

Klassinen mekaniikka

Hannu Koskinen ja Rami Vainio
Helsingin yliopisto, Fysiikan laitos



Tämän teoksen sähköisen version on julkaissut Helsingin yliopisto / Helsingin yliopiston kirjasto Helda Open Books -kokoelmassa Creative Commons -lisensillä: CC BY-NC-ND 4.0 (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fi>).

ISBN: 978-951-51-8311-8

DOI : 10.31885/9789515183118

Esipuhe

Isaac Newtonin 1600-luvulla muotoilema klassinen mekaniikka on yksi fysiikan pysyvimpiä peruspilareista. Sen alkeet opitaan jo koulufysiikassa ja fysiikan yliopisto-opiskelijat joutuvat klassisen mekaniikan kanssa tekemisiin yleensä jo ensimmäisenä opiskeluvuotenaan. Klassinen mekaniikka ei kuitenkaan ole jämähtänyt Newtonin aikanaan kehittämään muotoon. Itse asiassa nykyopiskelijan olisi hyvin vaikea opiskella mekaniikan perusteita Newtonin vuonna 1687 valmistuneesta klassikosta *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Kehitys ei ole rajoittunut ainoastaan selkeämpään tapaan käsitellä differentiaali- ja integraalilaskentaa tai vektorien käyttöön ottoon. 1700- ja 1800-luvuilla *Joseph-Louis Lagrange* ja *Sir William Rowan Hamilton* kehittivät mekaniikkaa aiempaa abstraktimpaan mutta samalla myös tehokkaampaan suuntaan. Nykyään juuri Lagrangen ja Hamiltonin yhtälöt ovat keskeisiä muotoiltaessa kvanttimekaniikan ja statistisen fysiikan perusteita. Viimeisten muutaman vuosikymmenen aikana nopeasti kasvanut kiinnostus dynaamisiin systeemeihin ja kaoottisiin ilmiöihin on myös vahvistanut klassisen mekaniikan itsenäistä merkitystä ja tuonut aivan uusia tutkimusalueita klassisessa mekaniikassa kehitettyjen menetelmien sovellutusten piiriin. Mekaniikasta peiriytyviä malleja sovelletaan tänä päivänä useille fysiikalle varsin kaukaisillekin alueille populaatiodynamiikasta kansantaloustieteeseen.

Tämä oppikirja perustuu vuodesta 2002 lähtien Helsingin yliopiston fysiikan laitoksessa luennoimamme 10 opintopisteen laajuisen kurssin *Klassinen mekaniikka* oppimateriaaliin. Kurssi on pakollinen Helsingin yliopiston teoreettisen fysiikan aineopinnoissa ja mielestämme kovasti hyödyllinen sivuaineopinto kaikille fysiikan ja tähtitieteen opiskelijoille. Lukijan taustatiedoiksi oletamme yliopistotasolla ensimmäisen vuoden aikana opetettavat fysiikan peruskurssit ja matemaattiset apuneuvot.

Kirjan päätavoitteena on tutustuttaa lukija Lagrangen ja Hamiltonin mekaniikan välineisiin ja esitellä, kuinka näitä menetelmiä voidaan käyttää klassisen fysiikan keskeisimpien ilmiöiden käsittelyyn. Kirja alkaa lyhyellä perusopintotasoisella klassisen mekaniikan kertauksella (luku 1). Newtonin painovoimalaki ja siihen perustuvat keskeisvoimat sekä Keplerin liike käsitellään luvussa 2 ennen Lagrangen formalismin esittelyä luvussa 3. Lagrangen formalismin jälkeen käsitellään värähdysliikettä sekä newtonilaisin että Lagrangen menetelmien avulla (luku 4). Tässä yhteydessä nähdään, kuinka Lagrangen formalismi osoittaa vahvuutensa siirryttäessä yksinkertaisesta värähtelyliikkeestä monimutkaisempiin tilanteisiin. Luku 5 on johdatus ei-inertiaaliseen liikkeeseen, jonka tuloksia sovelletaan luvussa 6 jäykän kappaleen liikkeeseen. Hamiltonin mekaniikkaan tutustutaan luvussa 7 ja kirjan päättää lyhyt johdatus kaaosteoriaan (luku 8).

Helsingin yliopistossa opiskelijat suorittavat tämän kirjan aineistoon perustuvan kurssin opintokokonaisuudestaan riippuen yleensä joko toisena tai kolmantena opiskeluvuotenaan. Kokemuksemme mukaan kirjaan sisältyy hieman enemmän materiaalia kuin 56 luentotunnin mittaisella aineopintotason opintojaksolla on mahdollista käydä läpi. Olemme merkinneet joitain lukuja ja kappaleita tähdellä merkitsemään sellaisia kokonaisuuksia, joita emme pidä kurssin keskeisimpänä ydinaineksena, mutta joihin fysiikasta syvällisemmin kiinnostuneet opiskelijat saattavat haluta tutustua. Tällainen on varsinkin

viimeisen luvun kaaosteoria, josta saatu opiskelijapalaute on ollut innostunutta mutta samalla kriittistä, koska asiaan ei ole luennoilla riittävästi aikaa perehtyä kunnolla.

Koska kirja on tarkoitettu nimenomaan oppimateriaaliksi, olemme liittäneet jokaisen luvun loppuun joukon laskuharjoitustehtäviä, joita olemme vuosien varrella käyttäneet kotitehtävinä. Tehtävistä osa on varsin helppoja mutta monet myös vaativia jopa vaikeita. Tehtävien valinta on tietenkin subjektiivista ja klassisen mekaniikan lukuisista oppikirjoista löytyy lukematon määrä vaihtoehtoisia esimerkkejä.

Klassisesta mekaniikasta on kirjoitettu hyllymetreittäin oppikirjoja joskaan ei kovin paljon suomenkielistä materiaalia sillä tasolla kuin tässä kirjassa. Helsingin yliopiston klassisen mekaniikan kurssi on pitkään perustunut Raimo Keskisen oppikirjaan *Analyttinen mekaniikka* (Limes ry., useita painoksia) koottuun materiaaliin. Kyseinen teos on kuitenkin varsin kompakti eikä siitä ole koskaan tehty korjattua laitosta. Tämän kirjan rakenne seuraa Keskisen kirjaa, mutta esitystapa ja sisältö ovat vuosien varrella muuttuneet. Olemme lainanneet materiaalia myös monista muista klassisen mekaniikan teoksista. Yksi tunnetuimmista oppikirjoista on Herbert Goldsteinin *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, 1950, 1980). Teoksen uusin versio on vuonna 2002 ilmestynyt 3. painos, jossa kirjoittajina ovat myös Charles Poole ja John Safko. Jokaisen klassiseen mekaniikkaan perehtyvän opiskelijan pitäisi vähintään selaila tätä teosta. Toinen suositeltava lähde on Handin ja Finchin *Analytical Mechanics* (Cambridge University Press, 1998). Erityisesti kovan linjan teoreetikkojen lempilukemista on edelleen Landaun ja Lifschitzin teos *Mechanics* (Pergamon Press, useita painoksia, saatavissa myös useilla eri kielillä). Viittaamme näihin teoksiin kirjassamme ainoastaan kirjoittajien nimillä.

Kirjoittajat ovat suuressa kiitollisuuden velassa edesmenneen Raimo Keskisen pioneeriryölle klassisen mekaniikan opettajana Helsingin yliopistossa. Hänen luentonsa 1970-luvun puolivälissä olivat yksi syy toisen kirjoittajista (HK) innostumiseen klassisesta fysiikasta ja siirtymiseen matematiikasta teoreettiseen fysiikkaan, josta tie sittemmin johti avaruusfysiikkaan. Lähdettäessä kehittämään tässä käsillä olevaa tekstiä keskustelut kurssia vuosituhanen vaihteessa luennoineen Christofer Cronströmin kanssa ja hänen luentomuistiinpanonsa olivat erittäin hyödyllisiä. Vuosien varrella meillä on ollut ilo työskennellä useiden innostuneiden kurssiassistenttien ja opiskelijoiden kanssa, joille kaikille haluamme osoittaa kollektiiviset kiitokset. Erityiskiitokset ansaitsevat luvun 5 harjoitusten joukossa olevan ”K-kalkyylin” kirjaillut Petteri Keränen sekä tämän kirjan kannen suunnitellut Heli Hietala.

Lopuksi haluamme kiittää kirjan julkaisijaa Limes ry:tä, jonka julkaisusihteeri Daniel Landau lähestyi meitä tammikuussa 2010 kysyen kiinnostustamme editoida luentomonisteestamme oppikirjan. Se oli itse asiassa ollut mielessämme jo jonkin aikaa, joten intressimme olivat yhteiset ja tämä on lopputulos.

Helsingissä, 22. kesäkuuta 2010
Hannu Koskinen ja Rami Vainio

Sisältö

Esipuhe	i
1 Newtonin mekaniikkaa	1
1.1 Avaruus- ja aikakoordinaatit	1
1.2 Newtonin lait	2
1.3 Liikemäärä ja energia	4
1.3.1 Liikemäärän säilyminen	4
1.3.2 Työ viivaintegraalina	5
1.3.3 Konservatiivinen voimakenttä ja potentiaalifunktio	6
1.3.4 Liikemäärämomentti ja sen säilyminen	7
1.4 Esimerkkejä	9
1.4.1 Muuttuvien massojen liike	9
1.4.2 Matemaattinen heiluri	9
1.5 Harjoituksia	12
2 Liike keskeisvoimakentässä	15
2.1 Keskeisvoimat	15
2.1.1 Kahden kappaleen ongelma	15
2.1.2 Liike keskeisvoimakentässä	17
2.1.3 Liikeradan integrointi energiayhtälön avulla	18
2.1.4 Ratojen luokittelu	19
2.1.5 Liikeradan differentiaaliyhtälö	21
2.2 Keplerin liike	23
2.2.1 Newtonin painovoimalaki	24

2.2.2	Keplerin radan yleinen lauseke	27
2.2.3	Keplerin lait ratayhtälön avulla	29
2.2.4	Laplace–Runge–Lenz-vektori	30
2.2.5	Riippumattomat liikevakiot ja rataelementit	31
2.2.6	*Sirona keskeisvoimakentässä	33
2.3	Useamman kappaleen ongelmat	36
2.3.1	Planeettaliike	37
2.3.2	*Kolmen kappaleen ongelma	37
2.3.3	*Rajoitettu kolmen kappaleen ongelma	38
2.4	Harjoituksia	39
3	Lagrangen mekaniikka	41
3.1	Systeemin vapausasteet ja sidokset	42
3.2	Yleistetyt koordinaatit	43
3.3	Virtuaalinen työ	45
3.4	Lagrangen yhtälöt	46
3.5	Nopeudesta riippuvat potentiaalit	50
3.5.1	Sähkömagneettinen kenttä	50
3.5.2	Kitkavoimat	52
3.6	Hamiltonin periaate	53
3.6.1	*Matemaattinen apuneuvo: variaatiolaskenta	54
3.6.2	Lagrangen yhtälöiden johtaminen Hamiltonin periaatteesta	58
3.7	Sidosvoimat	59
3.8	Kanoniset impulssit	62
3.9	Sykliset koordinaatit ja säilymislait	64
3.10	*Hyödyllisiä apuvälineitä	65
3.10.1	Mekaaninen similariteetti	65
3.10.2	Dimensionanalyysiä	67
3.11	Harjoituksia	70

4	Värähdysliikkeet	73
4.1	Lineaarinen harmoninen oskillaattori	73
4.2	Vaimennettu värähtelijä	75
4.3	Ajasta riippuva ulkoinen voima	77
4.4	Vaimennettu ulkoisen voiman ajama värähtelijä	79
4.5	Kytkeytyt harmoniset värähtelijät	82
4.6	*Jännitetyn kielen värähtelyt	90
4.7	*Epälineaarista värähtelijöistä	92
4.7.1	Faasi-integraali ja faasikäyrä	93
4.7.2	van der Polin oskillaattori ja attraktorit	94
4.7.3	Approksimatiivisia ratkaisuja	96
4.8	Harjoituksia	100
5	Ei-inertiaaliset koordinaatistot	103
5.1	Newtonin liikeyhtälö liikkuvissa koordinaatistoissa	103
5.2	Muunnos pyörivään koordinaatistoon	106
5.3	Liike pyörivällä maapallolla	109
5.3.1	Coriolis-voima	110
5.3.2	Liikeyhtälö	111
5.3.3	Foucault'n heiluri	113
5.4	Harjoituksia	116
6	Jäykän kappaleen liike	119
6.1	Koordinaatiston valinta	119
6.2	Hitaustensori	120
6.3	Hyrrän liike	125
6.3.1	Hyrrän liikemäärämomentti	125
6.3.2	Hyrrän liikeyhtälöt	127
6.4	Eulerin kulmat	130
6.5	Harjoituksia	136

7	Hamiltonin mekaniikka	139
7.1	Hamiltonin liikeyhtälöt	139
7.2	Legendren muunnokset	144
7.3	Poissonin sulut	145
7.4	Kanoniset muunnokset	147
7.4.1	Generoivat funktiot	148
7.4.2	Infinitesimaaliset kontaktimuunnokset	153
7.4.3	Kanoniset muunnokset ja Poissonin sulut	155
7.5	Hamiltonin–Jacobin teoriaa	157
7.6	Vaikutus- ja kulmamuuuttujat	160
7.7	*Kanonista häiriöteoriaa	163
7.8	*Adiabaattiset invariantit	166
7.9	Harjoituksia	169
8	*Kaaosteoriaa	171
8.1	Periodinen liike	172
8.2	KAM-teoreema	174
8.3	Kaoottinen liike ja Ljapunovin eksponentit	175
8.4	Attraktorit, oudot attraktorit ja fraktaalit	177
8.5	Poincarén kuvaukset	181
8.6	Hénonin ja Heilesin Hamiltonin funktio	182
8.7	Bifurkaatiot	185
8.8	Logistinen yhtälö	187
8.9	Harjoituksia	190
	Hakemisto	193

Luku 1

Newtonin mekaniikkaa

Tässä luvussa käydään läpi lyhyesti joitakin Newtonin mekaniikan peruskäsitteitä kuten Newtonin lait, liikemäärä, liikemäärämomentti, työ ja energia. Lisäksi tutustutaan matemaattiseen heiluriin, joka tullaan kohtaamaan lukuisissa eri yhteyksissä.

1.1 Avaruus- ja aikakoordinaatit

Klassisessa mekaniikassa avaruudella ja ajalla oletetaan olevan seuraavat aksioomankaltaiset ominaisuudet.

1. **Avaruus on kolmiulotteinen, euklidinen ja absoluuttinen.** Euklidisuus merkitsee sitä, että voidaan valita koko avaruuden kattava karteellinen koordinaatisto ja lisäksi avaruus oletetaan homogeeniseksi ja isotrooppiseksi eli samanlaiseksi kaikkiin suuntiin. Absoluuttisuus puolestaan takaa sen, etteivät avaruuden ominaisuudet muutu siinä liikkuvien kappaleiden vuoksi.
2. **Aika on homogeeninen ja absoluuttinen.** Aika virtaa tasaisesti yhteen suuntaan. Ajan nollakohta voidaan valita vapaasti eivätkä materiaaliset tapahtumat vaikuta siihen.

Kuten hyvin tiedämme, viime vuosisadalla opittiin, että nämä aksioomat ovat erikoistapauksia suhteellisuusteorian yleisemmästä aika-avaruuden käsitteestä. Näille aksioomille rakentuva mekaniikka kuitenkin on ja pysyy erittäin hyödyllisenä fysiikan perustana tarkasteltaessa jokapäiväisiä ilmiöitä. Vasta mentäessä erittäin suuriin massoihin, energioihin, nopeuksiin tai avaruudellisiin skaaloihin tai toisaalta aineen atomitasoin ilmiöihin yllä olevat aksioomat osoittautuvat riittämättömiksi kuvailemaan ajan ja avaruuden rakennetta.

Klassisessa mekaniikassa kaikki koordinaatistot eivät ole samassa asemassa. Tärkeä erikoisryhmä ovat **inertiaalikoordinaatistot**, joissa vapaa hiukkanen liikkuu vakionopeudella. Jos koordinaatisto puolestaan kiinnitetään vaikkapa maapallon keskipisteeseen ja sen annetaan pyöriä Maan mukana, koordinaatisto on monissa käytännön asioissa melkein inertiaalinen, mutta suuressa skaalassa pyöriminen aiheuttaa näennäisvoimia, jotka ovat tärkeitä esim. ilmakehän kiertoliikkeessä. Ei-inertiaalisiin koordinaatistoihin ja pyörimisliikkeeseen tutustutaan luvuissa 5 ja 6.

Maailmankaikkeuden mittakaavassa erittäin hyvä inertiaalikoordinaatisto voidaan määrittellä 3 kelvinin taustasäteilyn avulla. Valitsemalla koordinaatisto siten, että säteilyn lämpötila on sama joka suunnalla, systeemi on suurella tarkkuudella inertiaalinen. Tämä ei tietenkään tarkoita sitä, että tähän koordinaatistoon sidottu aika ja avaruus olisivat absoluuttisia, kuten suhteellisuusteoria ja kosmologia ovat osoittaneet.

1.2 Newtonin lait

Klassinen mekaniikka perustuu kolmelle Newtonin muotoilemalle peruslaille:

1. Ellei kappaleeseen vaikuta mitään voimia, niin se säilyttää liiketilansa eli se liikkuu pitkin suoraa viivaa vakionopeudella.
2. Jos kappaleeseen vaikuttaa voimia, niin kappaleen liikemäärän muutos (aikayksikköä kohti) on yhtä suuri kuin siihen vaikuttava kokonaisvoima.
3. Kun kaksi kappaletta vaikuttavat toisiinsa, niin voima, jolla ensimmäinen kappale vaikuttaa toiseen, on yhtä suuri mutta suunnaltaan vastakkainen kuin voima, jolla toinen kappale vaikuttaa ensimmäiseen.

Sir Isaac Newton (Kuva 1.1) eli vuosina 1642–1727. Hän julkaisi nämä lait kirjassaan *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* vuonna 1687. Teokseen viitataan usein pelkällä lempinimellä *Principia*.

Kirjoitetaan Newtonin lait formaalisti käyttäen jatkossakin käytettäviä merkintöjä: m on **massa**, $\mathbf{r}(t)$ on **paikkavektori** ajan funktiona, paikkavektorin derivaatta ajan suhteen $\mathbf{v}(t)$ on **nopeus** ja paikan ja ajan funktio $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ on **voima**. **Liikemäärä** määritellään tulona

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Newtonin lait voidaan nyt formuloida seuraavasti

$$\text{Jos } \mathbf{F} = 0, \text{ niin } \mathbf{v} = \text{vakio.} \quad (1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{F}^{(12)} = -\mathbf{F}^{(21)}. \quad (1.3)$$



Kuva 1.1: Sir Isaac Newton (1642–1727)

Ensimmäinen laki seuraa selvästikin toisesta laista, mutta sillä on sikäli historiallista merkitystä, että se periytyy jo *Galileo Galileilta* (1564–1642).

Toisessa laissa on mukana kaksi uutta suuretta: massa ja voima. On makuasia, kumman määrittelynä lakia pidetään. Määrittelemällä **kiihtyvyys** lausekkeella $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ ja olettamalla massa vakioksi voidaan kirjoittaa tuttu kaava

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (1.4)$$

Kiihtyvyyden määrittäminen on käytännössä helppoa, kunhan käytössä on hyvä kello. Galileilla sellaista ei ollut, mutta eipä ollut kiihtyvyyden käsitettäkään ennestään valmiina.

Toisaalta massan ja voiman toisistaan riippumaton määrittäminen on kaikkea muuta kuin triviaalia. Tähän liittyy klassinen ongelma, onko hidas massa, joka liittyy kaavaan (1.4), sama kuin painava massa, joka voidaan punnita annetussa gravitaatiokentässä. Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian yksi perusteista on oletus, että hidas ja painava massa ovat sama asia. Tätä kutsutaan **ekvivalenssiperiaatteen**ksi. Sen on todettu olevan voimassa sillä tarkkuudella kuin sitä on onnistuttu tähän mennessä mittaamaan.

1.3 Liikemäärä ja energia

Erilaiset säilymislait ovat kaiken fysiikan peruspilareita. Liikemäärän, liikemäärämomentin ja energian säilymislait lienevät lukijalle jo ennestään tuttuja, mutta kerrataanpa nyt nekin.

1.3.1 Liikemäärän säilyminen

Newtonin toinen laki sanoo selvästikin, että mikäli massapisteeseen ei vaikuta mikään voima, sen liikemäärä on vakio. Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa meillä on N kpl massapisteitä (kutsutaan niitä hiukkasiksi – klassisen mekaniikan puitteissa voisimme yhtä hyvin puhua kappaleista) m_i ($i = 1, \dots, N$) paikoissa \mathbf{r}_i . Oletetaan, että hiukkanen j vaikuttaa hiukkaseen i voimalla \mathbf{F}_{ij} . Lisäksi hiukkaseen i voi vaikuttaa jokin ulkoinen voima $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$. Newtonin toinen laki antaa liikemäärän muutokseksi

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_{ij}, \quad (1.5)$$

missä aikaderivaattaa merkitään pisteellä derivoitavan funktion yläpuolella.

Oletetaan massat vakioiksi, jolloin $\dot{\mathbf{p}}_i = m_i \mathbf{d} \mathbf{d} \mathbf{r}_i$. Toista aikaderivaattaa merkitään puolestaan kahdella pisteellä. Hiukkasjoukon kokonaismassa on

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (1.6)$$

ja hiukkasjoukon **massakeskipiste** on

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}. \quad (1.7)$$

Tällöin

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.8)$$

Newtonin kolmannen lain avulla tästä tulee

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (1.9)$$

Merkitsemällä systeemin kokonaisliikemäärää $\mathbf{P} = M \dot{\mathbf{R}}$, saadaan tärkeä tulos

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} \equiv \mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}, \quad (1.10)$$

missä siis $\mathbf{F}_{\text{tot}}^{\text{ext}}$ on kaikkiin hiukkasiin vaikuttavien ulkoisten voimien summa. Nyt nähdään, että jos systeemi on eristetty eli siihen ei vaikuta ulkoisia voimia, sen kokonaisliikemäärä on vakio. Tämä on **kokonaisliikemäärän säilymlaki**.

Palataan sitten tarkastelemaan yhtä massapistettä olettaen, että sen massa on vakio ja että se liikkuu voimakentässä \mathbf{F} . Integroidaan voimaa aikavälillä $[t_0, t]$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \mathbf{F} dt &= \int_{t_0}^t m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dt \\ &= \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}(t_0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Siis voiman aikaintegraali annetulla välillä on sama kuin massapisteen liikemäärän muutos. (Huom. Tässä ja usein myöhemminkin merkitään integroinnin ylärajaa samalla symbolilla kuin integrointimuuttujaa, ellei ole vaaraa sekoittaa näitä keskenään. Matemaattisesti kauniimpi tapa olisi merkitä integraalin sisällä olevaa aikaa vaikkapa t' .)

Voiman aiheuttamaa liikemäärän muutosta kutsutaan **impulssiksi**. Tässä yhteydessä on tarpeen tarkastella terminologiaa: Vanhemmassa kirjallisuudessa liikemäärää on kutsuttu impulssiksi ja tässäkin kirjassa myöhemmin vastaan tulevia kanonisia liikemääriä kutsutaan fyysikoiden keskuudessa useimmiten yhä kanonisiksi impulseiksi. Termin taustalla on liikemäärän saksankielinen nimitys *der Impuls*. Englannin kielessä liikemäärä on *momentum*, jota ei saa puolestaan sekoittaa voiman momenttiin!

1.3.2 Työ viivaintegraalina

Kiihdyttäessään kappaletta voima tekee **työtä**. Merkitään työtä symbolilla W . Kun massapiste liikkuu voimakentässä \mathbf{F} pisteestä \mathbf{r}_0 pisteeseen \mathbf{r} , voiman tekemä työ määritellään viivaintegraalina

$$W \equiv \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.12)$$

Nyt

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \equiv T - T_0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Suure $T = \frac{1}{2}mv^2$ on tietenkin tuttu massapisteen **liike-energia** (kineettinen energia). Olemme siis saaneet tuloksen, että voiman tekemä työ on alku- ja lopputilojen kineettisten energioiden erotus. Tämä edellyttää kuitenkin, että liikkuvan kappaleen sisäinen tila (esimerkiksi pyörimistila tai massa) ei matkan aikana muutu.

1.3.3 Konservatiivinen voimakenttä ja potentiaalifunktio

Mikäli integraali $\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ on integroimisreitistä riippumaton päätepisteidensä funktio, suljetun reitin yli laskettu integraali $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ja $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ voidaan ilmaista ajasta riippumattoman skalaarikentän $U(\mathbf{r})$ gradienttina

$$\mathbf{F} = -\nabla U. \quad (1.14)$$

Tämä on ekvivalentti ehdon $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ kanssa. Tällaista voimakenttää \mathbf{F} kutsutaan **konservatiiviseksi**. Konservatiiviselle voimalle lauseke

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -U(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}_0) \equiv -U + U_0 \quad (1.15)$$

on sama kuin edellä saatu työ $W = T - T_0$, joten olemme saaneet tuloksen

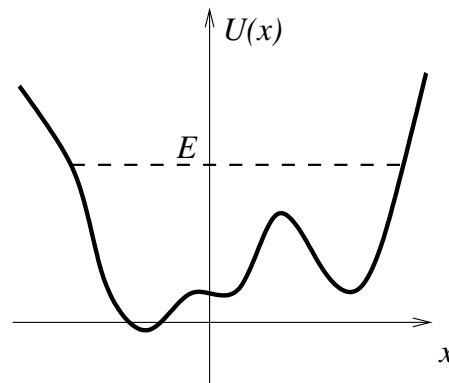
$$T + U = T_0 + U_0 \equiv E. \quad (1.16)$$

Potentiaalifunktiota U kutsutaan **potentiaalienergiaksi** ja liike-energian ja potentiaalienergian summaa E **mekaaniseksi kokonaisenergiaksi**. Lauseke (1.16) ilmaisee itse asiassa **kokonaisenergian säilymlain**.

Lähes kaikissa klassisen mekaniikan “puhtaissa” ongelmissa esiintyvät voimat ovat konservatiivisia. Klassisessa mekaniikassa ei-konservatiivisia voimia edustavat erilaiset kitkavoimat. Perusfysiikan tärkeimmät ei-konservatiiviset voimakentät tulevat vastaan elektrodynamiikassa, missä magneettikentän \mathbf{B} aiheuttama voima riippuu sähköisesti varatun hiukkasen (varaus q) nopeudesta $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Myös sähkökentällä voi olla ei-konservatiivinen (induktiivinen) osa magneettikentän muuttuessa ajan funktiona.

Esimerkki: Yksiulotteinen liike potentiaalissa $U(x)$

Tarkastellaan esimerkkinä kokonaisenergian säilymlaista yksiulotteista tapausta, jossa massapiste (m) liikkuu potentiaalissa $U(x)$ ja sen kokonaisenergia on E (Kuva 1.2).



Kuva 1.2: Potentiaali $U(x)$. Massapisteen liike rajoittuu alueeseen, jossa $U(x) \leq E$.

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x) = \text{vakio} \quad (1.17)$$

⇒

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}. \quad (1.18)$$

Alkuehdolla $x = x_0$, kun $t = t_0$, tästä saadaan

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \left(\frac{2}{m}[E - U(x)] \right)^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (1.19)$$

Kun tunnetaan alkuarvo x_0 , kokonaisenergia E ja potentiaalifunktio U , saadaan siis massapisteen rata yhdellä integroinnilla. Käytännössä integrointi on useimmiten tehtävä numeerisesti.

1.3.4 Liikemäärämomntti ja sen säilyminen

Voiman **momentti** on jo koulufysiikan vipuvarresta tuttu käsite, joka määritellään vektorimuodossa

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.20)$$

Vastaavasti määritellään liikemäärälle momentti, **liikemäärämomntti** (jota myös usein perinteisesti **impulssimomentiksi** kutsutaan) tulona

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (1.21)$$

missä \mathbf{r} on massapisteen paikkavektori annetun origon suhteen. Liikemäärämomntti lasketaan siis aina jonkin avaruuden pisteen suhteen. Merkitsemme liikemäärämomnttia vektorimuodossa isolla \mathbf{L} -kirjaimella, mutta sen itseisarvoa pienellä l -kirjaimella, ettei tule sekaannusta jatkossa niin tärkeän Lagrangen funktion L kanssa.

Tarkastellaan jälleen N :n hiukkasen massapistejoukkoa $\{m_i\}$ ja lasketaan kaikkien massapisteiden liikemäärämomntit yhteen, jolloin saadaan systeemin kokonaisliikemäärämomntti: $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$. Muistetaan, että kunkin yksittäisen massapisteen liikemäärän aikaderivaatta on

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.22)$$

Tämän avulla voidaan laskea kokonaisliikemäärämomntin aikaderivaatta

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times (m\dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij}. \quad (1.23)$$

Nyt Newtonin kolmannen lain perusteella

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij}. \end{aligned}$$

Voimille, joille $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \parallel \mathbf{F}_{ij}$, yllä oleva ristitulo on nolla ja siten

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (1.24)$$

Lausekkeen oikeaa puolta kutsutaan hiukkasjoukkoon vaikuttavaksi ulkoiseksi **vääntömomentiksi**. Olemme siis saaneet aikaan **kokonaisliikemäärämomentin säilymislain**: mikäli mikään ulkoinen voima ei väännä systeemiä, sen liikemäärämomentti on vakio.

Edellä oletettiin $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \parallel \mathbf{F}_{ij}$, mikä ei ole voimassa kaikille fysikaalisille voimille, esimerkiksi magneettikentän voimavaikutukselle. Oletetaan kaksi rinnakkaisilla radoilla samaan suuntaan tasaisella nopeudella liikkuvaa pistevarausta. Näiden väliset voimat ovat yhtä suuret ja vastakkaismerkkiset, mutta eivät osoita varauksesta toiseen. Toinen esimerkki on kaksi varausta, joiden radat muodostavat T-kirjaimen: Ensimmäinen varaus kulkee ylöspäin pitkin T-kirjaimen pystysuoraa vartta. Toinen puolestaan pitkin kirjaimen poikittaista osaa. Jälkimmäinen varaus aiheuttaa koko ajan voiman ensimmäiseen, mutta ohittaessaan T:n pystysuoran varren se ei tunne minkäänlaista ensimmäisen varauksen aiheuttamaa voimaa.

Näyttää siis siltä, että Newtonin lait eivät olisikaan voimassa fysiikassa hyvin keskeisille sähkömagneettisille voimille. Toisaalta meille on opetettu, että liikemäärän ja liikemäärämomentin säilymislait ovat fysiikan tukipilareita. Klassisessa elektrodynamiikassa kuitenkin osoittautuu, että sähkö- ja magneettikentillä itsellään on energiaa, liikemäärää ja liikemäärämomenttia. Siellä säilymislait koskevat kenttien ja hiukkasten muodostamaa kokonaisuutta.

Lopuksi jälleen hieman terminologiaa. Nimitys liikemäärämomentti on sikäli looginen, että kyseessä on todellakin liikemäärän momentti. Fyysikot kuitenkin käyttävät usein vanhasta impulssiterminologiasta periytyvää nimitystä **impulssimomentti** varsinkin kvanttifysiikassa. Toinen jonkin verran käytössä oleva looginen nimitys on **pyörimismäärä**, joka on siis säilyvä suure. Englannin- ja saksankieliset termit ovat *angular momentum* (siis kulmaliikemäärä, jota termiä myös jotkut suosivat) ja *der Drehimpuls*.

1.4 Esimerkkejä

Tarkastellaan luvun lopuksi kahta tärkeää klassisen mekaniikan esimerkkiä, niin kutsuttua raketti-yhtälöä ja matemaattista heiluria.

1.4.1 Muuttuvien massojen liike

Tarkastellaan raketia, joka nousee gravitaatiokentässä ja siitä suuntautuu alaspäin vakiosuuruinen massavirta. Siis nyt myös massa on ajan funktio. Liiketyhtälöksi saadaan **raketti-yhtälö**

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \dot{m}\mathbf{c} + m\mathbf{g}. \quad (1.25)$$

missä \mathbf{c} on pakokaasun nopeus raketin suhteen.¹

Merkitään raketin hyötykuorman (esim. satelliitin) massaa m_0 ja kantoraketin lähtömassaa M . Pystysuoralle nousulle $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ja $\mathbf{c} = -c\mathbf{e}_z$. Nopeus saadaan integroimalla yhtälöä (1.25)

$$v = -c \ln \frac{m(t)}{M + m_0} - gt. \quad (1.26)$$

Jos lisäksi oletetaan että massa pienenee lineaarisesti $m(t) = M + m_0 - kMt$, missä kMt kuvaa siis alaspäin suuntautuvien pakokaasujen massaa, saadaan

$$v = -c \ln \left(1 - \frac{kMt}{m_0 + M} \right) - gt. \quad (1.27)$$

Tämän perusteella raketti lähtee nousuun, jos $kcM > (m_0 + M)g$.

1.4.2 Matemaattinen heiluri

Matemaattinen heiluri on erittäin tärkeä malli lukemattomille erilaisille fysikaalisille systeemeille, ei pelkästään klassisessa mekaniikassa vaan kaikkialla muuallakin, missä tahtuu jaksollisia ilmiöitä kuten esimerkiksi kvanttifysiikassa.

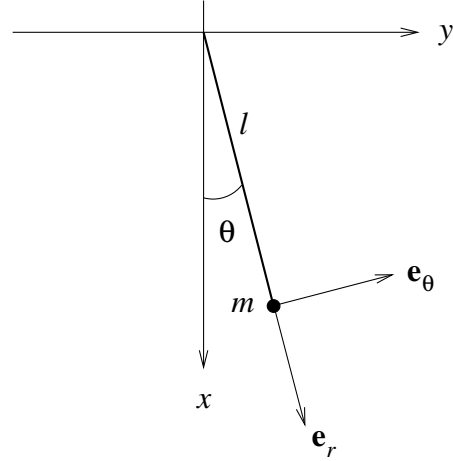
Ripustetaan heiluri (massa m , varren pituus l) vaakatasosta (y -akseli) ja valitaan x -akseli alaspäin gravitaatiovoiman ($m\mathbf{g}$) suuntaan (Kuva 1.3). Oletetaan, että muita ulkoisia voimia ei ole, joten liike on kaksiulotteista heilurin heilahdustasossa. Valitaan kulma θ heilahduskulmaksi heilahdustasossa. Heilurin liikettä rajoittaa heilurin varsi aiheuttaen varren suuntaisen jännitysvoiman J .

Nyt heilurin liiketyhtälö on

$$m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{g}\mathbf{e}_x - J\mathbf{e}_r. \quad (1.28)$$

¹Oikean raketin laukaisun yhteydessä on huomioitava myös ilmanvastus (kitka), raketille mahdollisesti nostetta aiheuttavat erilaiset rakenteet kuten siivekkeet sekä raketin lentoradan ohjaaminen rakettimootoreiden suuntauksen avulla. Asiasta kiinnostunut lukija löytää yhtälön vaikkapa Internetistä (hakusanalla "rocket equation").

Kuva 1.3: Matemaattinen heiluri. Massapiste m on ripustettu jäykkällä massattomalla varrella (pituus l) kiinteästä ripustuspisteestä, joka valitaan koordinaatiston origoksi. Huomaa valittu akselien orientaatio.



Koska $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, täytyy tämän derivoimiseksi laskea yksikkövektoreiden aikaderivaatat, sillä vaikka yksikkövektoreiden pituudet säilyvätkin, niiden suunnat muuttuvat. (Tämä on tärkeä asia osata kuin vettä valaen). Yksikkövektorit napakoordinaatistossa ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\theta\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin\theta\mathbf{e}_x + \cos\theta\mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Vastaavasti \mathbf{e}_x ja \mathbf{e}_y voidaan antaa \mathbf{e}_r :n ja \mathbf{e}_θ :n avulla, esim. $\mathbf{e}_x = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$. Yksikkövektoreiden aikaderivaatoiksi tulee

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r &= \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta &= -\dot{\theta}\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Derivoidaan sitten paikkavektoria kaksi kertaa

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta.\end{aligned}$$

Näin liikeyhtälön komponenteista saadaan yhtälöpari

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = g \cos\theta - \frac{J}{m} \quad (1.29)$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g \sin\theta. \quad (1.30)$$

Oletetaan, että ripustus on jäykkä, eli $r = l = \text{vakio}$. Tällaista ehtoa kutsutaan **sidos ehdoksi** ja se tuo systeemiin **sidosvoiman**. (Tutustumme sidosvoimiin perusteellisemmin luvussa 3) Sidosehdon ansiosta r :n derivaatat katoavat ja yhtälöpari yksinkertaistuu muotoon

$$l\dot{\theta}^2 + g \cos\theta = \frac{J}{m} \quad (1.31)$$

$$l\ddot{\theta} + g \sin\theta = 0, \quad (1.32)$$

joista jälkimmäinen integroituu muotoon

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C. \quad (1.33)$$

Sama lauseke seuraa myös siitä, että heilurin kokonaisenergia $(1/2)m\dot{\mathbf{r}}^2 - mgl \cos \theta$ on vakio. Integroimisvakio C määräytyy ehdosta, että $\dot{\theta} = 0$ maksimikulmalla θ_0 , joten

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (1.34)$$

Sijoitetaan tulos yhtälöön (1.31), jolloin saadaan lasketuksi J

$$J = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0). \quad (1.35)$$

Ottamalla neliöjuuri yhtälöstä (1.34) saadaan

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}} (\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)^{1/2} \quad (1.36)$$

\Rightarrow

$$dt = \frac{d\theta}{2\sqrt{\frac{g}{l}} (\sin^2 \frac{1}{2}\theta_0 - \sin^2 \frac{1}{2}\theta)^{1/2}}. \quad (1.37)$$

Integroidaan tätä nollakulmasta maksimikulmaan, jolloin aikaa kuluu heilahdusajan neljännes $T/4$. Merkitään maksimikulman puolikkaan siniä $k = \sin \frac{1}{2}\theta_0$ ja tehdään muuttujanvaihdos $\theta \rightarrow w$ lausekkeella $\sin \frac{1}{2}\theta = k \sin w$, jolloin uusi kulmamuuttuja w integroidaan $0 \rightarrow \pi/2$. Tulos on

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}}. \quad (1.38)$$

Kyseessä on **elliptinen integraali**, jollaisiin fysiikassa törmätään usein. Vaikka elliptisiä integraaleja ei voikaan ilmaista alkeisfunktioiden avulla, matemaatikot ovat kehittäneet niille perusteellisen teorian ja niiden ominaisuudet ja lukuarvot löytyvät hyvistä taulukokirjoista. Myös useat tietokonematematiikan ohjelmistot selviävät niistä mallikkaasti.

Hyvin pienillä kulmilla ($k \approx 0$) integrointi on triviaali ja saadaan tuttu tulos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.39)$$

eli heilurin jakso riippuu vain heilurin varren pituudesta. Suuremmilla kulmilla voidaan integrandi kehittää sarjaksi

$$(1 - k^2 \sin^2 w)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 w + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}k^4 \sin^4 w + \dots,$$

joten heilahdusjaksosta tulee maksimikulman (amplitudin) funktio

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9k^4}{64} + \dots\right), \quad (1.40)$$

missä siis $k = \sin(\theta_0/2)$.

Huom. Tämän laskun voi toki tehdä suoraan karteesisissa koordinaateissa, mutta silloin muuttujia on koko ajan kaksi (x, y) . Luvussa 3 tutustumme Lagrangen formalismiin, missä johdonmukaisesti pyritään sidosehtojen avulla etsimään mahdollisimman ekonomista muuttujajoukkoa. Heilurissa tarvitaan vain yhtä muuttujaa (vaihekulma), samoin seuraavassa luvussa käsiteltävässä kahden kappaleen keskeisliikkeessä, missä radan vaihekulman ja etäisyyden välillä on voimakentän ja liikemäärämomentin määräämä relaatio.

1.5 Harjoituksia

- Heitetään m -massaista kappaletta gravitaatiokentässä $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ alkunopeudella \mathbf{v}_0 ($v_{0z} > 0$). Maan pinnan taso valitaan xy -tasoksi. Olettaen ilmanvastus merkityksettömäksi laske lentoaika ja lakikorkeus, kun alkukorkeus on h ja alkunopeuden ja xy -tason välinen kulma on α . Johda yhtälö sille kulmalle α , jolla kappale lentää pisimmälle lähtöpaikasta, kun muut parametrit ovat vakioita. Mikä on kulman arvo, kun $h = 0$?
 - Miesten kuulantyönnön (kuulan massa 7,26 kg) maailmanennätys on 23,12 m (Randy Barnes, 1990). Olettaen, että kuula on ennätystyönnössä lähtenyt 40 asteen kulmaan 2,3 m korkeudella maasta, laske kuulan lähtönopeuden itseisarvo jättämällä ilmanvastus huomiotta.
 - Kuulantyöntäjä S. Hotput työnsi keväällä harjoitusleirillä (doping-testaajien ulottumattomissa) ennätystuloksensa 21,80 m ja tuli myöhemmin valitukseksi maansa olympiajoukkueeseen. Kesällä arvokisojen karsinnoissa Hotputin työntö jäi lukemiin 19,80 m, ja mies karsiutui finaalista. Arvioi käytetyn (kielletyn) lääkeaineen vaikutusta Hotputin lihaksiston tehoon olettamalla, että kuulan alkukiihdytyksen aiheuttaa liikkeen suuntainen (40° vaakatasosta ylöspäin) vakioiteholla 1,8 m:n matkan vaikuttava voima ja että muut suoritusasteen vaihteluun vaikuttavat tekijät (esim. kiinnijäämisen pelosta aiheutuva stressi) voidaan jättää huomioimatta.
- Ratkaise rata $x(t)$ seuraavista differentiaaliyhtälöistä ja mieti, millaisia fysikaalisia tilanteita ne kuvaavat. Kaikissa $v = \dot{x}$ ja $x(0) = v(0) = 0$.
 - $\dot{v} = a \sin \omega t$, missä a ja ω ovat vakioita
 - $\dot{v} = g - kv^2$, missä g ja k ovat vakioita
 - $\dot{v} = g - kv$, missä g ja k ovat vakioita

3. Heitetään m -massainen kappale xy -tasosta lähtönopeudella $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_z$ ($v_0 > 0$) voimakenttään $\mathbf{F} = -F_0 e^{-z/h} \mathbf{e}_z$, missä $F_0, h > 0$ ovat vakioita. Millä ehdolla kappale palaa xy -tasoon? Miten tilanne muuttuu, jos kappaleeseen vaikuttaa lisäksi nopeuteen verrannollinen väliainevastus?

4. Olkoon massapisteeseen vaikuttava voima

$$\mathbf{F} = (x^2 + y^2 + z^2)^n (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

missä n on kokonaisluku. Laske $\nabla \times \mathbf{F}$. Onko voima konservatiivinen? Jos on, niin määrää sen potentiaali. Aiheuttaako joku n :n arvo tarvetta erityistarkasteluun?

5. Osoita, että vain etäisyydestä riippuva keskeisvoima

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -f(r) \mathbf{e}_r$$

on konservatiivinen. (Laske siis $\nabla \times \mathbf{F}$.) Anna potentiaalienergian $U(r)$ lauseke, ja laske se tapauksessa $f(r) = 1/r^2$.

6. Tarkastellaan tilannetta, jossa pieni litteä kappale (massa m) liikkuu kitkattomasti pitkin kaltevaa tasoa (kaltevuuskulma α). Oletetaan, että kalteva taso on kiilan muotoinen, sen massa on M ja se sijaitsee vaakasuoralla tasolla, eikä myöskään tason ja kiilan välillä ole kitkaa. (Kun m -massainen kappale liikkuu pitkin tasoa, se siis työntää kiilaa taaksepäin.) Laske käyttäen Newtonin (\mathbf{e}_i siis luvussa 3 käsiteltävää Lagrangen) mekaniikkaa, kuinka kauan kiilan huipulta (korkeus h) liukumaan lähtevältä kappaleelta kuluu saavuttaa kiilan kärki eli alempi taso (korkeus 0).

Vihje: Voit ratkaista tämän tarkastelemalla joko liikemäärän ja energian säilymistä tai lähtien pelkästä liikemäärän säilymisestä tekemällä koordinaatiston muunnos inertiaalikoordinaatiston ja kiilan kiihtyvän koordinaatiston välillä.

