

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Maisterintutkielma

**Kokelaiden yleisimmät virheet
ylioppilaskokeissa avaruusgeometrian
tehtävissä**

Oona Hämäläinen

Ohjaaja:
Petteri Harjulehto

Toukokuu 2025

Tiedekunta: Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Koulutusohjelma: Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Opintosuunta: Matematiikan opettaja

Otsikko: Kokelaiden yleisimmät virheet ylioppilaskokeissa avaruusgeometrian tehtävissä

Tekijä: Oona Hämäläinen

Aika: Toukokuu 2025

Sivumäärä: 46 pp.

Säilytyspaikka: E-thesis

Tiivistelmä:

Geometrisen ajattelun kehitys ja kyseisessä prosessissa muodostuvat virhekäsitykset ovat mielenkiintoinen ja myös olennainen aihe koulugeometrian kannalta. Geometrian opiskelu alkaa jo alkuopetuksessa vuosiluokilla 1-2 kuvioiden ja kappaleiden tunnistamisella ja jatkuu opetussuunnitelmien ohjaamana läpi peruskoulun ja lukio-opintojen kohti matemaattista täsmällistä päättelyä. Geometrian rooliin suomalaisessa koulutuksessa tutustutaan luvussa 2.1.

Geometrisen ajattelun kehitys ei ole itsestään kypsymisen myötä tapahtuva jatkuva prosessi, vaan onnistuneessa oppimisessa keskeisessä roolissa ovat sekä oppija että opettaja. Geometrisen ajattelun kehitystä on pyritty kuvailemaan eri teorioiden avulla. Tämän tutkielman teoriaosion luvussa 2.2 esitellään yksi tunnetuimmista geometrisen ajattelun kehityksen teorioista eli Van Hielen teoria sekä sen pohjalta jalostettu teoria koulugeometrian kolmesta näkökulmasta. Lisäksi tarkastellaan yleisiä virhekäsityksiä ja niistä mahdollisesti seuraavia virheitä. Tämä kokonaisuus toimii opetussuunnitelmien lisäksi tutkimuksen teoreettisena pohjana.

Tutkielman tavoitteena on selvittää, millaisia virheitä tehdään ylioppilaskirjoitusten avaruusgeometriaan liittyvissä tehtävissä. Tutkimuksen aineistona toimii Ylioppilastutkintolautakunnan keräämästä korpusaineistosta vuosilta 2019–2023 valikoidut neljä matematiikan ylioppilaskoetehtävää, joista jokaisesta tarkastellaan sata kappaletta kokelasratkaisuja ja niissä tehtyjä virheitä. Virheet luokitellaan virhetyypin mukaan, ja lisäksi pohditaan mahdollisia syitä virheiden taustalla. Tutkimus suoritetaan sisällön analyysinä, jolloin merkittävässä roolissa on tekijän tulkinta virheistä ja virheluokista.

Tehtäväkohtaisesta virheanalyysistä tehtiin lopuksi yhteenveto, jossa yleisimmistä virheistä muodostettiin viisi yläluokkaa: kappaleiden ja kuvioiden hahmottaminen, käsitevirheet, virheelliset tai puutteelliset päättelyt, tehtävänannon tulkitseminen ja pyöristysvirheet. Tutkielman tulokset toimivat suuntaa antavina: suurempien johtopäätösten tekeminen kokelaiden geometrian osaamistasosta vaatisi jatkotutkimuksia, sillä tässä tutkielmassa hyödynnetty aineisto on määrällisesti pieni.

Avainsanat: Geometria, matematiikan ylioppilaskoe, virheet, virhekäsitykset

Ilmoitus kielimallin käytöstä työssä (pois lukien kypsyysnäyte): tutkielman sisältö ja analyysit ovat tekijän itsensä tuottamia. Kielimallia on käytetty tutkimusartikkeleiden hakuun ja tarkasteluun, ehdotuksiin tekstin rakenteen muotoilusta ja tulosten yhteenvedoon. Tekijä ottaa työn sisällöstä täyden vastuun.

Sisällys

1 Johdanto	1
2 Teoreettinen tausta	2
2.1 Geometria peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmissa	2
2.2 Geometrisen ajattelun kehitys	4
2.2.1 Van Hielen teoria	4
2.2.2 Kolme näkökulmaa koulugeometriaan	6
2.2.3 Virheitä ja virhekäsityksiä koulugeometriassa	7
3 Tutkimuksen esittely	8
3.1 Aineisto ja tutkimuskysymykset	8
3.2 Analyysin kuvaus	9
4 Tutkimus: tehtäväanalyysi	10
4.1 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7: Suklaarasia	10
4.1.1 Ratkaisuehdotus	10
4.1.2 Virheet	11
4.1.3 Analyysi	17
4.2 Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 5: Paljonko tölissä on ilmaa?	18
4.2.1 Ratkaisuehdotus	18
4.2.2 Virheet	19
4.2.3 Analyysi	24
4.3 Kevät 2023, pitkä oppimäärä, tehtävä 6: Raketin nokkakartio	25
4.3.1 Ratkaisuehdotus	26
4.3.2 Virheet	26
4.3.3 Analyysi	31
4.4 Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7: Avaruuskappale	32
4.4.1 Ratkaisuehdotus	33
4.4.2 Virheet	35
4.4.3 Analyysi	41
4.5 Tulosten tarkastelua	43
5 Pohdinta	44
Lähteet	45

1 Johdanto

Geometria on matematiikan osa-alue, joka eroaa monin tavoin algebrasta ja aritmetiikasta, vaikka esimerkiksi koulugeometriian laskuissa nämä osa-alueet yhdistyvät. Geometriian käsitteiden kokonaisvaltainen oppiminen nojaa vahvasti visuaaliseen hahmottamiseen, mittasuhteiden ymmärtämiseen ja käsitteiden soveltamiseen sekä konkreettisissa että abstrakteissa tilanteissa (Houdement ja Kuzniak 2003). Geometrinen ymmärrys ja sen kehittyminen ilmenee yksilöllillä eri tavoin (Silfverberg 2018), ja tutkijat ovat pyrkineet luomaan teorioita kuvaamaan kyseisen prosessin vaiheita mahdollisimman kattavasti.

Yleisesti geometrisen ajattelun kehitystä kuvaa iäkäs, mutta tunnettu Van Hielen teoria, joka esittää ajattelun kehityksen tapahtuvan toisiaan seuraavissa tasoissa (Silfverberg 2018). Tasolta toiselle eteneminen ei ole suoraan sidottavissa oppijan ikään tai kypsytyteen, vaan keskeinen merkitys on opetuksen laadulla (Clements ja Battista 1992). Lineaarisen tasoajattelun rinnalle on luotu koulugeometriaa paremmin vastaava kolmen näkökulman teoria, joka korostaa oppijan mahdollisuutta liikkua eri osaamistasojen välillä (Houdement ja Kuzniak 2003).

Geometrisen ajattelun kehitys näkyy myös suomalaisen koulutuksen opetussuunnitelmissa, kun geometrian taitoja pyritään syventämään lisää eri vaiheissa ikätasolle sopivasti. Silfverberg luonnehtii artikkelissaan koulugeometrialle työmääritelmää seuraavasti: "geometria tarjoaa matemaattisia työvälineitä spatiaalisten tilasuhteiden tajuamiseen ja niillä operointiin" (Silfverberg 2018). Koulugeometriassa painotetaan sekä käytännön ongelmanratkaisua että matemaattisen päättelyn taitoja (Opetushallitus 2014, Opetushallitus 2015, Opetushallitus 2019), mutta oppijoiden yksilölliset erot osaamisen tasoissa voivat johtaa virhekäsitysten muodostumiseen, erityisesti silloin, jos opettaja vaatii asian esittämistä oppilaan osaamistason ulottumattomissa (Houdement ja Kuzniak 2003).

Tutkielman tavoitteena on selvittää yleisiä geometriassa esiintyviä virheitä ja virhekäsityksiä ylioppilaskirjoitusten avaruusgeometriian tehtävien näkökulmasta. Aineistona toimii neljän vuosilta 2019-2023 valikoidun tehtävän kokelasratkaisut. Ensin tehdään teoriakatsaus geometrian käsitteiden ja virhekäsitysten muodostumisen prosesseihin ja sitten esitellään tutkimuskysymykset ja tutkimus. Tutkimus on toteutettu laadullisena sisällön analyysinä, jossa tarkastellaan kokelaiden tekemiä virheitä ja luokitellaan niitä virhetyypin mukaan. Analyysi ja muodostetut virheluokat ovat tekijän tulkinta aineistosta, joten lopuksi pohditaan myös tutkimuksen ja tulosten luotettavuutta.

2 Teoreettinen tausta

Tässä luvussa tarkastellaan teoriaa sekä geometrian käsitteiden että niihin liittyvien virheiden ja virhekäsitysten muodostumisesta koulugeometriassa. Geometrisen ajattelun kehittyminen on moniulotteinen prosessi, jota on pyritty kuvailemaan eri tutkijoiden toimesta. Ajattelun kehitys näkyy myös suomalaisen koulutuksen opetussuunnitelmissa, missä geometrian taitoja pyritään harjoittamaan ikätasolle sopivalla tavalla edeten.

2.1 Geometria peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmissa

Seuraavaksi tarkastellaan geometrian sisältöjä ja oppimiselle asetettuja tavoitteita suomalaisessa opetuksessa. Perusopetusta käsittelevässä osiossa lähteenä käytetään perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita POPS 2014 (Opetushallitus 2014) ja lukio-opetusta käsittelevässä osiossa lukion opetussuunnitelman perusteita LOPS 2015 (Opetushallitus 2015) ja LOPS 2019 (Opetushallitus 2019) ellei toisin mainita. Lukion opetussuunnitelmakausien 2015 ja 2019 merkittävin ero on siirtyminen kurssimuotoisesta rakenteesta moduuleihin. Siirtymästä huolimatta opiskeltavat sisällöt ja tavoitteet ovat pysyneet lähes samana, vaikka aihealueita on voitu siirrellä opiskeltavaksi eri kokonaisuuksien yhteyteen.

Peruskoulun opetussuunnitelmassa OPS2014 geometria esiintyy itsenäisenä sisältöalueena, ja sen yleisenä tavoitteena on kehittää sekä oppilaan tilan ja mittojen hahmottamista että kykyä tunnistaa geometrisia käsitteitä, muotoja ja kappaleita ikätasolle sopivasti. Geometrialla on keskeinen rooli matemaattisen ajattelun ja ongelmanratkaisun kehittämisessä. Lisäksi opetussuunnitelmassa kannustetaan digitaalisten välineiden, kuten dynaamisen geometrian piirtohjelmien, käyttöön opetuksen tukena.

Geometriaan tutustuminen alkaa jo alkuopetuksessa vuosiluokilla 1-2, jonka opetussuunnitelmassa geometria ja mittaaminen mainitaan omana sisältöalueenaan S3. Opetuksessa tutustutaan muun muassa eri muotoihin ja niiden ominaisuuksiin, sijainnin hahmottamiseen ja symmetriaan. Keskeisiä työkaluja geometrian alkeiden oppimisessa ovat havaitsemiseen, piirtämiseen ja rakentamiseen liittyvät taidot. Myös vuosiluokilla 3-6 geometria ja mittaaminen on mainittu omaksi sisältöalueekseen S4, jonka mukaan opetuksessa käsitellään mm. tasokuvioita ja kolmiulotteisia kappaleita sekä niiden ominaisuuksia. Tavoitteena on oppia geometrisia käsitteitä, kuten kulmat, suorat, janat ja monikulmiot, sekä niiden luokittelua. Lisäksi kehitetään piirtämisen ja rakentelun taitoja sekä opitaan mittaamaan, arvioimaan ja laskemaan esimerkiksi pituuksia, kulmia ja pinta-aloja.

Alakoulusta yläkouluun siirtyessä käsitteiden välisiä yhteyksiä laajennetaan ja yhdistellään eri sisältöalueisiin. Vuosiluokilla 7-9 geometrian sisältöalueeseen S5 kuuluu esimerkiksi kuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden, kuten lieriö, kartio ja pallo, tarkastelu sekä kulmien, suorien ja monikulmioi-

den käsitteiden ymmärtäminen ja soveltaminen. Lisäksi käytetään ja muunnetaan mittayksiköitä erilaisissa pituuden, pinta-alan ja tilavuuden laskuissa. Päättöarvioinnin arvosanan kahdeksan kriteereissä mainitaan muun muassa Pythagoraan lause ja trigonometriset funktiot, jotka luovat pohjaa lukion sisällöille yhdistämällä geometriaa ja algebraa.

Lukion opetussuunnitelmien LOPS2015 ja LOPS2019 mukaan geometriaa opiskellaan sekä pitkässä että lyhyessä oppimäärässä, mutta tavoitteissa ja sisällöissä on eroavaisuuksia. Lyhyt oppimäärä keskittyy enimmäkseen geometrian perusteisiin ja käytännön sovelluksiin, kun taas pitkässä oppimäärässä geometriaa käsitellään syvällisemmin ja analyttisemmin. Kummankin oppimäärän keskeisissä tavoitteissa mainitaan sähköisten ohjelmistojen hyödyntäminen opiskelussa.

Pitkässä oppimäärässä geometrian ydinasiat käsitellään moduulissa MAA3 *Geometria*, jossa keskeisiä sisältöjä ovat yhdenmuotoisuus, sini- ja kosinilauseet, ympyrän geometria sekä monikulmioihin ja kappaleisiin liittyvät pituudet, kulmat, pinta-alat ja tilavuudet. Keskeisiä tavoitteita ovat muun muassa tilan ja muodon hahmottaminen kaksi- ja kolmiulotteisissa tilanteissa sekä yhdenmuotoisuuden, Pythagoraan lauseen ja kolmioihin liittyvän trigonometrian soveltaminen. Lisäksi opiskelijan tavoitteena on harjaantua sekä kuvaamaan tilaa ja muotoa että perustelevaan ja käyttämään geometrista tietoa käsitteleviä lauseita.

MAA3-kurssilla opittuja sisältöjä syvennetään ja laajennetaan muilla pitkän oppimäärän kursseilla. Opetussuunnitelman vaihtumisen myötä analyttinen geometria ja vektorit, jotka LOPS 2015:ssa muodostivat kaksi erillistä kurssia (MAA4 ja MAA5), on yhdistetty uudessa opetussuunnitelmassa LOPS 2019:ssa yhdeksi moduuliksi MAA4 *Analyttinen geometria ja vektorit*. Kummallakin suunnitelmakaudella tarkastellaan pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia koordinaatistossa sekä ratkaistaan tasogeometrian ongelmia vektoreiden avulla. Vanhan opetussuunnitelman MAA5 kurssiin sisältynyt vektoreiden tarkastelu kolmiulotteisessa koordinaatistossa on siirtynyt nykyisestä MAA4-moduulista valtakunnalliseen valinnaiseen moduuliin MAA10 *3D-Geometria*. Geometrian taitoja sovelletaan myös kurssilla/moduulissa *Integraalilaskenta* (LOPS 2015 MAA9 ja LOPS 2019 MAA7) pinta-alojen ja tilavuuksien määrittämisen yhteydessä.

Myös lyhyessä oppimäärässä geometrian olennaiset sisällöt käsitellään yhdessä moduulissa MAB 3 *Geometria*, mutta näkökulma ja tavoitteet ovat pitkään oppimäärään verrattuna hieman erilaiset. Sekä vuoden 2015 että 2019 opetussuunnitelmissa kurssin/moduulin tavoitteet painottavat opiskelijan kykyä havaita ja tehdä päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksista, piirtää ja tulkita kaksi- ja kolmiulotteisia kuvioita ja kappaleita sekä ratkaista käytännön ongelmia geometrian avulla.

Vaikka geometria esiintyy itsenäisenä sisältöalueena vain MAB3:ssa, geometrian taitoja hyödynnetään myös muilla kursseilla/moduuleissa. Esimerkiksi MAB2:ssa *Lausekkeet ja yhtälöt* liitetään geometria mittayksiköiden

käsittelyyn pinta-ala- ja tilavuuslaskuissa. Lisäksi geometrian osaamisesta on hyötyä valtakunnallisessa valinnaisessa *Matemaattinen analyysi* (LOPS 2015 MAB7 ja LOPS2019 MAB8), jossa opiskelijan tulee hahmottaa erilaisia käyriä, minimi- ja maksimiarvoja ja tuloksia graafisesti.

