikkien alkeistapausten lukumäärällä. Tämä ei kuitenkaan tässä kohtaa toimi, koska alkeistapaukset eivät ole identtisiä, eli ne eivät ole yhtä todennäköisiä.

Varsinaisissa laskutoimituksissa ei kenelläkään vastaajista sen sijaan ole vaikeuksia. Eli vielä yhteenvetona tässä tehtävässä vaikeimmaksi osoittautui ratkaisun 2. vaihe, jossa oli ongelmia puolella vastaajista. Lisäksi hieman tulkinnasta riippuen yksi tai kaksi vastaajista tulkitsi tehtävää väärin.

6.5 Tulosten yhteenveto

Kokonaisuutta tarkasteltaessa kukaan ei siis saanut ratkaistua kaikkia kolmea tehtävää täysin oikein. Vastaajista kolme sai ratkaistua oikein tehtävät 2. ja 3. Kyseiset henkilöt olivat kaikki kirjoittaneet ylioppilaaksi edellisenä vuonna ja he saivat todennäköisyyslaskennan kurssista arvosanaksi 10. Vastaavasti kolme vastaajista ei saanut ratkaistua yhtään tehtävää. Heistä yksi oli kirjoittanut ylioppilaaksi vuonna 1990, yksi vuonna 2010 ja yksi vuonna 2014. Heidän lukion todennäköisyyslaskennan kurssin arvosanansa olivat samassa järjestyksessä 9, 8 ja 10. Kaksi muuta vastaajaa sai ratkaistuksi yhden kolmesta tehtävästä. Yleisesti voidaan siis todeta, että edellisenä vuonna ylioppilaaksi kirjoittaneet selvisivät tehtävistä paremmin, kuin aiemmin lukionsa päättäneet. Tämä on toki ymmärrettävää, koska lukiossa opiskellut asiat ovat heillä varmasti tuoreemmassa muistissa. Myös todennäköisyyslaskennan kurssin arvosanalla oli odotetusti vaikutusta tutkimuksen tulokseen, vaikka poikkeuksiakin ilmeni.

Tarkasteltaessa eri ratkaisun vaiheita, voidaan todeta, että yleisimmin ongelmia esiintyi ratkaisun 2. vaiheessa, eli tilanteen matemaattisessa mallintamisessa, jossa jokaisessa tehtävässä noin puolet vastaajista epäonnistui. Ongelmat ratkaisun tässä vaiheessa eivät siis olleet sidonnaisia tehtävään, vaan vaikeuksia esiintyi tasaisesti jokaisessa tehtävässä. Vain kaksi vastaajista onnistui mallintamaan jokaisen tehtävän tilanteen matemaattisesti oikein. Mallintamisen vaikeudet johtuivat useimmiten todennäköisyyslaskennan käsitteiden puutteellisesta hallinnasta. Ongelmia ilmeni ainakin seuraavissa tilanteissa: alkeistapausten määrittäminen, suotuisten tapahtumien tunnistaminen ja niiden eri järjestysten huomioiminen, yhteenlasku- ja kertolaskusäännön käyttö, vastatapahtuman todennäköisyyden määrittäminen, sekä tapahtumien identtisyyden ja riippumattomuuden tunnistaminen. Näiden vastausten perusteella on hankala löytää mitään yhteistä käsitettä, jonka kanssa vastaajilla olisi ollut erityisesti vaikeuksia. Sen sijaan yksittäisiä puutteita todennäköisyyslaskennan teorian hallinnassa oli havaittavissa monilla eri osa-alueilla.

Ratkaisun 1. vaiheessa, eli tehtävänannon ymmärtämisessä, suurimmat ongelmat esiintyivät 1. tehtävässä. Yllättävintä tässä oli se, että tässä oli vaikeuksia nimenomaan niillä vastaajilla, jotka selviytyivät muuten tehtävistä kaikista parhaiten. Yksi selitys tähän voisi olla koulumatematiikan kaavakeskeisyys, johon mm. Joutsenlahti ja Verschaffel edellä viittaavat. Vastaajat huomaavat aiempien kokemustensa perusteella tehtävänannosta heti, että tehtävän ratkaisemiseksi tarvitaan toistokokeen kaavaa. Sen jälkeen he syöttävät annetut numeroarvot laskukaavaan ja ratkaisevat sen. Tässä tapauksessa tehtävänannosta käy kuitenkin ilmi, että pelkkä toistokokeen kaavan ratkaiseminen ei riitä, vaan ratkaisussa olisi pitänyt ottaa huomioon myös se, että kolme samaa lukua voidaan saada aikaan kuudella eri nopan silmäluvulla. Tämä tulos siis osaltaan vahvistaa käsitystä lukio-opetuksen kaavamaisuudesta ja siitä, että opiskelijoita olisi syytä kannustaa suoraviivaisuuden sijaan enemmän ajattelemaan, miten he ratkaisussaan etenevät. Muissa tehtävissä ongelmat ratkaisun 1. vaiheessa liittyivät oikeastaan Rothin mainitsemaan matematiikan kielen ymmärtämiseen. Todennäköisyyslaskennassa ”vain” ja ”ainakin” sanoilla on tietyt merkityksensä ja niiden esiintyessä tehtävänannossa, on toimittava aina samalla tavalla. Vaikka kyseisten sanojen merkitykset arkikielessä ovatkin vastaavat, on näiden sanojen tulkitseminen aiheuttanut yksittäisille vastaajille ongelmia 2. ja 3. tehtävässä.

Tehtävän ratkaisun 3. vaiheessa, eli laskutoimitusten suorittamisessa, esiintyi ongelmia vain kahdella vastaajalla 2. tehtävässä. Toinen näistä on selkeä huolimattomuusvirhe ja toisessa taas vastaaja laskee murtolukujen kertolaskun väärin. Voidaan kuitenkin todeta, että enimmäkseen vastaajat selvisivät laskutoimituksista hyvin. Tämä on tosin varsin odotettua, koska varsinaiset laskutoimitukset lukion todennäköisyyslaskennassa ovat useimmiten todella yksinkertaisia. Tämä tutkimus myös vahvistaa käsitystäni siitä, että yleisestikään opiskelijoiden vaikeudet todennäköisyyslaskennassa eivät johdu varsinaisesta laskemisesta.