7. Kappale (massa m) liikkuu väliaineessa, jonka aiheuttama vastusvoima on $F = -mk(v^3 + a^2v)$, missä k ja a ovat positiivisia vakioita ja v on nopeus. Osoita, että kappale ei millään alkunopeuden arvolla pääse kuin korkeintaan matkan $\pi/(2ka)$ etäisyydelle lähtöpisteestään.

Vihje: Matemaattinen apuneuvo $\ddot{x}/\dot{x} = d\dot{x}/dx$ on tässä hyödyllinen.

8. Olkoon avaruusaluksen massa M ja sen poikkileikkauksen pinta-ala liikesuunnalle kohtisuorassa tasossa A . Alus etenee alkunopeudella $v_0 \mathbf{e}_x$ moottorit sammutettuina tähtienvälisen aineen tomupilveen (tomuhiukkaset levossa), jonka massatiheys on ρ . Kaikki alukseen törmäävät hiukkaset takertuvat sen pintaan, mutta oletetaan niiden vaikutus A :han häviävän pieneksi. Laske aluksen paikka x ja nopeus $v = \dot{x}$ hetkellä $t > 0$.
9. Rakettiyhtälöä (1.25) sovelletaan yleensä ajan mukana pienenevään massaan. Tarkastellaan tässä käännteistä esimerkkiä: Maassa kiepillä olevan ketjun massa pituusyksikköä kohti on μ . Ketjun päähän kiinnitetty massa M heitetään ylöspäin

alkunopeudella v_0 . Osoita, että ketjun pää saavuttaa korkeuden

$$h = \frac{M}{\mu} \left[\left(1 + \frac{3\mu v_0^2}{2Mg} \right)^{1/3} - 1 \right].$$

10. Tarkastellaan gravitaatiokentässä $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ vesisumussa putoavaa pallonmuotoista vesipisaraa, johon putoamisen aikana kertyy lisää massaa. Ongelma on itse asiassa aika vaikea, mutta siihen pääsee käsiksi olettamalla, että pisaran säde r on aluksi hyvin pieni ja kuvaamalla massan kertymistä lausekkeella $\dot{m} = C\pi r^2 v$. Johda liikeyhtälö muotoon

$$\ddot{z} + \frac{3\dot{z}^2}{z} = g. \quad (1.41)$$

Tämä on ikävästi epälineaarinen differentiaaliyhtälö, mutta sille löytyy erikoisratkaisu olettamalla, että pisaran kiihtyvyys $\ddot{z} = \gamma = \text{vakio}$. Osoita, että tällä oletuksella vesisumu vaimentaa kiihtyvyyttä tekijällä 7 eli $\gamma = g/7$.

Luku 2

Liike keskeisvoimakentässä

Keskeisvoimat ja keskeisliike ovat keskeinen osa klassista mekaniikkaa. Newton johti mekaniikkansa suurelta osin selittämään taivaankappaleiden liikettä kuvailevat Keplerin lait. Planeettakunta on kuitenkin erittäin monimutkainen usean kappaleen mekaaninen järjestelmä ja taivaankappaleiden liikkeiden yksityiskohtainen laskeminen vaikutti huomattavasti mekaniikan kehittymiseen tässä kirjassa esitettävään muotoon. Tänä päivänä keinotekoisien satelliittien ratojen tarkka laskeminen on tärkeä osa avaruustoimintaa. Toisaalta arviot maahan mahdollisesti törmäävien Maahan törmäävistä pienten taivaankappaleiden radoista ja törmäystodennäköisyyksistä edellyttävät keskeisliikkeen ja muutenkin modernin klassisen mekaniikan hyvää osaamista. Myös klassinen sironta keskeisvoimakentässä käsitellään klassisen mekaniikan menetelmin.

2.1 Keskeisvoimat

Keskeisvoimat ovat yleisesti muotoa $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{e}_r$. Kaikkein tärkein erikoistapaus on $f \propto r^{-2}$, joka kuvaa gravitaation lisäksi myös Coulombin vuorovaikutusta, joten klassinen varattujen hiukkasten sironta (ns. Rutherfordin sironta) on mahdollista käsitellä klassisesta mekaniikasta periytyvin menetelmin. Tässä esitettyä perusteellisempi siron-takäsittely löytyy mm. Goldsteinin oppikirjasta.

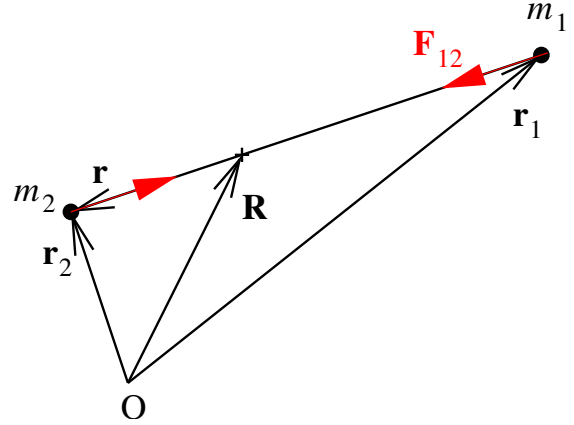
2.1.1 Kahden kappaleen ongelma

Ensimmäisenä approksimaationa keskeisliikkeestä voi pitää planeetan rataa Auringon ympäri. Tämä on kuitenkin kahden kappaleen ongelma: massa m_1 , pisteessä \mathbf{r}_1 ja massa m_2 pisteessä \mathbf{r}_2 (Kuva 2.1).

Merkitään massojen välistä etäisyysvektoria $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Systemin massakeskipiste on nyt

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.1)$$

Kuva 2.1: Kahden kappaleen ongelma. Kappaleiden paikat voidaan määrätä joko massapisteiden paikkavektoreiden (\mathbf{r}_1 ja \mathbf{r}_2) tai massakeskipisteen paikkavektorin (\mathbf{R}) ja massapisteiden etäisyysvektorin (\mathbf{r}) avulla. Voimat \mathbf{F}_{12} ja \mathbf{F}_{21} ovat yhtä suuret mutta vastakkaisuuntaiset massoja yhdistävän janan suunnassa



Nyt m_2 vaikuttaa m_1 :een voimalla \mathbf{F}_{12} ja m_1 puolestaan m_2 :een voimalla $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Kappaleiden liikeyhtälöt ovat

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad (2.2)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21}. \quad (2.3)$$

Näistä ja massakeskipisteen määritelmästä seuraa, että

$$\dot{\mathbf{R}} = \text{vakio} \quad (2.4)$$

eli massakeskipisteeseen voidaan kiinnittää inertiaalikoordinaatisto. Toisaalta $m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 - m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = 2\mathbf{F}_{21}$. Kirjoittamalla

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2 \mathbf{r}}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1 \mathbf{r}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

saadaan tulos

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}. \quad (2.5)$$

Suuretta $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ kutsutaan **reduoiduksi massaksi** ja kahden kappaleen liikeyhtälö voidaan kirjoittaa ekvivalenttina yhden kappaleen liikeyhtälönä redusoidulle massalle

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}. \quad (2.6)$$

Kyseinen voima on **keskeisvoima**

$$\mathbf{F}_{21} = f(r) \mathbf{e}_r. \quad (2.7)$$

missä \mathbf{e}_r on \mathbf{r} :n suuntainen yksikkövektori. Keskeisvoimakenttä on sellainen kenttä, jossa voiman vaikutussuora kulkee kiinteän pisteen kautta. Tämä piste kannattaa yleensä valita origoksi. (Huom: Kuvassa 2.1 origo ei sijaitse massakeskipisteessä.)

2.1.2 Liike keskeisvoimakentässä

Olkoon \mathbf{F} nyt lausekkeen (2.7) mukainen keskeisvoimakenttä. Sille on helppo johtaa johtaa nk. pintalause. Lasketaan ristitulo $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$

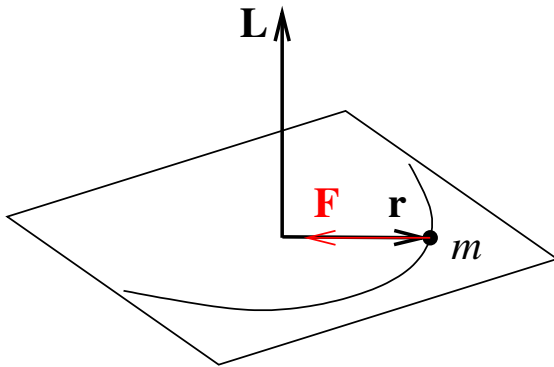
$$\mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = f(r)\mathbf{r} \times \mathbf{e}_r = 0 \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) = 0 \quad (2.9)$$

eli

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = \text{vakio}. \quad (2.10)$$

Koska liikemäärämomentsi säilyy, tapahtuu liike (ja kiihtyvyyt) tasossa, joka on kohtisuorassa liikemäärämomentsivektoria vastaan. Siis liike keskeisvoimakentässä on aina tasoliikettä (Kuva 2.2).



Kuva 2.2: Liike keskeisvoimakentässä. Keskeisliikkeessä liikemäärämomentsi \mathbf{L} on vakio ja liike tapahtuu sille kohtisuorassa tasossa.

Liikemäärämomentsi on itse asiassa verrannollinen nk. **pintanopeuteen**. Olkoon dA pinta-ala, jonka vektori \mathbf{r} pyyhkäisee ajassa dt , ja θ \mathbf{r} :n kiertokulma (piirrä kuva). Tällöin

$$dA = \frac{1}{2}r \sin \theta dr = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| \quad (2.11)$$

\Rightarrow

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2m}|\mathbf{L}|. \quad (2.12)$$

Siis vektori \mathbf{r} pyyhkäisee saman pinta-alan samassa ajassa tapahtuipa se missä keskeisliikkeen vaiheessa tahansa. Tämä on itse asiassa toinen Keplerin planeettaliikkeestä empiirisesti löytämä lainalaisuus, johon palaamme pian.

Huom. Yllä olevissa tuloksissa etäisyysriippuvuuden ei välttämättä tarvitse olla skalaari vaan ne pätevät myös muotoa $f(\mathbf{r})\mathbf{e}_r$ oleville voimille. Jos voima kuitenkin on muotoa $f(r)\mathbf{e}_r$, niin se on selvästikin konservatiivinen. Me olemme tässä yhteydessä kiinnostuneita nimenomaan konservatiivisista voimista.

Tarkasteltaessa konservatiivisia keskeisvoimia pallokoordinaatisto (r, θ, φ) on järkevä koordinaatiston valinta. Koska liike tiedetään tasoliikkeeksi, kannattaa valita koordinaatisto siten, että \mathbf{L} on suunnassa $\theta = 0$, jolloin $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ on sitä vastaan kohtisuorassa

tasossa (xy -taso). Kyseessä on napakoordinaatisto, jonka yksikkövektorit kirjoitettuna karteesisen yksikkövektorien avulla ovat

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi &= -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Yksikkövektorien aikaderivaatat saadaan aivan samoin kuin edellisen luvun matemaattisen heilurin tapauksessa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \mathbf{e}_r &= \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\varphi &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Derivoidaan sitten paikkavektoria kaksi kertaa

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi,\end{aligned}$$

jonka jälkeen saadaan keskeisliikkeen liikeyhtälö (2.6) komponenteiksi

$$m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = f(r) \quad (2.13)$$

$$m(2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) = 0. \quad (2.14)$$

Jälkimmäisestä yhtälöstä seuraa suoraan $mr^2 \dot{\varphi} = \text{vakio}$. Tämä vakio on juuri liikemäärämomentin itseisarvo l .

Kirjoitetaan sitten $mr^2 \dot{\varphi} = l$ ja sijoitetaan yhtälöön (2.13). Tällöin

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (2.15)$$

Näin on saatu erittäin hyödyllinen yksiulotteinen liikeyhtälö, jota tutkitaan lähemmin tuonnempana.

2.1.3 Liikeradan integrointi energiayhtälön avulla

Konservatiivisessa keskeisvoimakentässä kokonaisenergia säilyy ja on muotoa

$$\begin{aligned}E = T + U &= \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) = \text{vakio}.\end{aligned} \quad (2.16)$$

Termiä $l^2/2mr^2$ kutsutaan usein keskipakopotentiaaliksi, sillä sen negatiivinen derivaatta r :n suhteen antaa kiihtyvyysefektin, jota puolestaan kutsutaan keskipakovoimaksi, vaikka fyysikaalinen voima itsessään osoittaakin kohti massakeskipistettä.

Energiayhtälö voidaan nyt integroida sijoittamalla kaavaan (1.19) kokonaispotentiaaliksi **efektiivinen potentiaali** $U(r) + l^2/2mr^2$ eli:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2}}}. \quad (2.17)$$

Tämä antaa siis ajan paikan funktiona. Eli rata on ainakin periaatteessa ratkaistu. Käytännössä integrointi on usein tehtävä numeerisesti.

Radan muodon määrittämiseksi etsitään koordinaattien r ja φ välinen riippuvuus. Derivoinnin ketjusääntö ja liikemäärämomentin säilymislaki antavat

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{mr^2}.$$

Sijoittamalla tämä energiayhtälöön saadaan

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{l^2} [E - U(r)] - \frac{1}{r^2}}}. \quad (2.18)$$

2.1.4 Ratojen luokittelu

Edellä olleet integraalit ovat käytännössä hyvin hankalia laskettaviksi suoraan ja erilaisille keskeisvoimille kannattaakin etsiä omia erityismenetelmiä ratojen laskemiseksi. Tarkastellaan ensin millaisia ratoja ylipäänsä on olemassa.

Liikkeen nopeuden $\dot{\mathbf{r}}$ itseisarvo eli vauhti v saadaan kokonaisenergian säilymislaista

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U(r) \quad \Rightarrow \quad (2.19)$$

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)]}. \quad (2.20)$$

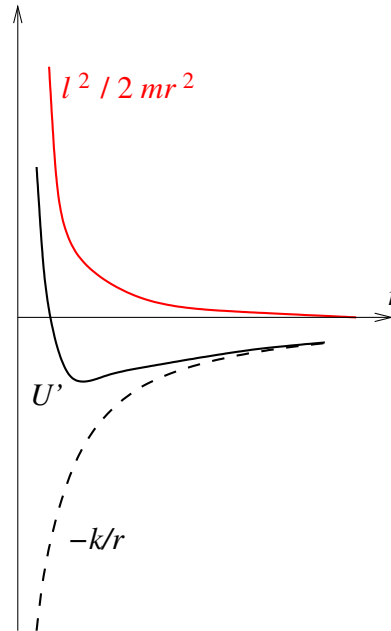
Nyt täytyy muistaa, että v :ssä on mukana sekä \dot{r} että $\dot{\varphi}$ (esim. kaava 2.16)! Kirjoittamalla radiaalinen liikeyhtälö, jossa $\dot{\varphi}$ on annettu liikemäärämomentin l avulla kuten edellä

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad (2.21)$$

meillä on sama yhtälö kuin tapauksessa, jossa tarkasteltaisiin yksiulotteista ongelmaa. Nyt vain efektiivisenä voimana on

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3}. \quad (2.22)$$

Kuva 2.3: Efektiivinen potentiaali $U'(r)$ on todellisen keskeispotentiaalin $-k/r$ ja keskipakopotentiaalin $l^2/2mr^2$ summa. Sen derivaatta r :n suhteen antaa efektiivisen 1-ulotteisen voiman, jonka vaikutuksen alaisena kappaleen etäisyys voimakeskuksesta kehittyy.



Voimassa f' on siis mukana yksiulotteinen keskeisvoima ja kappaleen liikkeeseen liittyvä keskipakovoima. Tätä voimaa vastaava efektiivinen potentiaalienergia on

$$U' = U + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (2.23)$$

Tarkastellaan tästä esimerkkinä muotoa

$$f = -\frac{k}{r^2} \quad (2.24)$$

olevaa voimaa (Kuva 2.3). Tämä on tietenkin myöhemmin erityistarkasteluun tuleva Keplerin liikkeen voimakenttä. Jos $k > 0$, osoittaa voima kohti keskipistettä. Tämän potentiaali on

$$U = -\frac{k}{r} \quad (2.25)$$

ja tätä vastaava efektiivinen potentiaali

$$U' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (2.26)$$

Koska $E = T + U = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U'$ ja $\dot{r}^2 \geq 0$, liike on mahdollista vain kun $U' \leq E$. Koska U' kasvaa rajatta, kun $r \rightarrow 0$, kappale ei voi koskaan saavuttaa origoa (paitsi erikoistapauksessa $l = 0$; millainen rata tuolloin on kyseessä?). Toisaalta, jos $E > 0$, kappale ei koskaan törmää potentiaalivalliin r :n kasvaessa, joten kappaleen rata on avoin. Tulemme myöhemmin osoittamaan, että kyseessä on hyperbelirata. Jos $E = 0$, tilanne on kvalitatiivisesti sama, mutta liikerata on paraabeli.

Jos taas kokonaisenergia on negatiivinen ($E < 0$), niin liike on mahdollista siinä alueessa, missä $U' < E$. Tällainen liike tapahtuu kahden r -arvon määrittämässä potentiaali-kuopassa $r_1 < r < r_2$, jossa liikerata on ellipsi, jonka toinen polttopiste on voimakeskiste (tämä tulee selemmäksi Keplerin liikettä tarkasteltaessa). Etäisyydestä r_1 käytetään nimitystä **periapsis** (tai perisentri) ja etäisyydestä r_2 **apoapsis** (aposentri). Aurinkoa kiertävien kappaleiden tapauksessa puhutaan peri- ja aphelistä, Maata kiertävien peri- ja apogeosta.

Jos negatiivinen kokonaisenergia on tasan yhtäsuuri kuin efektiivisen potentiaalin U' minimi, on r vakio ja kyseessä on ympyräliike. Ympyräliikettä vastaavalle voimalle $f' = 0$ eli

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\varphi}^2. \quad (2.27)$$

Koska keskipakopotentiaali on etäisyyden funktiona muotoa $1/r^2$, yllä olevat tulokset ovat kvalitatiivisesti samanlaisia kaikille attraktiivisille potentiaaleille, jotka pienenevät hitaammin kuin $1/r^2$, kun $r \rightarrow \infty$ ja menevät negatiivisesti äärettömiksi hitaammin kuin $1/r^2$, kun $r \rightarrow 0$.

Tarkastellaan sitten esimerkkinä attraktiivista potentiaalia, joka on muotoa (piirrä kuva)

$$U(r) = -\frac{a}{r^3}. \quad (2.28)$$

Nyt $U' \rightarrow -\infty$, kun $r \rightarrow 0$, U' :lla on äärellinen maksimi jollain etäisyydellä ja se menee kohti nollaa suurilla r . Riittävän suurella kokonaisenergialla kappale voi olla millä etäisyydellä tahansa. Jos $E < U'_{max}$, niin kappale voi olla potentiaaliloukussa pienillä r :n arvoilla, jolloin se kulkee voimakeskisteen kautta tai sitten suurilla r :n arvoilla radoilla, jotka eivät pääse voimakeskisteeseen, mutta ovat avoimia.

Sama tulos on voimassa myös muotoa $1/r^4$ oleville ja sitä nopeammin pieneneville potentiaaleille. Siis keskeisliike voi vallan mainiosti kulkea voimakeskisteen läpi.

Jatkossa erityisen tärkeä potentiaali tulee olemaan muotoa

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2. \quad (2.29)$$

Kun $k > 0$, kappaleen liike on rajoitettu kaikilla positiivisilla kokonaisenergian arvoilla. Kyseessä on tuttu ja jatkossa vieläkin tutummaksi tuleva harmoninen oskillaatio.

2.1.5 Liikeradan differentiaaliyhtälö

Edellä liikerata keskeisvoimakentässä integroitiin käyttäen hyväksi energian säilymlätkä ja päädyttiin tulokseen (2.18). Usein on kuitenkin tarpeen tarkastella radan differentiaaliyhtälöä. Kirjoitetaan liikemäärämomentti muodossa $l = mr^2\dot{\varphi}$, jolloin

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d}{d\varphi}. \quad (2.30)$$

Sijoittamalla tämä radiaaliseen liikeyhtälöön (2.15) saadaan toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (2.31)$$

Yhtälö yksinkertaistuu tekemällä tällaisissa laskuissa usein näppärä sijoitus $u = 1/r$ ja ilmaisemalla voima potentiaalin U avulla

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{d}{du} U \left(\frac{1}{u} \right). \quad (2.32)$$

Sama sijoitus on hyödyllinen myös tarkasteltaessa rataa ratkaistussa muodossa (2.18), jolloin

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mU}{l^2} - u^2}}. \quad (2.33)$$

Tämä integraali voidaan suorittaa analyttisesti vain tietyille potentiaalifunktiolle. Nyt on niin onnellisesti, että mekaniikassa tärkeimmät potentiaalit ovat muotoa $U = ar^{n+1}$, jolloin siis voimat ovat muotoa r^n , missä n on joku pieni kokonaisluku, muttei kuitenkaan -1 . Tällöin integraali on muotoa

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\alpha + \beta u^{-n-1} + \gamma u^2}}. \quad (2.34)$$

Tapauksissa $n = 1, -2, -3$ integraali voidaan ilmaista trigonometristen funktioiden avulla ja tapauksissa $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ puolestaan elliptisten funktioiden avulla. Näin siis hankala integraali muuttuu integraalitalukoiden selaamiseksi, tai nykyaikaisemmin matemaattisten valmisohjelmien pyörittämiseksi tietokoneessa. Erikoisfunctioista kiinnostuneiden kannattaa kuitenkin silmäillä myös hyviä taulukkokirjoja, sillä niistä löytyy myös monia muita mielenkiintoisia erikoistapauksia ja kytköksiä erilaisten matemaattisessa fysiikassa eteen tulevien funktioiden välillä.

Meille jatkossa tärkeimmät eksponentit ovat $n = 1$ ja $n = -2$, joista ensimmäinen antaa nk. Hooken lain ja on tärkeä lineaaristen harmonisten oskillaatioiden tapauksessa ja jälkimmäinen kuvaa Keplerin liikettä.

Esimerkki: Ympyrä ratojen stabiilisuus

Millaisille keskeisvoimakentille **ympyräradat** ovat stabiileja? Tämän selvittämiseksi tarkastellaan pientä häiriötä x ympyräradan säteeseen a eli $r = x + a$. Ympyräradalla r on vakio, joten radiaalinen liikeyhtälö yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{l^2}{ma^3} = f(a). \quad (2.35)$$

Häirityn radan liikeyhtälö on puolestaan

$$m\ddot{x} - \frac{l^2}{m}(x+a)^{-3} = f(x+a). \quad (2.36)$$

Kehitetään tämän termit Taylorin sarjoiksi a :n ympäristössä

$$m\ddot{x} - \frac{l^2}{ma^3} \left(1 - \frac{3x}{a} + \dots\right) = f(a) + xf'(a) + \dots, \quad (2.37)$$

missä pilkku kuvaa derivaattaa. Koska $x \ll a$ ja (2.35) oletetaan hyväksi liikeradan approksimaatioksi, voidaan liikeyhtälö kirjoittaa muodossa

$$m\ddot{x} - \left[3\frac{f(a)}{a} + f'(a)\right]x = 0. \quad (2.38)$$

Jos nyt $f(a) + (a/3)f'(a) > 0$, x kasvaa eksponentiaalisesti eli rata ei ole stabiili. Jos puolestaan $f(a) + (a/3)f'(a) < 0$, x oskilloi ja rata pysyy alkuperäisen ympyrän lähellä eli on stabiili. Jos siis keskeisvoima on muotoa $f(r) = -Cr^n$, missä $C > 0$, ehto ympyräradan stabiilisuudelle on

$$-Ca^n - \frac{a}{3}Cna^{n-1} < 0, \quad (2.39)$$

mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $n > -3$. Jälleen Hooken laki ja Keplerin liike kuuluvat tähän joukkoon. Molemmille häiritty rata palaa ympyräksi myös toisen kertaluvun häiriöissä. Itse asiassa nk. **Bertrandin teoreema** sanoo, että ainoastaan Hooken ja Keplerin potentiaaleissa on stabiileja suljettuja ratoja.

2.2 Keplerin liike

Perustuen *Tyko Brahen* (1546–1601) havaintoihin planeettojen liikkeestä *Johannes Kepler* (1571–1630) (Kuva 2.4) päätyi kolmeen empiiriseen lakiin, jotka hän julkaisi vuosina 1609 (kaksi ensimmäistä) ja 1619 (kolmas). Nämä **Keplerin lait** ovat

1. Planeettojen radat ovat ellipsejä, joiden toisessa polttopisteessä on Aurinko.
2. Auringosta planeettaan piirretty paikkavektori kiertää siten, että sen aikayksikössä pyyhkäisemä pinta-ala (pintanopeus) on vakio.
3. Kiertoaikojen neliöt suhtautuvat kuten isoakselien kuutiot.

Voidaan sanoa, että Newton kehitti mekaniikkansa paljolti selittämään juuri näitä lakeja. Koska planeettakunta on paljon monimutkaisempi systeemi kuin kahden kappaleen ongelma, pysyi planeettaliikkeen yksityiskohtien selittäminen vuosisatoja Newtonin mekaniikan oikeellisuuden tärkeimpänä testinä. Tähän liittyivät mm. Uranuksen ja Neptunuksen löytäminen. Planeettaliikkeellä oli tärkeä rooli myös yleisen suhteellisuusteorian todentamisessa viime vuosisadan alussa.



Kuva 2.4: Johannes Kepler (1571–1630).

2.2.1 Newtonin painovoimalaki

Olemme edellä johtaneet keskeisvoimakentässä liikkuvan kappaleen radan vaihekulman ja etäisyyden välisen relaation. Tasoliikkeessä radan voi ajatella muodostuvan kahdesta oskilloivasta liikkeestä, toinen oskillaatio tapahtuu r :n suhteen ja toinen φ :n suhteen. Gravitaatiokentässä toteutuvan radan ominaisuudet määräävät itse asiassa painovoimalain muodon. Siis vain tietty painovoimalaki voi antaa Keplerin lait. Ja jos Keplerin lait eivät ole täsmälleen oikeat, täytyy myös käytännössä r :n potenssin poiketa hieman kokonaislukuarvostaan.

Newton oli ilmeisesti löytänyt oikean painovoimalain jo nuorena 1660-luvulla, mutta ei ollut julkaissut sitä missään. Tarina kertoo, että *Edmond Halley*, *Robert Hooke* ja *Sir Christopher Wren* matkustivat vuonna 1684 Cambridgeen kysymään Newtonilta, millainen voima antaa Keplerin lait. Newton muisti tuolloin vanhan löytönsä, jonka mukaan potentiaali olisi muotoa $U = -k/r$, muttei kyennyt johtamaan sitä välittömästi. Ilmeisesti tämän seurauksena hän lopulta kirjoitti suurteoksensa *Principian*, joka ilmestyi 1687.

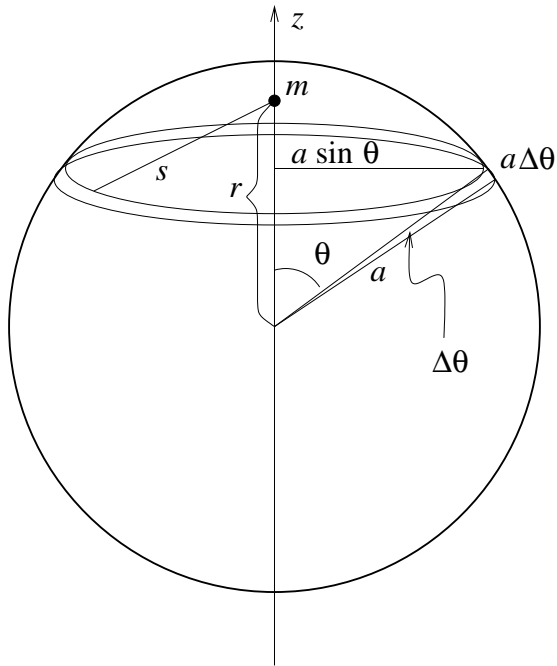
Newtonin painovoimalain mukaan

- kahden kappaleen välinen vetovoima on verrannollinen niiden massojen tuloon ja kääntäen verrannollinen niiden välisen etäisyyden neliöön.

Pallosymmetristen massojen M ja m välillä on siten voima

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (2.40)$$

missä verrannollisuuseroin, **gravitaatiovakio**, G on $6,6726 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ (SI-yksiköissä). Tällainen voima saadaan tietenkin muotoa $U = -k/r$ olevasta potentiaalista, missä $k = GMm$.



Kuva 2.5: Pallonkuori ja sen potentiaalin laskemiseen liittyvät suureet. Huom. Kuvassa piste m on merkitty pallonkuoren sisäpuolelle, mutta kuten tekstistä käy ilmi, se voi olla myös sen ulkopuolella.

Tätä jokaisen omassa ruumiissaan tuntemaa luonnonvakiota ei tunneta tämän useamman numeron tarkkuudella. Se on itse asiassa kaikkein epätarkimmin tunnettu luonnonvakio. (Mietipä miksi!)

Esimerkki: Pallonkuoren potentiaali

Vaikka pallonkuoren potentiaalienergian laskeminen on lukijalle oletettavasti tuttu jo ennestään, luonnostellaan tässä se kertauksen vuoksi.

Tarkastellaan Newtonin gravitaatiolain mukaista potentiaalia massapisteesen m , joka sijaitsee z -akselilla etäisyydellä r origossa sijaitsevasta pallon keskipisteestä ja olkoon pallon säde a (Kuva 2.5). Kootaan pallonkuori ohuista renkaista z -akselin ympärillä, siis kukin rengas sijaitsee vyöhykkeessä $\theta \rightarrow \theta + \Delta\theta$, missä kulma θ lasketaan z -akselin suunnasta. Renkaan säde on siis $a \sin \theta$ ja leveys $a\Delta\theta$. Jokainen renkaan piste sijaitsee etäisyydellä s massapisteesestä m .

Kukin rengas tuottaa potentiaalienergiaan osuuden

$$\Delta U = - \frac{Gm\Delta M}{s}. \quad (2.41)$$

Olkoot M_s ja A_s kuoren massa ja pinta-ala. Tällöin renkaan massa on

$$\Delta M = \frac{\Delta A}{A_s} M_s = \frac{(2\pi a \sin \theta)(a\Delta\theta)}{4\pi a^2} M_s = \frac{1}{2} \sin \theta \Delta\theta M_s \quad (2.42)$$

ja potentiaalienergia

$$\Delta U = -\frac{1}{2}GmM_s \frac{\sin \theta \Delta \theta}{s}. \quad (2.43)$$

Integroidaan kaikkien renkaiden yli eli $\theta : 0 \rightarrow \pi$

$$U = -\frac{1}{2}GmM_s \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{s(\theta)}. \quad (2.44)$$

Tehdään integroimismuuttujan vaihto käyttäen kosinilauseetta $s^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta$, josta saadaan differentioimalla

$$2s \frac{ds}{d\theta} = 2ar \sin \theta \Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{s ds}{ar},$$

joten potentiaaliksi tulee

$$U = -\frac{GmM_s}{2ar} \int_{s(0)}^{s(\pi)} ds. \quad (2.45)$$

Emme ole määritelleet, kummalla puolella pallonkuorta m sijaitsee. Jos se on ulkopuolella ($r > a$), $s(0) = r - a$ ja $s(\pi) = r + a$, jolloin

$$U = -\frac{GmM_s}{2ar} 2a = -\frac{GmM_s}{r}, \quad (2.46)$$

mikä on sama tulos kuin jos pallonkuoren massa olisi kokonaan origossa.

Jos massapiste on puolestaan pallonkuoren sisäpuolella ($r < a$), $s(0) = a - r$ ja $s(\pi) = a + r$ ja

$$U = -\frac{GmM_s}{2ar} 2r = -\frac{GmM_s}{a} = \text{vakio}. \quad (2.47)$$

Massapisteeseen vaikuttava voima saadaan näistä derivoimalla

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r = \begin{cases} -\frac{GmM_s}{r^2} \mathbf{e}_r & r \geq a \\ 0 & r < a \end{cases}. \quad (2.48)$$

Siis jos tilannetta tarkastellaan pallonkuoren ulkopuolelta, voiman laskemiseksi voidaan olettaa kaiken massan sijaitsevan pallon origossa. Toisaalta oltiinpa missä tahansa pallonkuoren sisällä kuori ei aiheuta voimavaikutusta. Aivan sama lasku tehdään elektrodynamiikassa laskettaessa varatun pallonkuoren potentiaalia varattuun hiukkaseen. Ja johtopäätökset ovat samat.

Esimerkki: Homogeenisen pallon gravitaatioenergia

Sovelletaan edellä olevaa tulosta sitten homogeenisen pallon potentiaalienergian määrittämiseen. Olkoon pallon kokonaismassa M ja säde a . Homogeenisuuden perusteella pallon tiheys on tietenkin

$$\rho = \frac{M}{(4\pi/3)a^3}.$$

Kootaan pallo ohuista pallonkuorista $r \rightarrow r + \Delta r$. Kuoren massa on $\Delta m = \rho \Delta V = \rho 4\pi r^2 \Delta r$. Kuoren sisäpuolella oleva massa $M_{sis}(r) = (4/3)\pi \rho r^3$ aiheuttaa Newtonin gravitaatiolain mukaan kuoreen potentiaalin

$$\Delta U = - \frac{GM_{sis}(r)\Delta m}{r} = - \frac{16\pi^2 G \rho^2 r^4 \Delta r}{3}. \quad (2.49)$$

Integroidaan sitten kaikkien pallonkuorten yli origosta pinnalle

$$U = \int_0^a dU = - \frac{16\pi^2 G \rho^2}{3} \int_0^a r^4 dr = - \frac{3GM^2}{5a}. \quad (2.50)$$

$-U$ on siis pallon gravitaatioenergia. Tämä energia vapautuu, jos koko avaruuteen tasan jakautunut massa M hivistuu a -säteiseksi palloksi.

Sijoittamalla tähän Maan säde ($R_E \approx 6,4 \times 10^6$ m) ja massa ($M_E \approx 6 \times 10^{24}$ kg) saadaan maapallon gravitaatioenergiaksi noin 2×10^{32} J. Jos gravitaatioenergia olisi puolestaan tähden ainoa energialähde, niin ne eivät kauan loistaisi. Auringon massa on 2×10^{30} kg, säde 7×10^8 m ja säteilyteho $3,84 \times 10^{26}$ W. Lordi *Kelvin* arvioi jo vuonna 1862, että Auringon elinaika voisi olla tämän perusteella ainoastaan noin 20 miljoonaa vuotta. Hän totesi tämän olevan huomattavasti lyhyemmän kuin geologisten todisteiden perusteella laskettu Maan ikä, jonka jo tuolloin arvioitiin olevan suuruusluokkaa 300 miljoonaa vuotta. Ongelma selvisi lopullisesti vasta toisen maailmansodan alla kun *Bethe* ja *Critchfield* selvittivät Auringon ytimessä toimivan fuusioreaktion yksityiskohdat.

2.2.2 Keplerin radan yleinen lauseke

Tarkastellaan sitten Keplerin liikkeen rataa eli keskeisliikettä potentiaalissa $U = -k/r$. Käytetään jälleen muuttujaa $u = 1/r$ ja kirjoitetaan rata muodossa

$$\varphi = \varphi' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + \frac{2mku}{l^2} - u^2}}. \quad (2.51)$$

Tässä integraali käsitellään määräämättömänä integraalina ja φ' on alkuehdoista määräytyvä integroimisvakio. Integraalitulukoista löytyy tulos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos \left(-\frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \right), \quad (2.52)$$

missä

$$q = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Nyt kertoimien arvot ovat

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}; \quad \beta = \frac{2mk}{l^2}; \quad \gamma = -1. \quad (2.53)$$

Kulman lausekkeeksi tule

$$\varphi = \varphi' - \arccos \left(\frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \right). \quad (2.54)$$

Ratkaisemalla tästä $1/r$ saadaan paikka vaihekulman funktiona

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\varphi - \varphi') \right). \quad (2.55)$$

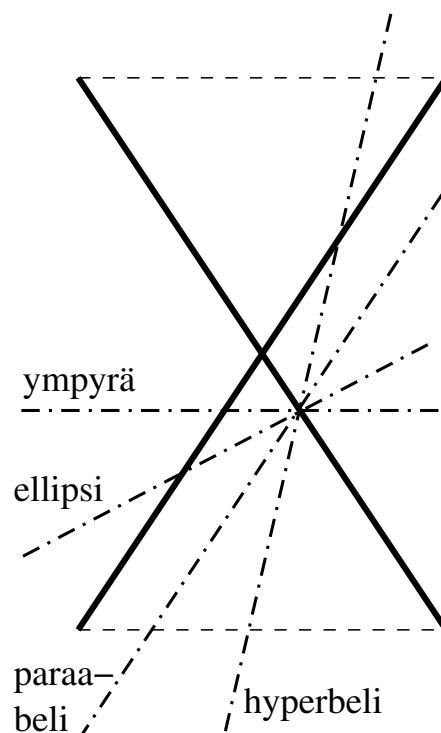
Kirjoitetaan $\theta = \varphi - \varphi'$, jolloin päädytään **kartiroleikkauksen** parametrimuotoiseen yhtälöön.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (2.56)$$

missä ε on käyrän **eksentrisyys**

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}. \quad (2.57)$$

Kuva 2.6: Kartiroleikkaukset ovat käyriä, jotka saadaan kartion pinnan ja erisuuntaisten tasojen (kuvan pisteviivat) leikkauksena. Jos taso leikkaa kartiota siten, että käyrä on suljettu, kartiroleikkaus on ellipsi. Ympyrä on ellipsin rajatapaus, jossa taso on kohtisuorassa kartion akselia vastaan. Avoimet käyrät ovat puolestaan hyperbelejä ja rajatapauksena ellipsiin paraabelejä.



Eksentrisyyden arvot määräävät eri kartioleikkaukset (Kuva 2.6):

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon = 0 & \text{ympyrä} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \text{ellipsi} \\ \varepsilon = 1 & \text{paraabeli} \\ \varepsilon > 1 & \text{hyperbeli.} \end{array} \right.$$

Tästä näkee suoraan, että kokonaisenergian E täytyy olla negatiivinen, jotta rata olisi suljettu (ympyrä tai ellipsi), mutta ei kuitenkaan niin negatiivinen, että ε olisi imaginaarinen.

Esimerkki: Pakonopeus

Millä nopeudella kappaleen pitää liikkua, jotta se pakenee toisen kappaleen painovoimakentästä eli milloin radasta tulee avoin? Tämä tapahtuu tietenkin, jos kappaleen kineettinen energia on suurempi kuin potentiaalienergia. Rajanopeutta kutsutaan **pakonopeudeksi** ja se ratkeaa yhtälöstä

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{GmM}{r}, \quad (2.58)$$

missä $\mu = mM/(m + M)$ on redusoitu massa. Siten

$$v_e = \sqrt{\frac{2G(m + M)}{r}}. \quad (2.59)$$

Koska pakeneva kappale on yleensä paljon kevyempi kuin emokappale ($m \ll M$), voidaan pakenevan kappaleen massa jättää huomiotta.

2.2.3 Keplerin lait ratayhtälön avulla

Ensimmäinen tulos yllä olevasta on tietenkin, että suljettu planeettarata on ellipsi, jonka toisessa polttopisteessä on Aurinko, eli Keplerin ensimmäinen laki.

Keplerin toinen laki eli planeetan pintanopeuden vakioisuus todettiin jo aiemmin, mutta osoitetaan se myös seuraavasti. Pienellä aikavälillä dt kulma muuttuu $d\varphi$ verran, mutta r voidaan pitää vakiona. Pinta-alan muutos $dA = (1/2)r(rd\varphi)$ eli pintanopeus on

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{2m} = \text{vakio}. \quad (2.60)$$

Keplerin kolmannen lain johtamiseksi merkitään ellipsin isoakselin puolikasta a :lla ja pikkuakselin puolikasta b :llä. Nyt (piirrä ellipsi ja totea tämä)

$$\frac{b^2}{a} = \frac{l^2}{mk} \Rightarrow b = \frac{l\sqrt{a}}{\sqrt{mk}}.$$

Merkitään planeetan kiertoaikaa T :llä. Yhdellä kierroksella paikkavektori pyyhkäisee koko ellipsin pinnan siis $A = \pi ab$ eli

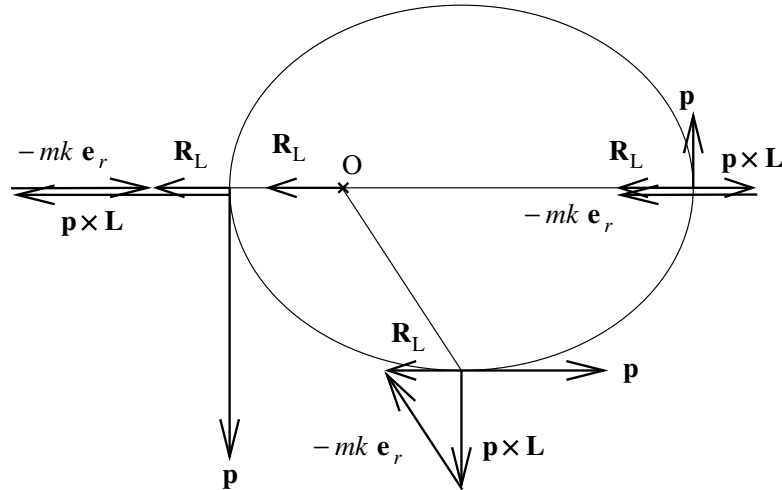
$$A = \int_0^T dt \dot{A} = \frac{lT}{2m} = \pi ab \quad \Rightarrow \quad (2.61)$$

$$T = \frac{2m}{l} \pi ab = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2}. \quad (2.62)$$

Tämän mukaan planeettojen kiertoaikojen neliöt suhtautuvat kuten isoakselin puolikkaan kuutiot ($T^2 \sim a^3$). Esimerkiksi satelliitin kiertoaika maapallon ympäri ei siis riipu kierroksen pituudesta vaan yksinomaan radan perigeon ja apogeon välisestä etäisyydestä.

2.2.4 Laplace–Runge–Lenz-vektori

Keplerin liikkeessä on liikemäärämomentin lisäksi toinen säilyvä vektorisuure nk. Laplace–Runge–Lenz-vektori. Tätä kutsutaan usein pelkäksi Rungen ja Lenzin vektoriksi, koska *Runge* ja *Lenz* ottivat sen käyttöön 1800-luvun lopulla. Vastaavan suureen olemassaolon lienee ensimmäisenä huomannut jo *Laplace* ja myöhemmin myös *Hamilton*.



Kuva 2.7: Laplace–Runge–Lenz-vektori ja sen suhde muihin ellipsirataa kuvaaviin suureisiin.

Laplace–Runge–Lenz-vektori (Kuva 2.7) määritellään jälkiviisaasti

$$\mathbf{R}_L = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{mk\mathbf{r}}{r}. \quad (2.63)$$

Osoitetaan, että \mathbf{R}_L on painovoimakentässä liikevakio, yksinkertaisesti derivoimalla sitä ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{R}}_L = \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} - \frac{mk}{r} \mathbf{v} + \frac{mk\dot{r}}{r^2} \mathbf{r}. \quad (2.64)$$

Nyt $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = -(kr/r^3)$ ja $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Suora lasku antaa tuloksen

$$\dot{\mathbf{R}}_L = 0. \quad (2.65)$$

Laplace–Runge–Lenz-vektori on ratatasossa ja yhdensuuntainen periapsiksen ja voimakeskapisteen kautta kulkevan **apsidiviivan** kanssa osoittaen voimakeskapistestä periapsiksen suuntaan. Ellipsiradalla \mathbf{R}_L on siis ellipsin isoakselin suuntainen.

Laplace–Runge–Lenz-vektorin avulla voidaan myös muodostaa yhtälö ratakäyrälle. Lasketaan tulo $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_L$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_L = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mkr \quad \Rightarrow \quad (2.66)$$

$$rR_L \cos \varphi = l^2 - mkr, \quad (2.67)$$

missä kulma φ on paikkavektorin ja \mathbf{R}_L :n suunnan välinen kulma. Ratkaistaan sitten $1/r$ kulman φ funktiona

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \frac{R_L}{mk} \cos \varphi \right). \quad (2.68)$$

Tämä on tietenkin samaa muotoa kuin (2.55).