Opetussuunnitelmien perusteissa korostetaan oppiaineen tavoitteeksi oppilaan/opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittäminen ja tietotaidon rakentaminen aiemmin opitun pohjalta. Sekä OPS2014:ssä että LOPS:ssä sisällöt on suunniteltu niin, että ne tukevat matemaattisten käsitteiden ja taitojen syventämistä asteittain, mikä kuvastaa matematiikan luonnetta oppiaineena.

2.2 Geometrisen ajattelun kehitys

Seuraavaksi esitellään geometrisen ajattelun kehitysprosessia ja siihen liittyviä virhekesityksiä sekä niistä seuraavia virheitä. Geometrisen ajattelun kehittyessä oppilaat siirtyvät intuitiivisesta hahmottamisesta ja konkretiasta kohti formaalia matemaattista päättelyä. Tämän kehitysprosessin kuvailemiseksi on muodostettu teorioita, joista yksi tunnetuimmista on Van Hielen teoria. Kritiikkiäkin herättänyttä iäkästä teoriaa on jatkojalostettu useiden tutkijoiden toimesta, yhtenä motivaattorina korjata sitä koulugeometriaan paremmin sopivaksi.

2.2.1 Van Hielen teoria

Silfverberg (Silfverberg 2018) luonnehtii Van Hielen teoriaa yhdeksi keskeisimmistä malleista geometrisen ajattelun kehittymiselle. Jo 1950-luvulla kehitetyn teorian peruspiirteet hyväksytään edelleen laajasti, vaikka sitä on myöhemmin tarkennettu ja ajankohtaistettu muun muassa koulugeometriaan sopivammaksi (Silfverberg 2018). Van Hielen teoria sisältää hypoteesin geometrisen ajattelun rakentumisesta viidessä tasossa, jotka liittyvät oppijan kykyyn hahmottaa geometrisia muotoja, analysoida niiden ominaisuuksia ja lopulta ymmärtää matemaattista päättelyä (Silfverberg 2018). Jokainen taso rakentuu edellisellä tasolla saavutettujen taitojen varaan, eikä tason yli voi hypätä (Watan ja Sugiman 2018). Tasolta siirtyminen seuraavalle ei ole sidottu ikään tai biologiseen kypsymiseen, vaan keskeisinä tekijöinä ovat oppimisprosessi ja sen ohjaus (Clements ja Battista 1992).

Van Hielen tasoja voidaan kuvailla lyhyesti seuraavasti:

Taso 1: Visualisointi

Silfvebergin (Silfverberg 2018) mukaan ensimmäisellä tasolla oppija kykenee tunnistamaan, piirtämään ja nimeämään geometrisia muotoja niiden ulkonäön perusteella. Päättely tapahtuu siis enimmäkseen ulkomuodon eikä niinkään ominaisuuksien perusteella. Kuvioiden tunnistamiseen käy-

tään avuksi usein arkielämän esimerkkejä, kuten "suorakulmio on kuin ikkuna"(Silfverberg 2018).

Taso 2: Analyysi

Tässä vaiheessa oppija alkaa tunnistaa ja käsitellä geometrisia muotoja niiden ominaisuuksien, kuten kulmien ja sivujen pituuksien, perusteella (Silfverberg 2018). Määritetään muodon ominaisuuksia havainnoinnin, mittaamisen, piirtämisen ja mallintamisen avulla (Watan ja Sugiman 2018). Tasolla 2 oleva oppija kykenee kuvailemaan esimerkiksi suorakulmiota seuraavasti: "Suorakulmiossa on kaksi pitkää sivua ja kaksi lyhyttä sivua, sen kulmat ovat kaikki yhtä suuria"(Silfverberg 2018). Tässä vaiheessa oppija ei kuitenkaan täysin vielä hahmota tai kykene selittämään ominaisuuksien yhteyksiä eri kuvioissa (Watan ja Sugiman 2018), jolloin esimerkiksi neliötä ei pidetä suorakulmiona.

Taso 3: Ominaisuuksien järjestäminen

Kolmannella tasolla ymmärretään, miten eri kuvioiden geometriset ominaisuudet liittyvät toisiinsa ja pystytään myös perustelemaan sitä epäformaalisti (Watan ja Sugiman 2018). Oppija pystyy muodostamaan yhteyksiä ominaisuuksien välillä, esimerkiksi ymmärtää, että nelikulmiossa vastakkaisen sivujen ollessa yhdensuuntaiset myös vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret (Watan ja Sugiman 2018). Lisäksi oppija kykenee päättämään yhtenevyyksiä eri kuvioluokkien välillä eli tässä vaiheessa oppija tunnistaa neliön suorakulmioksi ja osaa myös perustella asian (Silfverberg 2018).

Taso 4: Päättelyminen

Päättelyn tasolla oppija kykenee systemaattiseen matemaattiseen päättelyyn (Watan ja Sugiman 2018). Oppija osaa erottaa määritelmät, aksioomat ja lauseet toisistaan ja hyödyntää niitä loogisen ajattelun tukena (Clements ja Battista 1992). Oppija pystyy itse todistamaan geometrisia lauseita ja ymmärtää, miksi pelkkä visuaalinen havainnointi ei ole riittävä perustelu matemaattisille väitteille (Silfverberg 2018).

Taso 5: Matemaattinen täsmällisyys

Teorian ylimmällä tasolla oppija kykenee itse tulkitsemaan geometriaa formaalisti ja järjestelmällisesti (Silfverberg 2018). Tällä tasolla oleva oppija kykenee tutkimaan geometrian ongelmia ilman konkreettisia mallikuvia ja käsittelemään geometrisia järjestelmiä aksioomien, määritelmien ja lauseiden avulla (Clements ja Battista 1992). Päättelyn kohteena ovat matemaattisten rakenteiden väliset suhteet eli pystytään esimerkiksi tarkastelemaan

euklidisen geometrian käsitteiden vastineita muissa geometrioissa (Silfverberg 2018).

Kun tarkastellaan Van Hielen tasoja peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmien kannalta, yläkoulun päättävät oppilaat asettuvat tasolle 2-3 eli he kykenevät analysoimaan ja luokittelemaan geometrisiä muotoja niiden ominaisuuksien perusteella sekä tunnistamaan yhteyksiä eri kuvioluokkien välillä. Lukio-opintojen aikana opiskelijat suunnitelman mukaan siirtyvät tasolle 3-4, kohti matemaattisempaa päättelyä ja eri matematiikan osa-alueiden yhdistämistä, mitä esimerkiksi ylioppilaskokeessa vaaditaan. Tämä ei kuitenkaan tapahdu automaattisesti, vaan oppijalla ja opetuksella on keskeinen rooli geometrisen ajattelun kehityksessä (Clements ja Battista 1992).

Joidenkin tutkijoiden mukaan Van Hielen tasojen lisäksi on olemassa niin sanottu 0-taso, mikä kuvaa oppijoita, jotka eivät vielä sijoitu tasolle 1 (Watan ja Sugiman 2018). Clementsin ja Battistan (1992) mukaan tasolla 0 eli esitunnistamisen tasolla ovat yleensä lapset, jotka hahmottavat geometrisiä muotoja, mutta heidän havainnointinsa on puutteellista. He eivät välttämättä tunnista monia yleisiä muotoja ja huomio kiinnittyy vain tiettyihin piirteisiin, kuten käyriin tai suoriin viivoihin. Esitunnistamisen tasolla oppija voi erottaa ympyrän ja neliön toisistaan, mutta ei välttämättä tunnista eroja saman muotoluokan sisällä.

Van Hielen teoriaa on kritisoitu erityisesti sen lineaarisesta oppimismallista, joka viittaisi geometrisen ajattelun kehityksen tapahtuvan tasaisesti ja näin poissulkee geometrisen ajattelun monimuotoisuutta (Houdement ja Kuzniak 2003). Teoriaa on pyritty kehittämään, ja sen rinnalle on muodostettu nykyistä koulugeometriaa paremmin palvelevia teorioita.

2.2.2 Kolme näkökulmaa koulugeometriaan

Houdement ja Kuzniak (2003) korostavat, että oppiminen ei ole lineaarinen prosessi. He esittävät ajatuksen, että koulugeometria ja sen opettaminen on jaettavissa kolmeen näkökulmaan, joiden välillä voivat liikkua niin opettaja kuin oppilas. Tämä haastaa Van Hielen teorian ajatusta siitä, että oppiminen tapahtuu selkeissä tasoissa. Koulugeometrian kolme näkökulmaa (G1-G3) on käännetty Houdementin ja Kuzniakin artikkelista "Elementary geometry split into different geometrical paradigms" Silfverbergin (2018) toimesta seuraavasti: Konkreettinen geometria (G1), Havainnoin perusteltu ideaalisten tasokuvioiden ja kappaleiden geometria (G2) ja Kvasiaksiomaattinen geometria (G3).

Konkreettisisä geometriassa (G1) oppiminen perustuu havaintoihin ja kokemuksiin, joiden perusteella geometriset käsitteet ja perustelut niille muodostuvat (Silfverberg 2018). Näkökulmassa pysytään siis lähellä arkista ajattelua, sen ollessa keskeisessä osassa varhaisessa geometrian oppimisessä (Houdement ja Kuzniak 2003).

Havainnoin perusteltu ideaalisten tasokuvioiden ja kappaleiden geometria eli näkökulmassa G2 matemaattiset aksioomat ohjaavat päättelyä, mutta päättely on edelleen vahvasti yhteydessä avaruudellisiin käsityksiin (Silfverberg 2018). Geometrian lauseita käsitellään matemaattisesti, mutta ne usein perustellaan esimerkiksi kokeilemalla ja mittaamalla (Silfverberg 2018). Tämä on yleinen näkökulma yläkoulun matematiikassa, kun oppilaat ovat siirtymässä konkretiasta kohti yleistä matemaattista päättelyä (Houdement ja Kuzniak 2003).

Koulugeometrian vaativimmassa näkökulmassa eli kvasiaksiomaattisessa geometriassa (G3) irrottaudutaan konkretiasta ja tarkastellaan geometriaa matemaattisena järjestelmänä (Houdement ja Kuzniak 2003). Geometrian lauseita osataan todistaa matemaattisesti, ilman visuaalisten havaintojen tukea. Keskeistä tässä näkökulmassa on johdonmukaisen päättelyn ja todistamisen taidot sekä niiden soveltaminen geometrian laskuissa (Silfverberg 2018).

Olennaista Houdementin ja Kuzniakin teoriassa on näkökulmien rinnakkaisuus ja oppijan mahdollisuus toimia jatkuvasti eri näkökulmien välillä. Jotta tämä onnistuisi sujuvasti, tulisi opetuksessa huomioida eri näkökulmat ja oppilaiden mahdollinen sijoittuminen niiden välille (Houdement ja Kuzniak 2003). Ymmärrys erilaisista näkökulmista on olennaista väärinkäsitysten välttämiseksi, ettei esimerkiksi odoteta näkökulman G3 päättelyä oppilaalta, jonka kyvyt sijoittuvat näkökulmien G1 ja G2 tasolle (Houdement ja Kuzniak 2003). On tärkeää tunnistaa, mistä näkökulmasta oppilas tilannetta tarkastelee ja pyrkiä sen mukaan ohjaamaan heitä systemaattisesti kohti matemaattisempaa päättelyä -tarvittaessa aiempien näkökulmien avulla (Houdement ja Kuzniak 2003).

2.2.3 Virheitä ja virhekäsityksiä koulugeometriassa

Matemaattinen virhekäsitys voidaan määritellä puutteelliseksi tai virheelliseksi päättelyksi, jota ei ole hahmotettu käsitteellisesti (McComas 2019). Virhekäsitykset syntyvät usein yleistämisestä tai puutteellisesta ymmärtämisestä, joka voi olla seurausta esimerkiksi asian käsittelemisestä oppilaan osaamistason ulottumattomissa (McComas 2019). Tämän seurauksena oppilas tekee virheitä eli esimerkiksi soveltaa opittuja sääntöjä väärissä tilanteissa. Ajatus siitä, että kertolasku aiheuttaa aina luvun suurenemisen, on tyypillinen esimerkki virhekäsityksestä, jonka seurauksena murtolukujen kertolasku tuottaa oppilaalle vaikeuksia (McComas 2019).

Koulugeometrian oppimiseen liittyy keskeisesti spatiaalinen hahmottaminen eli avaruudellisten mittasuhteiden ymmärtäminen ja sen kehittäminen eri työkalujen, kuten kuvioiden, karttojen ja kaavioiden avulla (Silfverberg 2018). Samalla pyritään siirtymään kohti abstraktimpaa matemaattista päättelyä, jolloin geometrian käsitteisiin yhdistyy laskutaidot ja päättely (Silfverberg 2018). Virhekäsitykset ovat yleisiä geometriassa, sillä oppilaat

nojaavat usein intuitiivisiin käsityksiin matemaattisen päättelyn sijasta (Ay 2017). Visuaalinen havainto voi usein tuottaa oppilaalle väärää informaatiota ja johtaa virheellisiin päätelmiin, varsinkin jos oppilas ei kykene perustelemaan havaintoaan matemaattisesti (Ay 2017).

Artikkelissa "Errors and Misconceptions in Euclidean Geometry Problem Solving Questions: The Case of Grade 12 Learners" (Moeketsi, Mogalatjane ja Tshele 2023) tuodaan esiin oppilaiden vaikeudet euklidisen geometrian ongelmien ratkaisussa. Artikkelin tutkimusten mukaan monet oppilaat tekevät virheitä esimerkiksi kulmien mittaamisessa, koska heillä on virheellinen käsitys geometristen ominaisuuksien välisistä suhteista (Moeketsi, Mogalatjane ja Tshele 2023). Oppilas voi esimerkiksi olettaa, että kahden kulman summa on 180 astetta pelkästään visuaalisen havainnon perusteella, perustelematta asiaa tarkemmin matemaattisesti (Moeketsi, Mogalatjane ja Tshele 2023).

Kulmiin ja kolmioihin liittyy muitakin virhekäsityksiä, mutta juurisyyt ovat usein samat: haasteet kuvien tulkinnessa, päättelyssä ja geometristen ominaisuuksien yhdistämisessä (Kusno ja Sutarto 2022). Clementsin ja Battistan (1992) esittelevät tyypillisiksi esimerkeiksi muun muassa kolmion olettamisen aina tasasivuiseksi ja kolmion korkeuden tulkitsemisen kannan sivujanasta. Kusno ja Sutarto (2022) selittävät kulmiin ja kolmioihin liittyviä virhekäsityksiä muun muassa sillä, että oppilaat eivät keskity olennaisiin ominaisuuksiin muotojen tunnistamisessa, vaan esimerkiksi kolmiossa tarkastellaan enemmän sivujen pituuksia kuin kulmien suuruutta, mikä voi johtaa väriin päätelmiin (Kusno ja Sutarto 2022).

Geometrian tehtävät, erityisesti ylioppilaskokeessa, edellyttävät usein muidenkin matematiikan osa-alueiden, kuten algebran ja aritmetiikan hallintaa. Näin ollen virheitä ja virheellisiä käsityksiä voi esiintyä muissakin kuin vain geometrian taidoissa.

3 Tutkimuksen esittely

Tässä luvussa esitellään ensin tutkimuskysymykset ja tutkimukseen käytetty aineisto sekä kuvaillaan analyysin toteutus. Aineiston analyysi, sen perusteella muodostetut virheluokat ja niiden selitteet esitellään luvussa 4.

3.1 Aineisto ja tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tavoitteena on selvittää, millaisia virheitä kokelaat tekevät matematiikan pitkän ja lyhyen oppimäärän ylioppilaskokeessa avaruusgeometrian tehtävissä ja millaisia virhekäsityksiä kokelailla mahdollisesti on aiheeseen liittyen. Lisäksi tutkimuksen perusteella pohditaan syitä virheiden ja virhekäsitysten muodostumisen taustalla. Tutkimuskysymys on: **Millaisia virheitä kokelaat tekevät avaruusgeometriaa käsittelevissä tehtävissä matematiikan ylioppilaskokeessa?**

Analyysiä varten tarkasteltavaksi valikoitui neljä kappaletta matematiikan sähköisten ylioppilaskokeiden avaruusgeometriaan liittyviä tehtäviä vuosilta 2019-2023 eli kahden eri opetussuunnitelmakauden ajalta. Tehtävistä kaksi on pitkän oppimäärän ja kaksi lyhyen oppimäärän kokeesta, mutta kaikki B1-osasta. Pyrkimyksenä on näin saada kattava otanta kokelaiden virheistä, sillä B1-osassa on usein enemmän vastaukseen asti tuotettuja ratkaisuja kuin haastavammassa B2-osassa, ja näin ollen enemmän tutkimusmateriaalia.