Työssä oli ajatuksena myös tarkastella todennäköisyyslaskentaa kielentämisen näkökulmasta. Luokitellaan nyt vastaajien ratkaisut Jorma Joutsenlahden esittämien erilaisten kielentämismallien mukaan. Kyseisistä malleista vastaajien ratkaisuissa esiintyy vain kahta: standardi- ja kertomusmallia, joiden käyttö jakautuu varsin tasaisesti. Tämä ei ole sinänsä yllättävää, koska kuten Joutsenlahtikin toteaa, peruskoulussa oppilaat harjoittelevat useimmiten käyttämään pelkästään standardimallia vastauksissaan ja vastaavasti lukion matematiikan kirjojen esimerkkitehtävissä käytetään pääsääntöisesti kertomusmallia. Vastaajilla ei siis ole todennäköisesti edes valmiuksia muiden kielentämismallien käyttöön.

Vastaajista kaksi käyttää standardimallia kaikissa tehtävissä ja kaksi puolestaan kertomusmallia kaikissa tehtävissä. Loput neljä vastaajaa käyttävät tehtävästä riippuen molempia kielentämismalleja. Yhteensä standardimallia on käytetty 13 ratkaisussa ja kertomusmallia 11 ratkaisussa. Standardimallia käyttävät vastaajat ovat selviytyneet näistä tehtävistä paremmin, sillä kahdeksasta oikeasta ratkaisusta standardimallia on käytetty kuudessa tapauksessa ja kertomusmallia vain kahdessa. Tämä saattaa osittain selittyä sillä, että kun vastaaja hallitsee ratkaisun vaiheet hyvin, hän käyttää lyhyttä ja ytimekästä standardimallia. Vastaavasti tilanteessa, jossa vastaaja on epävarmempi, hän pyrkii jäsentelemään ajatteluaan ratkaisun edetessä myös sanallisesti. Tämä johtopäätös perustuu siihen, että useampi eri tehtävissää eri kielentämismalleja käyttäneistä vastaajista, käytti standardimallia tehtävässä, jonka he osasivat ratkaista ja vastaavasti kertomusmallia tehtävässä, joka tuotti heille ongelmia. Toisaalta 1. tehtävässä neljä vastaajista käytti suoraviivaisesti standardimallia ja laski toistokokeen laskukaavaa käyttämällä todennäköisyyden vain yhdelle nopan silmäluvulle. Voidaan pohtia, olisiko tältä virheeltä vältytty kertomusmallia käyttämällä, jolloin omaa ajattelua olisi jouduttu avaamaan myös vastauspaperille. Joka tapauksessa voidaan ainakin todeta, että ratkaisujen tarkastamisen kannalta kertomusmalli on huomattavasti parempi vaihtoehto. Kertomusmallia hyödyntävistä ratkaisuista on paljon helpompi tulkita vastaajan ajatuksenkulkua ja myös tunnistaa ratkaisussa tapahtuneet virheet.

Luku 7

Haastattelun tulokset

Tarkastelen tässä luvussa haastateltavien vastauksia. Ensin tuon esille ongelmia, joita haastateltavat havaitsivat kurssilla opiskelijoita ohjatessaan ja ohjaajien näkemyksiä vaikeuksien syistä. Toisessa kappaleessa käsitellään sitä, miten haastateltavien mielestä näihin vaikeuksiin voitaisiin puuttua. Tekstissä käytetyt haastateltavien nimet, Mika ja Janne, on muutettu. He ovat molemmat Helsingin yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksen toisen vuoden opiskelijoita, Mikan päääaineena on matematiikka ja Jannella tilastotiede. Kumpikaan ei ole ainakaan tällä hetkellä suuntautumassa opettajaksi.

7.1 Kurssilaisilla esiintyneet todennäköisyyslaskennan vaikeudet ja niiden syyt

Molemmat haastateltavat olivat havainneet, että monilla opiskelijoilla oli kurssin aikana vaikeuksia. Mika kertoi, että kurssi voidaan jakaa karkeasti kahteen osaan. Ensimmäisessä osassa käsiteltiin kombinatoriikkaa ja klassista todennäköisyyslaskentaa ja toisessa osassa satunnaismuuttujia ja niiden jakaumia. Hänen näkemyksensä mukaan ensimmäisellä osalla käsitellyt asiat olivat yleisesti varsin hyvin hallussa, mutta satunnaismuuttujiin siirryttäessä moni putosi kärryiltä. Hänen mielestään myöskään sanalliset tehtävät kurssin alkupuoliskolla eivät tuottaneet opiskelijoille suurempia ongelmia, vaikka joitain poikkeuksiakin toki ilmeni.

Janne puolestaan koki opiskelijoiden vaikeudet hiukan toisin. Hän ei osannut tarkemmin eritellä, mitkä kurssin sisällöistä olisivat olleet opiskelijoille erityisen hankalia, vaan hänen mielestään heidän oli yleisesti vaikea yhdistää omaa ajatteluaan todennäköisyyslaskennan kaavoihin. Hän avasi vielä tätä ajatusta siten, että monet opiskelijat kokevat tehtävää lukiessaan tietävänsä miten tehtävä ratkaistaan. Siitä huolimatta heidän ratkaisutapansa on väärä, eivätkä he saa oikeaa tulosta. Lopuksi Janne tiivisti tämän yhdellä lauseella: "Opiskelijoiden on vaikea ilmaista ajatuksiaan matematiikan kielen avulla." Vaikka haastateltavien vastaukset poikkesivat muuten paljon toisistaan, molemmat nostivat klassisesta todennäköisyyslaskennasta esille riippumattomuuden käsitteen, joka oli tuottanut monille vaikeuksia.