2.2.5 Riippumattomat liikevakiot ja rataelementit

Yleisesti liikkeeseen voi liittyä yhtä monta riippumatonta liikevakioita kuin sen kuvaamiseen tarvitaan riippumattomia muuttujia. Kolmiulotteisessa avaruudessa näitä on 6 kpl (paikkavektorin ja liikemäärän kolme komponenttia). Toisaalta Keplerin liikkeelle olemme jo löytäneet yhteensä 7 liikevakioita (\mathbf{R}_L :n ja \mathbf{L} :n molempien kolme komponenttia sekä E). Näistä mikään ei kuitenkaan määritä kappaleen paikkaa radalla, joten tarvitaan vielä yksi vakio määräämään esimerkiksi periapsiksen ohittamishetki t_0 , joten vakioita on oikeastaan 8 kpl. Jäljellä saa olla siis enintään t_0 :n lisäksi 5 riippumatonta liikevakioita eli \mathbf{R}_L :n, \mathbf{L} :n ja E :n välille täytyy löytää kaksi skalaariyhtälöä sitomaan osa niiden komponenteista toisiinsa. Yksi selainen on tietenkin \mathbf{R}_L :n \mathbf{L} :n kohtisuoruusehto $\mathbf{R}_L \cdot \mathbf{L} = 0$. Toinen saadaan lausekkeista (2.55) ja (2.68):

$$R_L^2 = m^2 k^2 + 2mEl^2. \quad (2.69)$$

Kuuden riippumattoman liikevakion avulla rata voidaan siis antaa yksikäsitteisesti. Taivaanmekaniikassa liikevakioista muodostetaan uusi riippumaton joukko suureita, joita kutsutaan **rataelementeiksi**. Valinta voidaan tehdä usealla eri tavalla, kunhan pidetään huoli, että elementit ovat tosiaan lineaarisesti riippumattomia.

Aurinkokunnan tapauksessa käytetään seuraavaa elementtijoukkoa:

- **isoakselin puolikas** a – Kuten edellä.
- **eksentrisyys** e – Tätä on edellä merkitty ε :lla. a ja e määräävät siis yhdessä radan muodon sen omassa ratatasossa.
- **inklinaatio** i (tai ι) – Tämä on kulma, joka kertoo, kuinka paljon rata on kallellaan johonkin perustasoon nähden (tässä tapauksessa perustasona käytetään Maan ratatasoa eli **ekliptikkaa**). Se on siis vektorin \mathbf{L} ja perustason normaalin välinen kulma. Inkliinaatio on välillä $(0, \pi/2)$, jos kappale kiertää tavanomaiseen positiiviseen kiertosuuntaan ja välillä $(\pi/2, \pi)$, jos liike on päinvastaiseen suuntaan (eli retrogradista).
- **nousevan solmun pituus** Ω – Tämä kulma kertoo, missä kohdassa kappaleen rata nousee perustason yläpuolelle. Se on tietenkin mitattava jostakin kiinteästä kulmasta lähtien. Planeettakunnan tapauksessa tämä on nk. **kevättasauspiste** Υ , joka sijaitsee Oinaan tähtikuviossa. Ω mitataan siitä vastapäivään. Kulma mitataan siis perustasossa. Yhdessä i ja Ω määräävät ratatason asennon.
- **perihelin argumentti** ω – Tämä antaa perihelin suunnan mitattuna nousevan solmun kohdalta pitkin ratatasoa liikkeen suuntaan. Tämä määrää siis isoakselin orientaation ratatasossa.
- **periheliaika** τ – Jotta radan lisäksi selviäisi kappaleen paikka radalla, täytyy tietenkin tietää yksi aika, joksi valitaan perihelin ohittamisen aika. Mikä tahansa perihelin ohitus periaatteessa kelpaa, mutta ajaksi kannattaa valita tarkasteltavan kierroksen perihelin ohitus, koska radassa todellisuudessa on häiriöitä, johtuen muiden planeettojen vaikutuksista.

Käytännön laskuissa käytetään perihelin argumentin sijasta **perihelin pituutta** $\varpi = \Omega + \omega$. Vaikka tämä onkin vähän hankala suure sen vuoksi, että sen osat mitataan kahdessa eri tasossa, se on käyttökelpoinen, koska pienten inkliinaatioiden tapauksessa Ω on vaikea määrittää tarkasti. Jos $i = 0$, Ω :a ei edes voi määrittellä.

Käytännön taivaanmekaniikkaan liittyy monia muitakin käsitteitä, joilla korvataan joitakin tämän joukon liikevakioita (esim. keskianomalia, keskilongitudi). Näihin voi tutustua tähtitieteen perusoppikirjojen avulla.

Laplace–Runge–Lentz-vektorin suunta säilyy vain, jos voimakenttä on muotoa $1/r^2$. Mikäli kenttä poikkeaa tästä, ellipsin isoakselin suunta alkaa kiertyä eli **periheli kiertyy** (prekessoi). Todellisuudessa planeettaliike ei ole kahden kappaleen ongelma vaan muiden taivaankappaleiden liike tuo potentiaaliin korkeampaa kertalukua olevia häiriötermejä ja siten planeettojen perihelien kiertymät ovat muutamia tuhansia kaarisekunteja sadassa vuodessa. Palaamme asiaan myöhemmin.

Esimerkki

Edellä mainitun Bertrandin teoreeman mukaan muotoa $f(r) = cr^{-2}$ olevan keskeisvoimakentän lisäksi myös voimakenttä $f(r) = cr$ antaa stabiilin suljetun radan. Tällaista rataa kutsutaan **Hooken avaruusoskillaattoriksi**. Kyseessä on soikea rata, jossa voimakeskiste on iso- ja pikkuakselien leikkauspisteessä eikä se siten kuvaa esimerkiksi planeettojen liikettä luonnossa.

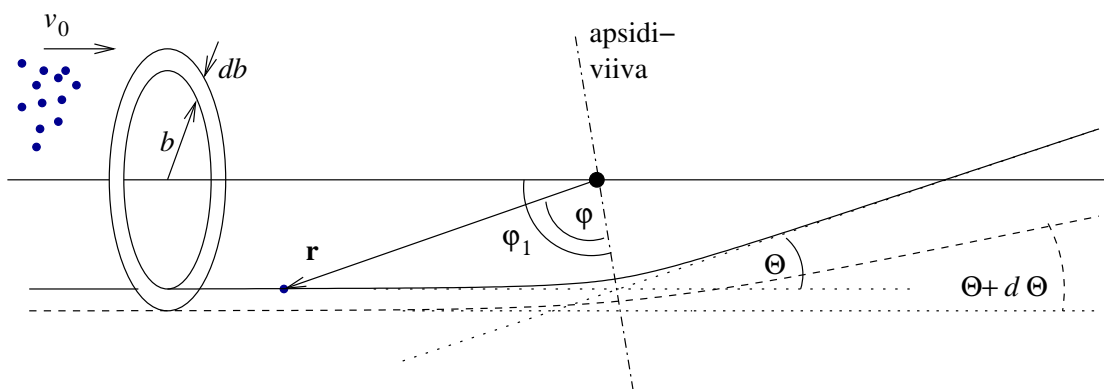
2.2.6 *Sironta keskeisvoimakentässä

Tarkastellaan seuraavaksi sirontaa keskeisvoimakentässä. Rajoitutaan muotoa $U = -k/r$ oleviin potentiaaleihin, jotka siis Newtonin painovoimalain lisäksi käsittävät esim. Coulombin vuorovaikutuksen. Tarkasteluun tulevat siis edellä mainitut keskeisliikkeen hyperbeliradat, joiden kokonaisenergia on positiivinen ja eksentrisyys $\epsilon > 1$.

Tarkastellaan tasaista ja homogeenista hiukkassuihkua, jonka intensiteetti (eli suihkussa kulkeva hiukkasmäärä poikkipinta-alayksikköä ja aikayksikköä kohti) on I . Kaukana voimakeskisteestä (origosta) suihkun hiukkaset kulkevat suoraviivaista rataansa, mutta lähestyessään origoa ne tuntevat joko attraktiivisen tai repulsiivisen voiman, joka muuttaa niiden kulkusuuntaa. Jatkaessaan matkaansa, ne viimein poistuvat voiman vaikutuspiiristä ja kulkevat taas suoraviivaisesti, mutta nyt eri suuntaan kuin aluksi. Kahden kappaleen tapauksessa rata on tarkkaan ottaen hyperbeli, joka alku- ja lopputilanteessa lähestyy asymptoottejaan. Hiukkasen sanotaan sironavan. **Sirontapinta-ala annettuun suuntaan**, $\sigma(\Omega)$, määritellään

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{\text{avaruuskulmaan } d\Omega \text{ aikayksikössä sironneiden hiukkasten määrä}}{\text{sisääntuleva intensiteetti}}. \quad (2.70)$$

Suuretta $\sigma(\Omega)$ kutsutaan myös **differentiaaliseksi sirontapinta-alaksi** tai **sironnan differentiaaliseksi vaikutusalaksi**. Sirontapinta-alalla on varsin loogisesti pinta-alan yksikkö.



Kuva 2.8: Sironta keskeisvoimakentästä.

Keskeisvoimakentässä tilanne on tietysti symmetrinen suihkun alkuperäisen kulkusuunnan suuntaisen origon kautta kulkevan akselin suhteen siten, että $\sigma(\Omega)$ ei riipu kiertokulmasta akselin ympäri (Kuva 2.8). Tämän **sironta-akselin** ja hiukkasen lopullisen kulkusuunnan välistä kulmaa kutsutaan **sirontakulmaksi** ja merkitään symbolilla Θ . Näin siis $\sigma = \sigma(\Theta)$. Symmetrian vuoksi tarkasteltava differentiaalinen avaruuskulma voidaan valita sirontakulman määräämän kartion vaipan ympärille (piirrä kuva):

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta. \quad (2.71)$$

Jokaisen hiukkasen radan keskeisvoimakentässä määrää sen energia ja liikemäärämomentti. Sirontatarkasteluissa liikemäärämomentti ilmaistaan tyypillisesti hiukkasen energian ja ns. **törmäysparametrin**, b , (engl. **impact parameter**) avulla. Törmäysparametri on hiukkasen alkuperäisen kulkusuoran etäisyys sironta-akselista. Koska l on vakio, se voidaan laskea alkutilasta, jolloin

$$l = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = mv_0 b = b\sqrt{2mE}. \quad (2.72)$$

Tässä $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ ja \mathbf{v}_0 on hiukkasen sironta-akselin suuntainen alkuperäinen nopeus.

Jos E ja b ovat vakioita, hiukkasen sirontakulma määräytyy yksikäsitteisesti.¹ Oletetaan vielä, että vakioenergiassa jokaista b :n arvoa vastaa vain yksi Θ :n arvo. Tuolloin avaruuskulmaan $d\Omega$ aikayksikössä sironnut hiukkasmäärä on sama kuin törmäysparametrivälillä $(b, b + db)$ sisään tulevien hiukkasten määrä aikayksikköä kohti

$$I 2\pi b |db| = I \sigma(\Theta) 2\pi \sin \Theta |d\Theta|. \quad (2.73)$$

Koska $b = b(\Theta, E)$, saadaan differentiaaliseksi sirontapinta-alaksi

$$\sigma(\Theta) = \frac{b}{\sin \Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|. \quad (2.74)$$

Törmäysparametrin ja sirontakulman välinen lauseke saadaan suoraan jo integroidusta radan lausekkeesta (2.55) (attraktiivinen voima)

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} [1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi')]. \quad (2.75)$$

Valitaan integroimisvakio $\varphi' = 0$, jolloin vaihekulma $\varphi = 0$ vastaa pienintä r :n arvoa (periapsis). Koska rata on symmetrinen apsidiviivan suhteen, sirontakulma saadaan lausekkeesta

$$\Theta = 2\varphi_1 - \pi, \quad (2.76)$$

missä $\varphi_1 > \pi/2$ saadaan ratayhtälöstä, kun $1/r \rightarrow 0$

$$\cos \varphi_1 = -\frac{1}{\varepsilon}. \quad (2.77)$$

¹Tämä on totta vain klassisen mekaniikan puitteissa.

Näin siis

$$\begin{aligned}\sin \frac{\Theta}{2} &= \sin(\varphi_1 - \pi/2) = -\cos(\varphi_1) = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \\ \cot \frac{\Theta}{2} &= \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2El^2}{mk^2}} = \frac{2Eb}{k}\end{aligned}$$

josta saadaan tarvittava yhteys törmäysparametrin ja sirontakulman välille

$$b = \frac{|k|}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}. \quad (2.78)$$

Tässä on k korvattu itseisarvolla, jolloin lauseke pätee myös repulsiivisen voiman tapauksessa (osoita!). Lopulta differentiaalisen sirontapinta-alan lausekkeeksi saadaan

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{k}{2E} \right)^2 \csc^4 \frac{\Theta}{2}. \quad (2.79)$$

Soveltamalla tätä lauseketta Coulombin vuorovaikutukseen, jolloin $k = -qq'/(4\pi\epsilon_0)$, missä q ja q' ovat törmäävien hiukkasten varaukset ja ϵ_0 tyhjiön sähköinen permittiivisyys, saadaan kuuluisa **Rutherfordin sirontapinta-alan** lauseke. *Ernest Rutherford* (1871–1937) johti sen kuvaamaan α -hiukkasten sirontaa massiivisesta pistemäisestä varauksesta kohtiosta. Rutherfordin laboratoriossa työskennelleet *Hans Geiger* ja *Ernest Marsden* olivat vuodesta 1909 alkaen tehneet kokeita, joissa tutkittiin α -hiukkasten sirontaa ohuesta kultakalvosta. Tuona aikana käytössä olleen *Thompsonin mallin* mukaan atomit koostuvat koko atomitilavuuden kattavasta positiivisesta varauspilvestä, johon elektronit on siroteltu kuin rusinat pullaan. Tällaisen atomin läpi kulkiessaan α -hiukkasen ei pitäisi koskaan sirota kulmaan, joka olisi suurempi kuin pari asteen sadasosaa. Geigerin ja Marsdenin kokeissa kuitenkin nähtiin sirontaa, joka ulottui yli 90 asteen sirontakulmiin. Atomiydin oli löytynyt, sillä Rutherford selitti kokeet uudella mallilla, jossa positiivinen varaus (ja massa) oli keskittynyt pieneen ytimeen, jota elektronit kiersivät planeettaliikkeen tapaan.

Huomattakoon vielä, että kvanttimekaniikassa saadaan täsmälleen sama tulos Coulombin sironnan vaikutusalalle kuin klassisessa tarkastelussa, joten Rutherfordin yhtälön tarkka vastaavuus Geigerin ja Marsdenin kokeiden kanssa ei ole yllätys. Muutamia vuosia myöhemmin tehdyissä kokeissa havaittiin kuitenkin poikkeamia Rutherfordin vaikutusalasta. Kun kultakalvo korvattiin alumiinilla, kaikkein suurimpiin kulmiin ei enää sironnutkaan yhtä paljon hiukkasia kuin teoria ennusti. Tämän Rutherford tulkitse tämän aivan oikein siten, että oli päästy rajalle, jossa α -hiukkanen ei enää nähtykään pistemäistä ydinvarausta. Näin saatiin ensimmäiset arviot atomiydinten koolle.

Atomifysiikassa myös ns. **kokonaisvaikutusalan** käsite on tärkeä. Sironnalle se tarkoittaa sirontojen kokonaismäärää aikayksikössä jaettuna sisään tulevalla intensiteetillä

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma(\mathbf{\Omega}) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta. \quad (2.80)$$

Huomataan heti, että Rutherfordin siroonnassa $\sigma_T \rightarrow \infty$, joka on helppo ymmärtää. Olemme tarkastelleet pitkän kantaman vuorovaikutusta, ja jokainen sisään tuleva hiukkanen siroaa ainakin hieman. Klassisessa mekaniikassa äärellisen kokonaisvaikutusalan voi antaa vain potentiaali, joka häviää äärellisellä etäisyydellä origosta. Ytimen ja sitä ympäröivän elektroniverhon potentiaali on likimain tällainen.

Kvanttimekaniikassa saadaan äärellinen vaikutusala potentiaaleille, jotka pienenevät suurilla etäisyyksillä nopeammin kuin $1/r^2$. Tällaisia ovat juuri ydinvoimat, joita kuvataan niin kutsutulla **Yukawan potentiaalilla**, joka on muotoa

$$U(r) = -g^2 \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (2.81)$$

missä g on vuorovaikutuksen vahvuutta kuvaava kytkentäparametri ja m on vuorovaikutusta välittävän hiukkasen massa (ilmaistuna kvanttifyysikoiden rakastamassa yksikköjärjestelmässä, jossa massan ja etäisyyden yksiköt ovat toistensa käänteislukuja). Massallinen vuorovaikutus tuo siis mukanaan varjostustekijän e^{-mr} , joka suurilla etäisyyksillä pienenee nopeammin kuin mikään r :n negatiivinen potenssi ja pitää kokonaisvaikutusalan äärellisenä.

Massattoman vuorovaikutuksen kuten Coulombin voiman tapauksessa Yukawan potentiaali redusoituu Coulombin potentiaaliksi $\propto 1/r$. Plasmafysiikassa, jossa tutkitaan vapaiden elektronien ja ionien muodostamaa kaasua, vuorovaikutus on juuri Coulombin potentiaali. Tällöin kuitenkin kokonaisvaikutusala pysyy äärellisenä, koska vapaat varaukset kertyvät toistensa ympärille siten, että minkä tahansa yksittäisen törmäyskohteen potentiaali varjostuu nk. Debyen potentiaaliksi

$$U(r) = \frac{q_T}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad (2.82)$$

missä q_T on törmäyskohteen varaus. Varjostusparametria λ_D kutsutaan Debyen pituudeksi.

2.3 Useamman kappaleen ongelmat

Kahden kappaleen ongelma on monimutkaisin systeemi, jolle tunnetaan täydellinen ratkaisu. Liikkeyhtälön kirjoittaminen kullekin kappaleelle N :n kappaleen systeemissä on tietenkin triviaalia. Kappaleen i liikkeyhtälö on

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}. \quad (2.83)$$

Siis kappaleeseen i vaikuttavat kaikkien muiden kappaleiden vetovoimat. Tämän yhtälön integroiminen onkin sitten kaikkea muuta kuin triviaalia.

2.3.1 Planeettaliike

Aurinkokunta edustaa tapausta, jossa yhden kappaleen vetovoima on paljon suurempi kuin muiden. Tällöin kutakin planeettaa voidaan käsitellä kahden kappaleen (planeetta – Aurinko) tapauksena ja korjata näitä muiden planeettojen aiheuttamilla häiriöillä. Tätä varten kehitettiin monenlaisia sarjakehitelmiä 1700- ja 1800-luvuilla. Varsinkin *Pierre Simon Laplace* (1749–1827) kunnostautui tässä tehtävässä.

Laplacen aikalainen *William Herschel* (1738–1822) löysi vuonna 1781 Uranuksen täysin sattumalta ja oletti ensin, että kyseessä oli komeetta. Ratalaskujen perusteella osoitettiin kuitenkin, että Uranus on ennestään tuntematon planeetta. Planeettojen radoista löydettyjen häiriöiden avulla ennustettiin ensin Neptunuksen ja sitten Pluton olemassaolo ja laskettiinpa paikatkin, mistä niitä kannatti etsiä. Neptunus löytyi lopulta vuonna 1846 mutta Pluto vasta 1930.

1800-luvulla pohdittiin paljon ongelmaa, onko Newtonin gravitaatioteoria ratkaistavissa täydellisesti. Sinänsähän Newtonin liikeyhtälöstä voi annetuista alkuehdoista lähtien laskea planeettojen paikat kuinka pitkälle hyvänsä, kunhan (pistemäiset) kappaleet eivät törmää toisiinsa. Suomalainen *Karl Frithiof Sundman* (1873–1949) osoitti ensimmäisenä 1912, että kolmen kappaleen ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu, jossa kappaleiden paikat voidaan antaa $t^{1/3}$:n suppenevina potenssisarjoina, kunhan systeemin kokonaisliikemäärämomentti eroaa nolasta.² Sundmanin ratkaisu on kuitenkin äärimmäisen hitaasti suppeneva eikä siten tarjoa käytännöllistä menetelmää ratojen laskentaan.

Jo ennen Sundmanin ratkaisun löytymistä *Jules Henri Poincaré* (1854–1919) kuitenkin osoitti 1890-luvun alussa, että jo kolmen kappaleen ongelman ratkaisu on erittäin riippuvainen alkuehdoista ja pienikin virhe alkuehdoissa voi johtaa jossain vaiheessa suureen virheeseen olipa laskumenetelmä kuinka tarkka tahansa.³ Hän tuli itse asiassa keksineeksi uuden mekaniikan sivuhaaran, **kaottisen dynamiikan**. Keksintö jäi pitkäksi aikaa fysiikan tutkimuksen sivuraiteille, kunnes 1960-luvulla kaaottisiin ilmiöihin alettiin jälleen kiinnittää kasvavaa huomiota. Tutustumme kaaosteorian alkeisiin luvussa 8.

2.3.2 *Kolmen kappaleen ongelma

Tarkastellaan hieman tarkemmin yleistä kolmen kappaleen ongelmaa, jossa massat m_1 , m_2 ja m_3 ovat pisteissä \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 ja \mathbf{r}_3 . Tällöin esimerkiksi massan m_1 kiihtyvyys on

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} \quad (2.84)$$

ja samoin muille massoille. Merkitsemällä massojen välisiä etäisyyksiä vektoreilla $\mathbf{s}_i = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k$ saadaan yhtälö (piirrä kuva)

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}. \quad (2.85)$$

²Sundman sai tutkimuksistaan Ranskan kuninkaallisen tiedeakatemian palkinnon pariinkin otteeseen.

³Poincaré sai tutkimuksestaan puolestaan Norjan kuninkaan *Oscar II:n* palkinnon.

Näiden vektoreiden avulla voidaan kaikkien kappaleiden liikeyhtälöt kirjoittaa muodossa

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3} + m_i \mathbf{G}, \quad (2.86)$$

missä $m = m_1 + m_2 + m_3$ ja vektori \mathbf{G} on

$$\mathbf{G} = G \left(\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right). \quad (2.87)$$

Tälle yhtälöryhmälle ei ole yleisiä ratkaisuja, mutta joitain erikoistapauksia osataan ratkaista.

Leonhard Euler (1707–1783) ratkaisi tapauksen, jossa massa m_2 pysyy koko ajan massoja m_1 ja m_3 yhdistävällä suoralla niiden välissä. Suora tosin kiertyy liikkeen mukana. Tällöin kaikki vektorit \mathbf{r}_i , \mathbf{s}_i ja \mathbf{G} ovat yhdensuuntaisia ja kaikilla radoilla on yhteinen polttopiste ja yhteinen periodi.

Toinen erikoisratkaisu on tapaus, jossa $\mathbf{G} = 0$. Tällöin liikeyhtälöiden välinen kytkentä katoaa ja liikeyhtälöt palautuvat tavalliseen Keplerin ongelmaan

$$\ddot{\mathbf{s}}_i = -mG \frac{\mathbf{s}_i}{s_i^3}. \quad (2.88)$$

Massat ovat jälleen elliptisillä radoilla, joilla on yhteinen polttopiste ja sama periodi. Nyt ne kuitenkin sijaitsevat koko liikkeen ajan tasasivuisen kolmion kärjissä. Kolmio puolestaan kiertyy ja muuttaa kokoaan liikkeen aikana.

Huom. Molemmissa tapauksissa kappaleiden periodit ovat yhtä suuria vaikka isoakselien pituudet ovatkin erisuuria. Edes tapauksessa $\mathbf{G} = 0$ ei kyse ole kahden kappaleen ongelmasta.

2.3.3 *Rajoitettu kolmen kappaleen ongelma

Tärkeä erikoistapaus on **rajoitettu kolmen kappaleen ongelma**. Ongelmassa on kaksi massiivista kappaletta, jotka kiertävät toisiaan ympyräradoilla. Kolmas kappale liikkuu samassa tasossa suurten kappaleiden kanssa, mutta se oletetaan niin pieneksi että sen massa voidaan jättää huomiotta. Massattomaksi oletettu kappale ei siten häiritse kahden suuremman kappaleen liikettä ja niiden radat lasketaan kahden kappaleen ongelmana kuten edellä on esitetty.

Rajoitettuun kolmen kappaleen ongelmaan liittyvät nk. **Lagrangen pisteet**, joilla on se ominaisuus, että niihin sijoitettu ongelman pienin kappale pysyy samassa asemassa molempiin muihin kappaleisiin verrattuna. Asian havainnollistamiseksi tarkastellaan Aurinko–Maajärjestelmää. Lagrangen pisteitä on kaikkiaan viisi. Niistä kolme on Aurinkoa ja Maata yhdistävällä suoralla, yksi niiden välissä (L1), yksi Maan takana (L2) ja yksi Maasta nähteen Auringon takana (L3). Loput kaksi (L4 ja L5) sijaitsevat Maan kierto-radalla Auringon ympäri toinen 60° Maan edellä, toinen 60° jäljessä.

Maa–Kuu–avaruusalue tai Maa–Aurinko–avaruusalue ovat hyviä esimerkkejä rajoitetusta kolmen kappaleen liikkeestä. Lagrangen pisteillä onkin tärkeä rooli tiettyjen avaruuslentojen toteuttamisessa. Esimerkiksi ESA:n ja NASA:n Aurinkoa tutkiva *SOHO*-alus on sijoitettu kiertämään Maan ja Auringon välissä olevaa Lagrangen pistettä L1 ja on siten jatkuvasti Maan ja Auringon välissä radalla, joka Maasta katsoen muodostaa halon Auringon ympärillä. Moniin tähtitieteen havaintoihin soveltuu puolestaan Maan takapuolella oleva Lagrangen piste L2, jota kiertää esimerkiksi kosmista taustasäteilyä mittaava ESA:n *Planck*-alus. Haloradat näiden pisteiden ympäri ovat stabiileja ratoja sivusuunnassa, mutta Aurinko–Maa-akselin suuntaan alukset on pidettävä aktiivisesti oikealla etäisyydellä. Toinen tärkeä esimerkki ovat nk. **troijalaiset asteroidit**. Kyseessä ovat paikalliset asteroiditihentymät Aurinko–Jupiter-systeemin L4- ja L5-pisteiden ympäristössä.

Aurinko–Maa–Kuu-järjestelmä ei ole yhtä yksinkertainen kuin rajoitettu kolmen kappaleen ongelma, sillä Kuu on sen verran massiivinen kappale, että sen gravitaatiopotentiaali aiheuttaa häiriön Auringon potentiaaliin Maan etäisyydellä.

2.4 Harjoituksia

1. Tarkastellaan hiukkasta (massa m) keskeispotentiaalissa $U(r) = -k/r^2$, missä k on positiivinen vakio. Piirrä kuva efektiivisestä potentiaalista $U'(r) = l^2/(2mr^2) + U(r)$ ja selvitä millaisilla radoilla (vapaa / avoin / rajoitettu / ympyrärata) hiukkanen on kokonaisenergian E eri arvoilla, kun

- (a) $l > \sqrt{2mk}$
- (b) $l < \sqrt{2mk}$
- (c) $l = \sqrt{2mk}$

2. Hiukkanen liikkuu keskeispotentiaalissa ympyrärataa, joka kulkee voimakaskeksen kautta. Osoita, että potentiaali on muotoa $U \propto r^{-4}$.
3. Massapiste liikkuu keskeispotentiaalissa

$$U(r) = -\frac{k}{r}e^{-\alpha r}$$

missä k ja α ovat positiivisia vakioita. (Piirrä kuva potentiaalista.)

- (a) Määrä liikkeen liikemäärämomentti, kun rata on R -säteinen ympyrä.
- (b) Tarkastele pieniä radiaalisia värähtelyjä ympyräradan suhteen, ja määritä milloin ympyrärata on stabiili.
- (c) Määritä stabiilien värähtelyjen periodi.

Tämä on kvanttimekaniikassa tärkeä Yukawan potentiaali.

4. Oletetaan, että Keplerin lait ja Newtonin mekaniikka pitävät paikkansa. Oletetaan lisäksi, että planeettaliikettä ylläpitävä voima on Newtonin painovoimalain muotoinen

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

Osoita, että kerroin G ei voi riippua planeetan massasta.

5. Tarkastellaan Keplerin liikettä ($U = -k/r$; $k > 0$) paraabeliradalla. Mikä on tällöin kappaleen kokonaisenergia E ? Johda radalle yhtälöt

$$(r - a)^{3/2} + 3a(r - a)^{1/2} = \frac{3l}{2m} a^{-1/2} |t - t_0|$$

$$\tan^3 \frac{\varphi}{2} + 3 \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{3l}{2m} a^{-2} (t - t_0),$$

missä $a = l^2/(2mk)$ ja t_0 on hetki, jolloin rata on lähinnä voimakeskusta.

6. Laske seuraavien Aurinkoa kiertävien Keplerin ratojen eksentrisyys ja kiertoaika (Maan radan isoakselin puolikas = 1 AU = $1,496 \times 10^{11}$ m ja Maan kiertoaika = 365,25 d)
- perihelietäisyys 1,5 AU ja aphelietäisyys 2,5 AU
 - aphelietäisyys 1,8 AU ja ratanopeus aphelissä 15 km/s
7. Avaruusluotain on ammuttu Maasta ns. parkkiradalle, joka on ympyrärata (säde 7000 km). Kuinka suuri nopeuden muutos (eli ns. "delta-v") tarvitaan saattamaan avaruusalus
- ulos Maan painovoimakentästä
 - tästä edelleen ulos aurinkokunnasta

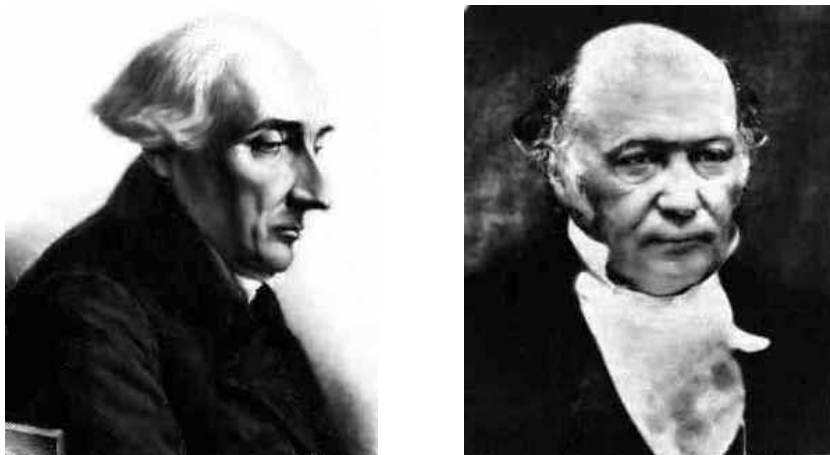
Muista, että Maa kiertää Aurinkoa melkoisella ratanopeudella!

8. Euroopan avaruusjärjestön ESA:n ja Yhdysvaltain ilmailu- ja avaruushallinnon NASA:n yhteinen avaruusluotain Ulysses lähetettiin Maasta 6.10.1990 tutkimaan Auringon ja sen kaasukehän napa-alueiden ominaisuuksia. Luotain käytti hyväkseen Jupiterin painovoimakenttää pyrkiessään radalle, joka olisi lähes kohtisuorassa ekliptikaa (planeettojen ratatasoa) vastaan. Helmikuussa 1992 luotain "sirosi" Jupiterin painovoimakentässä ja joutui elliptiselle polaariradalle Auringon ympäri. Laske aluksen vauhti Jupiterin suhteen ennen sirontaa, kun aluksen perihelietäisyys sirontaa seuraavalla ellipsiradalla Auringon ympäri on 1,3 AU. Jupiterin etäisyys Auringosta on 5,2 AU ja Auringon massa $2,0 \times 10^{30}$ kg. Voit olettaa Jupiterin painovoimakentän "koon" Jupiterin etäisyyden suhteen pieneksi. (Aluksen radan inkliinaatio on noin $\iota = 80^\circ$, mutta voit approksimoida tilannetta olettamalla, että sirontakulma on 90° .)
9. Selitä maallikolle, kuinka on mahdollista, että L2-piste sijaitsee Maan kiertoradan ulkopuolella.

Luku 3

Lagrangen mekaniikka

Lähdetään sitten opiskelemaan abstraktimpaa mutta samalla tehokkaampaa mekaniikan formalismia, jonka taustalla on kaksi suurta matemaatikkoa *Joseph-Louis Lagrange* (1736–1813) ja *Sir William Rowan Hamilton* (1805–1865) (Kuva 3.1). Emme tee tässä emmekä jatkossakaan mitään, mikä ei sinänsä ratkeaisi ratkaisemalla Newtonin liikeyhtälö ottaen huomioon kaikki tarkasteltavaan systeemiin vaikuttavat voimat ja sidosehdot. Joskus tällainen tie on jopa ainoa vaihtoehto. Mutta silloin, kun tarkasteltava systeemi voidaan pukea Lagrangen formalismiin, hyvinkin monimutkaiset ongelmat saattavat ratketa näppärästi. Lagrangen ja Hamiltonin formalismeilla on myös tärkeä osa siirtäessä mekaniikasta kvanttimekaniikkaan, samoin niistä on suurta hyötyä tarkasteltaessa monia termodynamiikan ja statistisen fysiikan ongelmia.



Kuva 3.1: Joseph-Louis Lagrange (vas., 1736–1813) ja Sir William Rowan Hamilton (1805–1865).

3.1 Systeemin vapausasteet ja sidokset

Yksittäisen massapisteen tila tunnetaan täydellisesti ajan hetkellä t , kun tiedetään sen paikka ja nopeus. Kolmiulotteisessa avaruudessa massapisteellä on kolme riippumatonta paikkakoordinaattia ja kolme riippumatonta nopeusvektorin komponenttia. Riippumattomien paikkakoordinaattien lukumäärää kutsutaan systeemin **vapausasteiksi**.

Jos tarkastellaan N :n massapisteen mekaanista systeemiä, jonka osaset pystyvät liikkumaan vapaasti, on kyseessä $3N$ vapausasteen systeemi. Tällaisen systeemin täydelliseen kuvaamiseen tarvitaan $3N$ koordinaattia ja $3N$ nopeuskomponenttia. Systeemin liikkeen kuvailuun Newtonin mekaniikassa tarvitaan $3N$ toisen asteen differentiaaliyhtälöä. Esimerkiksi tavallisessa tuolissa on noin 10^{24} atomia. Jos mikään ei rajoittaisi tuolin atomien liikettä, tuolin liiketilan tarkastelu olisi aika työläs tehtävä. Jos kuitenkin tyydytään tarkastelemaan tuolia **jäykkänä kappaleena**, jäykkyys tuo erittäin suuren määrän **sidosehtoja**. Itse asiassa tuolin paikantamiseen tarvitaan vain 3 koordinaattia (esim. massakeskipisteen paikan ilmaisemiseen) ja lisäksi 3 koordinaattia tuolin asennon määrittämiseen. Yleisesti jäykkien kappaleiden liiketilan ilmaisuun tarvitaan enintään nämä kuusi koordinaattia. Jos tuolin oletetaan lisäksi seisovan pystyssä lattialla, tämä sidosehto rajaa pois yhden paikkakoordinaatin ja tuolin asento voidaan antaa yhden kulman avulla. Eli jäljellä on enää kolme vapausastetta.

Ensimmäisen luvun lopussa ollut heiluri oli esimerkki 3-ulotteisesta systeemistä, jota rajoitti tasoliike (-1 vapausaste) ja kiinteä varren pituus (-1 vapausaste), joten liike voitiin kuvailla täydellisesti yhdelle muuttujalle kirjoitetulla liikeyhtälöllä, kunhan liikkeen alkutila on annettu.

Sidos ehdot kuvataan Newtonin mekaniikassa **sidosvoimien** avulla. Esimerkkinä olkoon vaikka kaltevilla tasolla liukuva palikka. Systeemiin vaikuttavat voimat ovat gravitaatio, joka osoittaa suoraan alaspäin ja sidosvoima, joka osoittaa kohtisuoraan kappaleen liikettä vastaan, estäen sitä työntymästä kaltevan tason sisään (piirrä kuva). Myös matemaattisen heilurin tapauksessa sidosvoima oli kohtisuorassa liikettä vastaan pitäen heilurin pään koko ajan samalla etäisyydellä ripustuspisteestä. Tässä ilmeneekin tämänkaltaisten sidosvoimien tärkeä ominaisuus: **ne eivät tee työtä** eli

$$\int \mathbf{F}^{(s)} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (3.1)$$

Tällainen sidosvoima muuttaa siis kappaleen liiketilaa siten, ettei kappaleen energia siitä muutu. On toki olemassa myös työtä tekeviä sidoksia, kuten kitkavoimat. Niitä täytyy tarkastella kuten muitakin kappaleen kokonaisenergiaan vaikuttavia voimia.

Sidoksia on useita eri tyyppisiä. Tarkastellaan N :n hiukkasen systeemiä. Jos systeemin liikettä rajaavat ehdot voidaan kirjoittaa muodossa

$$f_j(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots, \mathbf{r}^{(N)}, t) = 0 \quad (3.2)$$

kyseessä ovat **holonomiset** sidokset¹. Kiinteä kappale on hyvä esimerkki holonomisista sidoksista: kappaleen kahden pisteen välinen etäisyys säilyy vakiona eli

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0.$$

Muita sidoksia kutsutaan **ei-holonomisiksi**. Jos sidosehdossa aika ei ole eksplisiittisesti mukana, on kyseessä **skleronominen** sidos, muussa tapauksessa sidos on **reonominen**. (HT: Mieti yksinkertaisia esimerkkejä kustakin sidostyyppistä.)

Yleisesti ottaen holonomiset sidokset voidaan käsitellä kohtuullisen helposti kun taas ei-holonomiset sidokset ovat yleensä paljon hankalampia. Esimerkkeinä tästä käyvät vaikka massapisteen liike tasolla (holonominen, muotoa $f = 0$) ja liike tason yläpuolella (ei-holonominen, muotoa $f \geq 0$).

3.2 Yleistetyt koordinaatit

Massapistemekaniikan peruskoordinaatit ovat paikkavektorin kolme koordinaattia, joilla kaikilla on pituuden dimensio (SI-yksikkönä metri). Niiden aikaderivaatat ovat nopeuksia (m s^{-1}). Toisaalta olemme jo oppineet, että myös kulma (aste, radiaani) on hyvä koordinaatti ja sen muutosnopeudella on puolestaan yksikkönä $^\circ \text{s}^{-1}$ tai rad s^{-1} . Lagrangen mekaniikassa käytetään **yleistettyjä koordinaatteja**, jotka voivat olla tuttuja paikkaita tai kulmamuuuttujia, mutta ne saattavat olla myös monimutkaisempia fysikaalisista suureista muodostettuja muuttujia, kunhan ne vain ovat keskenään riippumattomia ja kuvailevat systeemin täydellisesti². Millaisiin koordinaatteihin joudutaan, riippuu olennaisesti sidosten luonteesta.

Jos meillä on n kappaletta “tavallisia” koordinaatteja ja k holonomista sidosta, systeemiä kuvaamaan tarvitaan $n - k$ kpl yleistettyjä koordinaatteja, joita merkitään joukolla $\{q_i\}$. Koordinaattien väliset muunnokset, esim.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t) \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t) \\ x_3 &= x_3(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t) \\ &\vdots \\ x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t) \end{aligned}$$

¹Kaikki yhtälön (3.2) muotoiset sidokset eivät tarkkaan ottaen ole holonomisia. Esim. $f(x, y, z) = |z| - z$ antaa ei-holonomisen sidoksen (minkä?). Holonomisen sidosehdon täytyy pudottaa systeemin vapausasteiden määrää, so. sen avulla täytyy ainakin periaatteessa voida eliminoida systeemistä jokin koordinaatti kirjoittamalla se muiden avulla.

²Koko holonomisuus voidaan itse asiassa *määritellä* elegantimmin yleistettyjen koordinaattien olemassaolon avulla: mikäli systeemiä voidaan kuvata yleistetyillä koordinaateilla,

(i) jotka kuvaavat systeemin täydellisesti ja
(ii) joita voi varioida toisistaan riippumatta systeemin sidosehtoja rikkomatta, systeemiä kutsutaan holonomiseksi.

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_n &= x_n(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t) \end{aligned}$$

täytyy tuntea ja niiden tulee implisiittisesti sisältää sidokset. Huomaa, että tässä esityksessä jokaisen massapisteen jokaisella koordinaatilla on oma yhtälö. Olettaen, että x_i :t ovat kolmiulotteisen avaruuden pisteiden koordinaatteja, $n = 3N$ ja nämä yhtälöt voi ryhmittää N :ksi yhtälöksi vektoreille \mathbf{r}_j

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad j = 1, \dots, N.$$

Mikäli siis systeemin sidosehdot ovat holonomiset, tällä reseptillä voidaan välttää toisistaan riippuvien koordinaattien esiintyminen. Tässä kirjassa oletetaan yleensä ainakin implisiittisesti, että sidokset ovat holonomisia. Ei-holonomiset sidokset ovat paljon hankalampia eikä niiden käsittelyyn ole yleistä menetelmää. Rajatuissa tapauksissa niitä voi kuitenkin käsitellä Lagrangen mekaniikan kalustolla.

Esimerkki holonomisista sidoksista

Tarkastellaan kahta massapistettä (m_1 ja m_2), jotka ovat l :n mittaisen jäykän massattoman tangon molemmissa päissä ja toinen massapisteistä on rajoitettu liikkumaan (x, y) -tasossa ρ -säteisellä ympyrällä. Etsitään tälle systeemille riippumattomat koordinaatit ja koordinaattimuunnokset.

Sijoitetaan systeemin origo ympyrän keskipisteeseen eli z -akseli kulkee sen kautta. Olkoon φ_1 kulma, joka on laskettu x -akselista ympyrän säteellä, φ_2 x -akselin ja tangon xy -tason projektion välinen kulma ja θ_2 z -akselin ja tangon välinen kulma. Molempien massapisteiden paikat voidaan kuvata yhteensä kuudella koordinaatilla. Tehtävässä annetut ehdot antavat kuitenkin seuraavat holonomiset sidosehdot

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - l &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ |\mathbf{r}_1| - \rho &= 0. \end{aligned}$$

Nämä kolme sidosehtoa pudottavat riippumattomien koordinaattien määrän kolmeksi, joiksi voidaan valita kulmat φ_1 , φ_2 ja θ_2 . Ne saadaan muunnoksilla

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi_1 \\ x_2 &= \rho \sin \varphi_1 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= \rho \cos \varphi_1 + l \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ x_5 &= \rho \sin \varphi_1 + l \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ x_6 &= l \cos \theta_2. \end{aligned}$$



Kuva 3.2: Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

3.3 Virtuaalinen työ

Virtuaalisen työn käsite on tärkeä siirryttäessä Lagrangen mekaniikkaan. Kirjoitetaan edellä olleiden muunnoskaavojen avulla x_i -koordinaatin differentiaali

$$dx_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt. \quad (3.3)$$

Virtuaalisella siirroksella δx_i koordinaatin x_i suuntaan tarkoitetaan infinitesimaalista, hetkellistä, kuvitteellista siirrosta, joka noudattaa ennalta annettuja sidoksia. Oletetaan sidokset tässä holonomisiksi. Hetkellisyys merkitsee sitä, että aikadifferentiaali voidaan jättää huomiotta ja siten virtuaalinen siirros yleistettyjen koordinaattien avulla lausuttuna on

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (3.4)$$

Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) (Kuva 3.2) lähti liikkeelle ideasta, että kitkattomista sidoksista johtuvat voimat eivät tee työtä virtuaalisissa siirroksissa eli $\mathbf{F}^{(s)} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$. Kirjoitetaan Newtonin liikeyhtälö koko systeemin sille komponentille, jonka suuntaan virtuaalinen siirros on tehty

$$\dot{p}_i = F_i + F_i^{(s)}. \quad (3.5)$$

Kerrotaan yhtälö mielivaltaisella virtuaalisella siirroksella ja summataan kaikkien komponenttien yli

$$\sum_{i=1}^n (F_i + F_i^{(s)} - \dot{p}_i) \delta x_i = 0. \quad (3.6)$$

Koska d'Alembertin oletuksen mukaisesti sidosvoimat eivät tee työtä, jää jäljelle

$$\sum_{i=1}^n (F_i - \dot{p}_i) \delta x_i = 0. \quad (3.7)$$

Tämä lauseke tunnetaan **d'Alembertin yhtälönä** tai **periaatteena**. Jos systeemissä ei ole sidoksia, δx_i :t ovat riippumattomia ja yhtälö tuottaa Newtonin yhtälöt komponenttimuodossa ($\dot{p}_i = F_i$). Jos systeemissä kuitenkin on sidoksia, tilanne on hankalampi. Tällöin kannattaa siirtyä yleistettyihin koordinaatteihin, joiden δq :t ovat riippumattomia, vaikka itse koordinaattien määrittely-yhtälöt sisältävätkin sidokset.