Tutkimusaineistona käytetään Ylioppilastutkintolautakunnan (YTL) Helsingin yliopistolle luovuttamaa korpusaineistoa, joka sisältää kustakin tehtävästä 100 satunnaisesti valittua kokelaiden tuottamaa ratkaisua. Aineistossa on merkitty vastausten yhteyteen ainoastaan kokelaan saama arvosana ylioppilaskokeesta. Anonymiteetti säilyy täysin, eikä aineistossa ole tietoa kokelaan oppimäärästä, oppilaitoksesta, paikkakunnasta tai muista yksilöivistä tekijöistä. Aineistoon pääsee käsiksi vain YTL:ltä haetulla tutkimusluvalla.

3.2 Analyysin kuvaus

Tutkimus on toteutettu aineistolähtöisenä analyysinä, jossa keskeistä on tutkijan tulkintojen ja näkökulmien kehittyminen aineiston käsittelyn myötä. Kari Kiviniemi (Kiviniemi ja muut 2018) luonnehtii sisällön analyysiä prosessina, jossa tutkijan ymmärrys aineistosta syvenee ja jäsentyy tutkimuksen edetessä. Laadullisessa tutkimuksessa etenemisen vaiheita ei välttämättä voi määrittää etukäteen, vaan esimerkiksi luokittelu muotoutuu aineiston perusteella (Kiviniemi ja muut 2018). Tutkimuksessa muodostuneet virheluokat ovatkin kirjoittajan tulkinta, eivätkä ne perustu aiempaan tutkimusmateriaaliin aiheesta. Tämän vuoksi sisällön analyysissä tarvitaan myös kykyä keskittyä olennaisen tiedon rajaamiseen, jotta aineistosta saadaan välitettyä tutkimuskysymyksiin sopivaa tietoa (Kiviniemi ja muut 2018).

Aineiston tehtävät tarkasteltiin systemaattisesti yksi kerrallaan, ja jokaisen tehtävän kohdalla etenemistapa oli sama: ensin luotiin tehtävään ratkaisuehdotus, jonka avulla aineiston ratkaisut (100 kpl) luettiin läpi ja samalla taulukoitiin tehtäväkohtaisesti havaitut virheet yksinkertaistetussa muodossa. Ratkaisuehdotuksen luomiseen käytettiin tukena YTL:n luomia Hyvän vastauksen piirteitä (Ylioppilastutkintolautakunta 2025). Taulukoinnissa huomioitiin myös kesken jääneet ratkaisut ja yhdestä tehtävästä kirjoitettiin ylös kaikki siinä havaitut virheet. Ratkaisujen tarkastelun jälkeen yksinkertaistetuista virheistä etsittiin yhtenevyyksiä, jotta virheluokat saatiin muodostettua. Tarvittaessa ratkaisut käytiin läpi toisen kerran esimerkiksi epäselvien tapausten tarkentamiseksi.

Näin jokaiseen aineiston tehtävään muodostui omat virheluokkansa, johon ratkaisuissa esiintyneet virheet saatiin luokiteltua. Luokittelussa merkittiin myös kyseisen virheen frekvenssi aineistossa.

4 Tutkimus: tehtäväanalyysi

Tässä luvussa tarkastellaan tutkimusaineiston tehtäviä ja esitetään niihin laaditut malliratkaisuehdotukset, jotta lukijan on mielekkäämpi seurata vihreanalyysiä. Kunkin tehtävän yhteydessä kuvataan kokelaiden ratkaisuissa esiintyneitä virheitä, jotka on analyysin perusteella ryhmitelty virheluokkiin. Analyysin tavoitteena on tunnistaa toistuvia ongelmakohtia avaruusgeometrian tehtävien ratkaisemisessa sekä hahmottaa, millaisia virhekäsityksiä kokelailta saattaa olla. Lisäksi pohditaan virheiden merkitystä ratkaisujen onnistumisen kannalta ja arvioidaan mahdollisia syitä virheiden taustalla.

4.1 Kevät 2020, lyhyt oppimäärä, tehtävä 7: Suklaarasia

Suklaakonvehtirasia (kuva 1) on muodoltaan särmiö, jonka pohja on säännöllinen kahdeksankulmio. Kahdeksankulmion sivun pituus on 4,2 cm ja rasian korkeus on 6,6 cm. Laske rasian tilavuus.



Kuva 1: suklaarasia (Ylioppilastutkintolautakunta, Kevät 2020)

4.1.1 Ratkaisuehdotus

Tehtävässä on laskettava kappaleen pohjan pinta-ala, jotta voidaan tehtävänannossa annetun korkeuden avulla laskea sen tilavuus. Säännöllisen kahdeksankulmion pinta-alan laskemiseen ei ole valmiiksi johdettua kaavaa, joten se täytyy selvittää muilla keinoin. Suoraviivaisin keino on kappaleen pohjan jakaminen kahdeksaan tasakylkiseen kolmioon, jolloin yhden kolmion keskuskulman suuruus on 45 astetta.

Yhden tasakylkisen kolmion korkeus h saadaan laskemalla

$$h = \frac{2,1}{\tan(22,5)},$$

jolloin kolmion pinta-ala on

$$A_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,1}{\tan(22,5)} \cdot 4,2.$$

Säännöllisen kahdeksankulmion pinta-ala saadaan laskemalla

$$A = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2,1}{\tan(22,5)} \cdot 4,2$$

ja lopuksi koko kappaleen tilavuus

$$A \cdot h = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2,1}{\tan(22,5)} \cdot 4,2 \cdot 6,6 \approx 560$$

Tehtävän suklaakonvehtirasian tilavuus on 560 cm^3 .

4.1.2 Virheet

Seuraavaksi esitellään ratkaisuisissa esiintyneistä virheistä muodostetut virheluokat, niiden määritelmät ja havainnollistavia esimerkkejä. Tästä tehtävästä virheluokkia muodostui kaikkiaan yhdeksän kappaletta.

Suorakulmaisen särmiön laskukaavojen käyttö tai soveltaminen

Virheluokka sisältää ratkaisut, joissa tehtävän kappaletta on käsitelty suorakulmaisena särmiönä eli tilavuus on laskettu suorakulmaisen särmiön tilavuuden kaavalla $a \cdot b \cdot c$. Tässä virheluokassa esiintyi pääsääntöisesti kahta lähestymistapaa, joissa tilavuus laskettiin joko suoraan tehtävänannosta saaduilla mitoilla (kuva 2) tai niitä soveltaen (kuva 3).

$$\begin{aligned} V &= abc \\ V &= 4,2 \cdot 4,2 \cdot 6,6 \\ &= 116,424 \approx 116,4 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Vastaus: Konvehtirasian tilavuus on $116,4 \text{ cm}^3$

Kuva 2: Kokelas 41, K2020

$$\begin{aligned} \text{Säännöllisen kahdeksankulmion sivujen pituudet ovat } 4,2 \text{ cm.} \\ V_{\text{rasia}} &= a \cdot b \cdot c = (8 \cdot 4,2 \text{ cm}) \cdot 6,6 \text{ cm} \\ &= 221,76 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Kuva 3: Kokelas 25, K2020

Säännöllisen kuusikulmion laskukaavojen käyttö tai soveltaminen

Tämän virheluokan ratkaisut ovat tyypiltään hyvin samanlaisia kuin yllä, mutta kappaletta on lähestytty säännöllisen kuusikulmion avulla. Pääsääntöisesti ratkaisuihin on käytetty taulukkokirjasta löytyvää säännöllisen kuusikulmion pinta-alan kaavaa $A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ suoraan sijoittamalla siihen annettu sivun pituus ja kertomalla saatu tulos annetulla korkeudella.

Toinen usein esiintynyt tapa oli säännöllisen kuusikulmion pinta-alan kaavan soveltaminen kahdeksankulmiolle sopivaksi muuttamalla kaavassa olevia arvoja. Taulukkokirjasta löytyvä kaava oli muutettu esimerkiksi muotoon $A = \frac{4a^2\sqrt{4}}{2}$ ja tällä kaavalla laskettu pinta-ala kerrottu annetulla korkeudella. Esimerkkejä virheluokkaan kuuluvista ratkaisuksista on kuvissa 4 ja 5.

$$a = 4,2cm$$

$$h = 6,6cm$$

Lasketaan rasian pinta-ala A

$$A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{3 \cdot 4,2^2\sqrt{3}}{2} = 45,830064368cm^2$$

Lasketaan rasian tilavuus V

$$V = 45,830064368 \cdot 6,6cm = 302,478424829cm^3 \approx 302,4cm^3$$

$$\text{Vastaus : } 302,4cm^3$$

Kuva 4: Kokelas 62, K2020

Muun väärän kappaleen laskukaavojen käyttö tai soveltaminen

Suklaarasian tilavuutta oli pyritty laskemaan suorakulmaisen särmiön ja säännöllisen kuusikulmion lisäksi useiden muiden kappaleiden avulla. Yksittäisen kappaleen esiintyvyys oli kuitenkin niin vähäistä, että niistä muodostui oma virheluokkansa. Ratkaisuihin esiintyi taulukkokirjasta löytyvien kappaleiden, kuten ympyrälieriön, oktaedrin ja tetraedrin, laskusääntöjen käyttöä. Esimerkiksi kuvassa 6 kokelas on ensin selvittänyt kappaleen piirin ja sen avulla kuvitteellisen säteen, jolloin kappaleelle laskettu tilavuus on ympyrälieriön tilavuus.

Ohitettu tieto kappaleen säännöllisyydestä

Osa kokelaista on ymmärtänyt väärin tai ohittanut tehtävänannossa annetun tiedon kappaleen säännöllisyydestä ja tämän seurauksena laskenut ti-

Kannen pinta-ala:

$$A = \frac{4 \cdot a^2 \sqrt{4}}{2}$$

$$A = \frac{4 \cdot (4,2)^2 \sqrt{4}}{2} = 70,56$$

Tilavuus:

$$V = A \cdot h$$

$$V = 70,56 \cdot 6,6 = 465,696 \approx 466$$

$$V : 466 \text{ cm}^3$$

Kuva 5: Kokelas 82, K2020

Rasian sivun pituus on 4,2cm ja rasian korkeus h=6,6cm

Selvitetään rasian kehän pituus $4,2 \text{ cm} \cdot 8 = 33,6 \text{ cm}$

Tämän jälkeen voimme hyödyntää kaavaa $2\pi r$, jotta saamme selville säteen r pituuden

$$2 \cdot \pi \cdot r = 33,6 \quad || : 2 \cdot \pi$$

$$r = \frac{33,6}{2 \cdot \pi} = 5,3476 \approx 5,3 \text{ cm}$$

Sitten voimme laskea tilavuuden kaavalla $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot 5,3476^2 \cdot 6,6 = 529,941213 \text{ cm}^3 \approx 529,9 \text{ cm}^3$$

V: Rasian tilavuus on 529,9cm³

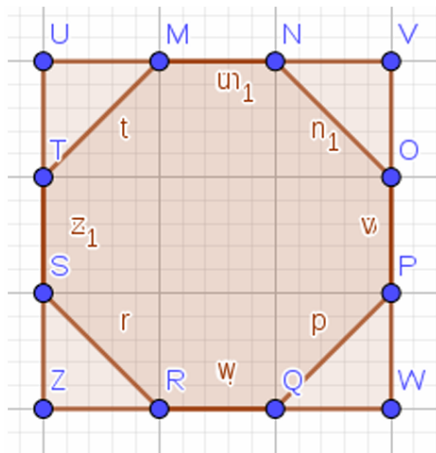
Kuva 6: Kokelas 84, K2020

lavuuden väärin. Virheet johtivat erilaisiin päättelyketjuihin, joista yleisin nähdään kuvassa 7. Kokelas on täydentänyt kahdeksankulmion neliöksi ja tulkinnut, että näin muodostuvan neliön sivun pituus on kahdeksankulmion sivun pituus kolminkertaisena.

Samanlainen päättely johti myös erilaisiin tapoihin jakaa kappaleen pohja osioihin. Esimerkiksi kuvassa 8 on osa ratkaisusta, jossa kokelas on tulkinnut pohjan muodostuvan neliöistä ja kolmioista. Lisäksi yksi tyypillinen tämän virheluokan virhe oli kappaleen pohjan jakaminen tasasivuisiin kolmioihin, mutta toimiakseen tämä päättely vaatisi kappaleen pohjan olevan säännöllinen kuusikulmio.

Oma kaava tai muu epäpätevä päättely

Tämä virheluokka sisältää ratkaisut, joissa kappaleen tilavuuden ratkaisuun on käytetty itse keksittyjä kaavoja tai muuten tilanteesta irrallisia keinoja. Ratkaisuissa esiintyi muun muassa erilaisia variaatioita tilavuuden laskemisesta kappaleen pohjan ja vaipan kertolaskuna (kuvat 9 ja 10). Muita

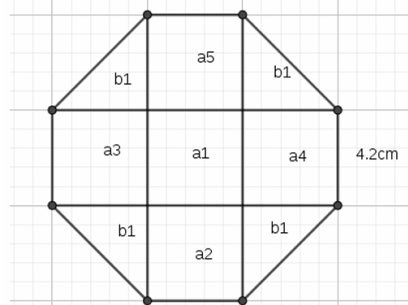


Kahdeksankulmion sivun pituus on 4.2cm, joten nelion sivun pituus on 12.6cm.

$$4.2 \cdot 3 = 12.6$$

Kuva 7: Kokelas 68, K2020

7.
Rasian tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala rasian korkeudella.
Pohjan pinta-ala voidaan selvittää jakamalla kahdeksankulmio pienempiin osiin alla olevan kuvan mukaisesti:



a - kuviot ovat pinta-aloiltaan keskenään saman kokoisia, samoin b - kuviot. Riittää, että laskee yhden pinta-alan ja kertoo sen näiden lukumäärällä.

Kuva 8: Kokelas 5, K2020

tähän luokkaan lukeutuvia virheitä olivat esimerkiksi tilavuuden laskeminen sivutahkalle ja tilavuuden määrittäminen kappaleen yhden lävistäjän avulla.

Puutteellinen perustelu ja riittämätön selitys

Virheluokkaan puutteelliset perustelut kuuluvat ratkaisut, joissa käytetään tai annetaan arvoja ilman perusteluja. Tyypillisimpiä tähän virheluokkaan sijoitettuja ratkaisuja olivat sähköisellä ohjelmistolla tuotetut ratkaisut, joista puuttui ohjelmaan annetut komennot ja perustelut niille. Virheluokkaan sijoitettuja ratkaisuja havainnollistaa hyvin kuvat 11 ja 12, missä kokelaat ovat liittäneet ratkaisuun näyttökuvan sähköisestä ohjelmistosta perustele-

Lasketaan pohjan ja vaipan pinta-alat.