Erityisesti Jannen vastaus on tutkielmani kannalta mielenkiintoinen. Hänen kokemuksiensa mukaan opiskelijoiden vaikeudet todennäköisyyslaskennassa johtuvat siis matematiikan kielentämisen puutteellisesta hallinnasta. Tähän saattaa tosin vaikuttaa osittain myös se, että opiskelijat eivät osaa todennäköisyyslaskennan käsitteitä, eivätkä laskusääntöjä. Nämä asiat kulkevat kuitenkin usein käsi kädessä, kuten Joutsenlahtikin edellä esittää. Matematiikan kirjallisen kielentämisen systemaattisen opettamisen tavoitteena on nimenomaan se, että opiskelijat oppivat jäsentämään ja kehittämään matemaattista ajatteluaan. Näin olleen uudet matemaattiset käsitteet ja laskukaavat eivät jää irrallisiksi, vaan rakentuvat jo olemassa olevan tiedon varaan. Tällöin kielentäminen onnistuu myös toiseen suuntaan, eli luonnollisesta kielestä matematiikan symbolikieleksi.

Kysyttäessä näiden havaittujen vaikeuksien mahdollisia syitä, molemmat haastateltavat nostivat esiin kurssimateriaalin vaikeaselkoisuuden. Koska suuri osa kurssin opiskelijoista oli vasta juuri aloittanut yliopisto-opintonsa, lukiosta poikkeava, aksioomiin ja todistuksiin perustuva esitystapa oli heille vieras. Mika nosti erityisesti esille kurssilla käytettävän Tuomisen Todennäköisyyslaskenta I-kirjan, joka esittää asiat hyvin abstraktisti. Toisaalta molemmat olivat kuitenkin sitä mieltä, että kyseinen lähestymistapa on kurssilla perusteltu. Molemmat kokivat, ettei lukiossakaan voi opiskelijoita oikein tähän valmentaa, joten ratkaisuehdotukseksi ongelmaan nousi lähinnä kurssin esitietovaatimusten tarkastaminen. Yliopistomatematiikkaan sopeutumista ei varmasti helpottanut sekään, että Jannen mukaan vain harvat ensimmäisen vuoden opiskelijat kävivät pyytämässä apua ohjaajilta. Tätä mahdollisuutta hyödynsivät enemmän vanhemmat opiskelijat, joille käytäntö oli entuudestaan tuttu.

Toisaalta Janne oli havainnut, että suoraan lukiosta yliopistoon tulleet pärjäsivät kurssilla paremmin kuin ne opiskelijat, joiden lukio-opinnoista oli pidempi aika, koska heillä oli todennäköisyyslaskennan käsitteet paremmin muistissa. Hän kertoi, että kurssilla oli myös paljon sivuaineopiskelijoita ja esimerkiksi aineenopettajaksi opiskelevia, joille kurssi oli pakollinen. Osalla heistä Janne oli huomannut motivaation kanssa ongelmia, jotka vaikuttivat suoraan heidän suorituksiinsa. Nämä havainnot ovat saman suuntaisia tutkimuslomakkeella saatujen tulosten kanssa. Ongelmien syistä puhuttaessa Mika toi esille vielä sen näkökulman, että todennäköisyyslaskenta jää helposti irralliseksi muista matematiikan aihealueista, mikä aiheuttaa opiskelijoille vaikeuksia sekä lukiossa, että yliopistossa. Tämä sama havainto nousi esille myös aiemmin esitellyssä Kiviharjun tekemässä tutkielmassa.

7.2 Miten havaittuihin vaikeuksiin voitaisiin puuttua?

Koska tässä työssä tarkastellaan todennäköisyyslaskentaa erityisesti lukio-opetuksen näkökulmasta, tähänkin kysymykseen etsittiin vastausta ensisijaisesti siltä kannalta, mitä lukioissa voitaisiin tehdä toisin näiden ongelmien korjaamiseksi.

Mika ei osaa sanoa, miten hänen esille nostamiinsa vaikeuksiin satunnaismuuttujien kanssa voitaisiin puuttua lukio-opetuksessa, koska ei muistanut miten niitä lukiossa käsiteltiin. Yleisesti hän tiivisti oman käsityksensä lukio-opetuksen ongelmista todennäköisyyslaskennan osalta siten, että siellä opetellaan ”miljoona erilaista tapaa laskea”, jotka soveltuvat erilaisiin tilanteisiin, ja on hankala tietää, mitä milloinkin pitäisi käyttää. Tässä nousee siis jälleen esille kokemus siitä, että lukion todennäköisyyslaskennan kurssilla ei muodostu selkeää rakennetta eri käsitteiden välille, vaan ne jäävät irrallisiksi ja ulkoa opettelun varaan. Mika ei kuitenkaan tiedä, mitä asialle voisi tehdä, koska erilaisia todennäköisyyden kaavoja ja laskusääntöjä ei voida lukiotiedoilla todistaa ja perustella.

Janne puolestaan korostaa tässä asiassa opettajan roolia. Hänen mukaansa kaikki lähtee siitä, että opettaja hallitsee itse todennäköisyyslaskennan hyvin. Hän onkin huolissaan siitä, miten vähän tuleville matematiikan aineenopettajille opetetaan todennäköisyyslaskentaa. Myös Mika mainitsi omassa haastattelussaan olevansa tästä huolissaan. Janne nostaa esiin lisäksi motivoinnin tärkeyden. Todennäköisyyslaskenta on kuitenkin varsin käytännönläheistä matematiikkaa ja varsinkin monet todennäköisyyslaskentaan liittyvät pelit, kuten lotto ja korttipelit, kiinnostavat monia lukiolaisia. Tätä kiinnostusta pitäisi siis hyödyntää opetuksessa esimerkiksi erilaisten laskuesimerkkien kautta. Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssinkin aikana Janne huomasi, kuinka monet innostuivat aiheesta ja selviytyivät sen jälkeen paremmin laskuharjoitustehtävistä.