Ulkoisen voima tekee virtuaalisessa siirroksessa **virtuaalista työtä**

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i = \sum_{j=1}^{n-k} \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (3.8)$$

Määritellään **yleistetty voima**, jonka komponentit ovat

$$Q_j = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}. \quad (3.9)$$

Tällöin virtuaalinen työ on

$$\delta W = \sum_{j=1}^{n-k} Q_j \delta q_j. \quad (3.10)$$

Yleistetyn voiman dimensio ei ole välttämättä sama kuin tavallisen voiman, mutta tulon $Q_j \delta q_j$ dimensio on aina työn eli energian dimensio, SI-yksikkönä joule.

Huom. Edellä luvut $(\partial x_i / \partial q_j)$ muodostavat koordinaattijärjestelmien $\{x_i\}$ ja $\{q_j\}$ välisen muunnosmatriisin elementit.

3.4 Lagrangen yhtälöt

Lagrangen yhtälöiden johtamiseksi tarkastellaan d'Alembertin yhtälössä olevia hitaus-termejä \dot{p}_i

$$\sum_i \dot{p}_i \delta x_i = \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j. \quad (3.11)$$

Muokataan sulkulauseketta seuraavasti

$$\sum_i m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right]. \quad (3.12)$$

Päämäärän saavuttamiseksi tarvitaan kahta aputulosta. Jaetaan lauseke (3.3) ensin dt :llä, jolloin saadaan

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

ja derivoidaan tämän lausekkeen molemmat puolet \dot{q}_j :n suhteen. Näin saadaan

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (3.13)$$

eli “pisteet voi supistaa”. (Muistutus: kokonaisdifferentiaaleja (esim. dt , dx , jne.) voi supistaa, mutta osittaisdifferentiaaleille (∂t , ∂x , jne) ei niin voi yleisesti tehdä.) Toiseksi apuvälineeksi lasketaan aikaderivaatta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_{l=1}^{n-k} \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_l \frac{\partial x_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Näiden avulla saadaan lopulta suoralla laskulla tulos

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2. \quad (3.15)$$

Lausekkeeseen on tullut siis kineettisen energian T derivaattoja. Sijoitetaan tämä nyt d’Alembertin yhtälöön ja todetaan, että yhtälön tulee toteutua kaikilla virtuaalisilla siirroksilla. Täten on oltava

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (3.16)$$

kaikilla $j = 1, \dots, n - k$.

Huom. Saatua yhtälöryhmä ei ole yhtälö liike-energialle T vaan radalle $\{q_j(t)\}$.

Oletetaan sitten, että ulkoiset voimat ovat konservatiivisia

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} U(q_1, q_2, \dots, q_{n-k}, t), \quad (3.17)$$

jolloin potentiaali ei riipu nopeudesta eli $\partial U / \partial \dot{q}_j = 0$. Ottamalla käyttöön **Lagrangen funktio** $L = T - U$ saadaan **Lagrangen yhtälöt**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (3.18)$$

Yhtälöitä on siis yksi jokaista yleistettyä vapausastetta j kohti. Nämä yhtälöt ovat voimassa holonomisille systeemeille. Jos sidokset ovat lisäksi skleronomiset, L ei riipu eksplisiittisesti ajasta.

Esim. 1. Hiukkasen liikeyhtälö homogeenisessa painovoimakentässä

Normitetaan hiukkasen potentiaalienergia nolaksi (x_1, x_2) -tasossa, joten $U = mgx_3$. Kineettinen energia on puolestaan $T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$. Laskemalla Lagrangen funktion $L = T - U$ derivaatat, saadaan Lagrangen yhtälöistä

$$m\ddot{x}_1 = 0 ; m\ddot{x}_2 = 0 ; m\ddot{x}_3 = -mg. \quad (3.19)$$

Nämä ovat Newtonin mekaniikasta tutut vinon heittoliikkeen yhtälöt.

Esim. 2. Matemaattinen heiluri Lagrangen formalismissa

Tuodaan edelliseen esimerkkiin mukaan sidosehto, että liike tapahtuu (x_1, x_3) -tasossa ja siirrytään "yleistettyihin" koordinaatteihin (triviaalilla) muunnoksella

$$x_1 = q_1 ; x_3 = q_2 ; \text{sidosehto: } x_2 \equiv 0. \quad (3.20)$$

Nyt Lagrangen funktio on muotoa

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - mgq_2. \quad (3.21)$$

Lisätään vielä sidosehto, että massapisteen etäisyys origosta on vakio l eli $l^2 = q_1^2 + q_2^2$. Jäljelle jää enää yksi riippumaton vapausaste, joksi valitaan q_2 -akselin ja massapisteen ja origon välisen janan välinen kulma θ . Tällöin

$$q_1 = l \sin \theta ; q_2 = -l \cos \theta \quad (3.22)$$

ja

$$\dot{q}_1 = l\dot{\theta} \cos \theta ; \dot{q}_2 = l\dot{\theta} \sin \theta \quad (3.23)$$

Lagrangen funktioksi tulee tällä kertaa

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta. \quad (3.24)$$

Laskemalla jälleen L :n derivaatat Lagrangen funktio antaa tuloksen

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (3.25)$$

Eli on päädytty samaan matemaattisen heilurin yhtälöön kuin edellisessä luvussa. Tästä eteenpäin ratkaisu tietenkin etenee kuten aiemmin eli mielivaltaisilla kulmilla edessä on elliptisen integraalin laskeminen. Pienillä kulmilla $\sin \theta \approx \theta$, joten

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad (3.26)$$

jonka ratkaisuna on tuttu sinikäyrä.

Esim. 3. Liikemäärämomentin säilyminen tasoliikkeessä

Tarkastellaan massapisteen m liikettä tasossa. Käytetään napakoordinaatteja (r, θ) . Muunnoskaavat ovat

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta.\end{aligned}$$

r ja θ ovat ajan funktioita, joten

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

ja kineettiseksi energiaksi saadaan

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Yleistetyn voiman komponentit ovat

$$Q_j = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$$

eli

$$\begin{aligned}Q_r &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial (r\mathbf{e}_r)}{\partial r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r = F_r \\ Q_\theta &= \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \mathbf{F} \cdot (r\mathbf{e}_\theta) = rF_\theta,\end{aligned}$$

joista Q_θ on voiman \mathbf{F} momentti origon suhteen. (Huom. Tässä ei oleteta voiman konservatiivisuutta.)

Sijoittamalla nämä yhtälöön

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

saadaan suorilla derivoinneilla

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta, \quad (3.27)$$

mikä on tietenkin liikemäärämomentin säilymlaki.

Esim. 4. Massapiste, joka liikuu pitkin tasaisesti pyörivää lankaa

Esimerkkinä reonomisista sidosehdoista tarkastellaan massapistettä, joka liikuu keskipakovoiman johdosta pitkin tasaisella kulmanopeudella ω pyörivää lankaa. Olkoon massapisteen etäisyys pyörimisliikkeen keskipisteestä r . Muunnosyhtälöt ovat nyt

$$\begin{aligned}x &= r \cos \omega t \\ y &= r \sin \omega t.\end{aligned}$$

Tässä tilanteessa on vain yksi vapausaste, joten r riittää ainoaksi koordinaatiksi. Lagrangen funktio on

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2).$$

Lagrangen yhtälöstä saadaan sitten suoralla laskulla

$$\ddot{r} = r\omega^2, \quad (3.28)$$

mikä on tietenkin tuttu lauseke keskipakoiskiihtyvyydelle.

3.5 Nopeudesta riippuvat potentiaalit

Edellä on oletettu, että potentiaali riippuu vain koordinaateista $\{q\}$. Tietyissä tapauksissa myös nopeudesta riippuva potentiaali vääntyy Lagrangen yhtälön kaltaiseen muotoon. Tämä on mahdollista, jos potentiaali $U(q, \dot{q})$ on sellainen, että yleistetty voima voidaan kirjoittaa muotoon

$$Q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l} \right). \quad (3.29)$$

3.5.1 Sähkömagneettinen kenttä

Tärkeä erikoistapaus nopeudesta riippuvista voimista on **sähkömagneettinen kentän** voimavaikutuksen magneettikentästä johtuva osa. Tässä oletetaan sähkö- ja magneettikentät sekä Maxwellin yhtälöt tunnetuiksi.

Varattu hiukkanen tuntee sähkö- ja magneettikenttien (\mathbf{E} ja \mathbf{B}) vaikutuksen **Lorentzin voiman** välityksellä

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.30)$$

Voiman magneettinen osa riippuu siis nopeudesta eikä sitä voida siten ilmaista suoraan nopeudesta riippumattoman potentiaalifunktion gradienttina.

Kaikeksi onneksi sähkömagneettiset kentät toteuttavat Maxwellin yhtälöt, joiden avulla päästään muotoa (3.29) olevaan voimaan. Tässä laskussa tarvitaan Maxwellin yhtälöistä Faradayn lakia

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.31)$$

ja magneettikentän lähteettömyyttä

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.32)$$

Jälkimmäisestä seuraa, että on olemassa vektorikenttä \mathbf{A} siten, että $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Sijoittamalla tämä Faradayn lakiin saadaan $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}) = 0$, eli on olemassa skalaarikenttä

Φ siten, että $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \Phi$. Eli sähkö- ja magneettikentät voidaan ilmaista näiden skalaari- ja vektoripotentialien avulla

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.34)$$

(Huom. merkintä $\partial_t \equiv \partial/\partial t$.)

Lorentzin voima skalaari- ja vektoripotentialien avulla kirjoitettuna on siis

$$\mathbf{F} = q(-\nabla \Phi - \partial_t \mathbf{A} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A})). \quad (3.35)$$

Käytetään tässä karteesisia koordinaatteja ($i = x, y, z$) ja lasketaan viimeisen termin i -komponentti

$$(\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i = \partial_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)A_i.$$

Toisaalta koska \mathbf{A} on paikan ja ajan funktio,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}.$$

Yhdistämällä nämä tulokset saadaan Lorentzin voiman i -komponentille

$$F_i = q \left(-\partial_i \Phi - \partial_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \frac{dA_i}{dt} \right).$$

Koska potentiaalit Φ ja \mathbf{A} itse eivät riipu nopeudesta, voidaan kirjoittaa

$$A_i = \frac{\partial}{\partial v_i}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial v_i}[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - \Phi],$$

joten

$$F_i = q \left[-\partial_i(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v_i}(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

Eli on löydetty potentiaali $U = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})$, jonka avulla voima voidaan kirjoittaa muotoon

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}_i} \right). \quad (3.36)$$

Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 - U \quad (3.37)$$

ja varatun hiukkasen liikeyhtälö Lagrangen formalismissa on

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0. \quad (3.38)$$

Tässä ei ole itse asiassa tehty mitään uutta, sillä sijoittamalla (3.37) Lagrangen yhtälöön päästään takaisin Newtonin liikeyhtälöön, jossa voimana on Lorentzin voima. Koko

touhu saattaa aluksi tuntua turhalta kikkailulta. Potentiaalifunktion U löytyminen on kuitenkin ratkaisevan tärkeä askel siirryttäessä kvanttimekaniikkaan. Elektroni ja protonihan ovat kaikkein tärkeimpiä kvanttihiukkasia ja ne tuntevat Lorentzin voiman. Mikäli liikeyhtälöä ei voitaisi kirjoittaa Lagrangen formalismissa, kvanttimekaniikka olisi vielä paljon hankalampaa kuin se oikeasti on, jos sitä ylipäänsä olisi olemassa. Skalaari- ja vektoripotentiaaleille on paljon käyttöä myös klassisessa elektrodynamiikassa. Niinpä tämän harjoitelman tärkein anti onkin kurkistus fysiikan eri alojen syvällisempään yhteyteen.

3.5.2 Kitkavoimat

Kitkavoimat riippuvat usein kappaleen nopeudesta. Tarkastellaan esimerkkiä, jossa kitkavoiman x -akselin suuntaan vaikuttava komponentti on muotoa

$$F_x^{(f)} = -k_x v_x. \quad (3.39)$$

Otetaan käyttöön **Rayleigh'n dissipaatiofunktio**

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2), \quad (3.40)$$

missä i indeksoi systeemin kappaleet. Selvästikin

$$F_x^{(f)} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_x}. \quad (3.41)$$

Lasketaan nyt systeemin tekemä työ kitkaa vastaan

$$dW^{(f)} = -\mathbf{F}^{(f)} \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}^{(f)} \cdot \mathbf{v} dt = (k_x v_x^2 + k_y v_y^2 + k_z v_z^2) dt. \quad (3.42)$$

Siis $2\mathcal{F}$ on kitkan aiheuttama energian muutosnopeus (dW/dt) eli teho. Kitkan tapauksessa puhutaan energian **dissipaatiosta**

Yleistetyn voiman komponenteiksi tulee

$$\begin{aligned} Q_j &= \sum_i \mathbf{F}_i^{(f)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \\ &= -\sum_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \quad (3.43)$$

ja Lagrangen yhtälöt saavat muodon

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0. \quad (3.44)$$

Liiekeyhtälön määräämiseen tarvitaan siten kaksi funktiota L ja \mathcal{F} .

3.6 Hamiltonin periaate

Hamilton kehitti Lagrangen mekaniikkaa entistä elegantimpaan suuntaan, missä nk. minimiperiaatteilla on keskeinen osa. Ensimmäisenä minimiperiaatetta ajatteli ilmeisesti Newtonin aikalainen ja kilpailija *Gottfried Wilhelm von Leibnitz* (1646–1716), mutta varsinaisesti ensimmäisen minimiperiaatteeseen perustuvan mekaniikan formuloinnin esitti *Pierre-Louis Moreau de Maupertuis* (1698–1759). Hän lähti (luultavasti) liikkeelle *Pierre de Fermat*'n (1601–1665) optiikan tutkimuksista. Fermat oli nimittäin esittänyt optiikan peruslain muodossa: “Valo kulkee pisteiden \mathbf{r}_0 ja \mathbf{r} välisen matkan tietä, jolle integraali $\int_{r_0}^r ds/\lambda$ saa miniminsä.” Tässä λ on valon aallonpituus.

Maupertuis muotoili mekaniikkansa perusajatuksen seuraavasti: “Kaikkien mahdollisten liikkeiden joukosta luonto valitsee sen, joka toteutuu pienimmällä vaikutuksella.” Maupertuis’n ajattelussa oli siten mukana jonkin verran mystiikkaakin. Tässä tulee kuitenkin ensimmäistä kertaa eteen tärkeä käsite **vaikutus**. Vaikutus määritellään klassisessa mekaniikassa integraalina

$$S = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} m\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.45)$$

Kirjoitetaan $|d\mathbf{r}| = v dt$ ja huomioidaan, että pitkin rataa $\mathbf{v} \parallel d\mathbf{r}$. Siten

$$S = \int_{t_0}^t mv^2 dt = \int_{t_0}^t 2T dt. \quad (3.46)$$

Konservatiiviselle systeemille $E = T + U$ on säilyvä suure ja

$$S = \int_{t_0}^t (T + E - U) dt = E \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t (T - U) dt. \quad (3.47)$$

Nyt integraaliin on ilmaantunut Lagrangen funktio.

Hamilton käytti ääriarvoperiaatteensa formulointiin *Leonhard Eulerin* (1707–1783) (Kuva 3.3) ja Lagrangen kehittämää variaatiolaskentaa.³ **Hamiltonin periaate** voidaan ilmaista sanallisesti

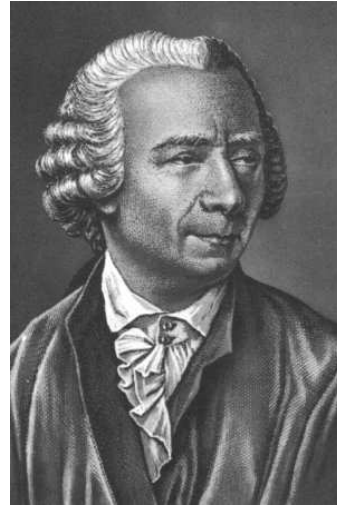
- Kaikkien pisteiden $\{q_1\}$, $\{q_2\}$ välisten mahdollisten ratojen joukosta valikoituu se, jolle **Hamiltonin vaikutusintegraali**

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q(t)\}, \{\dot{q}(t)\}, t) dt$$

saa ääriarvonsa, joko minimin tai maksimin.

Jälleen hieman terminologiaa: Vaikutus määritellään perinteisesti yhtälöllä (3.45). Modernimmassa kirjallisuudessa kuitenkin Hamiltonin vaikutusintegraalia kutsutaan vaikutukseksi tai vaikutusintegraaliksi (*action (integral)*) ja yhtälöllä (3.45) määriteltyä suurta lyhennetyksi vaikutukseksi (*abbreviated action*).

³Yksi myöhemmistä variaatiolaskennan kehittäjistä oli suomalainen Lorenz Lindelöf, jonka teos *Leçon de calcul de variations* vuodelta 1861 oli vuosikymmeniä alan johtava oppikirja maailmassa.



Kuva 3.3: Leonhard Euler
(1707–1783)

3.6.1 *Matemaattinen apuneuvo: variaatiolaskenta

Emme käy tässä yhteydessä opiskelemaan variaatiolaskentaa kovin syvällisesti, mutta käsitellään tässä muutama yksinkertainen ongelma, jotta idea tulee ymmärretyksi. Variaatiolaskennassa on kysymys jonkin halutun suureen ääriarvon antavan funktion etsimisestä, esim. mikä on lyhin tie kahden pisteen välillä tai minkä muotoinen kahden pisteen välillä määritelty käyrä antaa pienimmän pinta-alan pyörähtäessään halutun akselin ympäri.

Jotta ongelma saataisiin matemaattiseen muotoon, tarkastellaan funktiota $f(y, \dot{y}, x)$, joka on määritelty radalla $y = y(x)$ ja piste tarkoittaa nyt derivaattaa $\dot{y} = dy/dx$. Tehtävänä on etsiä rata $y(x)$ siten, että integraalilla

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \dot{y}, x) dx \quad (3.48)$$

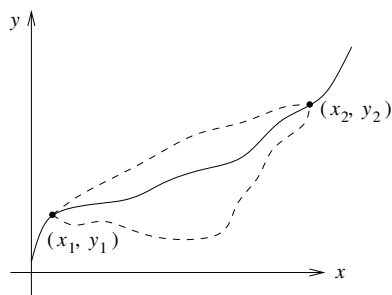
on stationaarinen arvo verrattuna ratoihin, jotka poikkeavat infinitesimaalisen verran etsitystä radasta.

Otetaan käyttöön variaatioparametri α ja olkoon $\eta(x)$ funktio, joka häviää integraalin päätepisteissä $x = x_1$ ja $x = x_2$. Kirjoitetaan y myös variaatioparametrin α funktiona

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x), \quad (3.49)$$

jolloin J on α :n funktio

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f(y(x, \alpha), \dot{y}(x, \alpha), x) dx. \quad (3.50)$$



Kuva 3.4: Radan variointi.

Variaatioparametri on siis muuttuja, joka vastaa eri reittejä päätepisteestä toiseen (Kuva 3.4). Etsitty stationaarinen ratkaisu on integraalin J ääriarvo (ekstreemiarvo)

$$\left(\frac{dJ}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} = 0. \quad (3.51)$$

Lasketaan tämä derivaatta

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial \alpha} \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right|_{x_1}^{x_2} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Derivaatta häviää, kun $\alpha = 0$, jos

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)_0 dx = 0. \quad (3.53)$$

Koska $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$, olemme saaneet ehdon muotoon

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x) \eta(x) dx = 0. \quad (3.54)$$

Nyt matemaatikot ovat osoittaneet nk. **variaatiolaskennan peruslemman**: Jos yllä oleva ehto on voimassa kaikille mielivaltaisille kaksi kertaa jatkuvasti derivoituville funktioille $\eta(x)$, niin $M(x) = 0$ välillä (x_1, x_2) . Tämän perusteella J :llä on stationaarinen arvo ainoastaan, jos

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0. \quad (3.55)$$

Tulos tunnetaan matematiikassa **Eulerin yhtälönä**. Se on samaa muotoa kuin tuttu Lagrangen yhtälö, kun korvataan $f \rightarrow L$, $y \rightarrow q$ ja $x \rightarrow t$.

Yllä oleva tarkastelu ei kerro, onko löydetty stationaarinen arvo minimi vai maksimi. Fysikaalisissa tilanteissa se selviää yleensä ongelmanasettelusta. Tarkastellaan tässä muutamia klassisia esimerkkejä.

Esim. 1. Lyhin tie kahden pisteen välillä tasossa

Kaaren pituuselementti tasossa on $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ja kaaren kokonaispituus saadaan integroimalla

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Nyt tälle pitäisi löytää minimi. Yhtälöön (3.55) sijoitettava funktio on siis $f = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$ ja

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}.$$

Nyt Eulerin yhtälöstä saadaan suoralla laskulla tuttu tulos $y = ax + b$ eli suora viiva. Integroimisvakiot a ja b määrätään annettujen kahden pisteen mukaan.

Esim. 2. Etsittävä käyrä, jonka pyörähtäminen tuottaa pienimmän pinnan

Tämä on hieman monimutkaisempi ongelma. Tarkastellaan käyrää, joka yhdistää xy -tasossa pisteet $(x_1, y_1, 0)$ ja $(x_2, y_2, 0)$. Sen käyräelementti on $ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$, joka pyörähtäessään y -akselin ympäri tuottaa nauhan, jonka pinta-ala on

$$dA = 2\pi x ds = 2\pi x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Kokonaispinta-alaksi tulee

$$A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx.$$

Nyt Eulerin yhtälöön sijoitetaan

$$f = x \sqrt{1 + \dot{y}^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}},$$

joten

$$\frac{d}{dx} \frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = 0$$

\Rightarrow

$$\frac{x\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = a$$

\Rightarrow

$$\dot{y}^2(x^2 - a^2) = a^2$$

\Rightarrow

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

⇒

$$y = a \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + b = a \cosh^{-1} \frac{x}{a} + b,$$

josta ratkaisemalla x saadaan **ketjukäyrän** (engl. catenary curve) yhtälö

$$x = a \cosh \frac{y - b}{a}.$$

Käyrän päätepisteet määräävät integroimisvakiot a ja b . Nimitys ketjukäyrä tulee siitä, että sama ratkaisu löytyy myös ongelmaan, mihin muotoon asettuu päätepisteistään ripustettu ketju (tai vaikka pyykkinaru).

Esim. 3. Brachistocrone-ongelma

Vuonna 1696 *Jean Bernoulli* keksi ratkaisun kysymykseen: “Millaista rataa pitkin kappale putoaa pisteestä A pisteeseen B lyhyimmässä ajassa?” Hän esitti aikansa matemaatikoille haasteen ratkaista ongelma ja lupasi esittää ratkaisun puolen vuoden kuluttua. Tässä ajassa ongelman ratkaisivat Leibnitz ja *Daniel Bernoulli*. Newton kuuli ongelmasta vasta myöhemmin, mutta lähetti seuraavana päivänä anonyymien ratkaisun. Nähtyään ratkaisun Bernoullin kerrotaan sanoneen tunnustavansa leijonan kynsistään. Viides ongelman riippumattomasti ratkaissut henkilö oli *l'Hospital*.

Tässä ongelmassa on minimoitava aika

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Tarkastellaan liikettä xy -tasossa, missä y -akseli osoittaa alaspäin ja kappale alkaa pudota tasolta $y = 0$. Systeemin energia säilyy, joten $mgy = \frac{1}{2}mv^2$, missä m on kappaleen massa ja g vetovoiman kiihtyvyys. Kappaleen nopeus on siten $v = \sqrt{2gy}$ ja minimoitavaksi ajaksi tulee

$$t_{12} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

Laskun yksityiskohdat jääkööt harjoitustehtäväksi. Ratkaisu on

$$x = -\sqrt{ay - y^2} + \frac{a}{2} \arccos(1 - 2y/a).$$

Tämä on sykloidin kaari, jossa lähtöpiste on sykloidin kärkipisteessä. Käyrän parametrimuotoinen lauseke on yksinkertaisemman näköinen

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\varphi - \sin \varphi) \\ y &= \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

3.6.2 Lagrangen yhtälöiden johtaminen Hamiltonin periaatteesta

Palataan sitten mekaniikkaan ja tarkastellaan, kuinka Lagrangen yhtälöt seuraavat Hamiltonin periaatteesta. Olkoon $q(t)$ systeemin todellinen rata ja $q'(t) = q(t) + \delta q(t)$ infinitesimaalisesti varioitu rata. Yleistetyt nopeudet varioituvat määrällä $\delta \dot{q}(t) = \dot{q}'(t) - \dot{q}(t)$. Oletetaan lisäksi, että päätepisteissä variaatiot häviävät (Kuva 3.4). Vaikutusintegraalin variaatioksi tulee

$$\begin{aligned} \delta I &= I' - I \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(\{q + \delta q\}, \{\dot{q} + \delta \dot{q}\}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Jotta kyseessä olisi I :n ääriarvo, variaation δI täytyy hävitä, kun $\delta q_j \rightarrow 0$ kaikilla j . Tämän näkemiseksi muokataan integrandin viimeistä tekijää

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \right) - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j. \quad (3.57)$$

Koska päätepisteiden variaatiot ovat nollia, antaa yhtälön oikean puolen ensimmäinen termi integroitaessa nollan. Siten variaatiointegraali saa muodon

$$\begin{aligned} \delta I &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j dt. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Koska tämän on hävitävä kaikilla variaatioilla varsinaisen radan läheisyydessä, jäävät jäljelle juuri Lagrangen yhtälöt.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \quad (3.59)$$

kaikilla $j = 1, \dots, n - k$. Olemme siis todistaneet, että Lagrangen yhtälöt seuraavat Hamiltonin periaatteesta. Hamiltonin periaatetta voi siten käyttää mekaniikan peruspostulaattina.

Hamiltonin periaate myös seuraa Lagrangen yhtälöistä, mikäli systeemin sidokset ovat holomisia. On olemassa ei-holonomisia sidosehtoja, joille voidaan muodostaa oikeat liikeyhtälöt lähtien d'Alambertin periaatteesta, mutta joille Hamiltonin periaatteesta seuraa väärät yhtälöt.⁴

⁴Asiaa on käsitelty seikkaperäisesti kirjassa C. Cronström, *Fysiikan matemaattiset menetelmät II*, Limes r.y., 2006.

3.7 Sidosvoimat

Vaikka d'Alembertin periaatteen ja yleistettyjen koordinaattien käyttö lakaiseekin sidosvoimat maton alle ja helpottaa liikeradan ratkaisemista, sidosvoimien tunteminen saattaa olla tärkeää käytännön ongelmissa. Palataan takaisin koordinaatteihin x_i . Olivatpa ne riippumattomia tai ei, on voimassa

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i dt = 0. \quad (3.60)$$

Oletetaan sitten, että systeemiin liittyy k kappaletta holonomisia sidoksia

$$f_l(x_1, \dots, x_n, t) = 0, \quad l = 1, \dots, k. \quad (3.61)$$

Näiden variaatioille

$$\delta f_l = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \delta x_i = 0, \quad l = 1, \dots, k. \quad (3.62)$$

Nämä nollat voidaan kertoa funktioilla $\lambda_l = \lambda_l(\{x_i\})$ ja lisätä alkuperäiseen yhtälöön

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} \right) \delta x_i dt = 0. \quad (3.63)$$

Siirrytään sitten koordinaatistoon, jossa on $n - k$ kappaletta riippumattomia koordinaatteja, joita merkitään $\{y_j\}$. Joukko $\{y_l\}$, $l = n - k + 1, \dots, n$, on sitten jäljelle jäävien ei-riippumattomien koordinaattien joukko. Funktioita λ_l kutsutaan **Lagrangen kertojiksi** ja ne on valittava siten, että riippuvien koordinaattien variaatioiden kertoimet häviävät. Tällöin jää jäljelle yhtälöryhmä

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_i} \quad (3.64)$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$.⁵ Nämä n yhtälöä yhdessä k :n sidosyhtälön kanssa määräävät sekä koordinaatit $\{y_i(t)\}$ (n kpl) että kertoimet $\{\lambda_l\}$ (k kpl).

Mistä tässä on kyse, selviää kirjoittamalla $L = T - U$, jolloin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i} + \sum_{l=1}^k \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_i}. \quad (3.65)$$

Siis oikean puolen jälkimmäisen termin voi ajatella sidoksiin liittyvänä voimana samaan tapaan kuin potentiaalifunktion gradientti on todellinen voima.

⁵Huom. Tässä tarkastelussa saavutettiin yhtälöiden (3.64) voimassaolo toisistaan riippuvien koordinaattien tapauksessa valitsemalla Lagrangen kertojien arvot sopivasti. Riippumattomien koordinaattien osalta niiden voimassaolo seuraa Hamiltonin periaatteesta.

Esim. 1. Heiluri tasossa

Palataan luvun alussa käsitellyyn matemaattiseen tasoheiluriin. Valitaan koordinaateiksi heilahduskulma θ ja massan m etäisyys ripustuspisteestä r . Kyseessä ovat siis napakoordinaatit, joiden yhteys karteesisiin koordinaatteihin on $x = r \cos \theta$ ja $y = r \sin \theta$, kun x -akseli osoittaa origosta gravitaatiokiihtyvyyden suuntaan (Kuva 1.3). Ilman sidosehtoja systeemin Lagrangen funktioksi tulee

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgx = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

Heilurin sidosehto on napakoordinaateissa yksinkertaisesti

$$f(r, \theta) \equiv r - l = 0,$$

jota käytettiin aikaisemmin eliminoimaan ongelmasta toinen koordinaatti (r). Käytetään nyt kuitenkin Lagrangen kertojamenetelmää. Lasketaan $\partial f/\partial r = 1$ ja $\partial f/\partial \theta = 0$, ja kirjoitetaan yhtälö (3.64) komponenteittain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial r} = \lambda, \end{aligned}$$

missä siis oikealla ovat sidosvoiman komponentit. Merkitän niitä $(Q_r^{(s)}, Q_\theta^{(s)})$. Näistä saadaan yhdessä sidosehdon kanssa

$$\begin{aligned} mr^2\ddot{\theta} + mgr \sin \theta &= 0 \\ m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mg \cos \theta &= \lambda \\ r &= l, \end{aligned}$$

ja käyttämällä viimeistä yhtälöä kahdessa muussa, saamme heilurin liikeyhtälöksi ja sidosvoiman suuruudeksi

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} + (g/l) \sin \theta &= 0 \\ Q_r^{(s)} = \lambda &= -m(l\dot{\theta}^2 + g \cos \theta). \end{aligned}$$

Tässä $-Q_r^{(s)}$ on tietenkin kappaleesta 1.4.2 tuttu jännitysvoima J .

Esim. 2. Hiukkanen paraboloidilla

Tarkastellaan paraboloidilla liikkuvaan kappaleeseen vaikuttavia sidosvoimia. Paraboloidi on siis pinta, joka syntyy, kun paraabeli pyörähtää symmetria-akselinsa ympäri. Paraboloidin pinnan yhtälö on $z = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2)$, missä a on vakio. Sidosehto on siis

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}a(x^2 + y^2) - z = 0.$$

Tarkastellaan tilannetta sylinterikoordinaateissa (r, θ, z) :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z,\end{aligned}$$

jolloin $f = \frac{1}{2}ar^2 - z$.

Koska tarkastellaan pelkästään pinnasta aiheutuvaa sidosvoimaa, voidaan gravitaatiokiihtyvyys jättää huomiotta $g = 0$ ja $U = 0$. Lagrangen funktioksi tulee

$$L = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

ja Lagrangen yhtälöiksi sidosvoimiseen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \lambda \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

missä koordinaatit $\{q_j\}$ ovat (r, θ, z) . Laskemalla derivaatat saadaan liikeyhtälöiksi

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= \lambda ar \\m \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) &= 0 \\m\ddot{z} &= -\lambda.\end{aligned}$$

Näistä keskimmäisen integraali antaa liikemäärämomentin z -komponentin, joka voidaan sijoittaa ensimmäiseen ja viimeisessä yhtälössä voidaan kirjoittaa $z = \frac{1}{2}ar^2$.

Kaiken kaikkiaan liikeyhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{aligned}m\ddot{r} - \frac{l_z^2}{mr^3} &= \lambda ar \\m(r^2\dot{\theta}) &= l_z \\mar^2 + r\ddot{r} &= -\lambda.\end{aligned}$$

Kappaleen energiaksi saadaan

$$E = T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left[(1 + a^2r^2)\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{m^2r^2} \right]$$

ja Lagrangen kerroin λ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\lambda = -a \frac{2E + (a^2l_z^2/m)}{(1 + a^2r^2)^2}.$$

Lienee selvää, että näiden kaivaminen esiin ilman Lagrangen mekaniikan välineitä olisi paljon työläämpi homma.

Esim. 3. Pyykkinaru

Tärkeä esimerkki Lagrangen kertojien avulla ratkeavasta ongelmasta on selvittää mihin muotoon kahden tukipisteen väliin ripustettu köysi asettuu. Köyden pituus on D (sidosehto) ja tukipisteiden väli $2a < D$. Ongelman ratkaisu on ketjukäyrä

$$\frac{y}{\lambda} = \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) - 1,$$

missä λ on yhtälön

$$D = 2\lambda \sinh\left(\frac{a}{\lambda}\right).$$

ratkaisu.

Jätetään laskun yksityiskohdat harjoitustehtäväksi. Todetaan kuitenkin, että tämä on sama käyrä, joka löydettiin edellä variaatiolaskennalla, kun etsittiin minimaalisen pyörähdyspinnan tuottavaa käyrää. Näillä kahdella ongelmalla on siis jokin yhteys ja sen mietiskely on hyvää harjoitusta fyysikaalisen intuition kehittämiseksi.

3.8 Kanoniset impulssit

Aluksi hieman kielenkäytöstä. Olemme tähän asti käyttäneet termejä liikemäärä ja liikemäärämomentti vastaamaan englannin kielen termejä “momentum” ja “angular momentum”. Termi “impulssimomentti” on kuitenkin yhä laajalti käytössä liikemäärämomentin synonyyminä. Hamiltonin mekaniikassa liikemäärää vastaa käsite “canonical momentum”, joka olisi johdonmukaisinta kääntää “kanoninen liikemäärä”, mutta me poikkeamme tässä johdonmukaisuudesta ja käytämme traditionaalisempaa termiä “kanoninen impulssi”.

Kanoniset impulssit määritellään kaavalla

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.66)$$

Lagrangen yhtälöiden aikaderivaattatermi on nyt tietenkin \dot{p}_i , joten

$$\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.67)$$

Esim. 1. Massapiste konservatiivisessa voimakentässä

Käytetään karteesisia koordinaatteja eli

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

Tästä näemme suoraan, että karteesisia koordinaatteja vastaavat kanonisen impulssin koordinaatit ovat tavallisen liikemäärän komponentit (p_x, p_y, p_z) . Jos taas tarkastellaan liikettä keskeispotentialissa käyttäen pallokoordinaatteja liikkeen ratatasossa

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r),$$

kanonisen impulssin komponenteiksi tulee

$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r} \\ p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi} \end{aligned}$$

eli kulmakoordinaattia vastaava kanonisen impulssin komponentti on liikemäärämomenti sen akselin ympäri, jota kulma kiertää.

Esim. 2. Kanoninen impulssi sähkömagneettisessa kentässä

Kirjoitetaan seuraavaksi Lagrangen funktio sähkömagneettisessa kentässä karteesisten koordinaattien avulla muodossa

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\Phi.$$

Kanonisen impulssin x -komponentiksi tulee

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + qA_x \quad (3.68)$$

ja samoin muille komponenteille. Siis sähkömagneettisessa kentässä liikemäärä on

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}. \quad (3.69)$$

Huom. Tämä on kanoninen impulssi vain, jos koordinaatit ovat karteesiset!

Tämä on erinomaisten tärkeä tulos, sillä hiukkasen mekaanisen liikemäärän lisäksi sähkömagneettisella kentällä itsellään on liikemäärää. Newtonin III laki johtaa kokonaisliikemäärän $\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i$ säilymiseen ainoastaan, kun $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, mikä ei päde magneettikentän voimavaikutukselle. Jos kuitenkin liikemäärään lisätään kentän liikemäärä kuten lausekkeessa (3.69), saadaan aina säilyvä kokonaisliikemäärä. Tässä mielessä liikemäärän säilyminen on "fundamentaalisempi" laki kuin Newtonin III laki.

3.9 Sykliset koordinaatit ja säilymislait

Jos Lagrangen funktio ei riipu yleistetystä koordinaatista q_j eli $\partial L/\partial q_j = 0$, kutsutaan ko. koordinaattia **sykliseksi**. Lagrangen yhtälöistä jää tällöin jäljelle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \quad (3.70)$$

eli p_j on liikevakio. Siis jokaista syklistä koordinaattia vastaa säilyvä kanonisen impulssin komponentti.

Tässä on kyse yleisestä fysiikan periaatteesta: Jos systeemi on invariantti jossakin muunnoksessa (translaatio, kierto, jne.), muunnokseen liittyy jokin säilymislaki. Vielä yleisemmin asia voidaan ilmaista sanomalla, että jokaista symmetriaa vastaa säilymislaki. Tämä periaate ulottuu myös sellaisiin kysymyksiin kuten baryoniluvun tai outouden säilyminen alkeishiukkasfysiikassa.

Yksinkertaisin esimerkki on vapaan hiukkasen ($L = (1/2)m\mathbf{v}^2$) translaatioinvarianssi eli vapaalle hiukkaselle paikka on syklinen koordinaatti: $\partial L/\partial x_i = 0$, jolloin

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_i),$$

joten liikemäärä on liikevakio.

Tarkastellaan toisena esimerkkinä hiukasta keskeispotentiaalissa ja pallokoordinaateissa

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

L ei riipu kulmasta φ vaan ainoastaan sen derivaatoista. Niinpä kulmaa φ vastaava kanonisen impulssin komponentti

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$$

on liikevakio. Olemme jo aiemmin nähneet, että keskeisliikkeessä hiukkasen ratataso on kohtisuorassa z -akselia vastaa eli $\theta = \pi/2$ ja liikemäärämomentin z -komponentti

$$p_\varphi = mr^2 \dot{\varphi}$$

on liikevakio. Huom. p_φ on siis todella liikemäärämomentin z -komponentti, vaikka alaindeksinä onkin φ .

Tarkastellaan lopuksi tärkeää erikoistapausta, jossa Lagrangen funktio ei riipu eksplisiittisesti ajasta. Lasketaan ensin kokonaisaikaderivaatta

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (3.71)$$

Nyt siis $\partial L/\partial t = 0$. Käyttämällä Lagrangen yhtälöitä saadaan

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_j \dot{q}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \\ &= \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right),\end{aligned}\quad (3.72)$$

josta seuraa

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right) = 0. \quad (3.73)$$

Sulkulauseketta merkitään H :lla ja kutsutaan **Hamiltonin funktioksi**. Se on säilyvä suure ja konservatiivisessa potentiaalissa U liikkuvalla hiukkasella

$$H = T + U = E. \quad (3.74)$$

H kuvaa siis hiukkasen kokonaisenergiaa, mikä säilyy ajasta riippumattomassa konservatiivisessa systeemissä.

Newtonin ja Lagrangen yhtälöiden lisäksi on olemassa vielä kolmas tapa esittää mekaanisen systeemin liikeyhtälöt. Se perustuu edellä johdetun Hamiltonin funktion käyttöön ja siihen palataan luvussa 7.

3.10 *Hyödyllisiä apuvälineitä

3.10.1 Mekaaninen similariteetti

On selvää, että jos Lagrangen funktio kerrotaan mielivaltaisella vakiolla, lopputuloksena ovat samat liikeyhtälöt. Tämä ansiosta voidaan monimutkaistenkin systeemien liikkeestä saada hyödyllistä tietoa ilman, että liikeyhtälöitä varsinaisesti tarvitsee integroida.

Oletetaan, että Lagrangen funktio on muotoa $L = T - U$ ja että U on kirjoitettavissa karteestisten koordinaattien k :nnen asteen homogeenisena funktiona eli

$$U(ax_1, ax_2, \dots, ax_n) = a^k U(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.75)$$

missä a on mikä tahansa vakio. Skaalataan paikkakoordinaatit tekijällä a ja aika tekijällä b

$$x_i \rightarrow \tilde{x}_i = ax_i; \quad t \rightarrow \tilde{t} = bt.$$

Tällöin nopeudet muuntuvat kertoimella a/b , liike-energia kertoimella a^2/b^2 ja potentiaalienergia siis kertoimella a^k . Vaaditaan lisäksi, ettei suhde T/U muutu. Tällöin $a^2/b^2 = a^k$ eli $b = a^{1-k/2}$ ja koko Lagrangen funktio tulee kerrotuksi tekijällä a^k .

Jos nyt ollaan tekemässä jonkinlaista pienoismallikoetta eli $0 < a < 1$, niin ajat ja paikat muunnetaan lausekkeilla

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= al \\ \tilde{t} &= bt = a^{1-k/2}t\end{aligned}$$

eli ajat skaalautuvat kuten

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{1-k/2}$$

ja nopeudet kuten

$$\frac{\tilde{v}}{v} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{k/2}.$$

Se, mitä tällaisella kokeella viime kädessä etsitään, on potentiaalia U vastaavien voimien vaikutus systeemiin.

Esim. 1. Potentiaali $\sim Cx^2$

Tämä on harmoninen lineaarinen oskillaattori, johon tutustutaan lähemmin seuraavassa luvussa. Koska $k = 2$ saadaan tulos

$$\tilde{t}/t = (\tilde{l}/l)^0 = 1,$$

mikä voidaan tulkita siten, että oskillaattorin värähdysaika ei riipu amplitudista. Toisaalta energialle

$$\tilde{E}/E = a^k = a^2 = (\tilde{l}/l)^2$$

eli värähtelijän energia on verrannollinen amplitudin neliöön.

Esim. 2. Potentiaali $\sim Cr^{-1}$

Tämä kuvaa on tietenkin Newtonin painovoimalain potentiaalia. Nyt skaalaus antaa

$$\frac{\tilde{t}}{t} = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^{3/2} \quad \text{eli} \quad \left(\frac{\tilde{t}}{t}\right)^2 = \left(\frac{\tilde{l}}{l}\right)^3,$$

mikä on tietenkin Keplerin kolmas laki, kun ajat tulkitaan kiertoaikoina ja etäisyydet isoakseliin puolikkaina. Tämä on hyvä esimerkki tuloksesta, joka löytyy Lagrangen mekaniikassa paljon pienemmällä vaivalla kuin Newtonin mekaniikassa.

Esim. 3. Putoaminen homogeenisessa gravitaatiokentässä, $U \sim x$

Nyt $k = 1$. Tällöin

$$\tilde{t}/t = \sqrt{\tilde{l}/l}$$

eli vapaassa pudotuksessa putoamisaika on verrannollinen alkuperäiskorkeuden neliöjuureen.

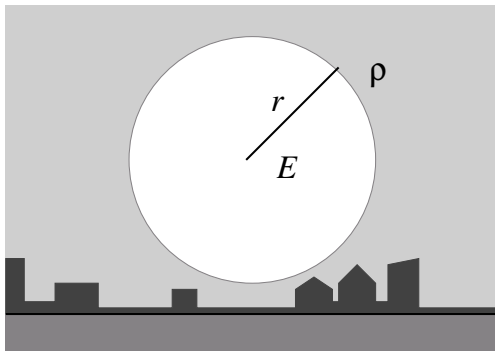
Nämä ovat kaikki keskeisiä mekaniikan systeemejä kuvaavia tuloksia, jotka löytyvät siis tarvitsematta ratkaista systeemejä kuvaavia differentiaaliyhtälöitä.

3.10.2 Dimensionanalyysiä

Kaikissa yllä olevissa esimerkeissä on siis löydetty fysikaalisten suureiden riippuvuus toisistaan. Menetelmää voidaan soveltaa myös toisin päin. Jos voidaan jotenkin päätellä selvitetävänä olevan suureen riippuvuus fysikaalisista perussuureista, niin jäljelle jää vain kokeellisesti määrättävissä tai jotenkin muuten tiedossa oleva skaalausparametri a . Tätä menetelmää kutsutaan dimensioanalyysiksi. Vaikkakaan dimensioanalyysi ei ole mikään yleispätevä taikasauva, se on joskus hämmästyttävän tehokas työkalu.