Vaipan ala:

$$A_v = 8 \cdot 4,2 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm}$$

$$A_v = 201,6 \text{ cm}^2$$

Pohjan ala:

$$V = \frac{3 \cdot 4,2^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 201,6 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{52,92 \sqrt{3}}{2} \cdot 2 + 201,6 \text{ cm}^2$$

$$V = 293,2 \text{ cm}^3$$

Vastaus: Rasian tilavuus on $293,2 \text{ cm}^3$

Kuva 9: Kokelas 33, K2020

Koska konvehti rasia on kahdeksankulmio, yhden tasakylkisen kolmion kulma v

$$\alpha = \frac{45}{2} \rightarrow 22,5 \text{ (astetta)}$$

Ratkaistaan α :n avulla x :n pituus: $\text{solve}\left(\sin(22.5) = \frac{2.1}{x}, x\right) \rightarrow x = 5.48756 \approx 5.5 \text{ (cm)}$

Ratkaistaan pythagoraan lauseella korkeus b : $\text{solve}\left((2.1)^2 + b^2 = (5.48756)^2, b\right)$

Negatiivinen ei käy sivun pituudeksi, joten b :n pituus on $\approx 5,1 \text{ cm}$

Ratkaistaan suorakulmaisen kolmion pinta-ala: $A = 2.1 \cdot 5.06984 \rightarrow 10.6467 \text{ (cm}^2\text{)}$

Yhden taskylkisen kolmion pinta-ala: $2 \cdot 10.6468 \rightarrow 21.2936 \text{ (cm}^2\text{)}$

Pohjan pinta-ala: $8 \cdot 21.2936 \rightarrow 170.349 \text{ (cm}^2\text{)}$

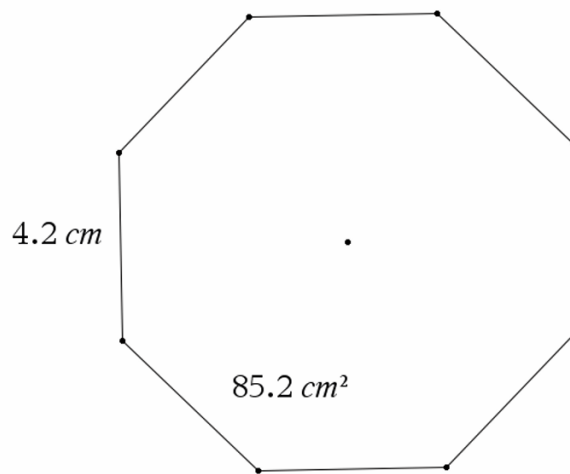
Lasketaan suklaarasian sivujen tahkojen pinta-ala: korkeus: 6,6 cm ja leveys 4.

$V = \text{tahkojen pinta-ala} \cdot \text{pohjien pinta-ala} = 8 \cdot 27.2 + 2 \cdot 170.349 \rightarrow 558.298 \approx 560 \text{ (cm}^3\text{)}$

Vastaus: Tilavuus on noin 560 cm^3

Kuva 10: Kokelas 38, K2020

matta sillä saatuja arvoja millään tavalla. Toinen epäselvästi eteneviin ratkaisuihin liittyvä virhetyyppi on riittämätön selitys. Tämä tarkoittaa sellaisia ratkaisuja, joita ei pysty seuraamaan lainkaan tai niistä ei löydy mitään yhteyttä tehtävänantoon.



Pohjan pinta-ala on 85.2 neliösenttimetriä

Rasian tilavuuden laskeminen:

$$85.2 \cdot 6.6 = 562.32\text{ cm}^3$$

Rasian tilavuus on $562,3$ kuutiocenttimetriä

Kuva 11: Kokelas 63, K2020

7.
Piirretään Mozartkugeln-rasian malli GeoGebraan avulla.

3D-grafikka - GeoGebra

The screenshot shows the GeoGebra interface with the following objects and values:

- $A = (1, 10)$
- $B = (1.01, 5.8)$
- $\text{kuvio1} = \text{Monikulmio}(A, B, 8)$ → 85.37
- $f = \text{Jana}(A, B, \text{kuvio1})$ → 4.2
- $b = 6.6$
- $c = \text{Särmio}(\text{kuvio1}, b)$ → 563.43
- $\text{tilavuusc} = \text{Tilavuus}(c)$ → 563.43

Mozartkugeln-rasia näyttäisi siis tältä, kahdeksankulmion sivun pituutena 4.2 cm ja rasian korkeutena 6.6 cm . GeoGebra antaa rasian tilavuudeksi $563,43\text{ cm}^3$.

Kuva 12: Kokelas 97, K2020

Tekniset virheet ja pyöristysvirheet

Huolimattomuusvirheet ja erilaiset laskuvirheet muodostavat virheluokan tekniset virheet. Numeron vaihtuminen toiseksi kesken laskun tai vastaukseen annettu väärä yksikkö ovat huolimattomuusvirheitä. Laskuvirheiksi lue-

taan esimerkiksi väärin valittu trigonometrinen funktio tai kolmion pinta-alaa laskiessa unohdettu kahdella jakaminen. Pyöristysvirheisiin luokitellaan kaikki ratkaisun aikana tehdyt tarkkuusvirheet, joita olivat mm. pyöristetyillä arvoilla suoritettut laskut, väärä tarkkuus valittu sähköiseen ohjelmistoon ja lopullisen vastauksen virheellinen pyöristäminen.

Tehtävässä esiintyneet virheet ja niiden prosenttiosuudet koko aineistosta on koottu alla olevaan taulukkoon.

Virhe	Määrä %
Pyöristysvirheet	69
Suorakulmaisen särmiön laskukaavojen käyttö tai soveltaminen	17
Säännöllisen kuusikulmion laskukaavojen käyttö tai soveltaminen	11
Muun väärän kappaleen laskukaavojen käyttö tai soveltaminen	9
Ohitettu tieto kappaleen säännöllisyydestä	11
Oma kaava tai muu epäpätevä päättely	9
Tekniset virheet	12
Puutteellinen perustelu ja riittämätön selitys	17

4.1.3 Analyysi

Kokelaista 17% oli ratkaissut tehtävän geometrisesti oikein, mutta vain 2% vastauksista oli muistettu pyöristää oikeaan tarkkuuteen. Täysin oikein tehtyjä ratkaisuja oli aineistosta vain kaksi kappaletta. Ratkaisuista 14 kappaletta oli keskeneräisiä, mutta myös niissä tehdyt virheet on huomioitu. Yhdessä ratkaisussa voi esiintyä useita virheitä.

Ylivoimaisesti yleisin, mutta myös merkitykseltään vähäisin virhetyyppi tehtävän ratkaisussa olivat pyöristysvirheet, joita esiintyi 69% aineiston ratkaisuista. Suurin osa pyöristysvirheistä liittyi lopullisen vastauksen pyöristämiseen. Tehtävän etenemisen kannalta merkittävimpiä virheitä olivat kappaleen muotoon ja mittoihin liittyvät virheet, joita oli tehnyt lähes puolet aineiston kokelaista.

Yli kolmasosa (37%) kokelaista käsitteli tehtävän kappaletta jonain muuna kuin kahdeksankulmiona, mikä näyttäytyi erilaisina versioina väärin kaavojen käytöstä, kuten esimerkkitapauksista nähtiin. On huomionarvoista, kuinka monin eri tavoin ja kaavoin kokelaat lähestyivät tilannetta.

Virheellisten kaavojen käyttö voi viitata esimerkiksi pyrkimykseen löytää ratkaisu mahdollisimman suoraviivaisesti, ilman perusteellista harkintaa siitä, onko valittu lähestymistapa tilanteeseen sopiva. Toisaalta se voi kertoa tilanteen hahmottamisen vaikeuksista, vaikka tehtävänannossa oli esitetty

mallikuva ja mainittu kyseessä olevan säännöllinen kahdeksankulmio.

Mahdollista on myös, ettei opiskelijoilla ole valmiuksia käsitellä tilanteita, joissa pohjan pinta-alaa ei voida määrittää suoraan, vaan se on johdettava jakamalla pohja tutumpiin osakuvioidiin. Tämän seurauksena ehkä hätäisesti tai osaamisen puutteesta johtuen käytettiin tai sovellettiin vain taulukkokirjasta löytyviä kaavoja. Esimerkiksi suorakulmaisen särmiön kaavaa käyttäneet kokelaat saattavat virheellisesti olettaa, että tilavuuskaava on sovellettavissa kaikkiin särmiöihin pohjan muodosta riippumatta. Sen sijaan ne kokelaat, jotka lähestyivät tehtävää ympyrälieriön tai jopa oktaedrin näkökulmasta, näyttävät ymmärtäneen kappaleen rakenteen hyvin eri tavalla, kuin mitä tehtävänannossa tarkoitettiin – mahdollinen logiikka heidän ajattelunsa taustalla jää kuitenkin epäselväksi.

Väärien kaavojen käytön lisäksi muita tehtävän onnistumiseen merkittävästi vaikuttavia virheitä olivat säännöllisyyden ohittaminen tai unohtaminen (11%) ja erilaiset omat kaavat tai muuten epäpätevät päättelyketjut (13%). Edellä mainitut virheet viittaisivat myös siihen, ettei tehtävänantoa oikeastaan ymmärretty tai kokelaat eivät tiedä, mitä säännöllinen tarkoittaa. Ratkaisuista 11 % oli täysin irrallisia tehtävänannosta tai muuten liian epäselviä seurata. Vähemmän merkittäviä virheitä olivat tekniset virheet (12%) ja puutteelliset perustelut (6%), jotka liittyvät enimmäkseen huolimattomuuteen eikä niinkään osaamiseen ja niiden merkitys ratkaisun onnistumisessa on vaihtelevaa.

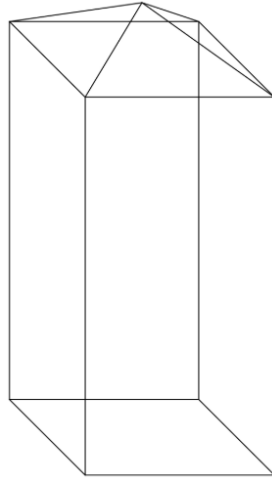
4.2 Kevät 2019, lyhyt oppimäärä, tehtävä 5: Paljonko tölkinssä on ilmaa?

Maitotölkki (kuva 13) sisältää 1,75 litraa maitoa. Tölkin pohja on neliö, jonka sivun pituus on 9,25 cm. Tölkin sisäosan kokonaiskorkeus on 23,0 cm, ja sen alaosa koostuu suorakulmaisesta särmiöstä, jonka korkeus on 20,0 cm. Tölkin yläosa muodostuu pyramidista. Kuinka paljon ilmaa on avaamattomassa maitotölkissä?

4.2.1 Ratkaisuehdotus

Tehtävässä täytyy ensin laskea koko maitotölkin tilavuus, josta vähentämällä annettu maidon määrä saadaan selville, kuinka paljon ilmaa tölkissä on. Tölkki koostuu kahdesta kappaleesta, suorakulmaisesta särmiöstä ja pyramidista, joista pyramidin tilavuuden määrittäminen on selkeästi haastavampi osuus. Lasketaan näiden kappaleiden tilavuudet, kummallekin löytyy kaava taulukkokirjasta:

$$V_{\text{särmiö}} = 9,25 \cdot 9,25 \cdot 20,0 = 1711,25$$



Kuva 13: maitotölkki (Ylioppilastutkintolautakunta 2019)

ja

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} \cdot 9,25^2 \cdot (23,0 - 20,0) = 85,5625.$$

Maitotölkin tilavuus on

$$V_{\text{tölkki}} = V_{\text{särmiö}} + V_{\text{pyramidi}} = 1796,8125.$$

Tehtävänannossa kerrotaan tölkin sisältävän $1,75\text{l} = 1,75\text{dm}^3 = 1750\text{cm}^3$ maitoa, joten lasketaan tölkkiin jäävän ilma:

$$V_{\text{ilma}} = 1796,8125 - 1750 = 46,8125.$$

Maitotölkissä on ilmaa 47 cm^3 .

4.2.2 Virheet

Seuraavaksi esitellään ratkaisuihin esiintyneistä virheistä muodostetut virheluokat, niiden määritelmät ja havainnollistavia esimerkkejä. Tästä tehtävästä virheluokkia muodostui kaikkiaan kahdeksan kappaletta. Virheistä valtaosa liittyi maitotölkin yläosan pyramidin tilavuuden laskemiseen.

Pyramidin tilavuus määritetty tetraedrin tai oktaedrin tilavuuden avulla

Virheluokan ratkaisuihin kokelaat ovat yrittäneet määrittää tölkin yläosan pyramidin tilavuutta säännöllisten monitahokkaiden, tetraedrin tai oktaedrin, tilavuuden avulla, vaikka tölkin pyramidi ei ole säännöllinen. Kummallekin

kappaleelle löytyy tilavuuden laskukaava taulukkokirjasta. Tetraedrin kaavaa oli useimmiten pyritty soveltamaan suoraan tehtävän pyramidiin, mutta väärän kappaleen valinnan lisäksi ongelmia aiheutti särmän pituuden löytäminen. Esimerkiksi kuvassa 14 kokelas on sijoittanut särmän pituudeksi pyramidin korkeuden 3 cm. Lisäksi esiintyi yrityksiä laskea pyramidin tilavuus.

$$\begin{aligned}
 &\text{Volymen av rätkblocket:} \\
 &V = 9,25\text{cm} \cdot 9,25\text{cm} \cdot 20,0\text{cm} \\
 &V = 1711,25 \text{ cm}^3 \\
 &\text{Volymen av pyramiden:} \\
 &23,0\text{ cm}-20,0\text{ cm}= 3\text{ cm} \\
 &V = \frac{3^3\sqrt{2}}{12} \\
 &V = 3,18198\dots\text{cm}^3 \\
 &1711,25 \text{ cm}^3 + 3,18198\dots\text{cm}^3 = 1714,4319\dots\text{cm}^3 \\
 &1714,4319\dots\text{cm}^3 = 1,71443\dots\text{dm}^3 \\
 &1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 \\
 &1,75 \text{ l} - 1,71443\dots\text{dm}^3 = 0,03557 \text{ l} \approx 0,04\text{l} \\
 &\text{Svar: Det finns } 0,04 \text{ l luft}
 \end{aligned}$$

Kuva 14: Kokelas 8, K2019

vuotta tetraedrin tilavuuden moninkertoina, kun kuvan 15 kokelas on tehnyt.

$$\begin{aligned}
 &\text{Lasketaan pyramidin tilavuus:} \\
 &V = 2 \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} \\
 &\frac{(9,25)^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \cdot 2 \rightarrow 186,547 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Kuva 15: K2019, Kokelas 52

Toinen säännöllinen kappale oktaedri oli paremmin tehtävänannon tilanteeseen sopiva, mutta sen tilavuuden kaavan onnistunut käyttö vaatisi tehtävänannon pyramidin olevan säännöllinen. Kaavaa käyttäneet kokelaat olivat keksineet jakaa oktaedrista saadun tilavuuden kahdella, joten tuloksena on kuitenkin säännöllisen pyramidin tilavuus, jonka särmän pituus on 9,25 cm. (kuva 16).

Pyramidin tilavuus on määritelty suorakulmaisen särmiön tilavuuden avulla

Tämän virheluokan ratkaisuisissa toistuu käsitys, että pyramidin tilavuus määritetään suorakulmaisen särmiön tilavuudesta. Yleisin lähestymistapa oli mää-

Pyramidi = puolikas oktaedri

$$\frac{a^3\sqrt{2}}{3} : 2$$

file:///Volumes/group/h516/digiyokoevastaukset/amk/2019KN_5.html

SAS Output

$$\frac{9,25^3\sqrt{2}}{3} = 373,09458$$

oktaedri jaetaan kahdella jotta saadaan puolikas oktaedri eli pyramidi

$$\frac{373,09458}{2} = 186,54729 \text{ cm}^3$$

Kuva 16: K2019, kokelas 19

rittää pyramidin mitoilla suorakulmaisen särmiön tilavuus ja jakaa se kahdella, kuten kuvan 17 kokelas on tehnyt. Ratkaisuisa hyödynnettiin suora-

Särmiön tilavuus

$$20,0\text{cm} \cdot 9,25\text{cm} \cdot 9,25\text{cm} = 1711,25\text{cm}^3$$

Pyramidin tilavuus

$$9,25\text{cm} \cdot 9,25\text{cm} \cdot 3\text{cm} : 2 = 128,34375\text{cm}^3$$

Kokonaistilavuus

$$1711,25\text{cm}^3 + 128,34375\text{cm}^3 = 1839,59375\text{cm}^3$$

$$1839,59375\text{cm}^3 - 1750\text{ml} = 89,59375\text{ml} \approx 90\text{ml ilmaa}$$

Kuva 17: Kevät 2019, kokelas 86

kulmaisen särmiön tilavuutta pyramidin tilavuuden laskemiseen myös muilla keinoilla. Suorakulmaisen särmiön tilavuuden kaavaa saatettiin käyttää suoraan sellaisenaan tai sitten tilavuus jaettiin esimerkiksi neljällä tai kuudella, kuten kuvan 18 kokelas on tehnyt. Kaikissa osiin jakamisissa ilmenee taustalla sama ajatus, että suorakulmainen särmiö voidaan jakaa samoilla mitoilla olevan pyramidin muotoisiin osiin.