Sekä Mika että Janne toimivat laskuharjoitusten pitäjinä myös Johdatus tilastolliseen päättelyyn -kurssilla. Kurssi on tavallaan jatkoa Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssille, ja moni opiskelijakin jatkoi suoraan tälle kurssille. Näiden opiskelijoiden kohdalla Mika ja Janne huomasivat, että verrattuna lähtötilanteeseen, todennäköisyyslaskennan käsitteiden tunteminen ja hyödyntäminen oli mennyt JTN-kurssin aikana paljon eteenpäin, vaikka ne eivät vieläkään olleet useimmilla täysin hallussa.

Luku 8

Pohdinta

Tutkielmani lähtökohtana oli havainto siitä, että lukiolaiset kokevat todennäköisyyslaskennan kurssin hyvin erilaiseksi muuhun matematiikkaan verrattuna. Osalle opiskelijoista todennäköisyyslaskenta on luontaisesti helppoa, mutta monet kokevat sen todella haastavana. Kuten tutkielmassa esitetyistä aiemmista todennäköisyyslaskennan tutkimuksista käy ilmi, tämä ilmiö on todellinen ja sitä on tutkittu myös aikaisemmin. Tässä tutkimuksessa tavoitteenani oli selvittää mistä nämä vaikeudet voisivat mahdollisesti johtua ja pohtia millä keinoin niihin voitaisiin lukio-opetuksessa vaikuttaa.

Tutkimuslomakkeiden vastauksista käy ilmi, että vaikka kyselyyn vastanneet ensimmäisen vuoden matematiikan aineenopettajaopiskelijat eivät itse kokeneet todennäköisyyslaskentaa muuta lukiomatematiikkaa haastavampana, heillä on kuitenkin merkittäviä puutteita todennäköisyyden käsitteiden hallinnassa. Varsinaisista lukion pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssin sisällöistä ei noussut esiin mitään yksittäistä osa-aluetta, jonka kanssa vastaajilla olisi ollut erityisesti ongelmia. Haastattelujen perusteella voitaisiin kurssin sisällöistä tosin mainita tapahtumien riippumattomuus, jonka molemmat haastateltavat kokivat erityisen haasteelliseksi opiskelijoille. Tämä havainto tukee myös Shaygnessyn kirjallisuuskatsauksessa esiteltyä tulosta. Sen sijaan lomakkeen tehtävissä yleisesti vaikeuksia tuotti kuvattujen tilanteiden tulkinta ja niiden muuttaminen matemaattiseen muotoon. Sekä lomakkeen avoimissa kysymyksissä, että ohjaajien haastatteluissa tuli esiin kokemus siitä, että todennäköisyyslaskennan tehtävät eivät ratkea suoraviivaisesti intuitiivisen ajattelun seurauksena, vaan oikeaa ratkaisua varten omaa ajattelua täytyy jollakin tavalla muuttaa. Aiemmin esitellyssä Kiviharjun tutkimuksessa tämä sama havainto nousi myös vahvasti esille. Monissa tilanteissa tätä ajattelun erilaisuuden vaatimusta voidaan varmasti perustella Shaugnessyn esittelemillä todennäköisyyden käsitteeseen liittyvillä virheellisillä ennakkokäsityksillä. Vaikka tutkimuslomakkeen varsinaisten laskutehtävien ratkaisuista näitä virhekäsityksiä on vaikea tunnistaa, ne saavat aikaan sen, että intuitiivinen ajattelu johtaa opiskelijaa harhaan ja siksi todennäköisyyteen liittyviä matemaattisia laskukaavoja on opiskeluvaiheessa vaikea sisäistää. Osittain tästä, ja osittain Kiviharjun mainitsemasta irrallisuuden kokemuksesta johtuen, joka nousi esille myös ohjaajien haastatteluissa, opiskelijoille ei muodostu lukiossa kokonaiskäsitystä todennäköisyyslaskennasta, vaan se on monille pelkästään kaavojen ulkoa opettelua. Tämä kokemus oli nähtävissä useammankin kyselylomakkeen vastauksista.

Tarkastelen työssäni todennäköisyyslaskentaa erityisesti sanallisten tehtävien ja matematiikan kirjallisen kielentämisen kannalta, koska kuten jo edellä mainittiin, suurin osa lukion todennäköisyyslaskennan tehtävistä on sanallisia tehtäviä. Vaikeudet sanallisten tehtävien ratkaisemisessa selittävätkin osittain todennäköisyyslaskennan haasteita, mikä käy ilmi myös Shaugnessyn esittelemistä tutkimuksista. Tutkimuslomakkeen avoimissa kysymyksissä yksi vastaaja totesi, että hän koki omien todennäköisyyslaskentaan liittyvien vaikeuksiensa johtuvan nimenomaan sanallisista tehtävistä. Merkittävämpi havainto liittyy mielestäni kuitenkin tutkimuslomakkeen 1. laskutehtävän ratkaisuihin, joissa peräti puolet vastaajista jätti nopan eri silmälukujen mahdollisuudet huomioimatta, mutta laski tehtävän muuten oikein yhdelle silmäluvulle. Mielestäni tätä tulosta ei voida selittää mitenkään todennäköisyyslaskennan käsitteiden ymmärtämisen, vaan nimenomaan sanallisten tehtävien ratkaisuprosessien kautta, kuten Tutkimuslomakkeen tulokset -luvussa jo todettiin. Yleisesti ottaen tämänkin tutkimuksen osalta on kuitenkin hankala sanoa, johtuvatko vaikeudet jonkin tietyn tehtävän ratkaisemisessa ensisijaisesti puutteista todennäköisyyslaskennan hallinnassa, vai kyvyistä ratkaista sanallisia tehtäviä. Varmasti näihin molempiin osa-alueisiin olisi syytä kiinnittää opetuksessa huomiota.