Esim. 1. Ydinräjähdysen energia

Esimerkki, jossa *G. I. Taylor* päätteli filmiltä ydinräjäytyksessä vapautuneen energian määrän, on erityisen kuuluisa.



Kuva 3.5: Ydinräjähdysen tuottama tulipallo ja siihen liittyvät fysikaaliset suuret (räjähdysen energia E , tulipallon säde r ja ympäröivän ilman tiheys ρ).

Taylor lähti oletuksesta, että ydinräjähteen tulipallon (Kuva 3.5) säde r riippuu räjähdysen energiasta E , ilman tiheydestä ρ ja ajasta t muodossa

$$r = CE^a t^b \rho^c$$

missä C on dimensioton vakio. Nyt yhtälön oikealla puolella olevat eksponentit täytyy valita siten, että koko lausekkeen fysikaalinen dimensio on pituuden dimensio (eli SI-yksiköissä metri). Merkitään perussuureiden dimensioita seuraavasti: pituus $[l] = L$,

aika $[t] = T$ ja massa $[m] = M$. Tällöin energian dimensio on

$$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$$

ja tiheyden dimensio on

$$[\rho] = \frac{M}{L^3},$$

joten säteen lausekkeen dimensiot ovat

$$[r] = C [E]^a [t]^b [\rho]^c \Rightarrow$$

$$L = C M^a L^{2a} T^{-2a} T^b M^c L^{-3c}$$

Tämä on mahdollista vain jos a , b ja c toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{aligned} a + c &= 0 \\ b - 2a &= 0 \\ 2a - 3c &= 1 \end{aligned}$$

eli $c = -1/5$, $a = 1/5$ ja $b = 2/5$ ja siten säde määräytyy kaavalla

$$r = CE^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}.$$

Näin on päästy tulokseen, jossa tarvitaan vielä C :n määrittäminen joko mittauksella tai jollain muulla tiedolla. Taylor päätteli shokkiaaltoteorian perusteella, että $C \simeq 1$. Tulipallon säde oli 15 ms kuluttua räjäytyksestä 300 m ja ilman tiheys on noin $1,3 \text{ kg m}^{-3}$. Ratkaisemalla energia ja sijoittamalla nämä lukuarvot saadaan tulos

$$E = \frac{\rho}{t^2} \left(\frac{r}{C} \right)^5 \simeq 1,4 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

Tulos osoittautui oikeaksi!

Räjähdyksen voimakkuutta voi olla mielenkiintoista verrata esim. Loviisan ykkösreaktorin vuosituotantoon. Reaktorin teho on 440 MW ja se toimii noin 300 vuorokautta vuodessa. Tämä antaa energian vuosituotoksi noin $1,14 \cdot 10^{16}$ J. Siis samaa suuruusluokkaa kuin Taylorin analysoima ydinpommin räjähdys.

Esim. 2. Sinitaivas

Ehkä vielä hämmästyttävämpi saavutus oli *Rayleigh*'n vuonna 1871 esittämä selitys sille, miksi taivas on sininen.

Taivaalta tuleva valo siroaa ilman molekyyleistä. Merkitään Auringosta tulevan valoaallon amplitudia E_i ja molekyylin sirottaman valon amplitudia $E_s = \alpha E_i$. Rayleigh

päätteli aaltoliikeopin osaamisensa perusteella, että verrannollisuuskerroin α on verrannollinen molekyylin tilavuuteen $V = (4\pi/3)a^3$, missä a on molekyylin säde. Koska amplitudi on puolestaan valon intensiteetin I neliöjuuri, se pienenee etäisyyden funktiona kuten $\sqrt{1/r^2} = 1/r$. Lisäksi sironnut intensiteetti I_s voi riippua aallonpituudesta, joten

$$I_s = CI_i \frac{a^6}{r^2} \lambda^b,$$

missä $I_i \propto E_i^2$ on tulevan valon intensiteetti ja C dimensioton vakio. Niinpä

$$[I_s] = [I_i] \frac{[a]^6}{[r]^2} [\lambda]^b,$$

joten $[a]^6[\lambda]^b/[r]^2 = L^{4+b}$ on dimensioton, joka toteutuu, kun $b = -4$ eli

$$I_s \propto I_i \lambda^{-4}.$$

Johtopäätöksenä siis on, että näkyvän valon lyhytaaltoisempi pää eli sininen väri on sironneessa valossa vallitseva.

Iltaruskon punerruksen voi puolestaan perustella sillä, että lyhytaaltoisempi valo siroaa ympäriinsä ja taivaanrannalta silmiin tulee suhteellisesti enemmän vähemmän sironnutta pitkäaaltoista valoa. Ongelman kvantitatiivinen analyysi tietenkin edellyttää tarkempaa sironnan geometrian tutkimista.

Fysikaalinen ongelma ei ole suinkaan aina ratkaistavissa yksinkertaisella dimensioanalyysillä ja joka kerta se vaatii enemmän tai vähemmän fysikaalista intuitiota. Ensimmäinen tehtävä on osata tunnistaa ongelmaan vaikuttavat suureet. Vaikka tavoitteena ei olisikaan ongelman lopullinen ratkaiseminen dimensioanalyysillä, on usein hyödyllistä miettiä, mitkä fysikaaliset suureet ovat ongelman kannalta olennaisia ja mitkä voidaan jättää huomiotta. Primitiivisimmässä muodossaan dimensioanalyysi on saadun lausekkeen yksiköiden tarkastamista, mikä sekin monesti kertoo, jos laskussa jokin on mennyt matkan aikana vikaan.

Suuren kvanttifysiikan kehittäjän *P. A. M. Diracin* kerrotaan todenneen, että hän katsoo ymmärtävänsä fysikaalisen yhtälön, jos hän pystyy sen perusteella päättelemään ratkaisun perusominaisuudet ilman, että hänen tarvitsee varsinaisesti ratkaista yhtälöä. Tässä similaarisuus- ja dimensioanalyttiset tarkastelut ovat suureksi avuksi.

3.11 Harjoituksia

- Tutki, mitä tyyppiä ovat seuraavien systeemien sidosehdot. Jos sidos on jossain tapauksessa holonominen, anna tilanteeseen sopivat yleistetyt koordinaatit.
 - Tasolla liukumatta vierivä pallo.
 - Tasossa liikkuvat kaksi massapistettä, joiden etäisyys on annettu ajan funktio.
 - Tasossa liikkuva sauva, jonka keskipisteen nopeus on kulloinkin sauvan suuntainen (tämä on itse asiassa luistin).
- Laske m -massaisen hiukkasen liikeyhtälöt seuraavista Lagrangen funktioista

$$(a) \quad L = \frac{1}{2}e^{\gamma t}m\dot{x}^2$$

$$(b) \quad L = e^{\gamma t} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx \right)$$

$$(c) \quad L = \frac{1}{2}e^{2\gamma t} (m\dot{x}^2 - m\omega_0^2 x^2)$$

missä γ , g ja ω_0 ovat vakioita. Anna jokaisen liikeyhtälön fysikaalinen tulkinta.

- Tarkastellaan yhden euron kolikkoa, joka vierii pystyasennossa pitkin tasopintaa. Olkoon kolikon säde r ja määrätkööt kulmat θ (kolikon pinnan suunta) ja φ (kolikon vaihekulma eli ”ykkösen” suunta) kolikon asennon. Olkoon (x, y) kolikon kontaktipiste tason kanssa. Johda yhtälöpari

$$dx + r \cos \theta d\varphi = 0$$

$$dy + r \sin \theta d\varphi = 0$$

Osoita, että näitä yhtälöitä ei voi integroida yksikäsitteisesti. Tämä on eräs käytännön esimerkki ei-holonomisista sidoksista.

- Kaksi massaa, m ja M , on yhdistetty massattomalla köydellä kitkattoman pyörän yli. Massat riippuvat gravitaatiokentässä. Minkä tyyppinen sidos systeemissä on? Muodosta systeemin Lagrangen funktio, johda liikeyhtälöt ja laske massojen kiihtyvyydet.
- Johda Lagrangen funktio ja liikeyhtälöt tapauksessa, jossa M -massainen kiila voi liukua kitkatta vaakatasossa ja kiilan kaltevilla tasolla on kitkattomasti liukuva massa m , johon vaikuttaa painovoima mg . Tämä on siis sama ongelma kuin harjoitustehtävässä 1.6, jolloin Lagrangen mekaniikkaa ei vielä oletettu tunnetuksi.
- Hiukkanen liikkuu tasossa kiinteään pisteeseen suunnatun voiman

$$F = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2\ddot{r}r}{c^2} \right)$$

alaisena. Tässä r on etäisyys voimakeskuksesta ja c on vakio. Etsi potentiaali $U(r, \dot{r})$, josta yhtälön

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{r}}$$

avulla voidaan ko. voima johtaa. Olettaen, että U_0 on tällainen potentiaali, kelpaako funktio $U = U_0 + \dot{r}A(r)$ potentiaaliksi?

Vihje: Tehtävä ei ole pitkä (n. 1/2 sivua). Aloita jälkimmäisestä osasta.

7. Variaatiolaskennan harjoittelua: Ratkaise nk. brachistocrone-ongelma: "Etsi nopein reitti, jota pitkin kappale putoaa gravitaatiokentässä pisteestä 1, pisteeseen 2" eli osoita, että reitin lauseke on muotoa

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{b-y}} dy + c$$

Olettaen, että ratkaisu kulkee pisteen $x = 0$, $y = 0$ kautta, osoita, että käyrän parametrimuotoinen yhtälö on

$$x = a(\varphi - \sin \varphi); \quad y = a(1 - \cos \varphi).$$

Piirrä käyrä.

8. * Ratkaise brachistocrone-ongelma käyttäen Lagrangen kertojia.
9. Hiukkanen (massa m) liikkuu kitkattomasti paraabelilla

$$y = \frac{1}{2}ax^2$$

($a > 0$ on vakio) xy -tasossa homogeenisessa gravitaatiokentässä g . y -akseli osoittaa pystysuoraan ylöspäin. Hiukkanen lähtee levosta korkeudelta $y = h > 0$. Anna sidosvoiman itseisarvo liikkeen aikana h :n ja x :n avulla.

10. Tarkastellaan heiluria, joka roikkuu kiinteästä pisteestä z -akselin suuntaisessa gravitaatiokentässä, mutta on vapaa heilumaan kiinteän vartensa päässä x - ja y -suunnissa (palloheiluri). Laske varren jännitys kokonaisenergian ja kulmien funktiona.
11. Konstruoidaan gravitaatiopotentiaalissa toimiva vesiliukumäki sylinterikoordinaatteja (r, φ, z) käyttäen (tee piirustus rakennusfirmalle!)

$$\begin{aligned} r &= a \\ z &= h \left(1 - \frac{\varphi}{8\pi}\right) \end{aligned}$$

missä h ja a ovat vakioita ja kulma saa kasvaa yli 2π :n. Lähteköön mekaniikan kotilaskujen pistemäiseksi ruttaama mutta yhä m -massainen fysiikan opiskelija laskemaan mäkeä hetkellä $t = 0$ korkeudelta $z = h$. Laske Lagrangen kertoimien avulla opiskelijaan vaikuttavat sidosvoimat.

12. Varattu hiukkanen liikkuu magneettikentässä $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, jonka vektoripotentiaali riippuu vain z -koordinaatista, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(z)$. Oletetaan lisäksi, että sähkökenttä on nolla. Tunnista sykliset koordinaatit ja määrää kolme toisistaan riippumatonta liikevakiota.
13. Meteoriiin törmätessä Maahan on syntyvän kraaterin halkaisija $D = D(E, g, \rho)$, missä E on törmääjän energia, g gravitaatiokiihtyvyyden ja ρ maa-aineksen tiheys. Osoita dimensioanalyysin avulla, että D on verannollinen energian potenssiin $\frac{1}{4}$, eli $D \propto E^{1/4}$.
14. Hiukkasfysiikassa käytetään usein ns. luonnollista yksikköjärjestelmää, jossa $\hbar = c = 1$. Tällöin kaikkien suureiden dimensiot ovat energian potensseja (merkitään $[E] = E$). Hiukkasfysiikassakin täytyy kuitenkin aina silloin tällöin palata reaali-maailmaan ja ilmaista laskun tulos tavallisissa yksiköissä (joiden dimensiot ovat siis M, L, T). Luonnollisissa yksiköissä esim. pituuden dimensio on E^{-1} . Etsi dimensioanalyysin avulla \hbar :sta ja c :stä riippuva muuntokerroin $C(\hbar, c)$, joka muuttaa pituuden luonnollisista yksiköistä tavallisiin yksiköihin. Etsi muuntokerroin myös ajalle, jonka dimensio on E^{-1} luonnollisissa yksiköissä.

Luku 4

Värähdysliikkeet

Kun fysikaalista systeemiä häiritään, se alkaa usein oskilloida. Toisaalta erilaiset jaksolliset tapahtumat voidaan kuvailla oskillaatioina tai niiden superpositioina. Niinpä värähdysliike onkin yksi tärkeimpiä fysiikan perusasioita. Varsin yleisesti värähdysliikkeen yhtälö on muotoa

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}, t) = 0, \quad (4.1)$$

missä q on liikettä kuvaava koordinaatti. Jos f ei riipu eksplisiittisesti ajasta, liikettä kutsutaan **autonomiseksi** ja jos se ei sisällä myöskään nopeutta \dot{q} , niin systeemi on konservatiivinen. Jos f on tämän lisäksi q :n lineaarinen funktio, on kyseessä **harmonisen oskillaattorin** kaltainen tilanne.

Esimerkki ei-autonomisesta ja ei-konservatiivisesta värähtelijästä on muotoa

$$\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = F(t), \quad (4.2)$$

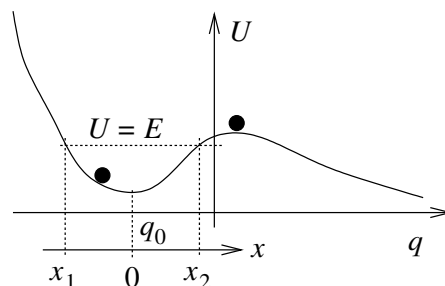
missä nopeusriippuvuus kuvaa oskillaation vaimenemista ja $F(t)$ ajasta riippuvaa **pakkovoimaa**.

Tarkastelemme jatkossa pääasiassa **lineaarisia** värähtelijöitä. Luonnon makroskooppiset oskillaatiot ovat usein epälineaarisia, mutta mikäli oskillaation amplitudi voidaan olettaa pieneksi, yhtälöt voidaan linearisoida. Meillä on jo ollut esimerkki myös epälineaarisesta oskillaattorista, nimittäin luvun 1 matemaattinen heiluri. Kuten olemme nähneet heilahduskulman ollessa pieni ($\sin \theta \approx \theta$) heiluria voi approksimoida lineaarisena harmonisena oskillaatorina. Tämä usein myös halutaan tehdä, koska kuten tulemme jatkossa näkemään epälineaaristen oskillaattoreiden käsittely on yleensä hyvin hankalaa.

4.1 Lineaarinen harmoninen oskillaattori

Tarkastellaan aluksi vakiomassaista (m) hiukkasta, joka liikkuu potentiaalissa $U(q)$. Systeemi on **staattisessa tasapainossa**, kun yleistetty voima on nolla eli $Q = -dU/dq = 0$.

Kuva 4.1: Stabiili (vasen) ja epästabili (oikea) tasapainoasema, joissa $dU/dq = 0$.



Tällöin siis potentiaalilla on ääriarvo. Riippuen siitä, onko kyseessä potentiaalin minimi vaiko maksimi, tasapaino on joko **stabiili** tai **epästabiili** (Kuva 4.1). Värähtelyliike voi syntyä vain stabiilin tasapainotilanteen ympärille. Usein tasapaino on stabiili vain **lokaalisti** eli jos systeemiä häiritään liian voimakkaasti (häiriöamplitudi on liian suuri), systeemi ajautuu epästabiiliksi.

Merkitään koordinaatin q tasapainokohtaa q_0 :lla ja poikkeamaa $x = q - q_0$. Oletetaan tässä yksinkertaisuuden vuoksi, että q on paikkakoordinaatti. Oskillaatio voi tapahtua myös kulmakoordinaatin suhteen kuten nähdään jatkossa kytkettyjen oskillaatioiden tapauksessa. Kehitetään potentiaali U Taylorin sarjaksi q_0 :n ympäristössä

$$U(q) = U(q_0) + \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q_0} x + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q_0} x^2 + \dots \quad (4.3)$$

Valitaan potentiaalin nollassa siten, että ensimmäinen termi on nolla. Toinen termi on tasapainossa määritelmän mukaan nolla (tasapaino on ääriarvo), joten toista kertalukua myöten

$$U(q) = \frac{1}{2} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q_0} x^2. \quad (4.4)$$

Kun vielä valitaan fiksusti koordinaatiston origoksi q_0 , niin

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad (4.5)$$

missä $k = d^2U/dq^2|_{q_0}$. Näin olemme päässeet luvusta 2 tutun Hooken lain muotoiseen potentiaaliin. Systeemin kineettinen energia on

$$T = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 = \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt}(x + q_0) \right]^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2, \quad (4.6)$$

ja saamme systeemin Lagrangen funktioksi

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2. \quad (4.7)$$

Liiketytälö löytyy jälleen laskemalla L :n derivaatat Lagrangen yhtälöiden mukaisesti. Tulos on tietenkin tuttu **lineaarinen harmoninen oskillaattori**

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (4.8)$$

Otetaan käyttöön merkintä $k/m = \omega_0^2$, jolloin

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.9)$$

ω_0 :n fyysikaalinen dimensio on selvästi taajuus (SI-yksikkö s^{-1}).

Vaikka tulos onkin ennestään tuttu, ei saavutus ole vähäpätöinen. Onhan tulos saatu pelkästään tarkastelemalla massapisteen liikettä stabiilin tasapainoaseman lähellä ja käyttämällä Lagrangen yhtälöitä.

Yhtälö (4.9) on tavallinen lineaarinen differentiaaliyhtälö, jonka ratkaisuille pätee superpositioperiaate, eli löydettyjen ratkaisujen lineaarikombinaatiot ovat myös yhtälön ratkaisuja. Ratkaisu löytyy tunnetusti yrittäällä $x = e^{rt}$. Sijoittamalla tämä yhtälöön (4.9) saadaan **karakteristinen yhtälö** $r^2 = -\omega_0^2$ eli r :llä on kaksi kompleksista ratkaisua $r = \pm i\omega_0$. Näiden ratkaisujen superpositio on yhtälön yleinen ratkaisu

$$x(t) = \frac{1}{2}A_1 e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}A_2 e^{-i\omega_0 t}. \quad (4.10)$$

Koska x on järkevää olettaa reaaliseksi, on integroimisvakioiden A_1 ja A_2 oltava toistensa kompleksikonjugaatteja. Kirjoitetaan $A_1 = a - ib$ ja $A_2 = a + ib$ (a ja b ovat reaalilukuja), jolloin ratkaisu saadaan **Eulerin kaavan**

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (4.11)$$

avulla muotoon

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t. \quad (4.12)$$

Otetaan alkuarvoiksi $t = 0$, $x = x_0$ ja $\dot{x} = v_0$. Tällöin $a = x_0$ ja $b = v_0/\omega_0$.

Ratkaisu voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (4.13)$$

missä A antaa oskillaation **amplitudin** ja δ **vaiheen**.

4.2 Vaimennettu värähtelijä

Jos värähtelijään vaikuttaa nopeuteen verrannollinen vastusvoima, Lagrangen yhtälön suoraviivainen käyttäminen on hankalampaa, koska systeemin kokonaisenergia ei säily. Ongelman tarkastelu on yksinkertaisinta lähtemällä suoraan harmonisen oskillaattorin newtonilaisesta liikeyhtälöstä (4.9) ja lisäämällä siihen vastusermi $-2\beta\dot{x}$, missä β oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi positiiviseksi vakioksi. Liikeyhtälöksi tulee

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.14)$$

Käyttämällä yritettä e^{rt} , saadaan yhtälön (4.14) karakteristisen yhtälön juuriksi

$$\begin{aligned} r_1 &= -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \\ r_2 &= -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

ja yleinen ratkaisu on jälleen superpositio

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}). \quad (4.15)$$

Tapaus $\omega_0^2 > \beta^2$

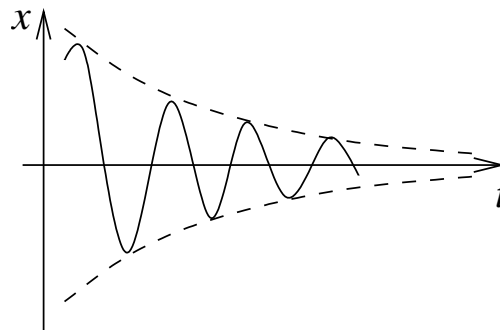
Merkitään $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, jolloin $\omega_1^2 > 0$ ja juurilausekkeet $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ ovat imaginaarisia. Tällöin ratkaisu saa muodon

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_1 t}). \quad (4.16)$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta). \quad (4.17)$$

Amplitudi on siis muotoa $A e^{-\beta t}$ ja siten se pienenee ajan myötä eli oskillaatio vaimenee. Suure ω_1 muistuttaa taajuutta siinä mielessä, että sen käänteisluku kuvaa verhoikäyrän $x = A e^{-\beta t}$ ja oskillaatiota kuvaavan käyrän peräkkäisten sivuamiskohtien ajallista etäisyyttä, vaikka nämä pisteet eivät olekaan täsmällisesti periodisia (Kuva 4.2). Tätä tapausa kutsutaan **alivaimennetuksi värähtelyksi**.



Kuva 4.2: Alivaimennettu värähtelijä.

Samaa yhtälöä voi käyttää kuvaamaan tilannetta, missä $\beta < 0$. Tällöin jokin prosessi syöttää energiaa oskillaattorille ja oskillaatio kasvaa. Tällainen värähtelijä on epästabiili ja oskillaatio ajan mittaan joko kasvaa epälineaariseksi tai systeemin jokin muu ominaisuus alkaa rajoittaa amplitudin kasvua.

Huom. Karakteristisen yhtälön ratkaisun imaginaariosa vastaa oskillaation taajuutta ja reaaliosa vaimennusta. Käytännössä oskilloiva suure (esim. sähkökenttä) kirjoitetaan usein muodossa

$$x(t) = A e^{i\omega t} = A e^{i(\omega_1 + i\beta)t} = A e^{-\beta t} e^{i\omega_1 t},$$

jolloin siis kompleksisen taajuuden $\omega = \omega_1 + i\beta$ reaaliosa (ω_1) antaa oskillaatiotaajuuden ja imaginaariosa (β) **vaimennuskertoimen**. Tällaisten lausekkeiden merkkien kanssa on tärkeää olla huolellinen. Aikariippuvuus kirjoitetaan usein $\propto e^{-i\omega t}$. Tällöin taajuus eli ω :n reaaliosan itseisarvo säilyy samana, mutta β :n merkki muuttuu eli negatiivinen β vaimentaa ja positiivinen kasvattaa oskillaatiota.

Tapaus $\omega_0^2 < \beta^2$

Tässä tapauksessa karakteristisen yhtälön ratkaisut ovat reaaliset ja differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x(t) = e^{-\beta t}(A_1 e^{\omega_2 t} + A_2 e^{-\omega_2 t}), \quad (4.18)$$

missä $\omega_2 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Tämä ratkaisu ei siten oskilloi. Koska $\beta > \omega_2$, systeemi hakeutuu aina lopulta ($t \rightarrow \infty$) lepoon eli poikkeama tasapainotilasta $x \rightarrow 0$. Tapausta kutsutaan **ylivaimennetuksi värähtelyksi**.

Tapaus $\omega_0^2 = \beta^2$

Nyt karakteristisen yhtälön juuret ovat yhtäsuuret ($r = -\beta$), jolloin ei suoraan saada kahta lineaarisesti riippumatonta ratkaisua. Nyt ratkaisua kannattaa yrittää muodossa $x = A(t)e^{-\beta t}$ (ns. **vakion varioimismenetelmä**). Näin saadaan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\dot{A} - \beta A)e^{-\beta t} \\ \ddot{x} &= (\ddot{A} - 2\beta\dot{A} + \beta^2 A)e^{-\beta t} \\ \Rightarrow 0 &= \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = \ddot{A}e^{-\beta t} \end{aligned}$$

eli $\ddot{A} = 0 \Leftrightarrow A = A_1 + A_2 t$. Näin siis saadaan kahden riippumattoman ratkaisun superpositio muodossa

$$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\beta t}. \quad (4.19)$$

Tämäkään ratkaisu ei oskilloi vaan on sellainen, joka saavuttaa lepotilan mahdollisimman nopeasti. Tällaista vaimennusta kutsutaan **kriittiseksi vaimennukseksi**.

4.3 Ajasta riippuva ulkoinen voima

Oskillaattoria ajaa usein ulkoinen pakkovoima. Tämä on varsin yleinen tapaus sähköisissä värähtelypiireissä, joihin ajetaan vaihtovirtoja esimerkiksi värähtelylähteen tai vastaanottoantennin kautta. Tarkastellaan ensiksi tilannetta, jossa ei ole mukana vaimennusta

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t). \quad (4.20)$$

Yhtälön ratkaisemiseksi otetaan käyttöön kompleksinen muuttuja $z = \dot{x} - i\omega_0 x$. Tämän tempun juju on siinä, että

$$\dot{z} = \ddot{x} - i\omega_0 \dot{x} = \ddot{x} - i\omega_0(z + i\omega_0 x) = \ddot{x} + \omega_0^2 x - i\omega_0 z \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \dot{z} + i\omega_0 z = \frac{1}{m} F(t) \quad (4.22)$$

eli meillä on ratkaistavana ensimmäisen kertaluvun **epähomogeeninen** differentiaaliyhtälö. Se tapahtuu ratkaisemalla ensin homogeeninen yhtälö $\dot{z}_h + i\omega_0 z_h = 0$ yleisesti ja etsimällä sen jälkeen epähomogeenisen yhtälön erikoisratkaisu. Homogeenisen yhtälön ratkaisu on yksinkertaisesti

$$z_h = Ae^{-i\omega_0 t}. \quad (4.23)$$

Erikoisratkaisulle tehdään yrite

$$z_e = A(t)e^{-i\omega_0 t}.$$

Nyt

$$\dot{z}_e = \dot{A}(t)e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 A(t)e^{-i\omega_0 t} \Rightarrow \quad (4.24)$$

$$\dot{A}(t)e^{-i\omega_0 t} = \dot{z}_e + i\omega_0 z_e = \frac{1}{m} F(t). \quad (4.25)$$

Tästä saadaan $A(t)$ integroimalla

$$A(t) - A(0) = \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} F(t'). \quad (4.26)$$

Näin on ratkaistu z

$$z(t) = e^{-i\omega_0 t} \left(A(0) + \frac{1}{m} \int_0^t dt' e^{i\omega_0 t'} F(t') \right), \quad (4.27)$$

joka antaa määritelmänsä mukaan sekä x :n että \dot{x} :n

$$\dot{x} = \operatorname{Re} z; \quad x = -\frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} z. \quad (4.28)$$

Sivuhuomautus

Lineaarisen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön

$$\dot{y} + P(t)y = Q(t)$$

voi ratkaista **yleisesti** seuraavasti: Kerro yhtälön molemmat puolet lausekkeella $e^{\int_0^t P(t') dt'}$ ja huomaa, että yhtälön vasemmalla puolella on nyt lausekkeen $ye^{\int_0^t P(t') dt'}$ aikaderivaatta. Näin voit siis integroida yhtälön ja saat

$$ye^{\int_0^t P(t') dt'} - y(0) = \int_0^t e^{\int_0^{t'} P(t'') dt''} Q(t') dt'.$$

Yllä annettu ratkaisu (4.27) seuraa tästä suoraan. Edellä esitetyn vakion varioimismenetelmän etuna on kuitenkin se, että kikka toimii usein myös ratkaistaessa korkeampaa kertalukua olevia lineaarisia differentiaaliyhtälöjä.

Siirtyminen kompleksitasoon on olennaisesti muuttanut toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön kahdeksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi paikalle ja nopeudelle. Radan määrittämiseen meillä on kaksi alkuehtoa, värähtelijän nopeus ja paikka hetkellä $t = 0$, jotka määräävät (kompleksisen) alkuarvon $A(0) = z(0) = x(0) - i\omega_0\dot{x}(0)$.

Tarkastellaan esimerkkinä heiluria, joka on aluksi levossa origossa ja johon alkaa hetkellä $t = 0$ vaikuttaa vakiovoima F_0 . Hiukkasen paikka hetkellä τ saadaan suoraan integraalista

$$\begin{aligned} z(\tau) &= e^{-i\omega_0\tau} \frac{1}{m} \int_0^\tau F_0 e^{i\omega_0 t} dt \\ &= \frac{F_0 e^{-i\omega_0\tau}}{m} \int_0^\tau e^{i\omega_0 t} dt \\ &= \frac{F_0 e^{-i\omega_0\tau}}{im\omega_0} (e^{i\omega_0\tau} - 1). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Eulerin kaavan avulla löydetään jälleen ratkaisun reaali- ja imaginaariosat, jonka jälkeen oskillaattorin paikka saadaan kaavan (4.28) avulla

$$x(\tau) = -\frac{1}{\omega_0} \operatorname{Im} z = \frac{2F_0}{m\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (1 - \cos\omega_0\tau). \quad (4.30)$$

Oskillaattori värähtelee siis kohdan $x_0 = F/(m\omega_0^2)$ ympärillä taajuudella ω_0 .

4.4 Vaimennettu ulkoisen voiman ajama värähtelijä

Jos ulkoisen voiman ajama oskillaattori on lisäksi vaimeneva niin kuin kaikki todelliset makroskooppiset oskillaattorit varmaankin ovat, on meillä ratkaistavana yhtälö, joka on muotoa

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t). \quad (4.31)$$

Jos β on vakio, ei tämän yhtälön ratkaiseminen ole periaatteessa yhtään sen hankalampaa kuin edellä esitetyn tapauksen $\beta = 0$. Tällöin nimittäin yhtälön vasen puoli voidaan kirjoittaa muodossa

$$(D - r_1)(D - r_2)x \equiv (D - r_1)z = \dot{z} - r_1z,$$

missä r_1 ja r_2 ovat edellä ratkaistut karakteristisen yhtälön juuret ja $D = d/dt$. Tämä kikka muuntaa siis jälleen yhtälön kahdeksi ensimmäistä kertalukua olevaksi differentiaaliyhtälöksi

$$\begin{aligned} \dot{z} - r_1z &= f(t) \\ \dot{x} - r_2x &= z(t), \end{aligned}$$

joihin puree edellä johdettu yleinen menetelmä, jossa nyt alivaimennetulle tapaukselle

$$x = -\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Im} r_2},$$

mutta kriittisesti vaimennetulle ja ylivaimennetulle tapaukselle ($\operatorname{Im} r_{1,2} = 0$) joudutaan toinenkin yhtälö ratkaisemaan ensimmäisen tapaan. Tarkastellaan seuraavaksi kuitenkin sinimuotoista voimaa, jolle ratkaisun voi löytää paljon näppärämmin sopivasti valitulla yritteellä.

Useimmat fysikaalisissa ongelmissa esiintyvät pakkovoimat ovat funktiomuodoltaan sen verran siistejä, että ne voidaan esittää Fourier-sarjoina (FYMM I) esimerkiksi muodossa

$$f(t) = \sum_n f_n \cos(n\omega t). \quad (4.32)$$

Tarkastellaan tässä esimerkkinä vain yhtä Fourier-komponenttia eli kulmataajuudella ω oskilloivaa pakkovoimaa

$$f = f_0 \cos(\omega t) \quad (4.33)$$

ja tehdään epähomogeeniselle yhtälölle yrite

$$x_e = A \cos(\omega t - \delta).$$

Sijoitetaan tämä täydelliseen liikeyhtälöön (4.31), jolloin siitä tulee algebrallinen yhtälö

$$\begin{aligned} \{f_0 - A[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta]\} \cos \omega t + \\ -\{A[(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \delta - 2\omega\beta \cos \delta]\} \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Koska $\sin \omega t$ ja $\cos \omega t$ ovat lineaarisesti riippumattomia funktioita, toteutuu yhtälö kaikilla t vain, jos kummankin funktion kertoimet ovat erikseen nollija. Jos $A \neq 0$, saadaan $\sin \omega t$:n kertoimesta

$$\tan \delta = \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.35)$$

josta voidaan laskea $\sin \delta$ ja $\cos \delta$. Toisaalta $\cos \omega t$:n kertoimesta saadaan yritteen amplitudiksi

$$A = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \delta + 2\omega\beta \sin \delta} \quad (4.36)$$

Sijoittamalla tähän $\sin \delta$ ja $\cos \delta$ amplitudiksi tulee

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}. \quad (4.37)$$

Täydellisen yhtälön (4.31) erikoisratkaisu on siten

$$x_e(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}} \cos(\omega t - \delta). \quad (4.38)$$

Merkitsemällä jaksossa 4.2 löydettyjä homogeenisen yhtälön yleisiä ratkaisuja $x_h(t)$ on yhtälön (4.31) täydellinen ratkaisu muotoa

$$x(t) = x_h(t) + x_e(t). \quad (4.39)$$

Vaimennetulle oskillaattorille $x_h(t)$ on tärkeä vain ratkaisun alussa, sillä se vaimenee ajan myötä pieneksi ja pakkovoima määrää oskillaattorin värähtelytaajuuden. Oskillaattorin ominaisvärähtelytaajuus ja vaimennuskerron vaikuttavat värähtelyn amplitudiin ja vaiheeseen. Kun pakkovoiman taajuus puolestaan kasvaa $0 \rightarrow \infty$, siirtyy vaihekulma δ : $0 \rightarrow \pi$.

Erikoistapaus: Resonanssi

Jos pakotetun oskillaattorin vaimennus menee nolaksi, että yllä löydetty erikoisratkaisu divergoi kun $\omega \rightarrow \omega_0$ eli kun pakkovoima on resonanssissa oskillaattorin ominaistajuuden kanssa. Vaimennetulle oskillaattorille tämä **amplitudiresonanssi** löydetään etsimällä $A(\omega)$:n maksimi

$$\left. \frac{dA}{d\omega} \right|_{\omega_{\text{res}}} = 0, \quad (4.40)$$

joka on kohdassa

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (4.41)$$

Tultaessa liian lähelle resonanssikohtaa heikosti vaimennettu mekaaninen systeemi joko murtuu tai systeemin epälineaariset ominaisuudet alkavat kasvattaa vaimennusta.

*Esimerkki: Parametrinen resonanssi

Edellä käsitelty amplitudiresonanssi toteutuu ulkoisen pakkovoiman vuoksi, vaikka systeemi olisi alun perin levossa. Käsitellään tässä esimerkkiä systeemistä, joka pysyy levossa, jos se on alunperin levossa, mutta joka ajautuu itsestään epästabiiliksi, jos sen tila poikkeaa vähänkin tasapainosta.

Ajatellaan, että systeemin ”ulkopuolinen” vaikutus rajoittuu vain jonkun systeemiä kuvaavan parametrin ajalliseen kehitykseen. Esimerkiksi käy vaikka harmoninen heiluri, jonka varren pituus vaihtelee. Tällaista tilannetta voi kuvailla yhtälöllä

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (4.42)$$

Nyt ajasta riippuva ominaistajuus oletetaan periodiseksi siten, että $\omega(t+T) = \omega(t)$. Jos siis $x(t)$ on liikeyhtälön ratkaisu, niin myös $x(t+T)$ on ratkaisu. Oletetaan, että x_1 ja x_2 ovat liikeyhtälön kaksi riippumatonta ratkaisua, joten niiden täytyy muuntua itsensä lineaarikombinaatioiksi, kun $t \rightarrow t+T$. Nyt on mahdollista valita x_1 ja x_2 siten, että $x_1(t+T) = c_1 x_1(t)$ ja $x_2(t+T) = c_2 x_2(t)$. Yleisimmät tällaiset ratkaisut ovat muotoa

$$x_i(t) = c_i^{t/T} \Pi_i(t); \quad i = 1, 2, \quad (4.43)$$

missä Π_i :t ovat periodisia funktioita periodinaan T .

Kertoimien c_i välille löytyy nyt riippuvuussuhde. Kerrotaan yhtälö $\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0$ x_2 :llä ja yhtälö $\ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$ x_1 :llä ja vähennetään ne toisistaan. Lyhyt lasku antaa tuloksen

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{vakio}. \quad (4.44)$$

Koska x_i :t ovat muotoa (4.43), niin t :n korvaaminen $t + T$:llä kertoo yhtälön (4.44) vasemman puolen tekijällä $c_1 c_2$, joten yhtälön voimassaolo edellyttää, että

$$c_1 c_2 = 1. \quad (4.45)$$

Koska alkuperäisen differentiaaliyhtälön kertoimet ovat reaalisia, täytyy ratkaisun kompleksikonjugaatin olla myös yhtälön ratkaisu. Tästä seuraa, että joko c_1 ja c_2 ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, jolloin molempien itseisarvot ovat ykkösen suuruisia, tai molemmat ovat reaalisia, jolloin toinen on toisen käänteisluku. Jälkimmäisessä tapauksessa siis riippumattomat ratkaisut ovat

$$x_1(t) = c^{+t/T} \Pi_1(t) \quad (4.46)$$

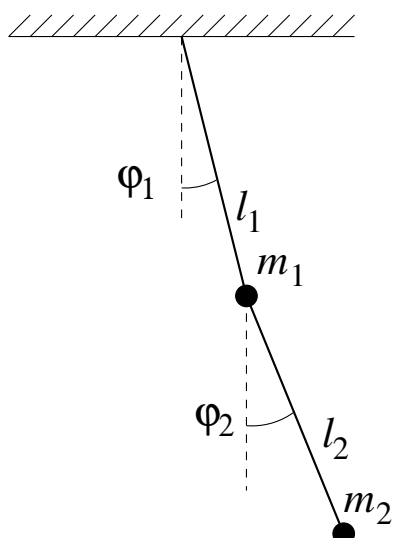
$$x_2(t) = c^{-t/T} \Pi_2(t). \quad (4.47)$$

Nyt toinen ratkaisusta (negatiivinen eksponentti) vaimenee ajan myötä, mutta toinen (positiivinen eksponentti) kasvaa nopeasti olipa alkuperäinen häiriö kuinka pieni tahansa. Tätä tilannetta kutsutaan **parametriseksi resonanssiksi**.

Olemme vasta osoittaneet, että periodisen ominaistajuuden tapauksessa systeemillä voi olla ratkaisu, joka kasvaa eksponentiaalisesti. Jotta voisimme sanoa, milloin tämä ratkaisu todella kuvaa systeemiä, pitää $\omega(t)$ kiinnittää. Esimerkiksi tapauksessa $\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)$, missä $h \ll 1$ (systeemin ominaistajuudessa on siis pieni sinimuotoinen osa suuren vakion rinnalla) osoittautuu, että parametrinen resonanssi on vahvimmillaan, jos ominaistajuuden vaihtelufrekvenssi on $\gamma \approx 2\omega_0$, eli noin kaksi kertaa systeemin häiriötön ominaistajuus. Tämän tietää itse asiassa jokainen pikkulapsi, joka osaa keinua riippukeinussa! Liikuttamalla itseään ylös-alas kaksi kertaa keinun ominaistajuudella lapsi saa keinun nopeasti epälineaarisen suurelle heilahduskulmalle, kunhan keinu aluksi liikaa vain vähänkin.

4.5 Kytkeytyt harmoniset värähtelijät

Edellä olleessa tarkastelussa ei Lagrangen formalismia käytetty hyväksi kovinkaan tehokkaasti, sillä liikeyhtälöt löytyvät varsin vähällä vaivalla myös Newtonin mekaniikasta. Siirryttäessä tarkastelemaan useampaa toisiinsa kytkeytynyttä oskillaattoria formalismin edut tulevat kuitenkin näkyviin, sillä suoraviivainen koordinaattitarkastelu käy äkkiä liian raskaaksi.



Kuva 4.3: Kaksoisheiluri.
 Massa m_1 on ripustettu kiinteästä pisteestä massattomalla jäykällä varrella (pituus l_1) ja massa m_2 vastaavasti massasta m_1 (varren pituus l_2).

Esimerkki: Kaksoisheiluri tasossa

Tarkastellaan tasossa liikkuvaa heiluria (m_1, l_1) , jonka vapaasta päästä riippuu toinen samassa tasossa liikkuva heiluri (m_2, l_2) (Kuva 4.3). Merkitään heilureiden heilahduskulmia pystysuunnasta φ_1, φ_2 . Koska molemmilla heilureilla on luonnollinen sidosehto eli heilurin vakiopituus, alunperin neljä koordinaattia (x_1, y_1, x_2, y_2) voidaan ilmaista näiden kahden kulman avulla

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \\ y_1 &= l_1 \sin \varphi_1 \\ x_2 &= l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \\ y_2 &= l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan nämä kineettisen energian lausekkeeseen

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

Potentiaalienergiat ovat puolestaan

$$\begin{aligned} U_1 &= -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 \\ U_2 &= -m_2 g (l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2). \end{aligned}$$

Kaksoisheilurin Lagrangen funktioksi tulee siten

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Tämä on voimassa kaikille heilahduskulmille. Jos molemmat kulmat voidaan olettaa pieniksi, tämä yksinkertaistuu muotoon

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gl_1\varphi_1^2 - \frac{1}{2}m_2gl_2\varphi_2^2.$$

Tästä on sitten suoraviivaista johtaa liikeyhtälöt kummallekin kulmalle käyttäen Lagrangen yhtälöitä. Nämä yhtälöt voidaan ratkaista seuraavaksi käsiteltävin menetelmin.

Lukijalle jää omatoimiseksi harjoitustehtäväksi vakuuttautua, että ongelma on aika hankala käsiteltäväksi suoraan ilman Lagrangen formalismia. Jo tämä kohtuullisen yksinkertainen esimerkki vihjaisee niistä vaikeuksista, joita liittyy kytkettyjen värähtelijöiden maailmaan.

Monenlaisia fysikaalisia systeemejä voi kuvailla toisiinsa kytkettyjen oskillaattoreiden avulla. Esimerkkeinä käyvät moniatomiset molekyylit, akustiset tai mekaaniset värähtelyt ja sähköiset värähtelypiirit. Samoin jatkuvasti jakautunut kimmoisa aine usein värähtelee tietyillä ominaistajuuksilla. Jos värähtelyt pysyvät pieninä, systeemin voidaan ajatella koostuvan useasta harmonisesta oskillaattorista. Usean oskillaattorin kytkeminen toisiinsa lisää kuitenkin oskillaattorien välisten resonanssien mahdollisuutta, jolloin mahdollisuus liukastua epälineaarille alueelle kasvaa nopeasti. Yksinkertainen esimerkki tilanteesta oli jo edellä käsitelty parametrinen resonanssi, jossa oskillaatiota moduloitunut taajuus kytkeytyi oskillaattorin ominaistajuuteen.

Nyt tarkasteltavissa tapauksissa on useita oskillaattoreita ja niissä useita riippumattomia vapausasteita. Merkitään kaikkia systeemin riippumattomia koordinaatteja q_i , $i = 1, \dots, n$. Annetaan systeemin potentiaalienergia näiden funktiona

$$U = U(q_1, \dots, q_n).$$

Oletetaan, että systeemillä on tasapainoasema eli potentiaalın minimikohta koordinaattien arvoilla $\{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\}$. Merkitään koordinaattien poikkeamia tasapainosta jälleen muuttujilla x_i ja kirjoitetaan Taylorin kehitelmä tällä kertaa usean muuttujan funktiolle

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(q_0) + \sum_i \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q_0} x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_0} x_i x_j + \dots, \quad (4.48)$$

missä on otettu käyttöön lyhennysmerkintä $q_0 \equiv \{q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0\}$. Kaksi ensimmäistä termiä voidaan asettaa nolliksi samoilla oletuksilla kuin yhden oskillaattorin tapauksessa. Rajaamalla tarkastelu lineaarisiin oskillaattoreihin jäljelle jää vain toisen derivaatan termi, joten potentiaali voidaan kirjoittaa muodossa

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j, \quad (4.49)$$

missä “jousivakiot” k_{ij} muodostavat nyt kaksiulotteisen matriisin \mathcal{K} . Matriisinotaatiossa potentiaali on siis

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.50)$$

missä \mathbf{x} on pystyvektori ja \mathbf{x}^T on sen transpoosi (siis vaakavektori).