Pinta-alan ja tilavuuden käsitteissä epäselvyyttä

Osassa ratkaisuisa näkyi ongelmia pinta-alan ja tilavuuden käsitteiden osittamisessa. Pinta-ala ja tilavuus saattoivat sekoittua keskenään ja erityisesti tölkin yläosan tilavuutta laskettaessa esiintyi vaikeuksia käyttää oikein tilavuus-

Ilman tilavuus tölissä saadaan selville laskemalla tölkin koko tilavuus, ja vähentämällä siitä tölkissä olevan maidon määrä.
Lasketaan ensin tölkin ala osan muodostavan särmiön tilavuus.
 $9.25^2 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 1711.25 \text{ cm}^3$
Tölkin kokonaiskorkeus on 23cm, joten kun siitä vähennetään särmiön osan korkeus saadaan selville yläosan pyramidin korkeus.
 $23 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 3 \text{ cm}$
Pyramidin muotoinen yläosa voidaan ajatella myös kuudesosana, suorakulmaisen särmiön tilavuudesta.
 $\frac{9.25^2 \cdot 3}{6} = 42.78125 \text{ cm}^3$
Lisätään tilavuudet yhteen :
 $1711.25 \text{ cm}^3 + 42.78125 \text{ cm}^3 = \frac{56129}{32} \text{ cm}^3 \approx 1754 \text{ cm}^3 = 1.754 \text{ l}$
Ilman tilavuus saadaan nyt laskettua kun vähennetään äskettäin selvitetystä tölkin tilavuudesta maidon määrä.
 $\frac{56129}{32} - 1750 = \frac{129}{32} \text{ cm}^3 \approx 4 \text{ cm}^3$
V : ilman tilavuus tölkissä on noin 4 cm^3 .

Kuva 18: Kevät 2019, kokelas 65

den kaavaa. Merkittävästi ratkaisun etenemiseen vaikuttavia virheitä olivat esimerkiksi pelkästään maitotölkin pinta-alan laskeminen tilavuuden sijaan, kuten kuvan 19 kokelas on tehnyt, ja muut virheelliset esitykset pinta-alan ja tilavuuden käsitteiden osalta.

$$\begin{aligned} \text{Särmiön tilavuus } v &= 20 \cdot 9.25 \cdot 9.25 = 1711.25 \\ \text{pyramidin tiavuus } V &= \frac{9.25 \cdot 7}{2} \cdot 4 = 129.5 \\ \text{Pyramidin pohja } 9.25 \cdot 9.25 &= 85.56 \\ \text{Pyramidin tilavuus yhteensä} &= 129.5 + 85.56 = 215.06 \\ \text{Maitotölkin tilavuus yhteensä} &= 1926.31 \text{ cm}^3 \\ 1926.31 \text{ cm}^3 &= 1.92 \text{ dm}^3 \\ 1.75 \text{ l} &= 1.75 \text{ dm}^3 \\ \text{Maitotölkissä on ilmaa } 1.92 \text{ dm}^3 - 1.75 \text{ dm}^3 &= 0.17 \text{ dm}^3 \\ \text{Avaavattomassa maitotölkissä on siis } 0.17 \text{ litraa ilmaa} \end{aligned}$$

Kuva 19: Kokelas 58, K2019

Vähemmän ratkaisun etenemiseen vaikuttava, mutta usein toistuva virhe nähdään esimerkiksi kuvissa 20 ja 21, kun kyseiset kokelaat olivat tunnista-

Lasketaan pyramidin pinta-ala, jota tarvitaan tilavuuden laskemiseen:

$$A_{\text{pyramidi}} = Ap + 4(ab), \text{ pohjan pinta-alan ja tahkojen pinta-alojen summa (tahkoja siis neljä)}$$

$$A_{\text{pyramidi}} = 4 \left(\frac{9.25 \text{ cm} \cdot 3.0 \text{ cm}}{2} \right) + (9.25 \text{ cm} \cdot 9.25 \text{ cm})$$

$$A_{\text{pyramidi}} = 141,062... \text{ cm}^2$$

Siirrytään pyramidin tilavuuden laskemiseen:

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} Ah$$

$$V_{\text{pyramidi}} = \frac{1}{3} \cdot 141,062... \text{ cm}^2 \cdot 3,0 \text{ cm}$$

$$V_{\text{pyramidi}} = 141,062... \text{ cm}^3$$

Kuva 20: Kevät 2019, kokelas 28

neet pyramidille oikean tilavuuden kaavan, mutta eivät olleet osanneet tai muistaneet käyttää siinä pohjan pinta-alaa. Kuvan 20 kokelas on selvittänyt koko pyramidin pinta-alan ja hyödyntänyt sitä tilavuuden kaavassa, kun taas kuvan 21 kokelas on laskenut pelkän pyramidin vaipan pinta-alan tilavuutta

Lasketaan pyramidin tilavuus. Pitää selvittää yläpyramidin sivun pituus.
Pythagoraan lauseella selvitetään sivun puutuva pituus.
 $3^2 + 4,625^2 = x^2$
 $x \approx 5,52 \text{ cm}$

Yhden kolmion pinta-ala on $12,75 \dots \text{ cm}^2$, kerrotaan se neljällä niin saadaan koko vaipan pinta-ala, eli $A = 12,748 \dots * 4 \approx 60 \text{ cm}^2$
Lasketaan yläpyramidin tilavuus $V = 1/3 Ah = 1/3 * 60 \text{ cm}^2 * 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$

Kuva 21: Kevät 2019, kokelas 55

varten.

Ymmärretty väärin tai ohitettu tehtävänannossa annettu tieto

Tähän virheluokkaan sijoitetuissa ratkaisuisa yhteinen piirre on tehtävänannon huolimaton tai väärä tulkinta. Useampi kokelas on erehtynyt ajattelemaan tehtävässä, että tölkin alaosan tilavuus on sama kuin tehtävässä kerrottu maidon määrä, jolloin yläosan pyramidin tilavuus on ilman määrä tölkin. Esimerkiksi kuvassa 22 nähdään, että kokelas on laskenut erikseen alaosan tilavuuden ja tehtävänannossa kerrotuista tiedoista huolimatta ilmoittanut ilman määräksi vain virheellisesti lasketun yläosan tilavuuden.

Lasketaan ensiksi tilavuus ilman pyramidia:
 $9.25 \cdot 9.25 \cdot 20 = 1711.25$
Tilavuus ilman pyramidia on 1711.25 kuutiokesämetriä.
Tämä osa koostuu maidosta, jossa ilmaa ei ole. Nyt lasketaan pyramidin tilavuus, jolloin saadaan selville, paljonko ilmaa avaamattomassa maitopurkissa on:
 $9.25 \cdot 9.25 \cdot 3 = 256.688$
Vastaus. Avaamattomassa maitopurkissa on 256.688 kuutiokesämetriä ilmaa.

Kuva 22: Kevät 2019, kokelas 38

Osa kokelaista on lähtenyt ratkaisemaan ilman prosentuaalista määrää maitopurkissa, mutta nämä tapaukset olivat tässä otannassa jatkoa muullakin tavoin väärin toteutetuille ratkaisuille.

Puutteellinen perustelu ja riittämätön selitys

Virheluokka puutteelliset perustelut sisältää ratkaisut, joissa käytetään tai annetaan arvoja ilman perusteluja. Tämän tehtävän ratkaisuisa ne olivat lähes poikkeuksetta sähköisellä ohjelmistolla tuotettuja ratkaisuja, esimerkiksi Geogebraa otettuja näyttökuvia, joista puuttui ohjelmaan annetut komennot ja perustelut niille. Riittämätön selitys viittaa sellaisiin ratkaisuihin, jotka ovat tehtävänannosta täysin irrallisia tai joiden etenemistä on mahdoton seurata.

Tekniset virheet ja pyöristysvirheet

Huolimattomuusvirheet ja erilaiset laskuvirheet muodostavat virheluokan tekniset virheet. Esimerkiksi numeron vaihtuminen toiseksi kesken laskun tai väärät ja vaihtuvat yksiköt ovat huolimattomuusvirheitä. Laskuvirheiksi luetaan tässä tehtävässä esimerkiksi numeron vaihtuminen toiseksi kesken laskun. Pyöristysvirheisiin luokitellaan kaikki ratkaisun aikana tehdyt tarkkuusvirheet, joita olivat mm. pyöristetyillä arvoilla suoritettut laskut, väärä tarkkuus valittu sähköiseen ohjelmistoon ja lopullisen vastauksen virheellinen pyöristäminen.

Tehtävässä esiintyneet virheet ja niiden esiintyvyys aineistossa on koottu alla olevaan taulukkoon.

Virhe	Määrä %
Pyramidin tilavuus määritetty tetraedrin tai oktaedrin tilavuuden avulla	17
Pyramidin tilavuus määritelty suorakulmaisen särmiön tilavuuden avulla	19
Pinta-alan ja tilavuuden käsitteissä epäselvyyttä	13
Tehtävänannossa annettu tieto ymmärretty väärin tai ohitettu	14
Puutteellinen perustelu ja riittämätön selitys	14
Tekniset virheet	16
Pyöristysvirheet	22

4.2.3 Analyysi

Sadan kokelaan otannasta 18 oli ratkaissut tehtävän täysin oikein. Tämän lisäksi 14 kokelasta oli ratkaissut tehtävän geometrian näkökulmasta oikein, mutta pyöristyksissä tai yksiköissä oli epäjohdonmukaisuutta. Ratkaisuista kahdeksan olivat keskeneräisiä, mutta niissäkin tehdyt virheet on huomioitu. Näin ollen virheellisiä ratkaisuja oli kaikkiaan 80 kappaletta. Yhdessä ratkaisussa voi esiintyä useita virheitä.

Yleisin virhetyyppi tehtävän ratkaisussa on pyöristysvirheet, joita esiintyi 22% ratkaisuista. Pyöristysvirheiden vaikutus tehtävän etenemiseen on kuitenkin erittäin vähäinen. Oikean pyöristystarkkuuden valitseminen voi olla kokelaalle haastavaa, kun tehtävä sisältää sekä kerto- ja jakolaskua että yhteen- ja vähennyslaskua desimaaliluvuilla. Ylioppilastutkintolautakunnan julkaisemissa Hyvän vastauksen piirteissä pyöristystarkkuutta ei kommentoitu, joten tämän tehtävän virheanalyysissä oletuksena oli seurata desimaalilukujen laskutoimitusten pyöristyssääntöjä.

Ratkaisun etenemisen kannalta merkittävimmät virheet liittyivät kappaleen yläosan pyramidin tilavuuden laskemiseen. Kokelaista 36% eivät tun-

nistaneet pyramidia kartioksi, vaan yrittivät määrittää pyramidin tilavuutta väärän kappaleen avulla. Heistä 17% oli laskenut tilavuutta taulukkokirjasta löytyvien säännöllisten kappaleiden, tetraedrin ja oktaedrin avulla. Kokelaista 19% oli erehtynyt ajattelemaan, että pyramidin tilavuus on osa vastaavilla pituuksilla lasketun suorakulmaisen särmiön tilavuudesta. Tämä viittaisi siihen, ettei oikeastaan tiedetty, millainen kappale pyramidi on tai mitä säännöllinen tarkoittaa. Erityisesti tetraedrin tilavuuden kaavan käyttö on erikoista, sillä tehtävässä on saatavilla aineistokuva, mistä pyramidin muoto on selkeästi havaittavissa. Kyse voi olla epätoivoisesta yrityksestä tuottaa jokin tai mahdollisesti hyvin vaikeista geometrisen hahmottamisen haasteista - tai mitä vain siltä väliltä.

Kokelaista 13% osoitti puutteita tilavuuden ja pinta-alan käsitteiden ymmärtämisessä. Tilavuuden määrittämistä varten laskettiin usein koko kappaleen pinta-ala, mikä tarkoittaa, ettei tilavuuden käsitettä ja yhteyttä pinta-alaan täysin tunneta. Toinen toistuva virheajattelu oli, että pyramidin tilavuus on puolet tai jokin muu osa vastaavan särmiön tilavuudesta (19%). Kyseessä saattaa olla johdannainen ajattelu liittyen kolmion ja suorakulmion pinta-alojen yhteyteen, josta on päätelty saman toimivan myös tilavuuksissa.

Kohtalainen vaikutus ratkaisun etenemiseen oli tehtävänannon huolimattomuilla ja väärillä tulkinnoilla (14%). Kyse voi olla puhtaasti huolimattomuudesta, mutta ei pidä sulkea pois mahdollisia hahmottamisen vaikeuksia. Erityisesti, kun tehtävän mallikuva voi olla kokelaalle erikoinen, sillä se ei muistuta ulkonäöltään oikeaa maitotölkkiä.

Osa kokelaista on lähtenyt ratkaisemaan ilman prosentuaalista määrää maitopurkissa eli vastanneet tehtävänannon sijaan kysymykseen "Kuinka suuri osa tölkestä on ilmaa?". Tämä ei ole varsinaisesti virhe, sillä onnistuakseen laskussa pitää kokelaan osata ratkaista tehtävä oikein. Prosenttiosuuden selvittäminen on kuitenkin ylimääräistä työtä ja viittaa siihen, ettei kysymystä ole ymmärretty tai se on luettu huolimattomasti. Lisäksi tässä otannassa prosenttiosuuksia selvittäneet kokelaat laskivat tehtävän poikkeuksetta väärin.

Ratkaisun onnistumisen kannalta vähemmän merkittäviä virheitä olivat puutteelliset perustelut (6%) ja tekniset virheet (16%), jotka liittyivät useimmiten huolimattomuuteen. Täysin tehtävänannosta irrallisia ratkaisuja oli kahdeksan kappaletta, jotka olivat kaikki aineistossa arvosanan A saaneilta kokelailta, joilla osaaminen on ylipäänsä heikkoa.

4.3 Kevät 2023, pitkä oppimäärä, tehtävä 6: Raketin nokkakartio

Erään raketin kärki, eli niin sanottu nokkakartio, saadaan, kun alaspäin aukeava paraabeli pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Kärjen korkeus on 4,5 metriä, ja sen halkaisija pohjan tasolla on 3,3 metriä. Määritä kärjen tilavuus.

4.3.1 Ratkaisuehdotus

Määritetään ensin paraabelin yhtälö. Asetetaan paraabeli koordinaatistoon niin, että nollakohdat ovat pisteissä $x = \pm \frac{3,3}{2} = \pm 1,65$. Paraabelin yhtälö on siis $y = a(x - 1,65)(x + 1,65)$. Kärjen korkeus on 4,5 metriä eli paraabelin huippu asetetaan pisteeseen $(0; 4,5)$, jolloin saadaan selville parametri a :

$$\begin{aligned}4,5 &= a(0 - 1,65)(0 + 1,65) \\4,5 &= -a \cdot 1,65^2 \\a &= \frac{4,5}{-1,65^2}.\end{aligned}$$

Nyt saadaan paraabelin yhtälöksi: $y = -\frac{4,5}{1,65^2}(x^2 - 1,65^2) = -\frac{4,5}{1,65^2}x^2 + 4,5$.

Ratkaistaan paraabelin yhtälö vielä muuttujan x suhteen: $x = \pm \sqrt{\frac{(y-4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}}$.

Nokkakartio muodostuu, kun kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri. Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan integraalina

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^{4,5} \left(\sqrt{\frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5}} \right)^2 dy \\&= \pi \int_0^{4,5} \frac{(y - 4,5) \cdot 1,65^2}{-4,5} dy \\&= \pi \int_0^{4,5} -\frac{1,65^2 \cdot y}{4,5} + 1,65^2 dy\end{aligned}$$

Integraalin arvoksi saadaan

$$\begin{aligned}V &= 19,244218\dots \\&\approx 19\end{aligned}$$

Kärjen tilavuus on noin 19 kuutiometriä.

Pyörähdysparaboloidin tilavuudelle on myös taulukkokirjassa oma kaava: $V = \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot h$. Kaavaa käytettäessä vältytään sekä paraabelin yhtälön määrittämiseltä että määrätyn integraalin laskemiselta. Jos osaa sijoittaa kaavaan oikeat arvot, on tehtävän ratkaisu hyvinkin suoraviivainen.

4.3.2 Virheet

Seuraavaksi esitellään ratkaisuisissa esiintyneistä virheistä muodostetut virheluokat. Tästä tehtävästä virheluokkia muodostui seitsemän kappaletta. Tehtävä testaa kolmiulotteisen kappaleen hahmottamisen lisäksi analyyttisen geometrian ja integraalilaskennan taitoja.