Koska tutkimus toteutettiin vain hyvin pienellä joukolla, ei saatuja tuloksia voida laajemmin yleistää. Toinen tekijä, joka on tuloksia arvioitaessa otettava huomioon, on että kaikki tutkimukseen osallistuneet henkilöt ovat kouluttautumassa matematiikan aineenopettajiksi ja he ovat menestyneet lukiossa matematiikassa keskiverto-opiskelijaa paremmin. Jos sama tutkimuslomake teetettäisiin tavallisella lukion pitkän matematiikan ryhmällä, tulokset voisivat olla hyvin erilaiset. Saamani tutkimustulokset ovat kuitenkin varsin hyvin linjassa aiemman todennäköisyyslaskennan tutkimuksen kanssa ja osoittavat, että tälläkin tutkittavalla ryhmällä on selkeitä ongelmia todennäköisyyslaskennassa. Laadullisen tutkimuksen perusajatuksenakin on laajojen yleistysten sijaan löytää mielenkiintoisia yksityiskohtia, jotka joko vahvistavat, laajentavat tai kyseenalaistavat vallitsevaa teoriaa. Lisäksi kyseisen ryhmän valinta oli hyvin perusteltu, kuten Tutkimuksen toteutus -kappaleessa on esitetty. Tältä pohjalta on siis mielekästä pohtia, miten havaittuihin vaikeuksiin voitaisiin vaikuttaa lukio-opetuksessa.

Tämän tutkimuksen tulosten, sekä esitetyn teorian perusteella voitaisiin todennäköisyyslaskentaan liittyvät ongelmat lukiossa tiivistää siten, että opiskelijoille ei muodostu selkeää kokonaiskäsitystä todennäköisyyslaskennan teoriasta, eikä se rakennu muiden heidän oppimiensa matemaattisten käsitteiden varaan. Tähän vaikuttavat ainakin virheelliset ennakkokäsitykset, koulumatematiikan yksipuolinen tapa ratkaista sanallisia tehtäviä, todennäköisyyslaskennan vähäinen painoarvo lukiossa, sekä se, että todennäköisyyslaskennan tuloksia ei perustella riittävästi.

Miten näihin ongelmiin sitten voitaisiin puuttua? Monet tutkijat ovat nostaneet todennäköisyyslaskennan oppimiseen liittyen suurimmaksi haasteeksi nimenomaan virheelliset ennakkokäsitykset. Tämän perusteella ensimmäinen askel lukion todennäköisyyslaskennan kurssilla pitäisi mielestäni olla opiskelijoiden henkilökohtaisten todennäköisyys käsitysten selvittäminen. Opiskelijoita on hankala opettaa ja ohjata oikeaan suuntaan, jos ei ymmärrä kuinka he ajattelevat erilaisissa todennäköisyyslaskennan tilanteissa. Hyvä ratkaisu voisikin olla pitää heti kurssin alussa lyhyt testi, jonka perusteella nähtäisiin miten opiskelijat intuitiivisesti vastaavat erilaisiin todennäköisyyslaskentaan liittyviin tehtäviin. Tällä tavalla voitaisiin kartoittaa tutkimuksissa havaitut yleisimmät virheelliset ennakkokäsitykset, jotta niihin voidaan opetuksessa heti puuttua. Tässä tullaan kuitenkin heti opettajan roolin vaativuuteen todennäköisyyslaskennan osalta. Tällainen menettely vaatisi opettajalta paljon aikaa ja vaivannäköä ja lisäksi hänen olisi itse hallittava todennäköisyyslaskentaa niin hyvin, että hän pystyisi tunnistamaan näitä ennakkokäsityksiä ja myös korjaamaan niitä. Ongelmana kuitenkin on usein, ettei opettajalla ole tällaisia valmiuksia, koska matematiikan aineenopettajan koulutuksessa todennäköisyyslaskenta rajoittuu käytännössä yhteen viiden opintopisteen kurssiin. Molemmat haastatellut Johdatus todennäköisyyslaskentaan -kurssin ohjaajatkin kokivat tämän huolestuttavana. Pahimmassa tapauksessa opettaja saattaa itsekin kärsiä vastaavista virheellisistä todennäköisyyden käsityksistä, kuten Shaugnessyn katsauksesta kävi ilmi. Tässä mielessä lukion todennäköisyyslaskennan ongelmat eivät ole ratkaistavissa pelkästään lukioiden sisäisillä toimenpiteillä, vaan myös matematiikan aineenopettajien koulutusta yliopistoissa olisi syytä kehittää.

Shaugnessyn tekemässä tutkimuksessa tehokkaaksi tavaksi korjata opiskelijoiden virhekäsityksiä osoittautui menettely, jossa opiskelijat ensin esittivät oman arvionsa, mitä kuvatussa satunnaiskokeessa tulee tapahtumaan, sen jälkeen tilanne toteutettiin kokeellisesti ja lopuksi verrattiin arvauksia ja saatuja tuloksia teoriaan peilaten. Uskon, että tämän tyyppinen menettely voisi olla myös lukio matematiikassa toimiva ja sitä kannattaisi ainakin kokeilla. Tietysti tämän tyyppisissä tilanteissa nousee aina esille aikataulukysymys, kun kurssilla on käytössä vain rajallinen määrä oppitunteja ja käsiteltäviä asiasisältöjä on paljon. Enemmän kysymys on kuitenkin opettajan omasta asenteesta. Kurssin aikataulut on varmasti mahdollista suunnitella siten, että oppitunneilla voidaan hyödyntää myös kokeellista lähestymistapaa. Opettajan pedagogisissakin opinnoissa painotetaan tällä hetkellä sitä, että matematiikassa perinteisesti vallitsevasta opettajakeskeisestä opetuksesta olisi päästävä siihen, että opiskelijat osallistuisivat itse enemmän oppitunnin kulkuun ja oivaltaisivat asioita oman toimintansa kautta. Monilla matematiikan kursseilla on hankalaa keksiä mitään konkreettisia ja käytännöllisiä kokeita, joita opiskelijat voisivat itse toteuttaa, mutta todennäköisyyslaskennassa tämä on mahdollista. Kuten ohjaajien haastatteluista ja Kiviharjun tutkielmasta käy ilmi, tämän tyyppiselle opetukselle olisi kysyntää myös opiskelijoiden puolelta ja he kokevat sen motivoivana tekijänä. Juuri todennäköisyyslaskennan luonnetta osana ihmisten jokapäiväistä elämää tulisi korostaa, koska sekin lisää opiskelijoiden kiinnostusta aihetta kohtaan. Loppujen lopuksi motivaatiolla on kuitenkin merkittävä vaikutus oppimiseen, kuten Matematiikan osaaminen -luvussa edellä todetaan. Kokeellisen lähestymistavan kanssa on kuitenkin oltava myös varovainen, jotta vältytään Hawkinsin ja Kapdian kuvaamalta tilanteelta. Mielestäni oikein esitettynä se, että laskennallinen teoria ei välttämättä vastaa täysin satunnaiskokeesta saatuja tuloksia, voi haitallisten vaikutusten sijaan auttaa opiskelijoita ymmärtämään todennäköisyyden todellista luonnetta. Se, minkälainen vaikutus kokeella on opiskelijoihin, on siis jälleen pitkälti opettajan toiminnan varassa.