Selvitetään seuraavaksi, mitä kineettinen energia tarkoittaa tällaisessa tapauksessa. Merkitään karteesisia koordinaatteja tällä kertaa $\{y_k\}$ ja kuhunkin koordinaattiin liittyvää massaa m_k . Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että sidosehdot ovat skleronomisia (ajasta riippumattomia), joten muunnosyhtälöt yleistettyihin koordinaatteihin ovat muotoa

$$y_k = y_k(q_1, q_2, \dots, q_n). \quad (4.51)$$

Kartesisten koordinaattien nopeudet saadaan derivoinnin ketjusäännöllä

$$\dot{y}_k = \sum_j \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (4.52)$$

ja näiden neliöiksi tulee

$$\dot{y}_k^2 = \sum_{i,j} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.53)$$

Koska $q_i = q_i^0 + x_i$, on $\dot{q}_i = \dot{x}_i$ ja kineettiselle energialle saadaan lauseke

$$T = \frac{1}{2} \sum_k m_k \dot{y}_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,g} \left(\sum_k m_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (4.54)$$

Otetaan käyttöön merkintä

$$\sum_k m_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} \frac{\partial y_k}{\partial q_j} \equiv m_{ij},$$

jolloin Lagrangen funktioksi tulee

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j. \quad (4.55)$$

Tämä on hyödyllistä esittää matriisimuodossa kirjoittamalla $\mathcal{M} = (m_{ij})$ ja $\mathcal{K} = (k_{ij})$

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{x}. \quad (4.56)$$

Massamatriisi (m_{ij}) ja **jousivakiomatriisi** (k_{ij}) ovat määritelmiensä perusteella reaalisia ja symmetrisiä, mikä helpottaa seuraavia laskutoimituksia.

Lagrangen yhtälöt ovat muodollisesti samanlaiset kuin aiemminkin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

kaikilla $j = 1, \dots, n$. Sijoittamalla L Lagrangen liikeyhtälöihin saadaan liikeyhtälöiksi poikkeamille $\{x_j\}$

$$\sum_j (m_{ij}\ddot{x}_j + k_{ij}x_j) = 0 \quad (4.57)$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Kyseessä on siis $n:n$ liikeyhtälön yhtälöryhmä.

Valitaan yritteeksi jo vahvalla rutiinilla

$$x_j = Ca_j e^{-i\omega t},$$

missä C on kompleksiluku ja kertoimet a_j ovat reaalisia. Sijoittamalla tämä liikeyhtälöön saadaan

$$\sum_j (Ca_j e^{-i\omega t} k_{ij} - C\omega^2 a_j e^{-i\omega t} m_{ij}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (4.58)$$

$$\sum_j (k_{ij}a_j - \omega^2 m_{ij}a_j) = 0. \quad (4.59)$$

Tämä on matriisimuodossa **ominaisarvoyhtälö**

$$(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) \cdot \mathbf{a} = 0, \quad (4.60)$$

missä

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ei-triviaaleilta ratkaisuilta ($\mathbf{a} \neq 0$) edellytetään

$$\det(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M}) = 0, \quad (4.61)$$

koska matriisilla $(\mathcal{K} - \omega^2 \mathcal{M})$ ei selvästikään saa olla käänteismatriisia.

Kirjoittamalla determinantti auki saadaan **sekundaariyhtälöksi** kutsuttu $n:n$ kertaluvun polynomiyhtälö ω^2 :lle. Yhtälön ratkaisuja ω_i ($i = 1, \dots, n$) kutsutaan systeemin **ominaistaajuuksiksi**. Sijoittamalla ω_i :t yksi kerrallaan ominaisarvoyhtälöön voidaan ratkaista niitä vastaavat **ominaisvektorit** \mathbf{a}_i , joita on yhtä monta kuin ratkaisuja ω_i . Nyt voidaan osoittaa, että ω_i^2 :t ovat reaalisia ja

$$\begin{aligned} (\omega_i^2 - \omega_j^2)(\mathbf{a}_j^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_i) &= \\ \mathbf{a}_j^T \cdot \omega_i^2 \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_i - (\omega_j^2 \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_j)^T \cdot \mathbf{a}_i &= \\ \mathbf{a}_j^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathbf{a}_i - (\mathcal{K} \cdot \mathbf{a}_j)^T \cdot \mathbf{a}_i &= 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Jos $i \neq j$ ja $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, niin $\mathbf{a}_j^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_i = 0$ eli vektorit \mathbf{a}_j ja \mathbf{a}_i ovat ortogonaalisia matriisiin \mathcal{M} yli. Näinollen voidaan valita normitus

$$\mathbf{a}_i^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (4.63)$$

missä δ_{ij} on **Kroneckerin symboli** eli ykkönen, kun $i = j$ ja muulloin nolla.

Määritellään matriisi $\mathcal{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$. Tämän matriisin sarakkeina ovat siis pysyvektorit \mathbf{a}_i . Koska \mathbf{a}_i :t ovat reaalisia, niin myös \mathcal{A} on reaalinen. Nyt

$$(\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{A})_{ij} = \mathbf{a}_i^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{a}_j = \delta_{ij}. \quad (4.64)$$

Siis $\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{I}$ eli yksikkömatriisi. Nyt ominaisarvoyhtälöstä (4.60) seuraa, että \mathcal{A} diagonalisoi myös \mathcal{K} :n:

$$(\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{A})_{ij} = \omega_j^2 \delta_{ij} \quad (4.65)$$

\Leftrightarrow

$$\mathcal{A}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{A} = \Omega^2, \quad (4.66)$$

missä

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{pmatrix}.$$

Nyt systeemin “todelliset” värähtelyt (x_i :t) ovat superpositioita löydetyistä ominaisarvoista. Koska ratkaisu kuitenkin diagonalisoituu, voidaan tehdä koordinaatiston muunnos **normaalikoordinaatteihin**, joista jokainen värähtelee vain yhdellä ominaistajuudella. Merkitään näitä koordinaatteja $\{\eta_i\}$ ja määritellään muunnos

$$\mathbf{x} = \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\eta} = \mathcal{A}^{-1} \mathbf{x}.$$

Nyt selvästikin $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{M}$. Kirjoitetaan Lagrangen funktio uusissa koordinaateissa

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \cdot \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathcal{A} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \cdot \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{K} \cdot \mathcal{A} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}^T \cdot \Omega^2 \cdot \boldsymbol{\eta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i (\dot{\eta}_i^2 - \omega_i^2 \eta_i^2) \end{aligned} \quad (4.67)$$

ja liikeyhtälöryhmäksi tulee

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = 0 \quad (4.68)$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Ongelma on saatu siten palautetuksi yksittäisten oskillaattoreiden liikeyhtälön ratkaisemiseen. Yhtälöiden (4.68) ratkaisut ovat tietenkin

$$\eta_i = C_i \cos(\omega_i t + \delta_i) \quad (4.69)$$

kaikilla i . Koordinaateissa $x_i = \sum_j a_{ij} \eta_j$ ratkaisut ovat puolestaan

$$x_i = \sum_{j=1}^n C_j a_{ij} \cos(\omega_j t + \delta_j), \quad (4.70)$$

missä δ_j, C_j :t ovat alkuarvoista määräytyviä vakioita.

Esimerkki: Lineaarinen kolmiatominen molekyyli

Tarkastellaan sellaista yksiulotteisen molekyylin mallia, jossa on keskellä massa M ja sen molemmilla puolilla yhtä suuret massat m . Oletetaan, että massat m on sidottu keskusatomiin jousilla, joiden jousivakiot ovat k ja tasapainoasemassa kummankin etäisyys keskusatomista on b . Merkitään massojen paikkoja q_1 , q_2 , q_3 , joista q_2 on massan M koordinaatti. Nyt molekyylin kineettinen ja potentiaalienergia ovat

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{q}_2^2 \\ U &= \frac{k}{2}(q_2 - q_1 - b)^2 + \frac{k}{2}(q_3 - q_2 - b)^2. \end{aligned}$$

Merkitään tasapainoasemia q_i^0 ja $x_i = q_i - q_i^0$. Nyt $b = q_2^0 - q_1^0 = q_3^0 - q_2^0$. Tästä seuraa

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 \\ U &= \frac{k}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3). \end{aligned}$$

Poimitaan näistä symmetristen massa- ja jousivakiomatriisien komponentit m_{ij} ja k_{ij} . Matriisit ovat

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}; \quad \mathcal{K} = k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ominaisarvoyhtälö $(\mathcal{K} - \omega^2\mathcal{M}) \cdot \mathbf{a} = 0$ on matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} k - \omega^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega^2 M & -k \\ 0 & -k & k - \omega^2 m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tämän karakteristisen yhtälön eli kerroinmatriisin determinantin nollakohdat antava yhtälö on

$$\omega^2(k - \omega^2 m)[mM\omega^2 - k(2m + M)] = 0,$$

jonka juuret eli systeemin ominaistajuudet ovat

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_3^2 &= \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2m}{M}\right). \end{aligned}$$

Sijoittamalla ensimmäinen ominaistajuus $\omega_1^2 = 0$ ominaisarvoyhtälöön saadaan ominaisvektori, jonka kaikki elementit ovat yhtä suuria $a_1 = a_2 = a_3 \equiv a$. Normitetaan tämä vektorin \mathcal{M} yli eli $\mathbf{a}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{a} = 1$, josta $a^2(2m + M) = 1 \Rightarrow a = 1/\sqrt{2m + M}$ ja

ensimmäinen ominaisvektori on

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Toinen ominaistajuus $\omega_2^2 = k/m$ tuottaa ominaisvektorin komponentit $a_2 = 0$, $a_3 = -a_1 \equiv -a$ ja normitusehdosta tulee $a = 1/\sqrt{2m}$. Toinen ominaisvektori on siten

$$\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Samalla reseptillä saadaan kolmanneksi ominaisvektoriksi

$$\mathbf{a}_3 = \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jos nyt halutaan siirtyä normaalikoordinaatteihin $\{\eta_i\}$, meidän on laskettava muunnosmatriisi \mathcal{A} , joksi saadaan

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \frac{1}{\sqrt{2m}} & \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & 0 & -\frac{2m}{M} \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\frac{1}{\sqrt{2m}} & \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \end{pmatrix}.$$

Tämä antaa koordinaatistojen väliset muunnosyhtälöt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \eta_1 + \frac{1}{\sqrt{2m}} \eta_2 + \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \eta_3 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \eta_1 + \frac{2m}{M} \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \eta_3 \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2m+M}} \eta_1 - \frac{1}{\sqrt{2m}} \eta_2 + \sqrt{\frac{M}{(2mM+4m^2)}} \eta_3. \end{aligned}$$

Jos on tarpeen, $\{\eta_i\}$:t voi ratkaista tästä yhtälöryhmästä tai laskemalla $\boldsymbol{\eta} = \mathcal{A}^T \cdot \mathcal{M} \cdot \mathbf{x}$.

Normaalikoordinaattien fysikaalinen merkitys on tässä tapauksessa seuraavanlainen. Oletetaan, että vain η_1 koordinaatti on virittynyt "soimaan", jolloin $\eta_2 = \eta_3 = 0$. Tällöin systeemi värähtelee taajuudella ω_1 , joka tällä kertaa on nolla. Tällöin $x_1 = x_3 = x_3$ ja tarkasteltava molekyyli liikkuu jäykkänä kappaleena. Jos taas η_2 soi ominaistajuudellaan $\omega_2 = \sqrt{k/m}$, mutta $\eta_1 = \eta_3 = 0$, on $x_2 = 0$ ja $x_3 = -x_1$. Tässä tilanteessa M pysyy paikallaan ja ulommat atomit oskilloivat siten, että niiden välillä on π :n vaihe- siirto (miinusmerkki). Kolmas perustapaus (vain η_3 soi) on puolestaan sellainen, jossa

$x_2 = -(2m/M)x_1$ ja $x_3 = x_1$. Tässä tapauksessa myös keskimäinen massa värähtelee ulompien suhteen siten, että massakeskipiste pysyy paikallaan. Näitä kolmea normaalkoordinaateissa tapahtuvaa perusvärähtelyä kutsutaan systeemin **normaalimoodeiksi**.

Koska yhden normaalikoordinaatin suhteen taajuus on nolla, molekyyli liikkuu jäykänä kappaleena. Koska systeemiin ei vaikuta muita voimia, voitaisiin tarkastelu alusta alkaen siirtää molekyylin massakeskipistekoordinaatistoon, jolloin vapausasteita olisi vain kaksi, matriisit olisivat 2×2 -matriiseja ja vektoreilla olisi vain kaksi komponenttia.

Edellä käsiteltiin vain vaimentamattomia, vapaita, kytkettyjä lineaarisia oskillaattoreita. Jos systeemiin liitetään mukaan vaimennus ja pakkovoima, sen käsittely on olennaisesti vaikeampaa (Goldsteinin oppikirjassa on esitetty lyhyesti teorian perusteet). Näillä ominaisuuksilla on kuitenkin olennaista merkitystä esimerkiksi tarkasteltaessa toisiinsa kytkettyjä sähköisiä värähtelypiirejä. Siellä potentiaalienergiaa kuvaavan \mathcal{K} -matriisin elementtien käänteisluvut vastaavat kapasitansseja, kineettistä energiaa kuvaavan \mathcal{M} -matriisin elementit induktansseja ja vaimennusta kuvaamaan tuodaan uusi matriisi, jonka elementit vastaavat resistansseja. Pakkovoimia sovelletaan tilanteen mukaan yhteen tai useampaan oskillaattoreista.

4.6 *Jännitetyn kielen värähtelyt

Lagrangen mekaniikka voidaan soveltaa myös jatkuvasti jakautuneen aineen ominaisuuksiin. Tarkastellaan tästä esimerkkinä jännitettyä soittimen kieltä, jonka pituus on l , massa **pituusyksikköä kohti** μ ja kieltä jännittävä voima F . Kielen molemmat päät oletetaan liikkumattomiksi.

Arvatenkaan ongelmaa ei kannata lähteä ratkomaan äärettömän monen yleistetyn koordinaatin avulla. Tarkastellaan kielen poikittaista siirtymää jatkuvana funktiona $y = y(x, t)$, joka mitataan kielen tasapainoasemasta. Pienen pituuselementin dx kineettinen energia on $(1/2)(\mu dx)\dot{y}^2$. Huom. tässä pisteellä merkitään osittaisaikaderivaattaa $\dot{y} = \partial y / \partial t$ aiemmasta käytännöstä poiketen.

Koko väräjävän kielen kineettinen energia on siten

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \mu \dot{y}^2 dx. \quad (4.71)$$

Kun kieli siirtyy tasapainostaan, sen täytyy venyä, joten

$$l + \Delta l = \int_0^l (1 + y'^2)^{1/2} dx, \quad (4.72)$$

missä pilkku puolestaan tarkoittaa y :n osittaisderivaattaa paikan suhteen $y' = \partial y / \partial x$. Jännitysvoimaa F vastaan tehty työ on $F\Delta l$, mikä siis on häiritettyyn kieleen varastoitu-

nutta potentiaalienergiaa¹. Oletetaan siirtymä pieneksi, jolloin

$$(1 + y'^2)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}y'^2$$

ja voiman potentiaalifunktioksi saadaan

$$U = \int_0^l \frac{1}{2}Fy'^2 dx. \quad (4.73)$$

Lagrangen funktio on nyt

$$L = \int_0^l \left(\frac{1}{2}\mu\dot{y}^2 - \frac{1}{2}Fy'^2 \right) dx. \quad (4.74)$$

Kielen voidaan siis ajatella muodostuvan äärettömän monesta kytketystä oskillaattorisista, jolloin Lagrangen funktiossa summaus oskillaattoreiden yli korvautuu integraalilla.

Tämä on erikoistapaus muotoa

$$L = \int_0^l \mathcal{L}(y, \dot{y}, y') dx \quad (4.75)$$

olevasta Lagrangen funktiosta. Tässä \mathcal{L} on **Lagrangen tiheys**. Liiketyhtälöt saadaan jälleen lähtien Hamiltonin periaatteesta määrittelemällä vaikutusintegraali

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathcal{L}(y, \dot{y}, y') dx dt. \quad (4.76)$$

Tarkastellaan siis variaatiota $\delta y(x, t)$, joka häviää, kun $t = t_1$ ja $t = t_2$. Oletetaan myös, että päätepisteet ovat kiinteät eli $\delta y = 0$, kun $x = 0$ ja $x = l$. Vaikutusintegraalin variaatio on

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) \right] dx dt. \quad (4.77)$$

Osittaisintegroidaan toinen termi t :n suhteen ja kolmas termi x :n suhteen. Sijoitustermit häviävät, koska $\delta y = 0$ kaikilla neljällä rajalla. Näin on saatu

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) \right] \delta y(x, t) dx dt. \quad (4.78)$$

Jotta tämä katoaisi kaikilla oletetun kaltaisilla y :n variaatioilla, täytyy integrandin olla aina nolla. Niinpä on saatu Lagrangen liiketyhtälö

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.79)$$

¹Periaatteessahan voima F ei ole vakio vaan kasvaa kieltä venytettäessä. Jos kieli on kuitenkin valmiiksi viritetty sopivan kireäksi, jännitysvoiman muutos on pieni ja F voidaan olettaa vakioksi pienessä venytyksessä.

Sijoitetaan tähän jännitetyn kielen Lagrangen tiheyden derivaatat

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu \dot{y}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -F y'.$$

Ottamalla vielä keskimmäisen lausekkeen aikaderivaatta saadaan lopulta liikeyhtälö

$$\mu \ddot{y} = F y'' \Leftrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (4.80)$$

eli aaltoyhtälö, jossa aallon etenemisnopeus on $C = \sqrt{F/\mu}$. Ja sitten vain soitinta viritämään, eli säätämään voimaa F !

Lagrangen formalismia käytetään myös kuvailtaessa kvanttikenttäteorioita, joissa on ääretön määrä vapausasteita. Myös siellä tarkastelu lähtee siitä, että ensin etsitään sopiva Lagrangen tiheys \mathcal{L} , jonka avulla muodostetaan systeemin liikeyhtälöt.

4.7 *Epälineaarista värähtelijöistä

On tärkeää muistaa, että edellisissä tarkasteluissa muuttuja x on tarkoittanut värähtelijän koordinaatin q poikkeamaa tasapainokohdasta q_0 eli $x = q - q_0$. Tähän asti on oletettu, että poikkeama on pieni ja potentiaalın Taylorin sarjasta riittää tarkastella vain toista derivaattaa, jolloin oskillaattorin liikeyhtälöt ovat olleet **linearisia** differentiaaliyhtälöitä. Edellä käsitelty resonanssi-ilmiö johtaa kasvaessaan kuitenkin ilmeisesti niin suureen poikkeamaan x , ettei potentiaalın Taylorin sarjaa enää voida katkaista toisen derivaatan kohdalta ja tilannetta kuvailevasta differentiaaliyhtälöstä tulee muuttujan x suhteen **epälineaarinen**.

Luvussa 1 käsitelty matemaattinen heiluri on epälineaarisen värähtelijän malliesimerkki, sillä yhtälö

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (4.81)$$

on tietenkin kulmamuuttujan θ epälineaarinen yhtälö (sinifunktio). Tämä **linearisoituu** oletuksella, että kulma on pieni, jolloin $\sin \theta \approx \theta$.

Fysiikassa epälineaarisia differentiaaliyhtälöitä on runsaasti ja hyvin erilaisia eikä edes yksinkertaisimmille niistä ole yleisiä ratkaisuja. Hyvinkin yksinkertaisella epälineaarilla yhtälöllä voi olla useita erilaisia ratkaisuperheitä riippuen yhtälön kertoimien välisistä suhteista.

Tarkastellaan tässä esimerkkinä yksiulotteisia epälineaarisia systeemejä, joissa potentiaali on konservatiivinen $U(x)$. Ajatellaan, että systeemin muodostaa hiukkanen, joka liikkuu tässä potentiaalissa. Tällöin systeemin kokonaisenergia on

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x). \quad (4.82)$$

Koska hiukkasen nopeus on $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E-U)/m}$, hiukkanen voi liikkua ainoastaan alueella, missä kokonaisenergia ylittää potentiaalienergian (Kuva 4.1). Jos potentiaalilla on kaksi huippua, jotka ylittävät kokonaisenergian, niin hiukkanen oskilloi näiden huippujen välissä (Kuva 4.1). Olkoot pisteet x_1 ja x_2 kohdat, joissa $E = U$. Tällöin edestakaisen liikkeen periodi (värähdysaika) on

$$\tau(E) = 2\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}, \quad (4.83)$$

missä käännepisteiden ja värähdysajan riippuvuus energiasta on kirjoitettu eksplisiittisesti näkyviin.

4.7.1 Faasi-integraali ja faasikäyrä

Tarkastellaan sitten oskillaattorin liikettä tasossa (x, \dot{x}) . Tällaista tasoa kutsutaan **faasisitasoksi** tai **faasiavaruudeksi** (tai vaiheavaruudeksi). Edestakainen liike muodostaa tässä tasossa suljetun lenkin, jonka yli otettua integraalia

$$J = \oint p dx \quad (4.84)$$

kutsutaan **faasi-integraaliksi** (tai vaiheintegraaliksi). Nyt edellä määritelty oskillaattorin periodi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\tau = dJ/dE. \quad (4.85)$$

Epälineaaristen ongelmien käsittelyssä nk. **faasikäyrämenetelmä** on usein hyödyllinen. Tarkastellaan aluksi vaimentamatonta lineaarista oskillaattoria, jonka rata on muotoa $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta)$ ja nopeus $\dot{x}(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \delta)$. Korotetaan nämä neliöön ja lasketaan puolittain yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2 A^2} = 1, \quad (4.86)$$

joka on ellipsin yhtälö faasiavaruudessa eli tässä tapauksessa tasossa (x, \dot{x}) . Koska $A^2 = 2E/k$ ja $\omega_0^2 = k/m$, ovat ellipsin iso- ja pikkuakselit energian E funktioita. Suurempaa energiaa vastaava ellipsi on aina pienempää energiaa vastaavan ulkopuolella. Faasikäyrän differentiaaliyhtälö

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{\dot{x}} \quad (4.87)$$

saadaan alkuperäisestä differentiaaliyhtälöstä $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Saadun differentiaaliyhtälön ratkaisu

$$\dot{x} = \dot{x}(x) \quad (4.88)$$

on siis faasikäyrän yhtälö.

Tarkastellaan sitten epälineaarista oskillaattoria ja kehitetään potentiaali Taylorin sarjaksi tasapainoaseman ympärillä (ensimmäinen ja toinen termi ovat nollija samoin perustein kuin edellä käsitellyissä lineaarisissa oskillaattoreissa)

$$U(q) = \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q_0} x^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dq^3} \right|_{q_0} x^3 + \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dq^4} \right|_{q_0} x^4 + \dots \quad (4.89)$$

Ottamalla käyttöön vakiot k , λ ja ε määritelmillä

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q_0} &\equiv \frac{1}{2}k \\ \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3U}{dq^3} \right|_{q_0} &\equiv -\frac{1}{3}m\lambda \\ \frac{1}{4!} \left. \frac{d^4U}{dq^4} \right|_{q_0} &\equiv -\frac{1}{4}m\varepsilon \end{aligned}$$

saadaan potentiaalin sarjakehitelmä muotoon

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{3}m\lambda x^3 - \frac{1}{4}m\varepsilon x^4 + \dots \quad (4.90)$$

Oletetaan ensin, että poikkeama harmonisen oskillaattorin paraabelin muotoisesta potentiaalista on muotoa $-\frac{1}{4}m\varepsilon x^4$. Potentiaali on edelleen symmetrinen tasapainoaseman suhteen. Jos $\varepsilon > 0$, potentiaali on laakeampi kuin harmoninen potentiaali ja oskillaattoria palauttava voima kasvaa hitaammin siirryttäessä kauemmaksi tasapainosta. Tapausta kutsutaan pehmeneväksi. Jos $\varepsilon < 0$, potentiaali on jyrkempi ja tapausta kutsutaan joskus myötölujenevaksi. Siis palauttava voima vahvistuu, kun siirrytään kauemmaksi tasapainosta.

Muotoa $-\frac{1}{3}m\lambda x^3$ oleva epäharmonisuus tekee potentiaalista puolestaan on epäsymmetrisen tasapainoaseman suhteen. Riippuen λ :n merkistä palauttava voima on pehmenevä toiseen ja myötölujeneva toiseen suuntaan.

4.7.2 van der Polin oskillaattori ja attraktorit

Tärkeä ryhmä värähtelijöitä ovat nk. **kvasiharmoniset** oskillaattorit, joille

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}). \quad (4.91)$$

Tällainen on mm. van der Polin oskillaattori, jonka liikeyhtälö on

$$\ddot{x} - \kappa(x_0^2 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.92)$$

missä κ ja x_0 ovat vakioita. Epälineaarisuus on siis muotoa $x^2\dot{x}$, mikä on nopeudesta riippuva ei-konservatiivinen termi.

Skaalataan muuttujat dimensiottomiksi $x/x_0 \rightarrow x$ ja $\omega_0 t \rightarrow t$

$$\Rightarrow \ddot{x} - \epsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad (4.93)$$

missä $\epsilon = \kappa x_0^2 / \omega_0$. Faasikäyrän differentiaaliyhtälöksi tulee

$$\frac{d\dot{x}}{dx} + \frac{x}{\dot{x}} = \epsilon(1 - x^2). \quad (4.94)$$

Liikkeyhtälöstä (4.93) saadaan kertomalla puolittain $2\dot{x}$:llä

$$\frac{d}{dt}(x^2 + \dot{x}^2) = 2\epsilon(1 - x^2)\dot{x}^2. \quad (4.95)$$

Jos $\epsilon = 0$, on $x^2 + \dot{x}^2 = R^2$, missä R on vakio, eli faasikäyrä on ympyrä.

Tutkitaan sitten tapausta, jossa ϵ on pieni positiivinen luku eli $0 < \epsilon \ll 1$. Tällöin liike on kvasiperiodista. Integroidaan yhtälö (4.95) yhden jakson yli $t = 0 \rightarrow T \approx 2\pi$

$$\begin{aligned} \Delta R^2 &= \int_0^T 2\epsilon(1 - x^2)\dot{x}^2 dt \\ &\approx -2\epsilon \int_0^{-2\pi} (1 - R^2 \cos^2 \varphi) R^2 \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 2\pi\epsilon R^2 \left(1 - \frac{R^2}{4}\right), \end{aligned} \quad (4.96)$$

missä on käytetty hyväksi relaatioita $x = R \cos \varphi$ ja $\dot{x} = R \sin \varphi$, approksimoitu R vakioksi ja integrointimuuttujaksi on vaihdettu vaihekulma ajan sijasta $d\varphi \approx -dt$. (4.96):n perusteella $\Delta R^2 = 0$, kun $R = 2$. Jos $R < 2$, niin $\Delta R^2 > 0$, ja jos $R > 2$, niin $\Delta R^2 < 0$ eli olipa oskillaattorin radan säde faasitasossa suurempi tai pienempi kuin $R = 2$, se lähestyy ympyrää $R = 2$. Palaamalla takaisin dimensiollisiin muuttujiin tämä rajaympyrä vastaa ellipsiä

$$\frac{x^2}{4x_0^2} + \frac{\dot{x}^2}{4x_0^2\omega_0^2} = 1. \quad (4.97)$$

Tällaista rajakäyrää kutsutaan **attraktoriksi**.

Jos ϵ ei ole pieni, tilanne pysyy kvalitatiivisesti samanlaisena, mutta systeemi haakeutuu edelleenkin attraktorille. Nyt attraktorin muoto kuitenkin deformatuu. (van der Polin oskillaattoreista löytyy Internetistä hyviä esimerkkejä, joiden avulla voi tarkastella oskillaattorin vaimenemista eri ϵ :in arvoilla.)

Jos van der Polin oskillaattoriin lisätään sopivan muotoinen ulkoinen ajasta riippuva voima (esim. muotoa $\cos \omega_D t$, missä ω_D on lähellä oskillaattorin ominaistajuuutta ω_0), attraktori muuttuu nk. **oudoksi attraktoriksi**. Saapuessaan attraktorille ratkaisu saattaa siirtyä eri osaan vaihevaruutta ja liikkeen ennustaminen käy mahdottomaksi. Tämä on esimerkki kaoottisesta liikkeestä, johon tutustutaan lähemmin kirjan viimeisessä luvussa.

4.7.3 Approksimatiivisia ratkaisuja

Vaikka epälineaaristen yhtälöiden ratkaisemiseksi ei olekaan olemassa yleisiä menetelmiä, tarjolla on monenlaisia kikkoja etsiä ainakin approksimatiivisia ratkaisuja. Tutustutaan tässä pariin menetelmään, joista saattaa olla joissain tapauksissa hyötyä.

Duffingin menetelmä

Duffingin menetelmä perustuu peräkkäisiin approksimaatioihin. Tarkastellaan esimerkkinä potentiaalissa

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}m\epsilon x^4 \quad (\epsilon < 0) \quad (4.98)$$

liikkuvaa m -massaista hiukkasta, johon vaikuttaa lisäksi ulkoinen pakkovoima $mf_0 \cos \omega t$. Liikkeyhtälö on siten

$$\ddot{x} = \epsilon x^3 - \omega_0^2 x + f_0 \cos \omega t. \quad (4.99)$$

Arvataan ensimmäinen yrite

$$x_1 = A \cos \omega t.$$

Sijoitetaan tämä liikkeyhtälön oikealle puolelle

$$\ddot{x} = \epsilon A^3 \cos^3 \omega t - \omega_0^2 A \cos \omega t + f_0 \cos \omega t. \quad (4.100)$$

Trigonometrian kaavakokoelmista löytyy tulos

$$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \frac{3}{4} \cos \omega t,$$

jonka avulla saamme

$$\ddot{x} = \left(\frac{3}{4}\epsilon A^3 - \omega_0^2 A + f_0 \right) \cos \omega t + \frac{1}{4}\epsilon A^3 \cos 3\omega t. \quad (4.101)$$

Tämä vihjaa siihen, että yrite

$$x_2 = A \cos \omega t + B \cos 3\omega t$$

olisi jo paljon parempi arvaus. Sijoittamalla tämä alkuperäisen yhtälön oikealle puolelle sinne ilmestyy muotoa $\cos 5\omega t$ oleva termi ja niin edelleen. Tuloksena olisi siis taajuuspektri ω :n parittomille monikerroille. Tyydytään tässä kuitenkin oletukseen, että epälineaarisuus on sen verran heikkoa, että x_2 on jo itsessään riittävän hyvä approksimaatio. Sijoitetaan se alkuperäisen yhtälön molemmille puolille, jolloin saadaan yhtälö

$$-\omega^2 A \cos \omega t - 9\omega^2 B \cos 3\omega t = \epsilon (A \cos \omega t + B \cos 3\omega t)^3 - \omega_0^2 (A \cos \omega t + B \cos 3\omega t) + f_0 \cos \omega t. \quad (4.102)$$

Jotta tällainen kehitelmä ylipäänsä johtaisi johonkin, täytyy korkeampien ylä-äänien (siis ω :n monikertojen) amplitudien olla alempia pienempiä. Jos yllä olevassa näin on,

voidaan oikean puolen ensimmäisen termin ylä-ääni jättää pienenä pois, varsinkin kun se on vielä kerrottu pieneksi oletetulla ε :lla. Kehitetään sitten $\cos^3 \omega t$ jälleen samalla kaavalla kuin edellä ja kootaan perus- ja ylä-äänien lausekkeet yhteen

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{4} \varepsilon A^3 + \omega^2 A - \omega_0^2 A + f_0 \right) \cos \omega t + \\ & \left(9\omega^2 B - \omega_0^2 B + \frac{1}{4} \varepsilon A^3 \right) \cos 3\omega t = 0. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Funktiot $\cos \omega t$ ja $\cos^3 \omega t$ ovat riippumattomia toisistaan, joten molempien kertoimien täytyy olla erikseen nolli. Tästä saadaan yhtälöpari

$$\frac{3}{4} \varepsilon A^3 + (\omega^2 - \omega_0^2) A + f_0 = 0 \quad (4.104)$$

$$B = \frac{\varepsilon A^3}{4(\omega_0^2 - 9\omega^2)}, \quad (4.105)$$

joista jälkimmäistä käyttäen toisen kertaluvun approksimaatio on

$$x_2(t) = A \cos \omega t + \frac{\varepsilon A^3}{4(\omega_0^2 - 9\omega^2)} \cos 3\omega t. \quad (4.106)$$

Ylä-äänessä esiintyvä resonanssi ei ole yleensä ole oikea vaan seurausta käytetystä approksimaatiosta ja katoaa mentäessä seuraavaan kertalukuun. Nyt on vielä ratkaistava perusäänien amplitudin kolmannen asteen yhtälö. Selvästikin ratkaisun amplitudi riippuu sekä pakkovoiman voimakkuudesta että taajuudesta. Kolmannen asteen yhtälö voidaan periaatteessa ratkaista analyttisesti, mutta ratkaisun tarkastelu on näppärintä tehdä graafisesti. Tätä varten piirretään saman koordinaatiston (y, A) -tasoon suora

$$y = (\omega_0^2 - \omega^2) A - f_0$$

ja kuutioparaabeli

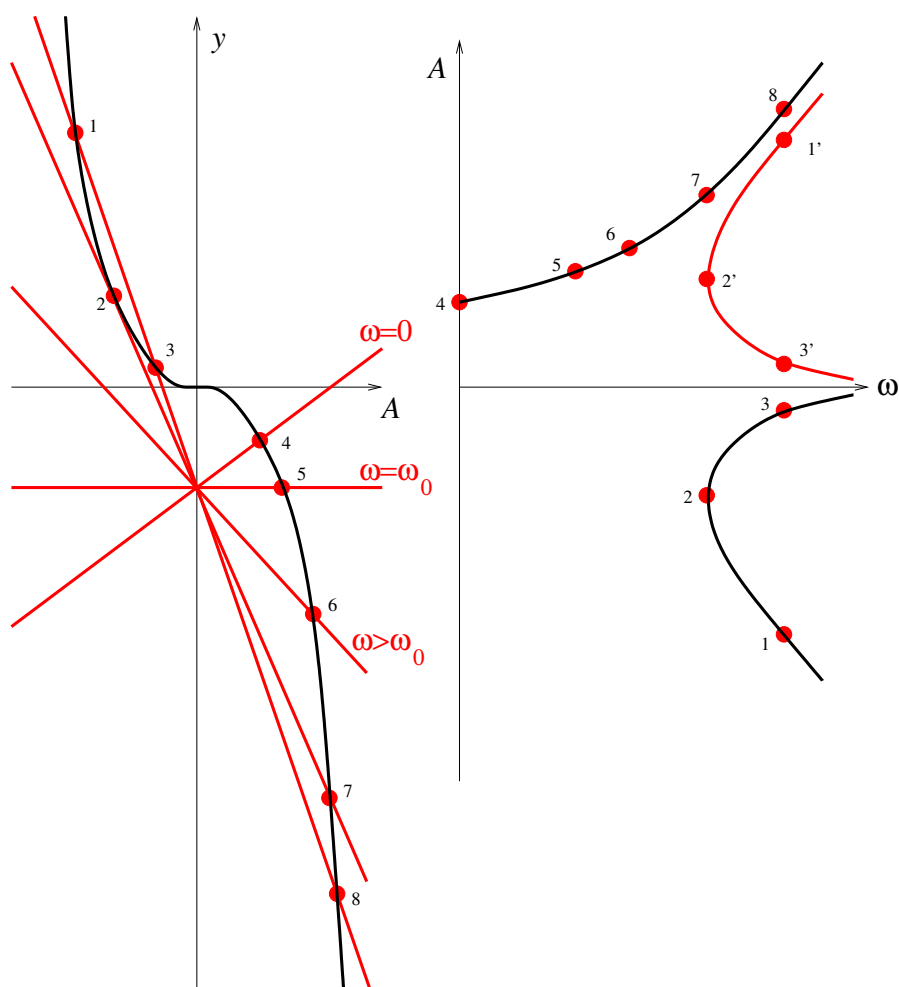
$$y = \frac{3}{4} \varepsilon A^3,$$

jolloin ratkaisut löytyvät näiden leikkauspisteistä. Kuvassa 4.4 on hahmoteltu ko. käyrien lisäksi näin saatu amplitudi taajuuden funktiona. (Pisteet 1', 2' ja 3' on saatu peilaamalla pisteet ω -akselin suhteen, eli määrittelemällä amplitudi aina positiiviseksi.)

Häiriökehitemä

Hyvin yleinen tapa ratkoa hankalia ongelmia fysiikassa on tehdä häiriökehitelmiä. Tarkastellaan tässä esimerkkinä epäsymmetristä potentiaalia

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{3} m\lambda x^3, \quad (4.107)$$



Kuva 4.4: Yhtälön (4.104) graafinen ratkaiseminen.

joka antaa liikeyhtälöksi

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \lambda x^2 = 0. \quad (4.108)$$

Tässä tapauksessa ei siis ole mukana ulkoista pakkovoimaa. Oletetaan, että vakio λ on pieni eli epälineaarisuus on pienillä amplitudeilla vähäinen korjaus lineaariseen värähtelijään. Kirjoitetaan ratkaisuyrite λ :n potenssisarjana

$$x(t) = x_0(t) + \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) + \dots,$$

missä $x_0(t)$ on häiriöttömän oskillaatorin ratkaisu. Sijoitetaan tämä yrite liikeyhtälöön ja jätetään λ :n toista ja korkeampia kertalukuja olevat termit pois. Tällöin

$$(\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \lambda(\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2) = 0. \quad (4.109)$$

Ensimmäinen sulkulauseke on nolla, koska x_0 on häiritsemättömän värähtelijän ratkaisu. λ :n kerroin on puolestaan nolla sillä edellytyksellä, että korkeamman kertaluvun termit voidaan jättää huomiotta. Näin meillä on yhtälöpari

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0 \quad (4.110)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - x_0^2 = 0. \quad (4.111)$$

Ensimmäisen ratkaisu on tietenkin $x_0 = A \cos \omega_0 t$. Käyttäen hyväksi trigonometrista relaatiota $\cos^2 \omega_0 t = (1/2)(1 + \cos 2\omega_0 t)$ toinen yhtälöistä saa muodon

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t. \quad (4.112)$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu on jo mukana x_0 :ssa. Lisätään tähän epähomogeenisen yhtälön erikoisratkaisu, joka on muotoa

$$x_1(t) = B \cos 2\omega_0 t + C. \quad (4.113)$$

Sijoittamalla tämä x_1 :n yhtälöön saadaan

$$-3\omega_0^2 B \cos 2\omega_0 t + \omega_0^2 C = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t, \quad (4.114)$$

josta saadaan lasketuksi B ja C

$$B = -\frac{A^2}{6\omega_0^2}; \quad C = \frac{A^2}{2\omega_0^2}. \quad (4.115)$$

Siis λ :n ensimmäistä kertalukua myöten alkuperäisen likeyhtälön ratkaisu on

$$x(t) = A \cos \omega_0 t - \lambda \frac{A^2}{6\omega_0^2} (\cos 2\omega_0 t - 3). \quad (4.116)$$

Tällä kertaa ensimmäinen ylä-ääni on $2\omega_0$. Menemällä korkeampiin kertalukuihin spektriin tulee ylä-ääniä $3\omega_0, 4\omega_0, \dots$

Mitattaessa jotakin luonnossa havaittavaa tai vaikka elektronisessa värähtelypiirissä ilmenevää oskillaatiota, sen spektrissä nähdään usein ylä-ääniä, vaikka itse oskillaatiolla ei sellaisia pitäisikään olla. Tällöin ylä-äänispektriä analysoimalla saadaan tietoa oskillaation epälineaarisuusominaisuuksista. Edellä oli kaksi esimerkkiä, joista jälkimmäinen tuotti ylä-ääniä kaikilla perusäänen monikerroilla ja ensimmäinen puolestaan vain perusäänen parittomilla monikerroilla. Vaikkakaan analysointi ei välttämättä ole helppoa, voidaan esim. amplitudin pienenemisestä yrittää arvioida epälineaarisuuden voimakkuutta.

4.8 Harjoituksia

1. Rakennetaan seuraavanlainen oskillaattori. Porataan reikä suoraan maapallon läpi (ei kuitenkaan keskipisteen kautta; pienin etäisyys keskipisteeseen olkoon a). Pudotetaan reikään korruptioon syyllistynyt m -massainen mutta muuten kaikin puolin pistemäinen poliitikko. Kuinka pitkän ajan kuluttua poliitikko ponnahtaa takaisin? Vertaa tätä aikaan, joka poliitikolta kuluisi kiertää Keplerin radalla maapallon ympäri aivan pintaliitona.
2. Harmoninen värähtelijä (taajuus ω) on levossa tasapainoasemassaan (origossa). Hetkellä $t = 0$ siihen alkaa vaikuttaa voima $F(t)$, joka on muotoa

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0 t}{T}, & t \leq T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Millä amplitudilla systeemi jää värähtelemään?

3. Ääniraudan taajuus on 440 Hz. Oletetaan, että sen amplitudi vaimenee kymmenesosaan ajassa 10 s. Olettaen, että vaimennus johtuu kokonaan äänen tuottamisesta, mikä olisi ääniraudan taajuus tyhjiössä?
4. Analyysivaa'an osoittimen liikettä voi pitää vaimenevana värähdysliikkeenä. Punnitessa näytettä havaitaan kolme peräkkäistä ääriasentoa (esim. liian painava, liian kevyt, liian painava), joita merkitään p_1 , p_2 ja p_3 . Määrää näiden avulla tasapainoaseman lukema p .
5. Matemaattisen heilurin ripustuspaikka on kahden vaakasuorassa olevan jousen välissä. Jouset ovat kiinni kiinteissä sivuseinissä ja niiden jousivakiot ovat $k/2$. Ripustuspaikka liikkuu vaakasuorassa suunnassa (toinen jousi puristuu, toinen venyy). Heilurin varren pituus on ℓ . Kirjoita Lagrangen funktio ja liikeyhtälöt. Käytä koordinaatteja φ (heilurin heilahduskulma) ja x (ripustuspaikan siirtymä).
6. Tarkastellaan kolmea samanmassaista (m) massapistettä, jotka sijaitsevat (ja pysyvät) ympyrän kehällä. Ne on yhdistetty toisiinsa identtisillä massattomilla jousilla, joiden kaikkien jousivakio on k . Myös jouset ovat ympyrän kehällä ja tasapainoasemassa massa ovat 120° päässä toisistaan. Piirrä kuva ja tutki systeemin ominaisvärähtelyjä.
7. Oletetaan, että kolmen vapausasteen systeemin kineettinen energia on

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

ja potentiaalienergia

$$U = k(x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

missä m ja k ovat positiivisia vakioita. Määritä ominaistajuudet ja niitä vastaavat värähtelymoodit.

8. Johda Lagrangen funktio

$$L = \frac{1}{2}m[\dot{q}^2 + (\ell + q)^2\dot{\varphi}^2] - \frac{1}{2}kq^2 + mg(\ell + q)\cos\varphi \quad (4.117)$$

ja liikeyhtälöt tasoheilurille (massa m), jonka vartena on massaton jousi. Jousen pituus jännittävän voiman ollessa nolla on ℓ ja sen jousivakio on k . Tässä valitut yleistetyt koordinaatit ovat heilahduskulma φ ja varren pituuden muutos q . (Varren kokonaispituus on siis $\ell + q$.)

9. Määritä edellisen tehtävän systeemin stabiili tasapainoasema (φ_0, q_0) (huom: tämä ei ole $(0, 0)$). Olettaen, että systeemi värähtelee lähellä tasapainoasemaansa, määritä massa- ja jousivakiomatriisit \mathcal{M} ja \mathcal{K} sekä ratkaise ominaistajuudet ja niitä vastaavat normitetut ominaisvektorit.

10. Tarkastellaan epälineaarista värähtelijää, jonka liikeyhtälö on

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0.$$

Oletetaan, että ε on sen verran pieni, että nollassa kertaluvussa termi εx^3 voidaan katsoa nollassi. Etsi ratkaisu $x = x(t)$ ensimmäisessä kertaluvussa alkuarvoilla $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$.

Vihje: Käytä yritettä $x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ ja kirjoita $\omega = \omega_0 + \varepsilon\alpha_1$.