Paraabeli pyöräytetty väärän akselin ympäri

Tilavuusintegraalissa on usein haasteena oikean pyörähdysakselin käyttö ja tämä näkyi myös kokelaiden ratkaisuisissa. Virheet jakautuivat pääosin kahteen tyyppiin, mutta kaikissa toistui paraabelin pyöräyttäminen väärän akselin ympäri, jolloin tuloksena on täysin eri kappaleen tilavuus. Esimerkiksi kuvassa 23 kokelas on käyttänyt tilavuusintegraalissa paraabelin yhtälöä suoraan ja pyöräyttänyt paraabelin x -akselin ympäri, vaikka hän on ensin todennut pyörähdysakselin olevan y -akseli.

Koska paraabeli on alaspäin aukeava, niin kärjen tilavuus saadaan, kun funktion x -akselin yläpuolella oleva osa pyörähtää y -akselin ympäri.

$$-\frac{200}{121}x^2 + \frac{9}{2} = 0$$

Ratkaise: $\left\{x = -\frac{33}{20}, x = \frac{33}{20}\right\}$

\$1

$$\approx \{x = -1.65, x = 1.65\}$$

Siirtäkönttä

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_{-\frac{33}{20}}^{\frac{33}{20}} \left(-\frac{200}{121}x^2 + \frac{9}{2}\right)^2 dx$$

Ratkaistaan integraali CAS-laskimella.

$$\pi \cdot \text{Integraali}\left(\left(-\frac{200}{121}x^2 + \frac{9}{2}\right)^2, -\frac{33}{20}, \frac{33}{20}\right)$$
$$\rightarrow \frac{891}{25} \pi$$

\$3

$$\approx 111.96636$$
$$V = \frac{891\pi}{25} = 111,966\dots \approx 110$$

Vastaus: Kärjen tilavuus on 110 m^3 .

Kuva 23: Kevät 2023, Kokelas 85

Toinen esimerkki pyörähdysakseliin liittyvästä virheestä nähdään kuvassa 24, kun kokelas on pyrkinyt ratkaisemaan paraabelin yhtälön muuttujan x suhteen. Sen sijaan hän on vain siirtänyt paraabelin niin, että symmetria-akseli on x -akseli ja pyöräyttänyt paraabelin y -akselin ympäri, jolloin myöskään näin saatu pyörähdyskappale ei tuota haluttua nokkakartiota.

Haluttu funktio on siis valmis

$$x = -1.65y^2 + 4.5$$

eli

Lasketaan kartion tilavuus tilavuusintegroitikaavan avulla.

Väli jolta tilavuutta selvitetään on kartion huipusta eli $x = -4.5$ kartion pohjaan eli $x = 0$

$$\pi \cdot \int_{-4.5}^0 (-1.65 \cdot y^2 + 4.5)^2 dy \approx 2025.74$$

Näin ollen raketin nokkakartion tilavuudeksi saadaan $2025,74 \text{ m}^3$

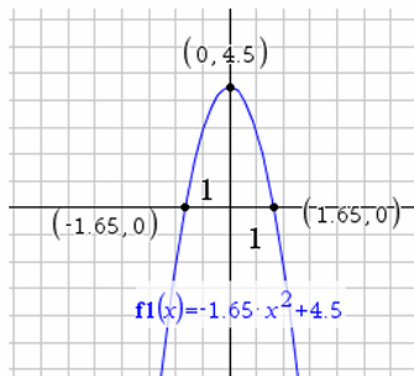
Kuva 24: Kevät 2023, kokelas 88

Muut virheet tilavuusintegraalissa

Kokelaiden ratkaisuiissa esiintyi tilavuusintegraaliin liittyen myös muita virheitä kuin väärän pyörähdysakselin valinta. Määrätyn integraalin päätepisteiden valinnassa oli haasteita, mikä usein liittyi väärin valittuun pyörähdysakseliin. Moni kokelas oli hahmottanut tilanteen oikein, mutta lopulta kui-

nyt voidaan laskea tilavuus
pyörähdyskappaleen integraalin avulla

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



halutaan tietää pyörähdyskappaleen tilavuus
välillä $[-1.65, 1.65]$

integroidaan laskinohjelmistolla

$$v = \pi \cdot \int_{-1.65}^{1.65} (-1.65289 \cdot x^2 + 4.5)^2 dx$$

► $v = 111.966$

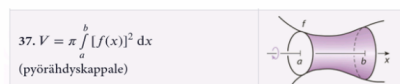
$$V \approx 112 m^3$$

Kuva 25: Kevät 2023, kokelas 13

tenkin erehtynyt sekä akselin että päätepisteiden valinnassa, kuten esimerkiksi kuvan 25 kokelas 13 on tehnyt. Hän on sijoittanut paraabelin kuvaajan koordinaatistoon oikein, mutta valinnut pyöräyttää paraabelin x-akselin ympäri, jolloin tilavuusintegraalin päätepisteiksi on valikoitunut $-1,65$ ja $1,65$. Kuvassa 26 kokelas 40 on valinnut oikean pyörähdysakselin, mutta siitä huolimatta laskenut tilavuusintegraalin väliltä $[-1,65; 1,65]$.

Muita virheitä tilavuusintegraalin laskemisessa oli esimerkiksi saadun tilavuuden kahdella jakaminen eli on ajateltu pyörähdyksen tuottavan tilavuuden

Lasketaan nokkakartion tilavuus, kun se pyörähtää symmetria-akselinsa eli y -akselin ympäri.



$$V = \pi \cdot \int_{-1.65}^{1.65} (0.5500000000001 \cdot \sqrt{2 \cdot (y-4.5)})^2 dy \approx 28.2248537981 \approx 28m^3$$

Vastaus: Kärjen tilavuus on $28m^3$

Kuva 26: Kevät 2023, kokelas 40

den kaksinkertaisena. Toisaalta saatua tilavuutta oli myös kerrottu kahdella, mikä liittyi puolestaan ajatukseen vain puolikkaan paraabelin käytöstä tilavuusintegraalissa.

Paraabelin yhtälön parametrit määritetty virheellisesti

Tämän virheluokan ratkaisuisissa virheet liittyivät paraabelin yhtälön vakion a määrittämiseen. Esimerkiksi kuvissa 27 ja 28 kokelaat ovat tehneet havaintoja paraabelin pisteistä ja sen perusteella valinneet alaspäin aukeavan paraabelin yhtälöön vakion $a = -1,65$. Vakion a oikein laskettu arvo

Kyseessä parabeli eli toisen asteen yhtälöä voidaan hyödyntää. Otetaan puolikas halkaisijasta ja saadaan yksi yhtälöratkaisusta

$$\frac{3,3}{2} = 1,65 \text{ eli piste } (1.65, 0)$$

ja toinen piste taas valitaan olevan korkeus ja keskellä eli $(0, 4.5)$

Näillä pisteillä voidaan tehdä alaspäin aukeava parabeli $y = -1,65x^2 + 4,5$

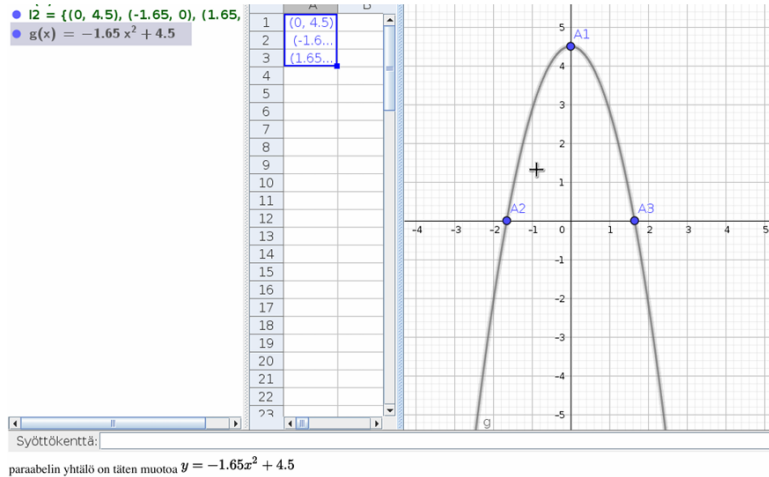
Kuva 27: Kevät 2023, kokelas 45

$(\frac{4,5}{-1,65^2} = 1,65289\dots)$ on hyvin lähellä lukua $1,65$, joten tämän vuoksi myös Geogebraan hahmoteltu kuvaaja tarjoaa paraabelin yhtälöksi $y = -1,65x^2 + 4,5$ pyöristystarkkuudesta johtuen. Tarkan arvon saaminen vakiolle a vaatii kuitenkin tarkemmat perustelut paraabelin yleistä yhtälöä hyödyntäen.

Laskettu kartion tilavuus

Tähän virheluokkaan kuuluvat ratkaisut, joissa kokelaat ovat hahmottaneet tehtävän tilanteen kartioksi ja näin ollen laskeneet tilavuuden ympyräkartioiden tilavuutena. Esimerkkejä näin tuotetuista ratkaisuisista nähdään kuvissa 29 ja 30. Jälkimmäisen kuvan kokelas 65 on tekstinsä perusteella ymmärtänyt kyseessä olevan "pyörähdyskuvio", mutta on tehtävänannossa annetuista

Piirretään aluksi mallikuva paraabelista. Pohjan leveys on 3,3 metriä, eli 1,65 metriä keskipisteestä molempiin suuntiin. Sijoitetaan paraabeli siten, että pohjan keskikohta on origossa (0,0). Tällöin paraabelin leikkauspisteet x-akselin kanssa ovat (-1,65,0) ja (1,65,0). Paraabelin huippu saadaan sijoittamalla annettu korkeus eli 4,5 metriä origosta 4,5 yksikköä ylöspäin. Tällöin huipun koordinaatit ovat (0,4,5). Näiden tietojen pohjalta voidaan luoda pisteistä ja käyttämällä polynomin sovitusyökalua piirrettyä kuva paraabelista.



Kuva 28: Kevät 2023, kokelas 97

tiedoista huolimatta laskenut kartion tilavuuden.

Kärjen pohja on ympyrän muotoinen. Ratkaistaan pohjaympyrän pinta-ala ympyrän pinta-alan kaavalla $A = \pi r^2$

$$r = \frac{3,3}{2} = 1,65$$

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1,65^2 = 8,5529\dots$$

Ratkaistaan kartion tilavuus kaavalla: $V = \frac{1}{3} Ah$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8,5529 \cdot 4,5 = 12,829\dots \approx 12,9$$

Vastaus: Kärjen tilavuus on $12,9m^3$

Kuva 29: Kevät 2023, kokelas 1

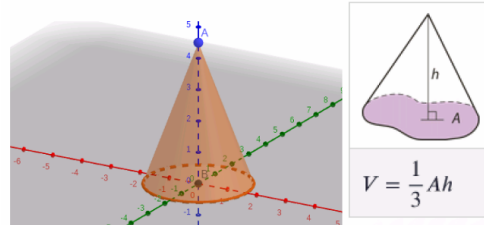
Riittämätön selitys

Virheluokkaan riittämätön selitys on sijoitettu kaikki sellaiset ratkaisut, jotka ovat tehtävänannosta täysin irrallisia tai joiden etenemistä on mahdoton seurata. Tämän tehtävän ratkaisussa sellaisia oli vain kaksi kappaletta.

Tekniset virheet ja pyöristysvirheet

Huolimattomuusvirheet ja erilaiset laskuvirheet muodostavat virheluokan tekniset virheet. Esimerkiksi väärän arvon valitseminen, numeron tai etumerkin vaihtuminen toiseksi kesken laskun ja yksikkövirheet ovat teknisiä virheitä. Useampi kokelas on esimerkiksi ryhtynyt määrittämään paraabelin yhtälöä oikein, mutta valinneet väärän arvon tai tehneet huolimattomuus-

Koska kyseessä oleva avaruuskappale on pyörähdyksikuio, on sen pohja täysin symmetrinen. Piirretään ensin mallikuva



Kartion pohjan halkaisija on 3.3 metriä joten sen säde on $3.3/2=1.65$ metriä
Lasketaan ensin kartion pohjan pinta-ala ympyrän pinta-alan yhtälöä käyttäen.

$$A = \pi r^2$$

$$a = \pi \cdot (1.65)^2 \rightarrow a = 8.55299$$

Lasketaan kartion tilavuus kartion tilavuuden yhtälöä käyttäen.

$$v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (1.65)^2 \cdot 4.5 \rightarrow v = 12.8295$$

Kartion tilavuus on siis 12.83m^3

Kuva 30: Kevät 2023, kokelas 65

virheen, jonka seurauksena paraabelin yhtälö on väärä. Pyöristysvirheisiin luokitellaan kaikki ratkaisun aikana tehdyt tarkkuusvirheet, joita olivat esimerkiksi väärän tarkkuuden valitseminen sähköiseen ohjelmistoon ja lopullisen vastauksen virheellinen pyöristäminen.

Tehtävässä esiintyneet virheet ja niiden esiintyvyys aineistossa on koottu alla olevaan taulukkoon.

Virhe	Määrä %
Paraabeli pyörytetty väärän akselin ympäri	19
Muut virheet tilavuusintegraalissa	13
Paraabelin yhtälön parametrit määritetty virheellisesti	10
Laskettu kartion tilavuus	9
Riittämätön selitys	2
Tekniset virheet	12
Pyöristysvirheet	42

4.3.3 Analyysi

Tämän tehtävän aineistossa virheellisiä ratkaisuja oli 74%. Kokelaista 23% oli onnistunut ratkaisemaan tehtävän täysin oikein ja 3% oli jättänyt tehtävän keskeneräiseksi. Kesken jäänyttä tehtävää itsessään ei katsota virheelliseksi, mutta siinä tehdyt virheet ovat huomioitu virheluokissa.

Kuten lyhyen oppimäärän tehtävissä, myös tämän tehtävän ratkaisuis-
sa pyöristysvirheet olivat suurin virheluokka (42%), kokelaiden arvosanoja
katsomatta. Pääosin pyöristysvirheet näkyivät lopullisen vastauksen väärin
pyöristyksenä tai pyöristämättä jättämisenä. Pitkän oppimäärän kurseilla
lasketaan pitkälti tarkoilla arvoilla, mikä voi olla yksi tekijä selittämään pyö-
ristyssääntöjen osaamattomuutta. Toki tarkkojen arvojen käyttäminen oli
mahdollista tässäkin tehtävässä, mutta kontekstin vuoksi lopullinen vastaus
pitäisi antaa likiarvona.

Merkittävimmät virheet tässä tehtävässä liittyivät tilavuusintegraalin las-
kemiseen (22%). Vaikeudet pyörähdysakselin ja tilavuusintegraalin pääte-
pisteiden määrittelyssä viittaavat siihen, ettei pyörähdyskappaleen muodos-
tumisesta periaatteita tai tilavuusintegraalin kaavan käyttöä eri tilanteissa
hallita täysin. Vaikka yksittäiset virheet voivat selittyä huolimattomuudel-
la, useamman kokelaan vastauksista välittyy puutteellinen kriittinen suh-
tautuminen omaan ratkaisuun ja samalla epäselvä käsitys siitä, mitä mate-
maattisesti ollaan tekemässä. Mikäli taustalla on vaikeuksia yhdistää funk-
tion algebrallista esitystä sen graafiseen muotoon tai ylipäänsä haasteita toi-
mia koordinaatiston kanssa, voi pyörähdyskappaleen hahmottaminen tai sen
tuottaminen olla vaikeaa.

Myös paraabelin yhtälön määrittämisessä esiintyi haasteita (10%): tar-
vittavia arvoja ei johdettu laskennallisesti, vaan parametrit pääteltiin esi-
merkiksi Geogebra laadittujen mallikuvien perusteella. On mahdollista,
että kokelaan alkuperäisenä tavoitteena on ollut tuottaa mallikuva avuksi
parametrien määrittämiseen, mutta epäselväksi jää, johtuuko laskutoimitus-
ten puuttuminen osaamisesta vai tietoisesta valinnasta. Päättellessä saatu
parametrin a arvo on hyvin lähellä oikein laskettua arvoa, jolloin osaamisen
kannalta merkittävän virheen näkyvyys jää tehtävän onnistumisen kannalta
vähäiseksi.