Kokeellisella lähestymistavalla voidaan osittain vaikuttaa myös siihen ongelmaan, että todennäköisyyslaskennan tuloksia ei opiskelijoiden mielestä perustella lukiossa riittävästi. Kuten jo edellä todettiin, teoreettisesti monia todennäköisyyslaskennan tuloksia on lukiossa mahdotonta todistaa, koska se vaatisi lukion pitkän matematiikan oppimäärän ylittävien sisältöjen hallintaa. Ihmisillä on kuitenkin tapana uskoa se, mitä he itse näkevät, joten usein kokeellisesti oikeaksi osoitettu teoria on opiskelijoille riittävästi perusteltu. Tätä ei tietenkään voida soveltaa kaikkiin tilanteisiin, mutta joissakin tapauksissa siitä voi olla hyötyä. Todennäköisyyslaskennan painoarvoa lukion matematiikassa tuskin tullaan lähitulevaisuudessa merkittävästi muuttamaan, vaikka uusiin lukion opetussuunnitelmien perusteisiin ehdotetut muutokset ovatkin pieniä askelia siihen suuntaan. Lyhyen matematiikan uusi valtakunnallinen syventävä kurssi Tilastot ja todennäköisyys II, antaa todennäköisyyslaskennasta kiinnostuneille lyhyen matematiikan opiskelijoille syventyä aiheeseen tarkemmin. Lisäksi pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan kurssin siirtäminen viimeiseksi pakolliseksi kurssiksi, voi vähentää sen irralliseksi kokemisen tunnetta. Ehdotuksen mukaan kurssi ei olisi enää muiden toisiinsa liittyneiden kurssien välissä, vaan ikään kuin ihan omalla paikallaan. Varsinaisesti tämä muutos ei kuitenkaan auta todennäköisyyslaskennan rakentumisessa osaksi muiden matematiikan osa-alueiden muodostamaa kokonaisuutta, mutta se voi selkeyttää muiden kurssien välistä yhteyttä.

Mielestäni yksi tapa, jolla voitaisiin luoda yhteyksiä todennäköisyyslaskennan ja muiden lukion matematiikan kurssien välille, olisi omaa ajattelua vaativien sanallisten tehtävien lisääminen muille kursseille. Tutkimuslomakkeen tehtävien ratkaisujen perusteella on selvää, että vastaajilla oli suuria vaikeuksia kuvattujen tilanteiden mallintamisessa, eikä tämä johtunut pelkästään todennäköisyyslaskennan käsitteiden puutteellisesta hallinnasta. Tämä selittyy ainakin osittain Kiviharjun tutkielmassaan esiin nostamalla havainnolla. Moni tutkimuksessa haastatelluista lukiolaisista koki, että todennäköisyyslaskennan tehtävät olivat hankalia, koska niihin ei usein ole olemassa mitään suoraviivaista ratkaisumallia kuten muissa matematiikan tehtävissä, vaan ratkaisu piti ajatella alusta alkaen itse. Tässä törmätään siis samaan ongelmaan, josta Joutsenlahti ja Verschaffel kirjoittavat sanallisiin tehtäviin liittyen. Koulumatematiikan sanallisetkin tehtävät ovat usein suoraviivaisia ja ne ratkaistaan hieman kärjistetysti aina samalla tavalla. Lisäksi kouluissa suositaan mahdollisimman lyhyttä ja ytimekästä ratkaisutapaa, jossa käytetään pelkästään matemaattisia symboleja. Tämän tyyppinen toiminta opettaa opiskelijoita hyödyntämään valmiita, annettuja ratkaisumalleja, mutta ei kehitä heidän omaa matemaattista ajatteluaan. Matemaattinen osaaminen -luvussa esiteltyjä viittä osaamisen osa-aluetta käyttäen opiskelijoiden strateginen kompetenssi ei ole hankalampien ongelmien ratkaisemiseen vaadittavalla tasolla. Kuten edellä esitettiin, Joutsenlahti tarjoaa tämän ongelman ratkaisuksi matematiikan kirjallisen kielentämisen ratkaisumallien systemaattista opettamista, josta onkin saatu varsin rohkaisevia tuloksia. Tosin todennäköisyyslaskennan osalta menetelmää ei ole tietääkseni kokeiltu. Joka tapauksessa näiden kielentämismallien opettelu ja omaa ajattelua vaativien sanallisten tehtävien lisääminen muille matematiikan kursseille antaisi opiskelijoille varmasti paremmat valmiudet todennäköisyyslaskennan tehtävien ratkaisemiseen ja saattaisi myös vähentää kurssin irralliseksi kokemisen tunnetta. Väyrynen oli omassa Pro Gradu -tutkielmassaan soveltanut näitä kielentämismalleja peruskoulun avaruusgeometrian kurssilla ja tulokset olivat varsin positiivisia, kuten edellä esitettiin. Vastaavanlainen opetuskokeilu olisi mielenkiintoista toteuttaa myös lukion todennäköisyyslaskennan kurssilla.