11. van der Polin oskillaattorin liikeyhtälö voidaan antaa dimensiottomassa muodossa

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

Osoita, että liikeyhtälö voidaan muuntaa kahdeksi ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöksi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + \varepsilon x(1 - x^2/3) \\ \dot{u} &= -x. \end{aligned}$$

Tee sitten skaalaus $u = \varepsilon U$ ja osoita, että systeemin faasikäyrän differentiaaliyhtälö (x, U) -tasossa on

$$\frac{dU}{dx} = \eta^2 \frac{x}{\frac{1}{3}x^3 - x - U},$$

missä $\eta = \varepsilon^{-1}$.

12. Tarkastele edellä saadun faasikäyräyhtälön ratkaisua kun $\eta \ll 1$. Jos voidaan olettaa, että $dU/dx = \mathcal{O}(1)$ (eli dU/dx on pieni ensimmäisessä kertaluvussa), perustelee miksi faasikäyrän yhtälö on likimain

$$U(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

Piirrä lopuksi van der Polin oskillaattorin faasikäyrä (x, \dot{x}) -tasossa.

Luku 5

Ei-inertiaaliset koordinaatistot

Tähän asti olemme tarkastelleet erilaisia ongelmia inertiaalikoordinaatistossa. Aina tämä ei kuitenkaan käy päinsä, sillä tarkastelukoordinaatisto saattaa olla kiihtyvässä liikkeessä ympäristönsä suhteen. Yksi tärkeä luokka ei-inertiaalisia koordinaatistoja ovat eri tavoin pyörivät koordinaatistot, joihin tässä luvussa tutustutaan lähemmin. Tämä toimii myös johdantona seuraavaan lukuun, jossa puolestaan tarkastellaan pyöriviä kappaleita kuten hyriä.

5.1 Newtonin liikeyhtälö liikkuvissa koordinaatistoissa

Tarkastellaan kahta jäykkää karteesista koordinaatistoa, joissa molemmissa käytetään samoja pituusyksiköitä. Merkitään koordinaatistoja

$$\{x\} = (x_1, x_2, x_3), \quad \{y\} = (y_1, y_2, y_3).$$

Oletetaan $\{x\}$ inertiaaliseksi ja tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa $\{y\}$:n origo on paikallaan pisteessä \mathbf{R} koordinaatistossa $\{x\}$, mutta koordinaattiakselit pyörivät jonkin $\{x\}$:ssä kiinteän akselin ympäri kulmanopeudella $\boldsymbol{\omega}$. Olkoon pisteen P paikkavektori $\{x\}$:ssä \mathbf{r}' ja $\{y\}$:ssä \mathbf{r} (Kuva 5.1). Tällöin

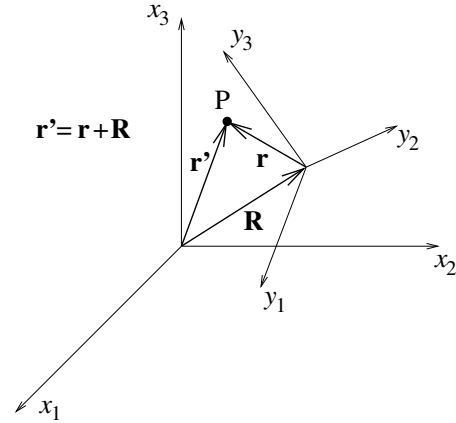
$$\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Merkitään $\{x\}$:n kantavektoreita $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ ja $\{y\}$:n kantavektoreita $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Nyt tietenkin

$$\mathbf{r}' = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} + r_1 \mathbf{e}_1 + r_2 \mathbf{e}_2 + r_3 \mathbf{e}_3. \quad (5.2)$$

Koska $\{y\}$:n origo on paikallaan, tulee nopeudeksi

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 + \dot{r}_3 \mathbf{e}_3 + r_1 \dot{\mathbf{e}}_1 + r_2 \dot{\mathbf{e}}_2 + r_3 \dot{\mathbf{e}}_3. \quad (5.3)$$



Kuva 5.1: Inertiaalikoordinaatisto $\{x\}$ ja ei-inertiaalinen koordinaatisto $\{y\}$.

Nyt pitää laskea kantavektoreiden $\{\mathbf{e}_i\}$ derivaatat (tätähän tehtiin jo tason napakoordinaateissa kurssin alussa). Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi karteesista koordinaatistoa, jolloin $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Koska $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$, on voimassa

$$\mathbf{e}_i \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{e}_i = 0$$

eli kantavektori on kohtisuorassa aikaderivaattaansa vastaan. Tämän perusteella voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 &= \alpha \mathbf{e}_2 + \beta \mathbf{e}_3 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 &= \gamma \mathbf{e}_1 + \delta \mathbf{e}_3 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_3 &= \varepsilon \mathbf{e}_1 + \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Koska toisaalta $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, saadaan ehto $\mathbf{e}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$, josta seuraa $\gamma + \alpha = 0$ sekä vastaavasti $\beta + \varepsilon = 0$ ja $\delta + \varphi = 0$. Merkitsemällä $\alpha = \omega_3$, $\beta = -\omega_2$, $\delta = \omega_1$ ylläoleva yhtälöryhmä saa muodon

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 &= \omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_2 &= -\omega_3 \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_3 \\ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_3 &= \omega_2 \mathbf{e}_1 - \omega_1 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Määritellään vektori $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$. Tällöin

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3 = \frac{d}{dt} \mathbf{e}_1 \quad (5.6)$$

ja vastaavasti ristituloille muiden yksikkövektoreiden kanssa eli

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i; \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.7)$$

$\boldsymbol{\omega}$:n tulkinta on pyörivän koordinaatiston kulmanopeus.

Olemme siis saaneet tuloksen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 \dot{r}_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^3 r_i \dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^3 r_i \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i = \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 r_i \mathbf{e}_i \right) \\ &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

missä \mathbf{v} ja $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ on laskettu koordinaatistossa $\{y\}$. Toisaalta $d\mathbf{r}/dt$ on sama kuin koordinaatistossa $\{x\}$ laskettu $d\mathbf{r}'/dt$.

Tuloksen (5.8) johdossa ei ole käytetty mitenkään hyväksi tietoa, että \mathbf{r} on nimenomaan paikkavektori. Tulos on yleinen ja voimassa mielivaltaiselle ajan suhteen derivoivalle vektorille $\mathbf{A}(t)$ eli

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_x = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}. \quad (5.9)$$

Voimme soveltaa tätä myös kulmakiihtyvyyssvektoriin itseensä

$$\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_x = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_y. \quad (5.10)$$

eli kulmakiihtyvyys on sama katsottiinpa sitä kummasta koordinaatistosta tahansa, joten se voidaan aina mitata inertiaalikoordinaatistossa.

Annetaan lopuksi koordinaatiston $\{y\}$ origon liikkua koordinaatiston $\{x\}$ suhteen, jolloin

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_x = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_x + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (5.11)$$

Jotta tästä päästäisiin sitten tarkastelemaan voimien vaikutusta, täytyy vielä osata antaa kiihtyvyys $d^2\mathbf{r}'/dt^2$ koordinaatiston $\{y\}$ suureiden avulla. Derivaattaoperaattori on siis edellisen perusteella muotoa

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_x = \left(\frac{d}{dt} \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times,$$

joten

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right)_x &= \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_x + \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_y \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_y + \left(\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_y \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right)_x + \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)_y + \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right)_y \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)_y + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Kirjoitetaan sitten Newtonin liikeyhtälö m -massaisella hiukkaselle

$$\mathbf{F} = m \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)_x + m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + 2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (5.13)$$

missä oikealta puolelta on jätetty erikseen merkitsemättä, että suureet on laskettu (tai mitattu) $\{y\}$ -koordinaatistossa. Lauseke on havainnollisempaa kirjoittaa järjestyksessä

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \left(\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \right)_x - m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) + 2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (5.14)$$

Näissä lausekkeissa \mathbf{F} on oikea massapisteesen vaikuttava ulkoinen voima. Ei-inertiaalisen koordinaatiston valinta on tuonut joukon massan hitaudesta johtuvia efektejä:

- Termi $-m d^2 \mathbf{R}/dt^2$ tulee koordinaatistojen origojen suhteellisesta liikkeestä ja on tietenkin nolla, jos liike on tasaista ja suoraviivaista. Tätä kutsutaan **Galilein voimaksi**.
- Hitausvoima $-m \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}$ johtuu pyörimisliikkeen epätasaisuudesta (siis pyörimisnopeuden derivaatasta), ei pyörimisestä itsestään. Voima tunnetaan **Eulerin voimana**. Vaikka maapallo ei aivan tasaisesti pyöriäkään, voima on maapallolla häviävän pieni.
- Hitausvoima $-2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ tunnetaan **Coriolis-voimana**. Se on tärkeä esimerkiksi ilmakehän liikkeissä ja siihen palataan myöhemmin.
- Lopulta $-m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ on tuttu keskipakovoima, joka pyrkii pyörivässä koordinaatistossa hylkimään kappaletta pois päin pyörimisakselilta.

5.2 Muunnos pyörivään koordinaatistoon

Tarkastellaan seuraavaksi kuinka Lagrangen funktio muunnetaan inertiaalikoordinaatistosta pyörivään koordinaatistoon. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että koordinaatistojen origot eivät liiku toistensa suhteen ja että molemmat koordinaatistot ovat karteesisia.

Tarkasteltava kappale oletetaan edelleen vakiomassaiseksi (m) hiukkaseksi. Hiukkasen paikkaa kummassakin koordinaatistossa merkitään pystyvektoreilla.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Koordinaatistojen välillä vallitsee ortogonaalinen **ajasta riippuva** muunnos, jota kuvataan matriisilla \mathcal{T} , jonka elementit ovat ajan funktioita. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathcal{T} \cdot \mathbf{y} \\ \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T} &= \mathcal{I} \end{aligned} \quad (5.15)$$

eli $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^T$.

Olkoon \mathbf{y}_0 jokin koordinaatiston $\{y\}$ kiinteä piste, joten kun $\{y\}$ kiertyy, hiukkasen paikka $\{y\}$:stä nähtynä muuntuu kuten

$$\mathbf{x} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{y}_0, \quad (5.16)$$

josta derivoimalla tulee

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{y}_0. \quad (5.17)$$

Määritellään matriisi \mathcal{O} siten, että

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{O} \cdot \mathbf{x}. \quad (5.18)$$

Nyt \mathcal{O} voidaan antaa **kulmanopeusmatriisin** Ω avulla

$$\mathcal{O} = \mathcal{T} \cdot \Omega \cdot \mathcal{T}^T. \quad (5.19)$$

Huom. Tämä Ω ei ole sama asia kuin luvussa 4 esiintynyt diagonaalinen ominaistajuusmatriisi, jota myös merkittiin Ω :lla!

Nyt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathcal{T} \cdot \Omega \cdot \mathcal{T}^T \cdot \mathbf{x} \\ &= \mathcal{T} \cdot \Omega \cdot \mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{y}_0 \\ &= \mathcal{T} \cdot \Omega \cdot \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Käyttäen tulosta (5.17) saadaan Ω :n ja koordinaatistomuunnoksen välille yhteys

$$\dot{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cdot \Omega \Rightarrow \Omega = \mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}}. \quad (5.21)$$

Laskemalla

$$\begin{aligned} \Omega + \Omega^T &= \mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}} + (\mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}})^T = \mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}} + \dot{\mathcal{T}}^T \cdot \mathcal{T} \\ &= \frac{d}{dt}(\mathcal{T}^T \cdot \mathcal{T}) = \dot{\mathcal{I}} = 0, \end{aligned}$$

joten Ω on **antisymmetrinen** eli

$$\Omega = -\Omega^T. \quad (5.22)$$

Samanlainen lyhyt lasku antaa tuloksen

$$\Omega^T \cdot \Omega = \dot{\mathcal{T}}^T \cdot \dot{\mathcal{T}}. \quad (5.23)$$

Kirjoitetaan seuraavaksi hiukkasen Lagrangen funktio koordinaatistossa $\{x\}$ (muista, että pistetulo matriisinotaatiossa on vaakavektorin ja pystyvektorin tulo)

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} - U(\mathbf{x}). \quad (5.24)$$

Käyttäen tulon derivoimissääntöä saadaan

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{y}}, \quad (5.25)$$

joten pienellä laskutoimituksella saadaan nopeuden neliölle lauseke

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} &= (\dot{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{y}})^T \cdot (\dot{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{y}}) \\ &= (\mathbf{y}^T \cdot \dot{\mathcal{T}}^T + \dot{\mathbf{y}}^T \cdot \mathcal{T}^T) \cdot (\dot{\mathcal{T}} \cdot \mathbf{y} + \mathcal{T} \cdot \dot{\mathbf{y}}) \\ &= \dot{\mathbf{y}}^T \cdot \dot{\mathbf{y}} + 2\dot{\mathbf{y}}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y} + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^T \cdot (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Lagrangen funktio koordinaatistossa $\{y\}$ on siis

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{y}}^T \cdot \dot{\mathbf{y}} + m\dot{\mathbf{y}}^T \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y})^T \cdot (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y}) - U(\mathcal{T} \cdot \mathbf{y}). \quad (5.27)$$

Palataan sitten matriisinotaatiosta takaisin tavanomaiseen vektorinotaatioon. Kirjoittamalla antisymmetrinen matriisi $\boldsymbol{\Omega}$ muodossa

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ja kokoamalla sen komponenteista vektori $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ nähdään välittömästi, että $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}$. Niinpä Lagrangen funktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{y}}^2 + m\dot{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})^2 - U'(\mathbf{y}), \quad (5.28)$$

missä $U'(\mathbf{y}) = U(\mathcal{T} \cdot \mathbf{y})$. Jätetään pilkku jatkossa pois, koska sillä ei ole merkitystä muodollisen tarkastelun kannalta.

Lagrangen liikeyhtälöt johdetaan samalla reseptillä kuin ennenkin. Tällä kertaa proseduuri on kuitenkin helpompi viedä läpi alusta loppuun vektorinotaatiossa kuin komponentti komponentilta. Merkitään seuraavassa paikan suhteen otettua gradienttia kuten tavallista

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial y_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial}{\partial y_3} \mathbf{e}_3$$

ja vastaavasti nopeusgradienttia

$$\nabla_v = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{y}}}$$

Lagrangen funktion muuttujat ovat \mathbf{y} ja $\dot{\mathbf{y}}$, joten L :n kokonaisdifferentiaaliksi tulee

$$\begin{aligned} dL &= m\dot{\mathbf{y}} \cdot d\dot{\mathbf{y}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{y}) + \\ &\quad + m d\dot{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) + m\dot{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{y}) - \nabla U \cdot d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Käyttämällä vektori-identiteettiä $\mathbf{A} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{y}) = (\mathbf{A} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{y}$, dL :stä voidaan poimia L :n gradientit

$$\nabla_v L = m\dot{\mathbf{y}} + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) \quad (5.30)$$

$$\nabla L = m(\dot{\mathbf{y}} \times \boldsymbol{\omega}) + m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) \times \boldsymbol{\omega} - \nabla U. \quad (5.31)$$

⇒

$$\frac{d}{dt}(\nabla_v L) = m\ddot{\mathbf{y}} + m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{y}) + m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{y}}). \quad (5.32)$$

Liikkeyhtälöksi tulee

$$m\ddot{\mathbf{y}} = -m(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{y}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{y}}) - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}) - \nabla U, \quad (5.33)$$

mikä on sama yhtälö kuin edellä johdettu Newtonin liikkeyhtälö (5.13) ilman Galilein voimatermiä, koska koordinaatistojen origojen ei oletettu liikkuvan toisiinsa nähden.

Näin rakennettu Langrangen formalismi ei ole vielä aivan eleganteimmillaan, koska liikkeyhtälössä on uusia voimatermejä. Ne voidaan kuitenkin upottaa perus-Lagrangen formalismiin määrittelemällä **Scheringin potentiaali**

$$S = -m\dot{\mathbf{y}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y}), \quad (5.34)$$

joka antaa Eulerin ja Corioliksen voimat muodossa, sekä keskipakopotentiaali

$$Z = -\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{y})^2, \quad (5.35)$$

joka antaa keskipakoisvoiman. Näin meillä on siis koossa Lagrangen yhtälöt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\nabla_v \tilde{L}) - \nabla \tilde{L} &\equiv \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{y}}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{y}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.36)$$

missä Lagrangen funktio on $\tilde{L} = L + S + Z$ ja $L = (1/2)m\dot{\mathbf{y}}^2 - U$.

5.3 Liike pyörivällä maapallolla

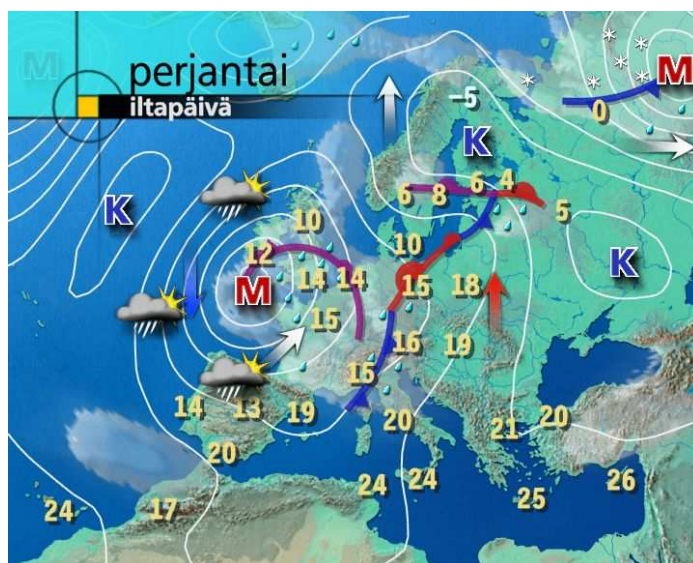
Koko planeettakunnan liike on esimerkkitapaus ei-inertiaalisesta liikkeestä. Tarkasteltaessa liikettä pyörivällä maapallolla Maan vuotuinen liike Auringon ympäri ja pyörimisliikkeen pienet epätasaisuudet voidaan lähes aina jättää huomiotta. Maan liike Auringon ympäri kyllä sinänsä aiheuttaa merkittävän keskipakoiskiihtyvyyden. Rataliikkeestä johtuva keskipakoisvoima on kuitenkin keskimääräisesti erittäin tarkkaan tasapainossa Auringon vetovoiman kanssa, sillä muutenhan Maa ei pysyisi radallaan.

Useimpien mekaniikassa tarkasteltavien ilmiöiden kannalta maapallo myös pyörii varsin hitaasti. Pyörimisliikkeen kulmanopeus on tietenkin noin $\omega = 2\pi/(24\text{ t}) = 7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, mikä antaa keskipakoiskiihtyvyydeksi pallon pinnalla päiväntasaajalla $\omega^2 r = 3,4 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-2}$. Tämä on vain noin 0,35 % Maan vetovoiman kiihtyvyydestä. Vaikkakin pieni, tämä efekti ei ole aivan merkityksetön, sillä se litistää maapalloa napojen suunnassa. Litistyminen yhdessä keskipakoiskiihtyvyyden kanssa aiheuttaa sen, että Maan vetovoiman kiihtyvyys päiväntasaajalla on noin 0,53% pienempi kuin navoilla.

5.3.1 Coriolis-voima

Pyöriminen tuo mukanaan Coriolis-voiman $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$, missä $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ on tarkasteltavan massan nopeus pyörivässä koordinaatistossa.

Jokainen sääkarttaan joskus tutustunut tietää, että ilma kiertää matalapainetta pohjoisella pallonpuoliskolla ylhäältä katsottuna vastapäivään (Kuva 5.2). Eteläisellä pallonpuoliskolla liike on päinvastaiseen suuntaan. Tämä on seurausta Coriolis-voimasta. Määritelmänsä mukaisesti Coriolis-kiikhtyvyys on suurimmillaan $2\omega v \simeq (1,5 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}) v$.



Kuva 5.2: Sääkartta.

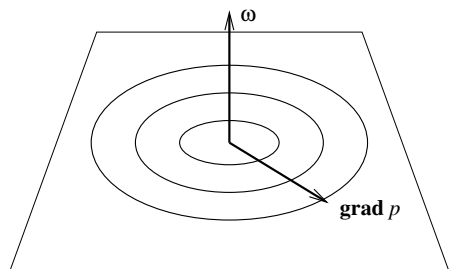
Tarkastellaan tästä esimerkkinä pohjoisnavalta horisontaalisesti ammuttua kuulaa. Coriolis-kiikhtyvyys on tällöin $a_c = 2\omega v$, joten ammus poikkeaa suoraan etelään suuntautavalta radalta ajassa t matkan $\frac{1}{2}a_c t^2 = \omega v t^2$. Kulmapoikkeamaksi tulee puolestaan

$$\theta = \frac{\omega v t^2}{vt} = \omega t,$$

mikä on tietenkin sama kuin maapallon kiertämä kulma ajassa t . Fysikaalisesti tämä merkitsee, että koska pohjoisnapa itse ei kierrä maapalloa, niin ammus jatkaa suoraviivaista liikettään inertiaalikoordinaatistossa. Efekti on tietenkin pienempi laukaisupaikan ollessa jossain muualla. Suurten tykinammusten tulenjohdossa ja ballististen ohjusten tapauksessa Coriolis-voima on kuitenkin otettava huomioon.

Mitä suuremman skaalan ilmiöstä on kyse, sitä merkittävämmäksi Coriolis-efekti tulee. Se on tärkeä varsinkin suurten ilma- tai merivirtausten kuten pasaatituulten ja Golf-virran tapauksessa. Näiden lähempi tarkastelu vaatii termodynamiikan ja virtausmekaniikan käsitteiden (paine, lämpötila, viskositeetti, jne.) mukaan ottamista.

Otettakoon tässä esimerkiksi teoreetikon idealisaatio tasossa ympyränmuotoisesta matalapaineen keskuksesta (Kuva 5.3). Mikäli mikään muu voima ei tilanteessa vaikuttaisi, virtaisi ilma paineen gradienttivoiman vaikutuksesta kohti matalapaineen keskusta ja matalapaine täyttyisi.



Kuva 5.3: Teoreettinen malli matalapaineelle tasossa, jossa paineen tasa-arvokäyrät ovat ympyröitä matalapaineen keskuksen ympärillä ja kulmanopeus vektori kohtisuorassa tasoa vastaan.

Coriolis-voima kuitenkin poikkeuttaa ilman liikettä siten, että katsottaessa pohjoisella pallonpuoliskolla ylhäältä päin ilma lähtee kiertämään matalapaineen keskusta vastapäivään. Poikkeutuma jatkuu niin pitkälle, että tuulen suuntavektori on paineen gradientin tasa-arvokäyrän suuntainen, jolloin gradienttivoima, Coriolis-voima ja ilman ympyräliikkeeseen liittyvä keskipakoisvoima tasapainottavat toisensa. Todellisuudessa tuuliin vaikuttaa myös ilmamolekyylien välinen kitka, joka tekee virtauksesta pyörteistä ja aiheuttaa viskositeettia. Tämä efekti estää tuulen suuntautumisen täysin kohtisuoraan painegradienttia vastaan, joten matalapaine kuitenkin lopulta täyttyy. Ja tietenkin oikea ilmakehä on kolmiulotteinen, mikä on olennaista sille, että matalapaineita ylipäänsä muodostuu.

5.3.2 Liiketytälö

Tarkastellaan lähemmin tilannetta, jossa ainoa liike on tasainen pyörimisliike maapallon etelä-pohjois-akselin ympäri. Tämä akseli kiinnittää siis inertiaalikoordinaatiston, jonka suhteen maanpinnalle kiinnitetty tarkastelukoordinaatisto pyörii. Oletetaan lisäksi, että etäisyys R inertiaalikoordinaatiston origosta (maapallon keskipiste) maanpinnalla olevan koordinaatiston origoon on vakio. Edellisen tarkastelun perusteella $\ddot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$. Tällöin liiketytälöksi tarkastelukoordinaatistossa tulee

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2m \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (5.37)$$

missä \mathbf{F} kuvaa kaikkia ulkoisia voimia, gravitaatio mukaan lukien. Tässä tilanteessa Eulerin voima on nolla, koska pyörimisnopeus on oletettu vakioksi.

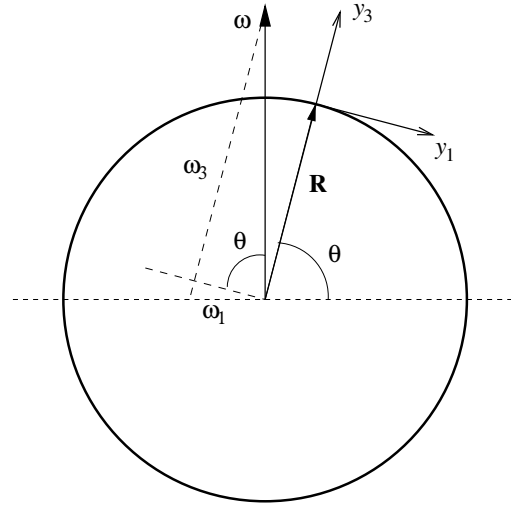
Tarkastellaan levossa roikkuvaa luotinuoraa $\dot{\mathbf{r}} = 0$. Koska $r \ll R$, on yhtälön (5.37) viimeinen termi mitätön toiseen termiin verrattuna. Toinen termi taas aiheuttaa tarkastelukoordinaatistossa tasaisen kiihtyvyyden, joten sen vaikutus on vain poikkeuttaa “luotisuoran” suuntaa hieman Maan keskipistettä kohti osoittavasta linjasta. Tämän voi

melko hyvällä tarkkuudella jättää huomiotta. Jos luotinuora laitetaan heilumaan, lauseke $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ on

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\omega \cos \theta & 0 & \omega \sin \theta \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 \end{vmatrix},$$

missä θ on origoja yhdistävän janan ja päiväntasaajan välinen kulma. Se on siis maantieteilijöiden ja geofyysikoiden käyttämä **latitudi**, ei pallokoordinaatistoissa tavallisesti käytetty napakulma eli **kolatitudi**, joka kasvaa navalta ekvaattorille (Kuva 5.4).

Kuva 5.4: Pyörivän Maan pinnalla tapahtuvan liikkeen tarkastelussa käytetyt koordinaatistot. Maan keskipisteeseen kiinnitetyssä, hyvällä tarkkuudella inertiaalisessa koordinaatistossa Maa pyörii kulmanopeudella $\boldsymbol{\omega}$. Pyörivän Maan pinnan pisteeseen kiinnitetty $\{y\}$ -koordinaatisto on ei-inertiaalinen. Näissä koordinaatistoissa vektori $\boldsymbol{\omega}$ on vakio.



Merkitään yksikkövektorin \mathbf{e}_3 suuntaan vaikuttavaa gravitaatiovoimaa mg ja ulkoisen voiman muita komponentteja F_1, F_2, F_3 . Tällöin liikeyhtälön komponenteiksi tulee

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= F_1 + 2m\omega\dot{y}_2 \sin \theta \\ m\ddot{y}_2 &= F_2 - 2m\omega(\dot{y}_1 \sin \theta + \dot{y}_3 \cos \theta) \\ m\ddot{y}_3 &= F_3 - mg + 2m\omega\dot{y}_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Esim. Vapaasti putoava kappale

Tarkastellaan vapaasti putoavaa kappaletta (edellisissä liikeyhtälöissä siis $F_i = 0$). Oletetaan, että liike lähtee levosta pisteestä $(0, 0, y_{30})$. Vapaassa pudotuksessa vertikaalinen kiihtyvyys on paljon suurempi kuin horisontaalinen kiihtyvyys, joten oletetaan $\dot{y}_1 = 0$ ja $\dot{y}_2 = 0$. Liikeyhtälön komponenteiksi tulee

$$\ddot{y}_1 = 0 \quad (5.39)$$

$$\ddot{y}_2 = -2\omega \cos \theta \dot{y}_3 \quad (5.40)$$

$$\ddot{y}_3 = -g. \quad (5.41)$$

Koska kappaleella ei ole nopeutta eikä kiihtyvyyttä suuntaan 1, saadaan $y_1 = 0$. Derivoimalla yhtälö (5.40) ajan suhteen ja käyttämällä yhtälöä (5.41) saadaan

$$\frac{d^3 y_2}{dt^3} = -2\omega \cos \theta \frac{d^2 y_3}{dt^2} = 2\omega g \cos \theta$$

eli alkuehdoilla $\ddot{y}_2 = \dot{y}_2 = y_2 = 0$ saadaan $y_2 = \frac{1}{3}\omega g \cos \theta t^3$. Yhtälöstä (5.41) saadaan $y_3 = y_{30} - \frac{1}{2}gt^2$ ja merkitsemällä pudotuksen korkeutta $z = y_{30} - y_3 = \frac{1}{2}gt^2$ poikkeaman lausekkeeksi tulee

$$y_2 = \frac{2^{3/2}}{3} \frac{\omega}{\sqrt{g}} \cos \theta z^{3/2}. \quad (5.42)$$

Jos kappale pudotetaan päiväntasaajalla 100 m korkeudelta, Coriolis-voiman aiheuttama poikkeama on vain 2,2 cm. Täten pienikin tuuli, viskositeetin epätasaisuus, yms. tekee efektin havaitsemisen vaikeaksi. Lisäämällä pudotuskorkeutta poikkeama kasvaa korkeutta nopeammin, mutta niin voimistuvat ja monimutkaistuvat toisaalta tuuletkin.

5.3.3 Foucault'n heiluri

Paljon havainnollisempi esimerkki Coriolis-voimasta on **Foucault'n heiluri** (Kuva 5.5). Olkoon heilurin varren pituus l ja massa m . Kuten aiemmin matemaattisen heilurin tapauksessa heiluriin vaikuttavat voimat ovat gravitaatio ja langan jännitys J (siis sidovoima). Mielivaltaisella heilahduskulmalla ongelma on aika hankala. Oletetaan tässä heilahduskulma pieneksi, jolloin voidaan olettaa, että

- koordinaattien ja koordinaatinopeuksien toista ja sitä korkeampaa kertalukua olevat termit voidaan jättää huomiotta (siis esim. termit muotoa $y_i \dot{y}_j$),
- y_3 :n oskillaatiot voidaan jättää kokonaan huomiotta eli $y_3 = \dot{y}_3 = \ddot{y}_3 = 0$, ja
- $y_i/l \ll 1$, kun $i = 1, 2$.

Liikkeyhtälöt ovat siis

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= J_1 + 2m\omega \sin \theta \dot{y}_2 \\ m\ddot{y}_2 &= J_2 - 2m\omega(\sin \theta \dot{y}_1 + \cos \theta \dot{y}_3) \\ m\ddot{y}_3 &= J_3 - mg + 2m\omega \cos \theta \dot{y}_2. \end{aligned} \quad (5.43)$$

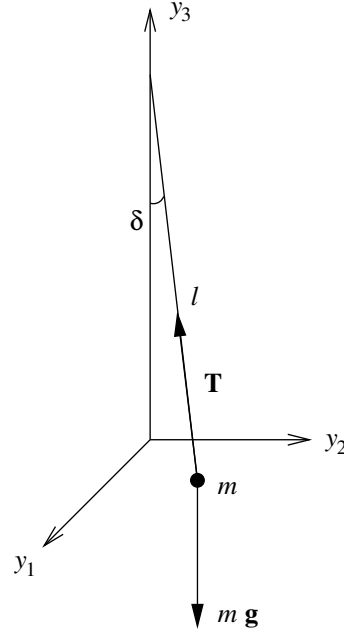
Koska $y_i/l \ll 1$, kun $i = 1, 2$, $J \approx J_3$ ja koska $\ddot{y}_3 = 0$, antaa liikkeyhtälön 3-komponentti suoraan jännityksen

$$J = mg - 2m\omega \dot{y}_2 \cos \theta. \quad (5.44)$$

Tarkasteltavilla pienillä heilahduskulmilla

$$J_i \approx -\frac{y_i}{l} J \approx -\frac{y_i}{l} J_3 \approx -\frac{y_i}{l} mg \quad (i = 1, 2).$$

Kuva 5.5: Foucault'n heiluri. Massa m on ripustettu jäykällä massattomalla varrella (pituus l) kiinteästä ripustuspisteestä. Maan pyörimisliikkeen vaikutuksesta heilurin heilahdustaso kiertyy.



Sijoittamalla tämä liikeyhtälön kahteen ensimmäiseen komponenttiin ja jättämällä epälineaariset termit pieninä huomiotta saadaan yhtälöpari

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -\frac{y_1}{l}mg + 2m\omega y_2 \sin \theta \\ m\ddot{y}_2 &= -\frac{y_2}{l}mg - 2m\omega y_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Merkitään vielä heilurin kulmataajuutta α :lla, $\alpha^2 = g/l$, jolloin yhtälöpari voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \alpha^2 y_1 &= 2\omega y_2 \sin \theta \\ \ddot{y}_2 + \alpha^2 y_2 &= -2\omega y_1 \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nämä näyttävät harmonisen oskillaattorin liikeyhtälöiltä, joissa on mukana pakko-voima. Pakkovoima on verrannollinen heilahdusta vastaan kohtisuoraan nopeuskomponenttiin. Siten siis x - ja y -tason oskillaatiot ovat kytkeytyneet toisiinsa. Ratkaistavana on olennaisesti kaksiulotteinen ongelma, joka onnistuu kätevästi siirtymällä tarkastelemaan tilannetta kompleksitasossa. Siispä kerrotaan jälkimmäinen yhtälö i :llä ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen:

$$(\ddot{y}_1 + i\ddot{y}_2) + \alpha^2(y_1 + iy_2) = -2\omega i(\dot{y}_1 + iy_2) \sin \theta. \quad (5.47)$$

Otetaan käyttöön kompleksinen muuttuja $u = y_1 + iy_2$, jolloin saadaan differentiaaliyhtälö

$$\ddot{u} + \alpha^2 u = -2i\omega \dot{u} \sin \theta. \quad (5.48)$$

Tämä puolestaan näyttää vaimennetun oskillaattorin yhtälöltä, joka ratkaistaan samalla menetelmällä kuin luvussa 4 eli tekemällä muotoa $e^{\lambda t}$ oleva yrite. Karakteristiseksi yhtälöksi tulee

$$\lambda^2 + 2i\omega\lambda \sin \theta + \alpha^2 = 0, \quad (5.49)$$

jonka ratkaisu on

$$\lambda = -i\omega \sin \theta \pm \sqrt{\omega^2 \sin^2 \theta - \alpha^2} \quad (5.50)$$

Koska heilurin taajuus on varmastikin paljon suurempi kuin maapallon pyörimisliikkeen kulmanopeus, tämä yksinkertaistuu muotoon

$$\lambda = -i\omega \sin \theta \pm i\alpha. \quad (5.51)$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisu on siis

$$u = (Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t})e^{-i\omega t \sin \theta}. \quad (5.52)$$

Integroimisvakiot A ja B määräytyvät heilurin alkuarvoista.

Tässä on hyvä kerrata eri symbolien merkitykset: ω on maapallon pyörimisliikkeen kulmanopeus, $\alpha = \sqrt{g/l}$ on heilurin perustaaajuus ja θ on heilurin ripustuspaikan latitudi. Merkitsemällä $u_0 = Ae^{i\alpha t} + Be^{-i\alpha t}$ voidaan kirjoittaa

$$u_0 = C_1 \cos \alpha t + iC_2 \sin \alpha t,$$

missä $C_1 = A + B$ ja $C_2 = A - B$. Tämä kuvaa ellipsiä kompleksitasossa, jota voi siis ajatella (y_1, y_2) -tasona. Ellipsin isoakseli kiertää tekijän $e^{-i\omega t \sin \theta}$ mukaisesti. Kiertoaika riippuu siis latitudista.

Jean Bernard Léon Foucault (1819–1868) rakensi pitkävärtisen heilurin 1850-luvun puolivälissä Pariisin Pantheonin ja osoitti siten kiistattomasti, että maapallo pyörii ulkoisen inertiaalikoordinaatiston suhteen. Sittemmin vastaavia on ripustettu tiedemuseoihin ympäri maailmaa, mm. Heurekaan.

Lasketaan esimerkiksi Heurekaassa olevan Foucault'n heilurin kiertoaika. Helsingin latitudi on $60^\circ 9' 42''$. Maapallon pyörimisnopeus on riittävällä tarkkuudella $360^\circ/(24 \text{ h}) = 15^\circ/\text{h}$. Oikeastaan tässä pitäisi käyttää inertiaalikoordinaatistona tähtiä ja tähtiajassa laskettua vuorokautta, joka on hieman kalenterivuorokautta lyhyempi. Tällöin kulmanopeudeksi tulee $15.041^\circ/\text{h}$. Helsingin latitudin sini on puolestaan 0.8674 , joten

$$\omega \sin \theta \simeq 13.047^\circ/\text{h},$$

joten täysi kierros kestää noin 27 h 35 min 33 s.

Huomautettakoon vielä lopuksi, että edellä ei ole otettu huomioon jokaiseen oikeaan heiluriin liittyviä kitkavoimia. Koska Coriolis-voima on niin heikko, kovin lyhyttä heiluria ei ole helppo rakentaa. Maailmanennätys on Handin ja Finchin oppikirjan mukaan noin 15 cm.

5.4 Harjoituksia

1. Hyönteinen kävelee pitkin keppiä, joka pyörii kepillle kohtisuoran akselin ympäri vakiokulmanopeudella ω . Hyönteisen nopeus kepin suhteen on vakio. Laske hyönteisen nopeus ja kiihtyvyys maapallon suhteen.
2. Newtonin ämpäri. Pyöritetään vesiämpäriä pystysuoran symmetria-akselinsa ympäri vakiokulmanopeudella. Kuinka vedenpinta on asettunut?
3. Tarkastele pyörimisliikkeen vaikutusta nestemäisen planeetan muotoon. Laske planeetan säde leveysasteen funktiona. Käytä hyväksesi seuraavia oletuksia: 1) planeetta on homogeeninen, 2) gravitaatiovoima kohdistuu aina planeetan keskipisteeseen ja 3) planeetan kulmanopeus on vakio ja pieni, muttei kuitenkaan niin pieni, ettei sillä olisi mitään vaikutusta.
4. Rakennetaan Maan kiertoradalle sylinterin muotoinen avaruusasema, johon luodaan keinopainovoima saattamalla alus pyörimään symmetria-akselinsa ympäri kulmanopeudella ω .
 - (a) Kuinka suuri tulee ω :n olla, jos sylinterin halkaisija on 80 m ja sen kehälle halutaan 10 ms^{-2} suuruinen keinopainovoiman kiihtyvyys.
 - (b) Pelkkään oleiluun lopen kyllästynyt astronautti heittää tikkaa (a)-kohdan mukaisesti konstruoidulla avaruusasemalla. Taulu ja heittäjä ovat sylinterin kehällä 3 m:n päässä toisistaan samalla etäisyydellä sylinterin pohjalta ja tikan lähtönopeus taulun suhteen on 6 ms^{-1} . Heitto osuu napakymppiin. Arvioi Coriolis-voiman aiheuttamaa poikkeamaa tikan lentoon aseman koordinaatistossa.
5. Oskillaattori liikkuvassa koordinaatistossa. Olkoon m -massainen kappale kiinnitettyä jousella (jousivakio k) pisteeseen, joka liikkuu pitkin x -akselia siten, että kiinnityspisteen koordinaatti on $x_0 = A \sin \omega t$. Kappale itsekin liikkuu vain pitkin x -akselia. Muodosta ja ratkaise kappaleen liikeyhtälö koordinaatistossa, jonka origona on x_0 .
6. Muurahainen (massa m) kävelee kulmanopeudella $\omega(t) = \omega_0 \sin \omega_0 t$ pyörivän pallon (säde R , massa $\gg m$) pinnalla. Muodosta muurahaisen Lagrangen funktio ja liikeyhtälöt käyttämällä yleistettyinä koordinaatteina pallon kiinnitetyn pallokoordinaatiston kulmia (θ, φ) (origo pallon keskipisteessä). Millä ehdolla muurahainen pystyy pysyttelemään levossa kaikkialla pallon pinnalla, jos pallo aiheuttaa muurahaiseen tukivoiman lisäksi radiaalisen vakiovetovoiman mg ?
7. Vuonna 1915 englantilaiset ja saksalaiset kävivät meritaistelua Falklandin saarten lähistöllä (50° eteläistä leveyttä). Brittien ammuksot osuivat n. 100 m vasempaan, koska ne oli kohdistettu käytettäväksi Euroopassa n. 50° pohjoista leveyttä.

- (a) Johda likimääräinen kaava, joka antaa Coriolis-efektin aiheuttaman poikkeaman horisontaalisesti ammutulle ammukselle etäisyydellä D . Selitä, miksi englantilaisten havaitsema virhe oli kaksinkertainen saamaasi kaavaan verrattuna. (Triviaali selitys!)
- (b) Oleta, että ammuksen nopeus on noin 1 km/s ja jätä gravitaatio huomiotta (oletta siis, että ammus lentää suoraviivaisesti). Kuinka kaukana saksalaisalukset olivat? Kuinka saamasi tulos riippuu ampumissuunnan ja pohjoisen välisestä kulmasta?
- (c) Ota lopuksi huomioon myös gravitaatio. Kuinka paljon tämä muuttaa tulosta?

Tarina voi olla urbaani legenda. Se löytyy joistakin fysiikan oppikirjoista (mm. Hand & Finch, Analytical Mechanics) ja tietenkin myös Internetistä.

8. K-kalkyyli Keräsen kansanperinteestä kokoamana: Kostoretkellään kulkeissansa Kaakkois-Suomen korpimaita Kullervo, Kalervon kersa, kaikki kultakolikonsa Kankulan kaivon kadotti. Kovin kuunteli Kullervo – kestäpä kauan kunnes kaivosta kilahdus kajahti. Keksipä Kalervon kersa: kaivolla korkeutta 250 kyynärää! Koetti Kullervo kehitellä, kuhunka kolikkokasa kaivossa keskittyi, kauasko kulta katoamispaikseen kohtisuoralta kaikkosi. Kokosi kostaja kaivosta kultansa, kaiken kukkaronsa keräsi.

Koetapa Kullervon kalkyyli kopioida, kyynäreissä kertoa, kauasko kohtisuoralta kolikot keskittyivät.

Koska kyynärmitasta kovasti kirjoissa kiistellään – kussakin kaupungissa kyynäränsä – käytä kyynärälle kangenmittaa: 250 kyynärää, 250 kankea; kanki kuvun kätköissä komeassa kaupungissa Keski-Europpassa.

Kaasukehän kyytiä kehnontavat kertoimet katoavat/kaikkoavat.

Luku 6

Jäykän kappaleen liike

Tähän mennessä mekaniikkaa on tarkasteltu lähinnä yksittäisten massapisteiden näkökulmasta. Oikeat mekaaniset systeemit muodostuvat kuitenkin äärellisen kokoisista kappaleista, joiden eri osiin ulkoiset voimat vaikuttavat eri tavoin. Tarkastellaan tässä luvussa nk. jäykkiä kappaleita. Jäykällä kappaleella ymmärretään sellaista massapisteiden kokoelmaa, jossa massapisteiden etäisyydet $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ ovat vakioita kaikilla i, j . Jäykkä kappale on idealisaatio, sillä voimavaikutus etenee kappaleessa kyseiselle aineelle ominaisella äänennopeudella. Esimerkiksi, kun naapurisi kommunikoi kanssasi takoen seinää nyrkkillään, niin iskun vaikutus etenee seinän läpi seinän ääniaaltona, siis seinän massapisteiden vähäisenä värähtelynä tasapainoasemansa ympärillä, ja aiheuttaa lopulta ääniaallon ilmaan seinän toisella puolella. Jäykkä kappale on kuitenkin hyvä approksimaatio silloin, kun kiinteän kappaleen osasten nopeudet ovat paljon pienempiä kuin vuorovaikutusten etenemisnopeudet kappaleessa.¹

6.1 Koordinaatiston valinta

Käytetään tässä luvussa samoja koordinaatistomerkitöjä kuin edellisessä (Kuva 6.1). Siis inertiaalikoordinaatistoa merkitään $\{x\}$:llä ja kappaleen B massakeskipisteeseen (CM) kiinnitettyä, mahdollisesti ei-inertiaalista koordinaatistoa $\{y\}$:llä. Jäykän kappaleen massapisteiden paikat tunnetaan, kun tiedetään sen massakeskipisteen paikka \mathbf{R} $\{x\}$:ssä sekä kappaleen orientaatio, jota varten tarvitaan kolme kulmaa.