Kartion tilavuutta laskeneet kokelaat (9%) ovat tulkinneet tehtävänan-
toa virheellisesti, vaikka siinä on määriteltä kyseessä olevan paraabeli. Mikäli
tarkastellaan, minkälaisesta funktiosta pyörähdysten tuloksena muodostuu
kartio, on kyseessä itseisarvofunktio $|x|$ – ei paraabeli. Virhe voi johtua huo-
limattomuudesta tai haasteista ymmärtää, miten paraabeli on määriteltä.
Mahdollista on myös, että ongelman ratkaisua on vaikeuttanut spatiaalisen
hahmotuksen haasteet tai puutteet pyörähdyskappaleiden tilavuuslaskennan
osaamisessa.

4.4 Syksy 2021, pitkä oppimäärä, tehtävä 7: Avaruuskappale

Tämä tehtävä on tarkoitettu ratkaistavaksi ohjelmistolla. Vastaukset voi an-
taa likiarvoina, ja perusteluiksi riittävät kuvakaappaukset tai selitykset, jois-
ta ilmenee, mitä on mitattu. Tehtävän voi myös ratkaista algebrallisesti las-
kemalla.

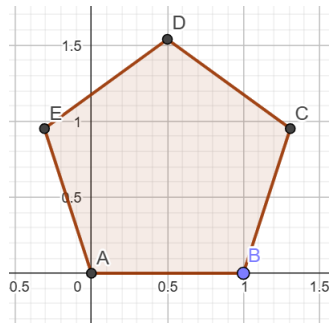
Tarkastellaan monitahokasta $M = ABCDEF$, jonka pohja $ABCDE$ on

säännöllinen viisikulmio ja jonka sivutahkot ovat tasasivuisia kolmioita.

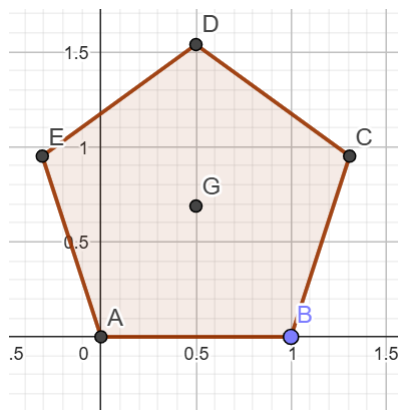
1. Piirrä kuva monitahokkaasta M . (4 p.)
2. Määritä monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
3. Määritä monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma. (2 p.)
4. Määritä monitahokkaan M tilavuus, kun särmän pituus on a . (4 p.)

4.4.1 Ratkaisuehdotus

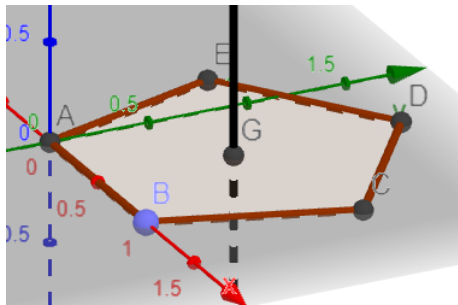
1. Piirretään Geogebbran *Säännöllinen monikulmio*-työkalulla säännöllinen viisikulmio $ABCDE$, ja asetetaan sivun pituudeksi 1.



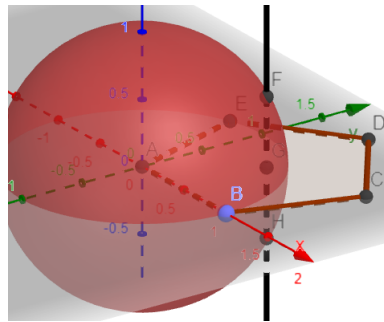
Seuraavaksi määritetään viisikulmion keskipiste G Geogebbran *Keskipiste*-työkalun avulla:



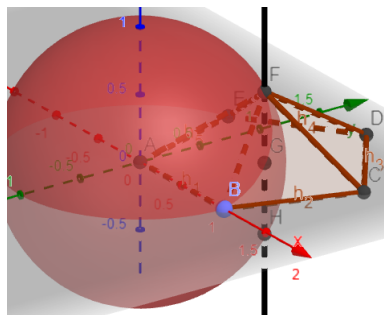
ja piirretään 3D-alueella viisikulmion keskipisteen G kautta kulkeva suora kohtisuoraan viisikulmioon nähden.



Piirretään seuraavaksi työkalulla *Pallo: keskipiste ja säde* pallo niin, että sen keskipiste asettuu johonkin monikulmion $ABCDE$ pisteeseen ja asetetaan pallon säteen pituudeksi 1. Kuvassa näkyvät pisteet F ja H ovat pallon ja viisikulmion kanssa kohtisuoran suoran leikkauspisteitä.

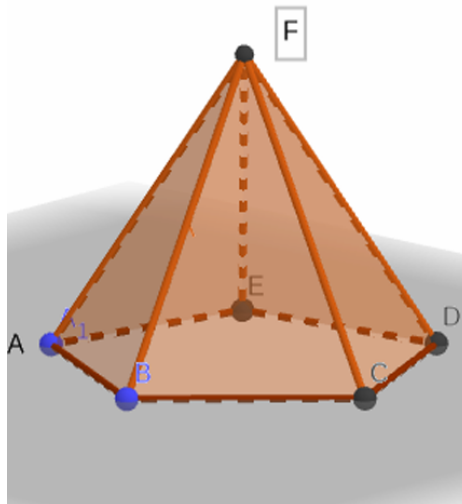


Valitaan monitahokkaan huipuksi F , jolloin monitahokkaan tahkot saadaan yhdistelemällä joko yhdistelemällä pisteet AFB , BFC , CFD , DFE , ja EFA Kahden pisteen välinen jana-työkalulla tai 3D alustan työkalulla *Laajenna pyramidiksi tai kartioksi*, jolloin korkeus täytyy skaalata pallon avulla oikeaan kohtaan. Laajennustyökalu myös rekisteröi piirretyn kappaleen, jolloin esimerkiksi tilavuus nähdään suoraan ohjelmasta. Nyt pisteiden A ja F etäisyys on pallon säteen pituus eli 1 ja pohjasärmien pituus on 1, joten kolmiot ovat tasasivuisia.



Piilotetaan lopuksi kuviosta pallo, suora ja ylimääräiset pisteet, niin saadaan valmis monitahokas $M = ABCDEF$.

mattomasti. Vaikka pohjan piirtäminen onnistui ohjelmiston työkalujen avulla, väärin piirretyissä kuvissa toistui sama virhe: sivutahkot eivät olleet tasasivuisia kolmioita, vaan ne olivat tasakylkisiä. Esimerkiksi kuvassa 31 nähdään, että kokelas on mahdollisesti sekoittanut käsitteet tasasivuinen kolmio ja tasakylkinen kolmio.



Kuva 31: Syksy 2021, kokelas 28

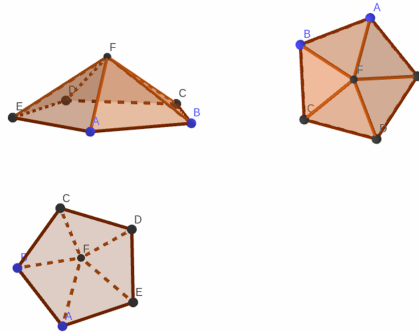
Osa kokelaista oli ymmärtänyt, millaista kappaletta haetaan, mutta erityisesti oikean korkeuden määrittäminen osoittautui haastavaksi. Pienet epätarkkuudet hyväksyttiin, sillä kappale oli mahdollista piirtää myös approksimoimalla.

Kappaleen mittoja ei perusteltu tai perustelut ovat puutteelliset

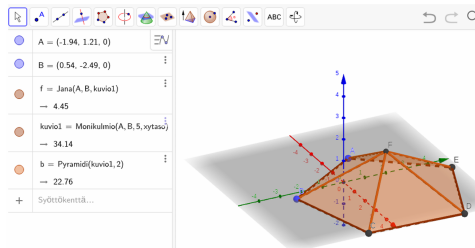
Näihin kahteen virheluokkaan sijoitetut ratkaisut sisältävät oikein piirretyn kappaleen, mutta perustelut sille, miksi aikaan saatu kappale on juuri tehtävänannon mukainen, ovat puutteelliset tai niitä ei ole lainkaan. Esimerkiksi kuvassa 32 kokelas on vain esitellyt kappaleen useaa eri kuvakulmaa käyttäen, mutta ei maininnut konstruktion liittyviä komentoja tai mittoihin liittyviä perusteluja.

Kuvassa 33 kokelas on tarjonnut perusteluiksi Geogebbran komentoikkunaa, mutta näkyvillä olevista tiedoista käy ilmi vain yhden särmän pituus, mikä ei ole riittävä perustelu kappaleen säännöllisyydelle. YTL:n määrittelemissä hyvän vastauksen piirteissä kappaleen konstruktio ja perustelut sille olivat hyvin olennaisessa osassa pisteiden saamiseksi.

1. Kuvissa monitahokas M.



Kuva 32: Syksy 2021, kokelas 44



Kuva 33: Syksy 2021, kokelas 17

Kulmat määritetty väärin

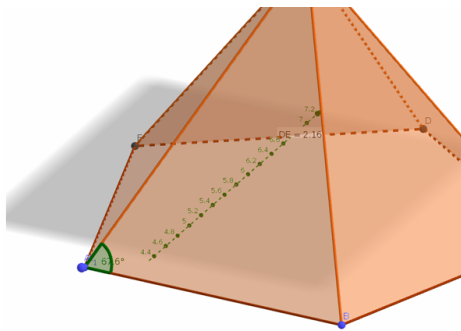
Tehtävän kohdissa 2. ja 3. pyydettiin määrittämään ensin sivusärmän ja pohjan välinen kulma ja sitten tahkon ja pohjan välinen kulma. Virheet jatkautuivat pääsääntöisesti kahteen tyyppiin: joko kysytyt kulmat oli tulkittu väärin tai kulmat oli laskettu väärin. Tässä virheluokassa ei huomioida kappaleen virheellisen konstruktion vuoksi väärin menneitä kulmia, mikäli määrittystapa on ollut oikea.

Kokelaat, jotka olivat tulkinneet kysytyt kulmat virheellisesti, joko määrittivät usein sivutahkon pohjakulmaa, kuten kuvan 34 kokelas tai totesivat, että sivusärmän ja pohjan välinen kulma sekä tahkon ja pohjan välinen kulma olisivat samat, kuten kuvan 35 kokelas on tehnyt.

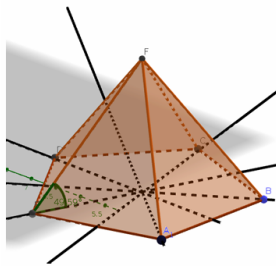
Osalla kokelaista, joilla ilmeni vaikeuksia hahmottaa kysytyjä kulmia, oli havaittavissa myös muita kolmion kulmiin liittyviä virheellisiä käsityksiä. Esimerkiksi kuvassa 36 kokelaalla on oletus siitä, että suorakulmaisessa kolmiossa kaksi muuta kulmaa ovat 45 astetta.

Tilavuus määritetty säännöllisten monikulmioiden avulla

Tehtävän neljäs kohta, jossa pyydettiin määrittämään kappaleen tilavuus, osoittautui aineiston perusteella haastavaksi monelle kokelaista. Kyseiselle kappaleelle ei ole olemassa suoraan johdettua tilavuuden kaavaa, joten tilan-

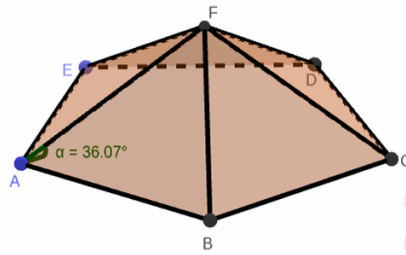


3. Tahkon ABF ja pohjan välinen kulma on kuvassa $49,59^\circ$



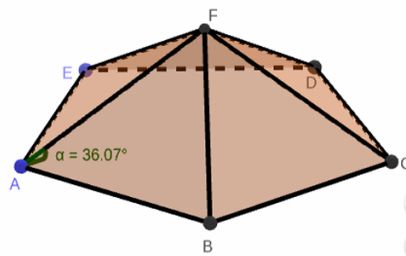
Kuva 34: Syksy 2021, kokelas 38

Määritetään monitahokkaan M särmän AF ja pohjan välinen kulma:



$$\alpha = 36,07^\circ$$

3. Sama kuin edellinen kulma, koska sivut ovat symmetriset, eli monitahokkaan M tahkon ABF ja pohjan välinen kulma:

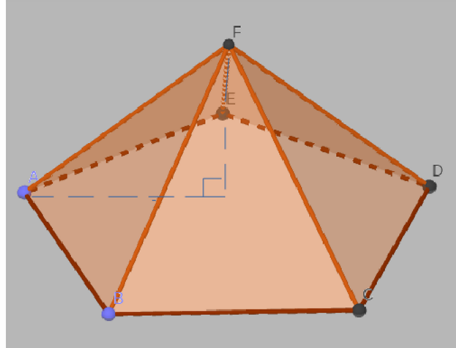


$$\alpha = 36,07^\circ$$

Kuva 35: Syksy 2021, kokelas 34

teessa edellytettiin pyramidin tilavuuden kaavan soveltamista. Osa kokelaista

2.



Särmä AF muodostaa monitahokkaan pohjan sekä korkeusjanan kanssa suorakulmaisen kolmion. Koska kolmion kulmien summa on 180° ja yksi kulma on 90° , niin tällöin $\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

vastaus: Pohjan sekä särmän AF välinen kulma on 45° .

3. Tahkon ABF pinta, monitahokkaan korkeusjana sekä pohja muodostavat suorakulmaisen kolmion. Tällöin tahkon ABF ja pohjan välinen kulma on 45° .
vastaus: Tahkon ABF sekä monitahokkaan pohjan välinen kulma on 45° .

Kuva 36: Syksy 2021, kokelas 27

pyrki ratkaisemaan tehtävän hyödyntämällä erilaisten säännöllisten kappaleiden laskukaavoja. Kuvien 37, 38 ja 39 esimerkkiratkaisuksista nähdään yrityksiä selvittää tilavuutta muun muassa tetraedrin, oktaedrin ja ikosaedrin avulla. On kuitenkin huomattava, että jos tehtävänannon kappaletta jaetaan pienempiin osiin, ei tuloksena ole säännöllisiä monikulmioita tai niiden osia.

Tilavuus määritetty muulla tavalla väärin

Säännöllisten monikulmioiden lisäksi tilavuutta määritettiin muilla tavoin väärin. Useimmiten ongelmat liittyivät kappaleen korkeuden määrittämiseen tilavuutta varten. Korkeus oli joko jätetty määrittämättä eli se jäi särmän a lisäksi toiseksi muuttujaksi annettuun tilavuuteen tai se oli määritetty virheellisesti. Moni kokelaista oli erehtynyt ajattelemaan, että kappaleen korkeus on sama kuin särmän pituus. Jos kappaleen konstruktio oli onnistunut ja perusteltu, yleensä myös korkeus onnistuttiin määrittämään.

Tilavuutta ei perusteltu

Kolmas tilavuuden laskemiseen liittyvä virheluokka sisältää ratkaisut, joissa tilavuus on vain ilmoitettu jollain tapaa väärässä muodossa ilman perusteita. Suurin osa tämän virheluokan ratkaisuksista sisältää vastauksen, joka on otettu suoraan sähköisestä ohjelmistosta ilman tietoa siitä, miten tilavuus on saatu. Lisäksi tilavuus on unohdettu ilmoittaa särmän a avulla. Tyypillinen tämän virheluokan vastaus nähdään kuvassa 40.

4.