Tässä on nyt esitelty joitakin ratkaisumahdollisuuksia niihin lukion todennäköisyyslaskennan haasteisiin, joita tätä tutkielmaa tehdessäni havaitsin. Vaikka näitä menetelmiä onkin onnistuneesti kokeiltu erilaisissa yhteyksissä, se ei välttämättä tarkoita sitä, että ne suoraan vastaisivat lukiolaisten ongelmiin todennäköisyyslaskennan kontekstissa. Tulevana matematiikan opettajana näitä keinoja on kuitenkin mielenkiintoista pohtia ja haluan myös työssäni kokeilla tällaisia vaihtoehtoisia opetusmenetelmiä todennäköisyyslaskennan osalta. Loppujen lopuksi opettajalla itsellään on kuitenkin todella suuri vaikutus siihen, miten opiskelijat suhteutuvat todennäköisyyslaskentaan ja mitä he oppitunneilla oppivat. Tässä mielessä toivoisin, että matematiikan aineenopettajien koulutuksessa otettaisiin huomioon myös todennäköisyyslaskennan haasteet pedagogiselta kannalta, jotta tulevilla opettajilla olisi valmiudet ymmärtää ja korjata opiskelijoiden virheellisiä ennakkokäsityksiä. Historiansa takia todennäköisyyslaskenta yhdistetään usein vain uhkapeleihin, eikä sitä välttämättä pidetä yhtä tärkeänä, kuin joitakin muita matematiikan osa-alueita. Opettajien tulisikin nähdä se, että todennäköisyyslaskentaa ja tilastojen käsittelyä tarvitaan nyky-yhteiskunnassa monilla eri aloilla sekä ammateissa ja tässä mielessä se on hyvin tärkeä aihe niillekin opiskelijoille, jotka eivät ole suuntautumassa varsinaisesti matemaattisille aloille.

Tämän tutkielman tekeminen osoitti minulle, että todennäköisyyslaskennan opetuksessa on paljon mahdollisia kehityskohteita, joiden avulla lukiolaisten käsityksiä todennäköisyydestä voidaan muuttaa niin, että sitä ei enää koeta ylivoimaisen hankalaksi ja irralliseksi muusta matematiikasta. Toivottavasti todennäköisyyslaskennan tärkeys ymmärretään tulevaisuudessa yleisemmin ja näitä toimenpiteitä tehdään jatkossa myös laajamittaisemmin niin lukioiden, yliopistojen kuin opetusministeriönkin toimesta, ettei todennäköisyyslaskennan opettamisen kehittäminen jää pelkästään yksittäisten opettajien harteille. Muuten merkittäviä muutoksia lukiolaisten käsityksiin todennäköisyyslaskennasta on turha odottaa.

Kirjallisuutta

[1] Alasuutari, P.: Laadullinen tutkimus, Gummerus Kirjapaino Oy: Vaajakoski, 2007.

[2] Fischbein, E., & Gazit, A.: Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? Educational Studies in Mathematics, 15(1), 1–24, 1984.

[3] Hawkins, A., & Kapadia, R.: Children's conceptions of probability – a psychological and pedagogical review. Educational Studies in Mathematics, 15(4), 349–377, 1984.

[4] Hirsjärvi, S. ja Hurme, H.: Teemahaastattelu, Oy Gaudeamus Ab: Helsinki, 1988.

[5] Johdatus todennäköisyyslaskentaan, kevät 2015, Helsingin Yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitos. Haettu 8.4.2015 sivulta http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=134318231.

[6] Joutsenlahti, J.: Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa (toim.) Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä: Hämeenlinnan normaali-koulu, 3-12. (Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja 8), 2003.

[7] Joutsenlahti, J.: Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä, Tampereen Yliopistopaino Oy - Juvenes Print, 2005.

[8] Joutsenlahti, J.: Matematiikan kirjallinen kielentäminen lukiomatematiikassa. Teoksessa Asikainen, M., Hirvonen P. ja Sormunen, K. (toim.): Ajankohtaista matemaattisten aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa (Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009) Joensuu: Itä-Suomen yliopisto. 3-15., 2010.

[9] Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J.: Pitkä matematiikka 6, Todennäköisyys ja tilastot, Sanoma Pro Oy, 2015.

[10] Kiviharju, J.: Lukion pitkän matematiikan opiskelijoiden käsityksiä todennäköisyydestä, Sivulaudatur -tutkielma, Helsingin yliopisto, Opettajankoulutuslaitos, 2011.

[11] Kontkanen, P., Lehtonen, J., Luosto, K.: Pyramidi 6, Lukion pitkä matematiikka, Todennäköisyys ja tilastot, Sanoma Pro Oy, 2012.

[12] Koskenoja, M.: Sattuman matematiikkaa I - Klassinen todennäköisyys. Julkaisussa Solmu 2/2002. Haettu 19.2.2015 http://thesaurus.math.helsinki.fi/2002/2/sattuma/sattuma.pdf.

[13] Lehtinen, M.: Matematiikan historian luentoja, 2012. Haettu 24.2.2015 sivulta http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=79570733

[14] Lukion opetussuunnitelma perusteet, Opetushallitus, 2003.

[15] Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015/luonnostekstiä, Opetushallitus, 2015.

[16] Morgan, C.: The place of pupil writing in learning, teaching and asessing matemathics. Teoksessa Gates, P. (toim.): Issues in mathematics teaching, RoutledgeFalmer, 232-245., 2001.

[17] Orton, A.: Learning Mathematics, Issues, theory and classroom practice, Continuum, 2004.

[18] Reed, S., K.: Word Problems, research and curriculum reform, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1999.

[19] Roth, W.-M.: On the problematic of word problems - language and the world we inhabit. Teoksessa Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W., Mukhopadhyay, S. (toim.): Words and Worlds, Modelling Verbal Descriptions of Situations, Sense Publishers, 55-70., 2009.

[20] Shaugnessy, J.: Research in probability and statistics; Reflections and directions. Teoksessa D. Grouws (toim.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (s. 465–494). Reston: NCTM, 1990.

[21] Tutkintovaatimukset matematiikan aineenopettajaksi opiskeleville 2014-2016, Helsingin Yliopisto, 2014. Haettu 8.4.2015 sivulta http://wiki.helsinki.fi/display/mathstatOpiskelu/Tutkintovaatimukset+2014+-+matematiikan+aineenopettaja+2014

[22] Tuominen, P.: Todennäköisyyslaskenta 1., Limes ry: Helsinki, 1990.

[23] Verschaffel, L., Greer, B., de Corte, E.: Making sense of word problems, Swets & Zeitlinger B. V., 2000.

[24] Virsta - Virtual Statistics: Laadullisen ja määrällisen tutkimuksen erot, 2002. Haettu 7.4.2015 sivulta https://www.stat.fi/virsta/tkeruu/01/07/

[25] Väyrynen, M.: Kielentäminen avaruusgeometrian opetuksen työtapana, Pro Gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteenlaitos, 2012.

Liitteet

1. Kyselylomake
2. Haastattelulomake

KYSELYLOMAKE

Tässä kyselylomakkeessa on kaksi osiota. Ensimmäisessä osiossa selvitän taustatietoja. Vastaa kysymyksiin 1)-5) laittamalla rasti ruutuun ja tehtävään 6) kirjallisesti. Jos et muista tarkkaa vastausta johonkin kysymykseen, niin vastaa siihen parhaan arviosi mukaan.
Toisessa osiossa on kolme klassiseen todennäköisyyteen liittyvää laskutehtävää. Merkitse paperille myös, miten olet tehtävän ratkaissut, pelkkä vastaus ei riitä. Vaikka et osaisikaan tehdä jotain tehtävistä kokonaan, niin yritä silti parhaasi ja kirjoita paperille, miten lähtisit tehtävää ratkaisemaan. Tehtävien ratkaisemisessa saa käyttää apuna laskinta. Lomakkeen lopussa on myös lyhyt kaavakokoelma.

Kiitos vastauksistasi!

1) Olen suorittanut lukiossa
   ❒ pitkän matematiikan ❒ lyhyen matematiikan

2) Matematiikan arvosanani lukion päättötodistuksessa oli
   ❒ 5 ❒ 6 ❒ 7 ❒ 8 ❒ 9 ❒ 10

3) Kurssista MAA6 Todennäköisyys ja tilastot / MAB5 Tilastot ja todennäköisyys sain arvosanaksi
   ❒ 5 ❒ 6 ❒ 7 ❒ 8 ❒ 9 ❒ 10

4) Oliko kyseinen kurssi mielestäsi muihin matematiikan pakollisiin kursseihin verrattuna vaativuudeltaan…?
   ❒ paljon helpompi
   ❒ helpompi
   ❒ samantasoinen
   ❒ vaativampi
   ❒ paljon vaativampi

5) Kuinka kiinnostunut olit kyseisen kurssin aihealueista?
   ❒ en lainkaan kiinnostunut
   ❒ vähän kiinnostunut
   ❒ kiinnostunut
   ❒ erittäin kiinnostunut

6) Mitkä asiat olivat sinulle hankalia lukion todennäköisyyslaskennassa?

   Entä helppoja?

Tehtävät

1. Yatzy-pelissä heitetään viittä noppaa. Millä todennäköisyydellä pelaaja saa yhdellä heitolla kolme samaa numeroa?

2. Viikonloppuna pidettäville opettaja-messuille osallistuu yhteensä 547 opettajaa. Lauantaina osanottajia oli 489 ja sunnuntaina 423. Millä todennäköisyydellä satunnaisesti valittu opettaja osallistui messuille vain yhtenä päivänä?

3. Koripallon pelaaja heittää ensimmäisen vapaaheiton koriin 70 % todennäköisyydellä. Tämän jälkeen onnistuneen heiton jälkeen hän tekee korin 80 % todennäköisyydellä ja epäonnistuneen heiton jälkeen 50% todennäköisyydellä. Kyseistä pelaajaa rikotaan kolmen pisteen heitossa ja hän saa kolme vapaaheittoa. Millä todennäköisyydellä hän saa ainakin kaksi vapaaheitoista koriin?

Klassisen todennäköisyyden kaavoja:

- Tapahtuman *A* klassinen todennäköisyys on P(A) = $\frac{n(A)}{n(E)}$, jossa *n(A)* on tapahtumalle *A* suotuisten alkeistapausten lukumäärämäärä ja *n(E)* kaikkien alkeistapausten lukumäärä.
- Erillisille tapahtumille ($A_1, A_2, \ldots, A_n$), $P(A_1$ *tai* A_2 *tai* … $A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.
- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
- *P(A* tai *B)* = *P(A)* + *P(B)* – *P(A* ja *B)*
- Riippumattomille tapahtumille *A* ja *B, P(A* ja *B)* = *P(A)* · *P(B)*
- *P(*tulos *A* tapahtuu toistokokeessa täsmälleen *k* kertaa*)* = $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, jossa *n* on toistojen määrä, *p* tuloksen *A* todennäköisyys kullakin toistolla ja *q* on tuloksen *A* vastatapahtuman todennäköisyys.

Haastattelulomake Johdatus todennäköisyyslaskentaan–kurssin ohjaajille

Kuinka monta vuotta olet opiskellut matematiikkaa yliopistossa?

Suunnitteletko työskenteleväsi tulevaisuudessa matematiikan aineenopettajana?

Oletko toiminut yliopistossa ohjaajana muilla kursseilla?

1. Millä todennäköisyyslaskennan osa-alueella opiskelijoilla oli erityisesti vaikeuksia JTN-kurssilla?

2. Mistä kyseiset vaikeudet voisivat sinun mielestäsi johtua?

3. Miten näihin vaikeuksiin voitaisiin mielestäsi puuttua lukio-opetuksessa?

4. Miten opiskelijat kehittyivät kurssin aikana?

5. Onko sinulla muita kurssiin liittyviä huomioita, joita haluaisit nostaa esiin?