Monitahokas koostuu viidestä tetraedristä

Tetraedri



Yhden tetraedrin tilavuus on:

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Näin olen viiden sellaisen ja koko monitahokkaan tilavuus on:

$$V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{12} \cdot 5 = \frac{5a^3 \cdot \sqrt{2}}{12}$$

Kuva 37: Syksy 2021, kokelas 43

4. M tilavuus, kun $a=1.66$

Tilavuus saadaan kaavalla

$$\frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1.66^3 \sqrt{2}}{3}$$

joten

$$\frac{1.66^3 \sqrt{2}}{3}$$

$$\rightarrow \frac{571787}{375000} \sqrt{2}$$

Joten tilavuus on $\approx 2.16 \text{ cm}^3$

Kuva 38: Syksy 2021, kokelas 67

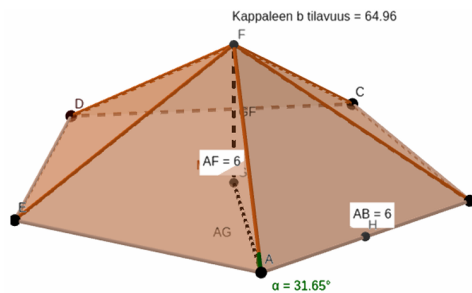
$$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$$

4. Volymen är $\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$. Bildens polyeder är en fjärdedel av en ikosaeder. I MAOL:s finns det en ikosaeder i Geometri:rymdkroppar avsnittet.

Kuva 39: Syksy 2021, kokelas 33

Riittämätön selitys

Virheluokka riittämätön selitys sisältää, kuten aiemminkin, kaikki sellaiset ratkaisut, jotka ovat tehtävänannosta täysin irrallisia tai joiden etenemistä



Kuva 40: Syksy 2021, kokelas 52

on mahdoton seurata. Kaikki tehtävässä esiintyneet virheet ja niiden esiintyvyys aineistossa on koottu alla olevaan taulukkoon.

Virhe	Määrä %
Kappale on piirretty väärin	32
Kappaleen mittoja ei perusteltu	20
Kappaleen mitat perusteltu puutteellisesti	19
Kulmat määritetty väärin	20
Tilavuus määritetty säännöllisten monikulmioiden avulla	17
Tilavuuden kaava määritetty muulla tavalla väärin	26
Tilavuutta ei perusteltu	9
Riittämätön selitys	5

4.4.3 Analyysi

Tämä tehtävä oli aineiston kokelaille vaikea, sillä vain 9% sai sen ratkaistua täysin oikein. Keskenäisiä ratkaisuja oli edellisiin tehtäviin verrattuna huomattavasti enemmän, 28%. Yksi aineiston ratkaisu oli jätetty tyhjäksi. Kun myös keskenäisissä ratkaisuihin ovat virheet huomioidaan, on virheellisiä ratkaisuja 83% aineistosta. Yhdessä ratkaisussa voi esiintyä usean virheluokan virheitä.

Kyseinen tehtävä poikkesi luonteeltaan aiemmista, sillä siihen ei liittynyt käytännössä lainkaan pyöristyksestä johtuvia virheitä. Kokelaiden yleisin virhe tässä tehtävässä liittyi kappaleen piirtämiseen: noin kolmasosa kokelaista (32 %) ei onnistunut piirtämään tehtävän edellyttämää kappaletta oikein. Osa näistä virheistä voi selittyä huolimattomuudella tehtävänannon tulkinnaissa, mutta useissa ratkaisuihin oli esimerkiksi sekoitettu käsitteet tasasivuisen ja tasakylkinen kolmio, mikä johti vääränlaisen kappaleen muodostamiseen. Myös puutteelliset taidot ohjelmiston käytössä ovat voineet muodostua haasteeksi, sillä onnistunut konstruktio edellyttää piirto-ohjelmiston, kuten Geogebrian, hallintaa, jotta mitat ja kuviot voidaan tuottaa matemaattisesti perustellen.

Tehtävän eri osakohtien perusteleminen näyttäytyi kokelaille yleisesti haas-

teellisena. Aineiston perusteella 20% kokelaista jätti kokonaan tekemättä kappaleen konstruktion, ja 9% ei esittänyt lainkaan perustelua tilavuudelle. Vaikka perustelut kappaleen piirtämiselle puuttuivat, oli mallikuva usein siitä huolimatta tehty oikein. Sen sijaan tilavuuden osalta puutteellinen perustelu oli useimmiten yhteydessä virheelliseen lopputulokseen. Tämä viittaisi siihen, että visuaalinen tai tekninen tuottaminen saatettiin hallita, mutta perusteluja lopputulokselle ei osattu tai huomattu antaa. Tehtävänannossa ei varsinaisesti pyydetä kappaleen konstruktiota, mikä on voinut osalle kokelaista aiheuttaa ajatuksen, että vain valmis kappale riittää.

Kuten useissa aiemmissakin tehtävissä, myös tässä tehtävässä ilmeni vaikeuksia kappaleen tilavuuden määrittämisessä erityisesti sen hahmottamisen näkökulmasta. Osa kokelaista (17%) pyrki ratkaisemaan tehtävän hyödyntämällä säännöllisten monikulmioiden ominaisuuksia joko suoraan tilavuuskaavaa käyttäen tai jakamalla kappaleen osiin. Näyttäytykö viisikulmiopohjainen pyramidi kokelaisten silmissä jollain tapaa poikkeavana, jolloin pyramidin tilavuuskaavan käyttö ei tunnu luontevalta – vai eikö tunnusteta, että kyseessä on yhä pyramidi? Tilavuus olisi ollut määritettävissä yksinkertaisesti joko suoraan esimerkiksi Geogebra-ohjelmiston työkaluja hyödyntäen tai laskemalla sen avulla ensin pohjan pinta-ala, mutta tätä lähestymistapaa hyödynsi lopulta vain pieni osa kokelaista. Mahdollisina selityksinä voidaan pitää joko riittämättömiä taitoja ohjelmiston käytössä tai epäselvyyttä siitä, onko sähköisessä ympäristössä tuotettu laskentakomento riittävä perustelu.

Myös kappaleelle soveltuvan yleisen tilavuuskaavan tuottaminen särmän pituuden a avulla osoittautui monelle kokelaalle haastavaksi. Erityisesti korkeuden määrittäminen tuotti vaikeuksia, ja useissa ratkaisuisa korkeus oli ilmoitettu särmän pituutena a . Osa kokelaista taas jätti särmän pituuden a kokonaan huomiotta. Tämä voi viitata siihen, että kokelaat ovat tottuneet ratkaisemaan tilavuustehtäviä konkreettisilla lukuarvoilla, minkä vuoksi siirtyminen yleiseen tilavuuden kaavaan saattaa olla vaikeaa. Lisäksi niissä ratkaisuisa, joissa kappale oli piirretty muun kuin yksikkösärmän ($a = 1$) avulla, tilavuuskaavan määrittäminen osoittautui entistä haastavammaksi. Kokelaista hyvin harva oli onnistuneesti hyödyntänyt ratkaisussa Geogebran tilavuustyökalua.

Kokelaista 20 % kohtasi vaikeuksia kysytyjen kulmien määrittämisessä. Ratkaisujen perusteella oli havaittavissa haasteita sekä hahmottaa mitä kulmia tehtävässä tarkalleen kysytään että ymmärtää, millä menetelmällä ne voidaan määrittää. Geogebra-komentojen käyttö näyttäytyi tehokkaimpana ratkaisukeinona, edellyttäen kuitenkin, että kokelas osasi syöttää ohjelmaan oikean kulman. Suurimmassa osassa tähän virheluokkaan sijoittuneista ratkaisuisa kulmat oli kuitenkin virheellisesti tulkittu keskenään yhtä suuriksi – usein ilman yrittystä tarkistaa väitettä.

Osa kokelaista oli ratkaissut tehtävän algebrallisesti hyödyntäen suorakulmaisen kolmion ominaisuuksia, Pythagoraan lausetta ja trigonometrisiä funktioita. Näissäkin tapauksissa kulmat määritettiin usein virheellisesti tai

yhtä suuriksi, ja erityisesti algebrallisissa ratkaisuisissa ilmeni lisäksi virheitä, jotka liittyivät suorakulmaisen kolmion ominaisuuksiin.

4.5 Tulosten tarkastelua

Tehtävien analyysistä voi havaita, että aineistossa yleisimmät virheet liittyvät kappaleiden ja kuvioiden hahmottamiseen, kaavojen soveltamiseen ja matemaattisten periaatteiden puutteelliseen ymmärtämiseen. Monet virheistä liittyvät toisiinsa ja sopisivat useampaan virheluokkaan, esimerkiksi väärien kaavojen valinta liittyy usein suoraan ongelmiin hahmottaa kappaletta. Tämän vuoksi virheiden luokitteluun ei voida tehdä ehdotonta rajanvetoa, vaan esitetyt virheluokat ovat tekijän tulkinta. Yleisimmät tehtävissä esiintyneet virheet voidaan jakaa viiteen yläluokkaan seuraavalla tavalla: kappaleiden ja kuvioiden hahmottaminen, käsitevirheet, virheelliset tai puutteelliset päätte-lyt, tehtävänannon tulkitseminen ja pyöristysvirheet. Yläluokkia kuvaillaan alla olevassa taulukossa seuraavalla tavalla:

Virheluokka	Esimerkkejä virheluokan virheistä
Kappaleiden ja kuvioiden hahmottaminen	Kappaleen tilavuuden tai kuvion pinta-alan laskuissa on käytetty väärien kappaleiden laskukaavoja virheellisesti suoraan tai soveltaen. Tehtävänannossa vaadittu kappale on hahmotettu tai piirretty virheellisesti.
Käsitevirheet	Tilavuuden kaavaan on sijoitettu väärä pinta-ala tai tilavuudeksi on ilmoitettu koko kappaleen pinta-ala. Käsitteet tasasivuinen ja tasakylkinen sekä korkeus ja särmä ovat sekoittuneet keskenään.
Virheelliset tai puutteelliset päätte-lyt	Tehtävän ratkaisussa on käytetty itse keksittyjä epäjohdonmukaisia laskukaavoja. Yhtälön muodostuksessa parametrit on päätelty ilman matemaattista perustelua. Tilavuusintegraalissa on valittu päätepiisteet virheellisesti. Sähköisellä ohjelmistolla tuotettuja tuloksia ei osattu perustella matemaattisesti.
Tehtävänannon tulkitseminen	Tehtävänannossa annettuja tietoja on jätetty huomiotta. Annettu vastaus ei noudata tehtävänantoa.
Pyöristysvirheet	Laskut on suoritettu pyöristetyillä arvoilla. Vastaus on jätetty pyöristämättä tai pyöristetty väärään tarkkuuteen.

5 Pohdinta

Tässä osiossa tarkastellaan tutkimuksen toteutuksen haasteita, luotettavuutta ja eettisyyttä. Lisäksi pohditaan jatkonäkökulmia analyysistä saatujen tulosten kannalta.

Aineistolähtöinen sisällönanalyysi on laadullista tutkimusta, jossa aineiston kerääjänä ja tulkitsijana toimii tutkija itse, jolloin teoreettiset näkökulmat ja muodostetut virheluokat perustuvat tutkijan omaan tulkintaan (Kiviniemi ja muut 2018). Tämä haastaa tutkimuksen objektiivisuutta, sillä aineiston keruussa ja analyysissä on mahdollisuus virheille. Tutkija saattaa esimerkiksi tulkita ratkaisua virheellisesti tai aineiston lähteestä voi puuttua osia, jos esimerkiksi kokelaan ratkaisuun liittämä näyttökuva näkyykin vain osittain. Myös yksittäisiä virheitä voi jäädä havaitsematta, mutta tämä ei kuitenkaan vaikuta merkittävästi analyysin tulokseen. Tutkija näkee kokelaan ajatusprosessia vain hänen tuottamansa ratkaisun kautta, jolloin analyysi on pitkälti tutkijan tulkinnan varassa. Esimerkiksi: onko väärin valittu kaava vain huolimattomuutta vai kertooko se kokelaan geometrisen hahmottamisen vaikeuksista? Tämä ja muut vastaavat tapaukset on pääteltävä ainoastaan aineiston pohjalta.

Edellä mainitut mahdolliset ongelmakohdat eivät kuitenkaan tee tutkimuksesta epäluotettavaa, vaan se tarjoaa yhden teoreettiseen pohjaan tukeutuvan näkökulman yleisistä virheistä avaruusgeometrian tehtävissä. Aineiston keruu itsessään on eettistä ja objektiivista, sillä siitä ei ilmene lainkaan yksilöiviä tietoja, kuten nimeä, oppimäärää, tehtäväkohtaisia pisteitä tai paikkakuntaa. Ainut aineistosta saatava tieto ratkaisun lisäksi on kokelaan ylioppilaskokeen arvosana.

Virheluokkien muodostaminen edellyttää aineiston yksinkertaistamista, jotta niiden määrä pysyy analyysin kannalta mielekkäänä. Tavoitteena on ryhmitellä saman tyyppiset virheet yhteen, mutta myös samankaltaisuuden määrittäminen on tutkijan tulkintaa, mikä vaikuttaa analyysin tuottamaan tietoon eri virheluokkien esiintyvyydestä aineistossa. Kun tarkastellaan tämän aineiston yleisimmin esiintyviä virheitä taulukossa ??, vastaavat ne pääosin luvun 2 teoriaosuudessa esiteltyjä mahdollisia kompastuskiviä geometrisessa ajattelussa.

Tutkimuksen tulokset toimivat suuntaa antavina, ja on hyvä tiedostaa, että sadan ratkaisun aineisto on määrällisesti pieni otanta, joten tämän analyysin perusteella ei voida tehdä raskaita johtopäätöksiä yleisestä lukion kokelaiden geometrian osaamisen tasosta tai opetuksen laadusta. Ne olisivat kuitenkin mielekkäitä jatkotutkimuksen kohteita. Tämän tutkimuksen virheanalyysistä saadut tulokset tarjoavatkin hyvän näkökulman mahdollisten jatkotutkimusten tueksi opiskelijoiden avaruusgeometriassa kohtaamista haasteista.

Lähteet

- Ay, Yasin (2017). ”A review of research on the misconceptions in mathematics education”. Teoksessa: Dr. Shelley, M. ja Dr. Pehlivan, M. *Education Research Highlights in Mathematics, Science and Technology 2017*. ISRES Publishing, Ame, s. 21–31.
- Clements, Douglas H. ja Battista, Michael (1992). ”Geometry and spatial reasoning”. Teoksessa: Grouws, D. *Handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National council of teachers of mathematics*. Reston VA The National Council of Teachers of Mathematics NCTM.
- Houdement, Catherine ja Kuzniak, Alain (2003). ”Elementary geometry split into different geometrical paradigms”. Teoksessa: Mariotti, M. A. (editor). *European Research in Mathematics Education (CERME 3 February 28-March 3, 2003)*. University of Pisa, s. 1–10.
- Kiviniemi, Kari ja muut (2018). ”Laadullinen tutkimus prosessina”. Teoksessa: *Ikkunoita tutkimusmetodeihin. 2, Näkökulmia aloittelevalle tutkijalle tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin ja analyysimenetelmiin*. Valli, Raine.
- Kusno ja Sutarto (2022). ”Identifying and Correcting Students’ Misconceptions in Defining Angle and Triangle”. *European Journal of Education Research* 11 (3), s. 1797–1811.
- McComas, K (2019). ”Misconceptions”. Teoksessa: Dingman, Shannon W. et al. *The Language of Mathematics Education : An Expanded Glossary of Key Terms and Concepts in Mathematics Teaching and Learning*. BRILL, s. 74.
- Moeketsi, Mosiaa, Mogalatjane, Edward M. ja Tshele, John Molo (2023). ”Errors and Misconceptions in Euclidean Geometry Problem Solving Questions: The Case of Grade 12 Learners”. *Research in Social Sciences and Technology* 8 (3), s. 89–104.
- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf (viitattu 14.04.2025).
- (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf (viitattu 14.04.2025).
- (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. URL: https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2019.pdf (viitattu 14.04.2025).
- Silfverberg, Harry (2018). ”Geometrinen käsitteenmuodostus oppimisen tutkimuksen kohteena”. Teoksessa: Joutsenlahti, Jorma, Silfverberg, Harry ja Räsänen, Pekka. *Matematiikan opetus ja oppiminen*. Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti, s. 86–109.

- Watan, S ja Sugiman (2018). "Exploring the relationship between teachers' instructional and students' geometrical thinking levels based on van Hiele theory". *Journal of Physics: Conference Series* 1097 (5). DOI: 10.1088/1742-6596/1097/1/012122.
- Ylioppilastutkintolautakunta (2025). *Hyvän vastauksen piirteet*. URL: <https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/tutkinnon-suorittaminen/hyvan-vastauksen-piirteet> (viitattu 20.05.2025).