Edellisessä luvussa saatiin tulos (5.11)

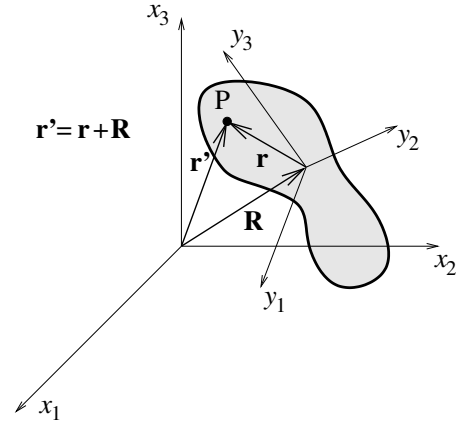
$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_x = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_x + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Nyt B :n mielivaltainen piste P pysyy paikallaan koordinaatistossa $\{y\}$ eli $(\dot{\mathbf{r}})_y = 0$, joten

$$\left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt}\right)_x = \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)_x + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (6.1)$$

¹Tämä ehto voi olla voimassa myös elastisessa aineessa esimerkkinä teräsjoussi

Kuva 6.1: Jäykkä kappale ja sen liikkeen tarkastelussa käytetyt koordinaatistot. Ei-inertiaalisen koordinaatiston origo sijoitetaan kappaleen massakeskipisteeseen ja sen akselien suunnat pidetään kiinteinä kappaleeseen nähden.



missä ω on koordinaatiston $\{y\}$ (ja samalla kappaleen B) kulmanopeus koordinaatistossa $\{x\}$. Tulos ei riipu B :n massakeskipisteen valinnasta koordinaatiston $\{y\}$ origoksi. Se vain on käytännössä viisas valinta.

6.2 Hitaustensori

Lähdetään sitten muodostamaan käyttökelpoista Lagrangen funktiota kappaleelle B . Oletetaan, että B muodostuu diskreeteistä massapisteistä. Tämän pistejoukon kineettinen energia $\{x\}$:ssä on

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\mathbf{r}'_i}{dt} \right)^2, \quad (6.2)$$

missä summa on yli kaikkien kiinteän kappaleen muodostavien massapisteiden. Käyttäen tulosta (6.1) saadaan

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \right)^2. \quad (6.3)$$

Tässä \mathbf{r}_i :t siis viittaavat massapisteiden paikkoihin $\{y\}$:ssä. Avataan nopeuden neliö, jolloin

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)^2 + \sum_i m_i \frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2. \quad (6.4)$$

$\dot{\mathbf{R}}$ ja $\boldsymbol{\omega}$ ovat samat kaikille B :n osasille. Merkitään kokonaismassaa $M = \sum_i m_i$ ja kirjoitetaan T :n lausekkeen ensimmäinen termi muotoon

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{R}}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2. \quad (6.5)$$

T :n lausekkeen toinen termi voidaan puolestaan kirjoittaa muotoon

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{R}} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \cdot (\dot{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\omega}) = (\dot{\mathbf{R}} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum_i m_i \mathbf{r}_i. \quad (6.6)$$

Koska origona on CM, $\sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$, joten koko termi on nolla. Kirjoitetaan vielä viimeinen termi muotoon

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2). \quad (6.7)$$

Kineettinen energia on siis

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)^2). \quad (6.8)$$

Lausekkeen ensimmäinen termi kuvaa CM:n liikkeeseen liittyvää kineettistä energiaa ja jälkimmäinen pyörimisliikkeeseen liittyvää energiaa.

Merkitään pyörimisestä aiheutuvaa kineettistä energiaa T_{rot} ja tarkastellaan tätä lähemmin. Kirjoitetaan T_{rot} komponenttimuodossa

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \sum_{k=1}^3 y_{ik}^2 - \left(\sum_{j=1}^3 \omega_j y_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^3 \omega_k y_{ik} \right) \right]. \quad (6.9)$$

Lausekkeen merkintätapa yksinkertaistuu jonkin verran, kun jätetään hiukkaset numeroiva indeksi pois ja otetaan käyttöön nk. **Einsteinin summaussääntö**, jonka mukaan toistetun koordinaattia merkitsevän indeksin yli summataan automaattisesti, esim.²

$$\omega_i^2 \equiv \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 = \sum_{i=1}^3 \omega_i \omega_i ; \quad \omega_i y_i \equiv \sum_{i=1}^3 \omega_i y_i$$

Kirjoitetaan sitten T_{rot} :n käyttäen summasääntöä ja Kroneckerin symbolia δ_{ik} muotoon

$$\begin{aligned} T_{rot} &= \frac{1}{2} \sum m [(\omega_i^2)(y_j^2) - (\omega_i y_i)(\omega_k y_k)] \\ &= \frac{1}{2} \sum m (\omega_i \omega_k \delta_{ik})(y_j^2) - \omega_i \omega_k y_i y_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,k} \omega_i \omega_k \sum m (y_j^2 \delta_{ik} - y_i y_k), \end{aligned} \quad (6.10)$$

missä jälkimmäisessä lausekkeessa summat i :n ja k :n yli on kirjoitettu näkyviin selkeyden vuoksi. Merkitään sisempää, massapisteen yli otettua summaa

$$I_{ik} = \sum m (y_j^2 \delta_{ik} - y_i y_k).$$

²Summasäännön käyttämisestä kannattaa treenata ja aina on syytä olla huolellinen sen kanssa, tarkoittaako jossain yhteydessä toistettu indeksi todella summausta vai ei.

Tämä kaksi-indeksinen suure on matemaattisena oliona toisen kertaluvun tensori ja sitä kutsutaan **hitaustensoriksi** (inertiaalitentoriksi). Tensorin komponentit koordinaatistossa $\{y\}$ ovat

$$\begin{aligned} (I_{ik}) &= \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum m(y_2^2 + y_3^2) & -\sum my_1y_2 & -\sum my_1y_3 \\ -\sum my_2y_1 & \sum m(y_3^2 + y_1^2) & -\sum my_2y_3 \\ -\sum my_3y_1 & -\sum my_3y_2 & \sum m(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Huom. diagonaalilla olevat komponentit ovat (summaussääntö!)

$$I_{11} = \sum m(y_2^2 + y_3^2) = \sum m(y_1y_1 + y_2y_2 + y_3y_3 - y_1y_1) = \sum m(y_2y_2 + y_3y_3)$$

ja vastaavasti I_{22} ja I_{33} .

Merkitään hitaustensoria symbolilla I . Sen määritelmästä näkee suoraan, että sen fysikaalinen dimensio on massa kertaa pinta-ala ($[I] = ML^2$) ja että I on symmetrinen $I_{ik} = I_{ki}$.

Tarkasteltavan kappaleen kineettinen energia voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\omega_i\omega_k \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I \cdot \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Lagrangen funktioksi tulee siten

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I \cdot \boldsymbol{\omega} - U, \quad (6.13)$$

missä $U = \sum_i U_i(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i)$.

Mikäli mikään sidosehto ei rajoita kappaleen vapausasteiden määrää, on Lagrangen funktion muuttujina kuusi koordinaattia. Ne ovat CM:n kolme paikkakoordinaattia (\mathbf{R}) ja vektorin \mathbf{r}_i asennon koordinaatistossa $\{x\}$ antavat kolme kulmaa. Näiden lisäksi L :n muuttujina ovat tietenkin vastaavat kuusi nopeuskomponenttia.

Yllä on otettu käyttöön merkintä

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k} I_{ik}\omega_i\omega_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot I \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Tässä on siis kyseessä operaatio: vektori–pistetulo–tensori–pistetulo–vektori. Kun otetaan tensorin ja vektorin välinen pistetulo, saadaan vektori. Tämän voi ajatella niin, että pistetulossa summataan yhden indeksin yli ja jäljelle jää yksi-indeksinen otus eli

vektori. Esimerkiksi $(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l})_j = \omega_i I_{ij} = a_j$ ja samoin $(\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega})_j = I_{ji} \omega_i = \omega_i I_{ji} = \omega_i I_{ij} = a_j$, missä on käytetty hyväksi \mathbf{l} :n symmetrisyyttä. Kun otetaan saadun vektorin pistetulo toisen vektorin kanssa ja summataan jäljellä olevan indeksin yli, saadaan lopputuloksena skalaari: $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l}) \cdot \boldsymbol{\omega} = a_j \omega_j$.

Merkitään kulmanopeusvektorin suuntaa \mathbf{n} :llä eli $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$, jolloin

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.14)$$

missä skalaaria

$$I = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = \sum m (r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2) \quad (6.15)$$

kutsutaan kappaleen **hitausmomentiksi pyörimisakselin suhteen**.

Tensorit aivan kuten vektoritkin ovat matemaattisia olioita, jotka eivät itsessään riipu koordinaatistosta. Samoin kuin vektori voidaan esittää komponenttiensa avulla **an-netussa koordinaatistossa** niin toisen kertaluvun tensori voidaan esittää matriisina annetussa koordinaatistossa. Tensoreita on myös korkeampaa kertalukua ja silloin niiden komponenteista muodostuu useampiulotteisia “kuutioita”, mutta käytännössä komponentteja on silloin käsiteltävä indeksimerkinnällä. Hitaustensorin \mathbf{l} kertaluku on juuri kaksi, joten sillä on kaavassa (6.11) annettu kaksiulotteinen matriisiesitys (I_{ik}) koordinaatistossa $\{y\}$. Rmme käytä edellisessä luvussa käytettyä kaunokirjoitus- \mathcal{I} :tä kuvaamaan hitaustensoria vastaavaa matriisia, ettei tule sekaannusta yksikkömatriisiin kanssa.

Hitaustensorin matriisiesityksen diagonaalikomponentteja kutsutaan **hitausmomentiksi** ja ei-diagonaalisia komponentteja **hitaustuloiksi**. Hitaustensori voidaan laskea kappaleen kaikkien osasten hitaustensorien summana, kunhan nämä vain on laskettu koko kappaleen massakeskipisteen suhteen. Myös tämä perustelee koordinaatiston keskipisteen sijoittamisen nimenomaan massakeskipisteeseen.

Edellä oleva lasku on havainnollisuuden vuoksi suoritettu ajattelemalla kiinteä kappale kootuksi suuresta joukosta massapisteitä. Todellisuudessa on useimmiten käytännöllisempää ajatella jäykkä kappale jatkuvasti jakautuneena aineena. Ilmaistaan kappaleen tiheysjakautuma koordinaatossa $\{y\}$ jatkuvana funktiona $\rho(\mathbf{r})$ ja jaetaan kappaleen tilavuus alkioiksi dV . Tällöin hitausmomentin komponentit ovat

$$I_{ik} = \int_V \rho(\mathbf{r}) (y_j^2 \delta_{ik} - y_i y_k) dV. \quad (6.16)$$

Tässä siis edellä ollut indeksoimaton summaus on korvattu tilavuusintegroinnilla.

Koska hitaustensorin komponentit ovat reaaliset ja tensori itse symmetrinen, tensori (tai oikeastaan sen matriisiesitys) voidaan diagonalisoida sopivalla koordinaatiston kierroilla. Näin hitaustensori saa muodon

$$(I_{ik}) = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Kineettisen energian pyörimisestä johtuva osa voidaan tämän perusteella kirjoittaa

$$T_{rot} = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2), \quad (6.18)$$

missä ω :n komponentit on annettu koordinaatistossa, jossa (I_{ik}) on diagonaalinen. Tätä koordinaatistoa kutsutaan (I_{ik}) :n **pääakselikoordinaatistoksi** ja (I_{ik}) :n komponentteja I_j **päähitausmomenteiksi**.

Jos kaikki päähitausmomentit ovat yhtä suuria $I_1 = I_2 = I_3$, kutsutaan jäykkää kappaletta **pallohyrräksi**. Homogeenisen pallon päähitausmomentit keskipisteessä olevan origon suhteen ovat samat valittiinpa pääakselit kuinka tahansa.

Jos kaksi päähitausmomenttia ovat yhtäsuuret, esim. $I_1 = I_2 \neq I_3$, kutsutaan hyrrää **symmetriseksi**. Yleensä uuden ongelman tullessa esiin kannattaa miettiä, onko tarkasteltavassa tilanteessa symmetrioita, joita voisi käyttää hyväksi. Hitaustensorin komponenttien laskemisessa on arvatenkin suureksi eduksi, jos voi etukäteen päätellä, mitkä ovat pääakselien suunnat.

Oletetaan, että tarkasteltava kappale on tiheydeltään homogeeninen (epähomogeeniset kappaleet aiheuttavat kaikenlaisia ongelmia, esim. epärehellinen peluri painotettuine arpanoppineen). Jos kappaleella on selvä symmetria-akseli, sijaitsevat sekä CM että yksi pääakseleista kyseisellä suoralla. Jos tätä akselia vastaan löytyy vielä kohtisuora symmetriataso, sijaitsevat CM ja loput kaksi pääakselia tällä tasolla. Esimerkkinä tällaisesta tilanteesta on kaksiulotteinen taso, jolla kaikki kappaleen muodostavat hiukkaset sijaitsevat. Valitaan koordinaatit y_1 ja y_2 tästä tasosta, jolloin

$$I_1 = \sum my_2^2; \quad I_2 = \sum my_1^2; \quad I_3 = \sum m(y_1^2 + y_2^2). \quad (6.19)$$

Nyt selvästikin $I_1 + I_2 = I_3$.

Käytännön ongelmissa tilanne on yleensä niin päin, että pyritään rakentamaan jokin laite, jonka tulisi olla sopivasti symmetrinen. Esimerkiksi avaruusaluksen pitäisi pyöriä annetun akselin ympäri, mutta alus koostuu joukosta erilaisia komponentteja, jotka ovat jakautuneet epätasaisesti rakenteen eri osiin. Autonomistajille tuttu ongelma on huonosti tasapainotettu rengas, joka tärisee ajettaessa. Edellä esitettyssä formalismissa tämä tarkoittaa sitä, että pyörimisakseli ei kulje pyörän CM:n kautta.

Näissä tilanteissa laitteeseen lisätään painoja sopiviin paikkoihin niin, että CM (eli tarkastelun origo) siirtyy pääakselille. Merkitään tarvittavaa siirrosta vektorilla \mathbf{a} ja siirretään koordinaatistoa pitäen koordinaattiakselien suunnat vakiona (yhdensuuntaissiirto) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{r}'$, missä \mathbf{r}' on mitattu CM:stä. Lasketaan sitten hitausmomentti pisteen \mathbf{a} suhteen

$$\begin{aligned} (I_{\mathbf{a}})_{ik} &= \sum m(r^2\delta_{ik} - r_i r_k) \\ &= \sum m[(\mathbf{a} + \mathbf{r}')^2\delta_{ik} - (a_i + r'_i)(a_k + r'_k)] \\ &= \sum m[a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}' + r'^2]\delta_{ik} - a_i a_k - r'_i a_k - a_i r'_k - r'_i r'_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum m(a^2\delta_{ik} - a_i a_k) + \sum m(r'^2\delta_{ik} - r'_i r'_k) + \\
&\quad + \sum m(2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}'\delta_{ik} - r'_i a_k - a_i r'_k) \\
&= I_{ik} + M(a^2\delta_{ik} - a_i a_k), \tag{6.20}
\end{aligned}$$

missä siis a_i :t ovat \mathbf{a} :n komponentit alkuperäisessä koordinaatistossa $\{y\}$. Tätä tulosta kutsutaan **Steinerin säännöksi**.

Määritellään lopuksi toisen asteen pinta yhtälöllä

$$\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\rho} = 1, \tag{6.21}$$

missä

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{I}} \tag{6.22}$$

ja n on $\boldsymbol{\rho}$:n suuntainen yksikkövektori. Käyttäen hyväksi hitaustensorin symmetrisyyttä tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$I_{11}\rho_1^2 + I_{22}\rho_2^2 + I_{33}\rho_3^2 + 2I_{12}\rho_1\rho_2 + 2I_{13}\rho_1\rho_3 + 2I_{23}\rho_2\rho_3 = 1. \tag{6.23}$$

Pääakselikoordinaatistossa pinnan yhtälö on

$$\frac{\rho_1^2}{I_1^{-1}} + \frac{\rho_2^2}{I_2^{-1}} + \frac{\rho_3^2}{I_3^{-1}} = 1. \tag{6.24}$$

Tämä kuvaa ellipsoidia, jota kutsutaan kappaleen **hitausellipsoidiksi**. Sen akselit ovat tarkasteltavan kappaleen pääakselit. Jos kahden eri kappaleen hitausellipsoidit ovat samat, ovat kappaleet hyrräliikkeen kannalta ekvivalentit. Esimerkiksi samanmassaiset homogeeniset pallot ja kuutiot ovat tässä mielessä ekvivalentteja ja kuutio siis pallohyrrä.

6.3 Hyrrän liike

6.3.1 Hyrrän liikemäärämomentti

Kappaleen pyörimiseen liittyy tietenkin liikemäärämomentti, jonka suuruus riippuu valitusta referenssipisteestä. Tarkastellaan tässä pyörivän hyrrän liikemäärämomenttia sen massakeskipisteen suhteen koordinaatistossa $\{x\}$

$$\mathbf{L} = \sum m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \tag{6.25}$$

Nopeus on puolestaan $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, joten

$$\mathbf{L} = \sum m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \sum m(r^2\boldsymbol{\omega} - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})). \tag{6.26}$$

Kirjoitetaan tämä vielä komponenttimuodossa koordinaatistossa $\{y\}$ käyttäen summääntä

$$\begin{aligned} L_i &= \sum m((y_j^2)\omega_i - y_i(y_k\omega_k)) \\ &= \omega_k \sum m((y_j^2)\delta_{ik} - y_i y_k) \\ &= I_{ik}\omega_k, \end{aligned} \quad (6.27)$$

mikä on vektorimuodossa kirjoitettuna

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (6.28)$$

Jos $\{y\}$ -koordinaatisto on pääakselikoordinaatisto, niin liikemäärämomentin komponentit ovat

$$L_1 = I_1\omega_1; \quad L_2 = I_2\omega_2; \quad L_3 = I_3\omega_3.$$

Tämän voi tietysti kirjoittaa muodossa $L_i = I_i\omega_i$, mutta tässä ei toistetun indeksin yli tietenkään summata.

Pallohyrrän tapauksessa $I_1 = I_2 = I_3 \equiv I$, joten

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} \quad (6.29)$$

eli liikemäärämomentti on $\boldsymbol{\omega}$:n suuntainen. Epäsymmetrisen kappaleen tapauksessa \mathbf{L} ja $\boldsymbol{\omega}$ ovat yleensä erisuuntaiset paitsi tapauksessa, missä pyöriminen tapahtuu jonkin pääakselin ympäri.

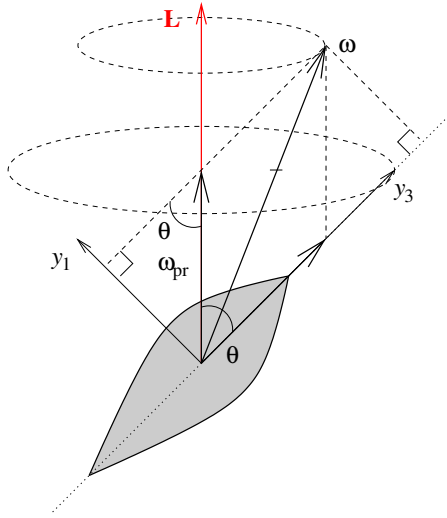
Esimerkki: Vapaan hyrrän prekessio

Jos hyrrään ei vaikuta mikään ulkoinen voima, sen liikemäärämomentti epäilemättä säilyy. Tarkastellaan tästä esimerkkinä vapaata symmetristä hyrrää, jonka symmetria-akseli on y_3 ja jolle $I_1 = I_2 \neq I_3$. Oletetaan, että hyrrän CM on levossa inertiaalikoordinaatistossa $\{x\}$ (Kuva 6.2).

Nyt y_2 -akseli voidaan valita vapaasti ja tehdään se jollain mielivaltaisella hetkellä siten, että akseli on kohtisuorassa vakiovektorin \mathbf{L} ja hyrrän symmetria-akselin y_3 sen hetkisen suunnan virittämää tasoa vastaan. Nyt tietenkin $L_2 = 0$. Koska hyrrällä on kuitenkin hitausmomentti kaikkien pääakselien suhteen eli $I_2 \neq 0$, täytyy olla $\omega_2 = 0$. Koska tämä on voimassa mielivaltaisella ajanhetkellä, $\boldsymbol{\omega}$ on ja pysyy \mathbf{L} :n ja y_3 :n virittämässä tasossa. Näin siis jokaisen y_3 -akselilla olevan hiukkasen nopeus $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ on jatkuvasti kohtisuorassa kyseistä tasoa vastaan, ja siis myös vektoria \mathbf{L} vastaan. Tämä tarkoittaa sitä, että hyrrän y_3 -akseli kiertää tasaisella kulmanopeudella \mathbf{L} :n suunnan ympäri. Tätä liikettä kutsutaan **prekessioksi**.

Prekession kulmanopeuden ω_{pr} laskemiseksi merkitään \mathbf{L} :n ja y_3 -akselin välistä kulmaa θ :lla. Koska $L_3 = I_3\omega_3$, niin

$$\omega_3 = L_3/I_3 = l \cos \theta / I_3.$$



Kuva 6.2: Vapaa hyrrä.

Tämä on siis hyrrän kulmanopeus oman akselinsa ympäri. Jaetaan sitten $\boldsymbol{\omega}$ \mathbf{L} :n ja y_3 :n suuntaisiin komponentteihin, jolloin ω_{pr} on \mathbf{L} :n suuntainen komponentti (Kuva 6.2). Selvästikin siis $\omega_1 = \omega_{pr} \sin \theta$ ja toisaalta $\omega_1 = L_1/I_1 = l \sin \theta/I_1$, joten

$$\omega_{pr} = l/I_1.$$

(Huom. Näissä lausekkeissa on jälleen kirjoitettu $|\mathbf{L}| = l$.)

Yllä olevassa tarkastelussa ei tietenkään ole mieltä, jos \mathbf{L} on alunperin symmetria-akselin suuntainen. Tällöin hyrrä pysyy koko ajan samassa asennossa eikä siis prekessoi.

6.3.2 Hyrrän liikeyhtälöt

Hyrrällä on kuusi vapausastetta, joten tarvitaan joko kuusi skalaari- tai kaksi (kolmiulotteista) vektorimuotoista liikeyhtälöä. Kolmeen paikkamuuttujaan liittyy jotenkin liikemäärä ja kolmeen kulmamuuttujaan liittyy puolestaan liikemäärämomentti.

Paikkamuuttujien osalta asia on yksinkertainen. Jokainen jäykän kappaleen massapiste noudattaa tietenkin Newtonin liikeyhtälöä, jossa vaikuttavina voimina ovat vain ulkoiset voimat. Jäykän kappaleen muodostavat sidosvoimat summautuvat nolliksi Newtonin kolmannen lain perusteella. Olkoon \mathbf{p} kappaleen yksittäisen massapisteen liikemäärä ja \mathbf{f} siihen mahdollisesti vaikuttava voima. Tällöin on siis voimassa $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{f}$. Koko kappaleen liikemäärä on puolestaan $\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = M\dot{\mathbf{R}}$. Laskemalla puolittain yhteen kaikkien massapisteen Newtonin liikeyhtälöt saadaan

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F} = \sum \mathbf{f}. \quad (6.30)$$

Kulmamuuttujien osalta lähdetään liikkeelle \mathbf{L} :n liikeyhtälöstä, joka on $\{x\}$ -koordinaatistossa

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(\mathbf{r}' \times \mathbf{p}) = \sum \mathbf{r}' \times \dot{\mathbf{p}} = \sum \mathbf{r}' \times \mathbf{f} \equiv \mathbf{N}, \quad (6.31)$$

missä on käytetty hyväksi identiteettiä $\mathbf{r}' \times \mathbf{p} = 0$, koska vektorit ovat samansuuntaiset. \mathbf{N} on tietenkin vääntömomentti. Siis hyrrän liikemäärämomentti säilyy, jos mikään ulkoinen voima ei väännä sitä.

Momentit riippuvat aina referenssipisteen valinnasta. Jos $\{x\}$:n origoa siirretään vektorin \mathbf{a} verran, niin tarkasteltavan kappaleen paikkavektorit muuttuvat kuten

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\mathbf{a}} + \mathbf{a}. \quad (6.32)$$

Voimien momenttien summaksi tulee

$$\mathbf{N} = \sum \mathbf{r}' \times \mathbf{f} = \sum \mathbf{r}'_{\mathbf{a}} \times \mathbf{f} + \sum \mathbf{a} \times \mathbf{f} = \mathbf{N}_{\mathbf{a}} + \mathbf{a} \times \mathbf{F}. \quad (6.33)$$

Tuloksesta näkee, että jos ulkoisten voimien summa \mathbf{F} on nolla, niin \mathbf{N} ei riipu referenssipisteestä. Myös ulkoisten voimien summautuessa nolaksi voi olla $\mathbf{N} \neq 0$. Tällöin sanotaan, että kappaleeseen vaikuttaa **voimapari**.

Siirrytään sitten inertiaalikoordinaatistosta $\{x\}$ hyrrään kiinnitettyyn koordinaatistoon $\{y\}$. Edellisessä luvussa johdettiin derivaattaoperaattori

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_x = \left. \frac{d}{dt} \right|_y + \boldsymbol{\omega} \times$$

sekä tämän seuraus, jonka mukaan $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ on sama koordinaatistosta riippumatta. Valitaan $\{y\}$:ksi pääakselikoordinaatisto (semmoinenhan on aina olemassa, vaikka se saattaakin olla työlästä löytää). Niinpä liikemäärämomentin derivaatta muuntuu kuten

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_x = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}.$$

Liiketytölöiksi komponenttimuodossa tulee siis

$$\begin{aligned} \frac{dL_1}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_1 &= N_1 \\ \frac{dL_2}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_2 &= N_2 \\ \frac{dL_3}{dt} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_3 &= N_3. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Ristitulot ovat muotoa $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L})_1 = \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = \omega_2 \omega_3 I_3 - \omega_3 \omega_2 I_2 = \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2)$ ja vastaavasti muille komponenteille.

Tässä yhteydessä matemaattinen esitys yksinkertaistuu käyttämällä **permutaatio-symbolia** ϵ_{ijk} . ϵ_{ijk} määritellään siten, että sen arvo on nolla, jos indekseistä kaksi tai useampi ovat samoja, $+1$, jos ijk on lukujen 1,2,3 parillinen permutaatio, ja -1 , jos ijk on lukujen 1,2,3 pariton permutaatio. Nyt esimerkiksi ristitulo $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$A_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k,$$

missä oletetaan summaus toistetun indeksin yli. Tämän avulla yllä olevan liikeyhtälön komponentit ovat

$$\frac{dL_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j L_k = N_i. \quad (6.35)$$

Koordinaatistossa $\{y\}$ hitausmomentit eivät muutu ajan funktiona, joten pääakseli-koordinaatistossa $L_i = I_i\omega_i$ (ei summausta i :n yli!). Tämän avulla liikeyhtälöryhmä saa muodon

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk}\omega_j\omega_k I_k = N_i, \quad (6.36)$$

mikä kirjoitettuna auki kaikille komponenteille on

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) &= N_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) &= N_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) &= N_3. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Jälleen on saatu aikaan yksi yhtälöryhmä, jota kutsutaan **Eulerin yhtälöiksi**. Tässä on muistettava, että yhtälössä olevat suureet on annettava koordinaatistossa $\{y\}$.

Vapaa hyrrä jälleen

Oletetaan hyrrä vapaaksi ($N = 0$) ja symmetriseksi $I_1 = I_2 \neq I_3$. Liikeyhtälön 3-komponentti antaa suoraan $I_3\dot{\omega}_3 = 0 \Rightarrow \omega_3 = \text{vakio}$. Liikeyhtälön 1- ja 2-komponentit antavat yhtälöparin

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 \frac{I_2 - I_3}{I_1} \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_3\omega_1 \frac{I_3 - I_1}{I_1}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Kerätään vakiotekijät yhdeksi symboliksi

$$\Omega \equiv \omega_3(I_3 - I_1)/I_1 = -\omega_3(I_2 - I_3)/I_1.$$

Näin päästään yhtälöpariin

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= -\Omega\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 &= \Omega\omega_1. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Tämäkin yhtälö on näppärää ratkaista tekemällä siitä yksi kompleksitason yhtälö kirjoittamalla $\omega_1 + i\omega_2 = z$, jolloin

$$\frac{dz}{dt} = i\Omega z. \quad (6.40)$$

Tämän ratkaisu on tietenkin muotoa $z = Ae^{i(\Omega t + \delta)}$. Valitsemalla ajan nollakohta sopivaksi saadaan kulmanopeudet

$$\begin{aligned} \omega_1 &= A \cos(\Omega t) \\ \omega_2 &= A \sin(\Omega t), \end{aligned} \quad (6.41)$$

missä $A = \sqrt{\omega^2 - \omega_3^2}$ on vakio.

Tulos tarkoittaa sitä, että kulmanopeuden projektio symmetria-akselia vastaan koh-tisuoralle tasolle pyörii kulmanopeudella Ω ja projektion pituus A pysyy vakiona. ω -vektori pyörii hyrrän y_3 -akselin ympäri pysyen pituudeltaan vakiona. Kirjoitetaan sitten \mathbf{L} pääakselikoordinaatistossa $\{y\}$:

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1\omega_1; & L_2 &= I_1\omega_2; & L_3 &= I_3\omega_3 & \Rightarrow \\ \mathbf{L} &= I_1\boldsymbol{\omega} + (I_3 - I_1)\omega_3\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Huomataan heti, että \mathbf{L} on $\boldsymbol{\omega}$:n ja symmetria-akselin määräämässä tasossa; siis myös \mathbf{L} pyörii symmetria-akselin ympäri kulmanopeudella Ω säilyttäen pituutensa. Koska $I_1 \neq I_3$, vektorit \mathbf{L} ja $\boldsymbol{\omega}$ ovat kuitenkin erisuuntaiset. Lienee helppo vakuuttautua siitä, että tarkasteltaessa tilannetta inertiaalikoordinaatistossa symmetria-akseli ja kulmanopeusvektori kiertävät samassa tasossa vakiona pysyvää liikemäärämomenttivektoria, kuten jo edellä osoitettiin.

Maapalloa voi ensimmäisessä approksimaatiossa tarkastella vapaana pyörijänä, sillä muiden taivaankappaleiden aiheuttamat vääntömomentit ovat hyvin pieniä. Maapallo on hyvin symmetrinen pyörimisakselinsa suhteen, mutta hieman navoilta litistynyt. Hitausmomenteille on mitattu suhde

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} = 0,00307,$$

jonka perusteella prekession kulmanopeudeksi tulee

$$\Omega = \frac{\omega_3}{306}.$$

Tämän ennustaa prekession periodiksi on noin 10 kuukautta. Tämän pitäisi näkyä maapallon pinnalla olevien pisteiden näennäisen latitudin siirtymisenä tällä periodilla. Tarkkojen mittausten perusteella liikkeen amplitudiksi on saatu noin 10 m, mutta liike on paljon epäsäännöllisempää (horjuvampaa) kuin yllä oleva analyysi antaa olettaa. Horjunnan aikasarja-analyysi antaa vahvimaksi periodiksi 420 vuorokautta. Tämä ero johtuu luultavasti siitä, että maapallo ei ole aivan kiinteä kappale.

6.4 Eulerin kulmat

Kuten edellä on jo todettu, jäykän kappaleen kuvailemiseksi tarvitaan kuusi riippumattonta koordinaattia inertiaalikoordinaatistossa $\{x\}$. Kolmeksi niistä on viisasta valita CM:n paikkavektorin komponentit, mutta kappaleen asento voidaan esittää monella eri tavalla. Tutustutaan tässä nk. **Eulerin kulmiin**.

Sijoitetaan jälleen molempien koordinaatistojen $\{x\}$ ja $\{y\}$ origot samaan pisteeseen (O). Tasojen (x_1, x_2) ja (y_1, y_2) leikkausviivaa kutsutaan **solmuviivaksi** (vrt. rataelementit luvussa 2).

Merkitään Eulerin kulmia symboleilla θ, φ, ψ :

- θ on $y_3:n$ ja $x_3:n$ välinen kulma $\in [0, \pi]$,
- φ on $x_1:n$ ja solmuviivan välinen kulma $\in [0, 2\pi]$,
- ψ on $y_1:n$ ja solmuviivan välinen kulma $\in [0, 2\pi]$.

Nyt on tavoitteena ilmaista mielivaltainen $\{x\}$:ssä määritelty vektori \mathbf{x} Eulerin kulmien avulla

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (6.43)$$

missä matriisi \mathcal{R} kuvaa koordinaatistojen välistä kiertoa. Tehtävänä on siis määrittää \mathcal{R} .

Tehdään se ensin raakaa voimaa käyttäen kolmena kiertona

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta)} \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \rho' \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{R}^{(\rho')}(\psi)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

missä muunnos $\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)$ tarkoittaa kulman φ kiertoa akselin x_3 suhteen jne. Lopullinen muunnosmatriisi on näiden kiertomatriisien matriisitulo

$$\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) \quad (6.44)$$

eli vektori \mathbf{y} saadaan laskemalla

$$\mathbf{y} = \mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) \cdot \mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) \cdot \mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) \cdot \mathbf{x} = \mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) \cdot \mathbf{x}. \quad (6.45)$$

Kierroista $\mathcal{R}^{(\rho')}(\psi)$ ja $\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi)$ tapahtuvat tarkasteltavan koordinaatiston kolmannen akselin suhteen ja $\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta)$ toisen akselin suhteen. Kiertomatriisit ovat siis

$$\mathcal{R}^{(x_3)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

$$\mathcal{R}^{(\xi)}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

$$\mathcal{R}^{(\rho')}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Kertomalla nämä keskenään saadaan

$$\mathcal{R}(\varphi, \theta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & -\sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6.49)$$

Tarkastellaan sitten kulmanopeusmatriisia

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Olemme jo aiemmin johtaneet tuloksen $\Omega = \mathcal{T}^T \cdot \dot{\mathcal{T}}$, kun kirjoitettiin $\mathbf{x} = \mathcal{T} \cdot \mathbf{y}$. Nyt $\mathcal{T} = \mathcal{R}^T$, joten

$$\Omega = \mathcal{R} \cdot \dot{\mathcal{R}}^T. \quad (6.50)$$

Tästä voidaan poimia suoraan kulmanopeuden $\boldsymbol{\omega}$ komponentit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

Jos kuitenkin ei halua nähdä yllä olevan laskun vaivaa, kulmanopeuden voi päätellä myös edellä olleen kehotuksen mukaisesti piirrettyä kuvaa tarkastelemalla. Kulmanopeuksien määrittämiseksi tulee muistaa, että kulmanopeusvektori kolmessa ulottuvuudessa on kohtisuorassa sitä tasoa vastaa, jossa kulma mitataan. Näin ollen

- $\boldsymbol{\omega}_\theta$ on solmuviivan suuntainen ja sen komponentit koordinaatistossa $\{y\}$ ovat

$$\boldsymbol{\omega}_{\theta 1} = \dot{\theta} \cos \psi, \quad \boldsymbol{\omega}_{\theta 2} = -\dot{\theta} \sin \psi, \quad \boldsymbol{\omega}_{\theta 3} = 0,$$

- $\boldsymbol{\omega}_\varphi$ on x_3 -akselin suuntainen ja sen komponentti y_3 -akselin suunnassa on

$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi 3} = \dot{\varphi} \cos \theta$$

ja (y_1, y_2) -tasolla $\boldsymbol{\omega}_{\varphi(y_1, y_2)} = \dot{\varphi} \sin \theta$, joka jaettuna y_1 - ja y_2 -akseleille on

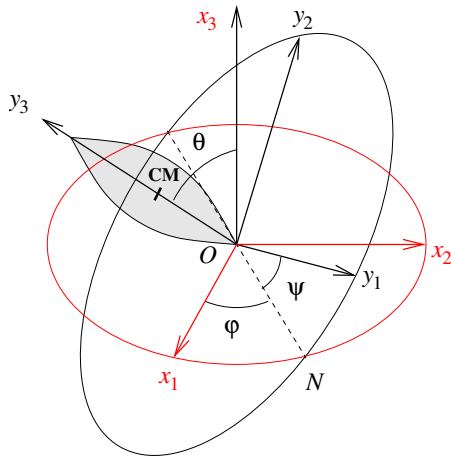
$$\boldsymbol{\omega}_{\varphi 1} = \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi, \quad \boldsymbol{\omega}_{\varphi 2} = \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi$$

- $\boldsymbol{\omega}_\psi$:lla on projektio ainoastaan y_3 -akselilla $\dot{\psi}$.

Kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}$ on lopulta komponenttimuodossa

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Tämän tuloksen avulla on helppo laskea esimerkiksi jakson 6.3.1 lopussa löydetty symmetrisen vapaan hyrrän prekessio.



Kuva 6.3: Lagrangen hyrrä. Symmetrinen hyrrä pyörii gravitaatiokentässä siten, että yksi sen symmetria-akselin pisteistä on kiinnitetty. Liikkeen tarkastelu tehdään Eulerin kulmien (θ, φ, ψ) avulla.

Lagrangen hyrrä

Vähän monimutkaisempana ja hyödyllisempänä esimerkkinä Eulerin kulmien käytöstä tarkastellaan nk. Lagrangen hyrrän liike (Kuva 6.3).

Kyseessä on gravitaatiokentässä pyörivä massiivinen symmetrinen hyrrä, jonka yksi symmetria-akselilla oleva piste on kiinnitetty. Tällaisista pyörivistä kappaleista on monenlaisia käytännön esimerkkejä pikkulasten leluhyrristä teknologisissa sovellutuksissa käytettäviin gyroskooppeihin. Esimerkiksi suuret lentokoneet eivät enää pitkään aikaan ole käyttäneet magneettisia kompassoja vaan nopeasti pyöriviin kappaleisiin perustuvia gyrokompassoja. Gyrojen suunta asetetaan tarkasti oikeaksi lentokentällä ja liikemäärämomentin säilymislain perusteella ne säilyttävät suuntansa lennon aikana.

Koska hyrrän yksi piste on kiinnitetty avaruudessa, tämä sidosehto vie mennessään kolme vapausastetta ja hyrrän liike määräytyy täydellisesti kolmen kulman avulla. Kulmiksi kelpaavat edellä esitetyt Eulerin kulmat. Valitaan kiinteäksi pisteeksi hyrrän symmetria-akselin toinen pää. Olkoon se $\{x\}$ -koordinaatiston x_1x_2 -tasossa ja tämä tasoo olkoon puolestaan kohtisuorassa gravitaatiokiihtyvyyttä vastaan. Teoreetikon hyrrän kyseessä ollessa kärjen ja pyörimistason välillä ei ole kitkaa.

Hyrrän päähitausmomentit CM:n suhteen ovat I_1, I_2, I_3 . Päähitausmomentit I_1^0, I_2^0, I_3^0 kiinnityspisteen suhteen saadaan Steinerin säännön avulla

$$\begin{aligned} I_1^0 &= I_1 + mh^2 \\ I_2^0 &= I_2 + mh^2 \\ I_3^0 &= I_3, \end{aligned} \quad (6.52)$$

missä h on hyrrän CM:n etäisyys kiinnityspisteestä. Hyrrän Lagrangen funktioksi tulee (älä sekoita tässäkin Lagrangen funktion symbolia liikemäärämomenttiin!)

$$L = \frac{1}{2}(I_1^0\omega_1^2 + I_2^0\omega_2^2 + I_3^0\omega_3^2) - mgh \cos \theta, \quad (6.53)$$

missä kulma θ on määritelty kuten edellä, siis nyt hyrrän symmetria-akselin y_3 ja akselin x_3 välisenä kulmana.

Kirjoitetaan kulmanopeuden komponentit Eulerin kulmien avulla ja käytetään hyrrän symmetrisyyden seurausta $I_1^0 = I_2^0$. Tällöin Lagrangen funktio saa muodon

$$L = \frac{1}{2}I_1^0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 - mgh \cos \theta. \quad (6.54)$$

Nyt kulmat ψ ja φ ovat syklisiä (kappale 3.9), joten niihin liittyvät kanonisten impulssien komponentit $p_\psi = \partial L / \partial \dot{\psi}$ ja $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}$ ovat säilyviä suureita eli liikevakioita:

$$\begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) = I_3 \omega_3 = L_3 \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (I_1^0 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = L_{x_3}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Siis hyrrän liikemäärämomentti \mathbf{L} hyrrän omassa koordinaatistossa on liikevakio. Lisäksi p_φ eli liikemäärämomentin projektiio akselille x_3 on sekin liikevakio. Koska systeemi on konservatiivinen, myös kokonaisenergia on liikevakio

$$\begin{aligned} E &= T_{rot} + U \\ &= \frac{1}{2}I_1^0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + mgh \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Liikevakioiden avulla päästään vihdoinkin integroimaan liikeyhtälöitä. Kanonisten impulssien komponenttien yhtälöistä saadaan kulmanopeudet

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{L_{x_3} - L_3 \cos \theta}{I_1^0 \sin^2 \theta} \\ \dot{\psi} &= \frac{L_3}{I_3} - \cos \theta \frac{L_{x_3} - L_3 \cos \theta}{I_1^0 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Sijoitetaan nämä energiayhtälöön, jolloin saadaan yhtälö $\dot{\theta}$:lle. Tämä on separoituva tavallinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö, joka on suoraviivainen integroitava. Oletetaan alkuarvoksi $t = t_0$:lla, että hyrrän kallistuskulma on $\theta = \theta_0$. Integraaliksi tulee

$$t - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1^0} \left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mgh \cos \theta \right) - \frac{(L_{x_3} - L_3 \cos \theta)^2}{(I_1^0 \sin \theta)^2}}}. \quad (6.58)$$

Tässä kannattaa tehdä muuttujanvaihdos $u = \cos \theta$, jolloin $du = -\sin \theta d\theta$ ja $\sin^2 \theta = 1 - u^2$. Integraalista tulee

$$t - t_0 = -I_1^0 \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{2I_1^0(1 - u^2) \left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mghu \right) - (L_{x_3} - L_3 u)^2}}. \quad (6.59)$$

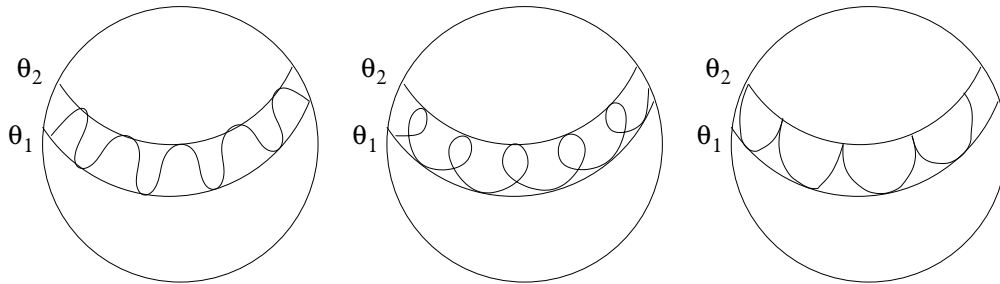
Tuloksena on Weierstrassin elliptisenä integraalina tunnettu integraali, jonka juurilausekkeessa on u :n kolmannen asteen polynomi. Selaillemalla integraalitulukoita opitaan, että ongelma palaa Weierstrassin γ -funktion laskemiseen. Tämä on jälleen muistutus siitä, että matemaattisen fysiikan omituisilta näyttävät erikoisfunktiot ovat itse asiassa keinoja kirjoittaa erilaisista fysikaalisista ongelmista nousevien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja käsiteltävissä muodoissa.

Olemme siis ainakin periaatteessa ratkaisseet Lagrangen hyrrän ongelman. Hyrrän ominaisuudet (kokonaisenergia ja liikemäärämomentti) antavat lähtötiedot E, L_3, L_{x_3} , jonka lisäksi Eulerin kulmilla on jotkut alkuarvot. Kaavan (6.59) avulla saadaan laske-
tuksi (ainakin numeerisesti) hyrrän pääakselin kulma $\theta = \theta(t)$ akselin x_3 suhteen. Tämän jälkeen saadaan loput kulmat integroiduiksi yhtälöistä (6.57). Näin siis ongelma on saatu redusoiduksi kolmen liikevaktion avulla kolmeksi (todella työlääksi) integraaliksi.

Kokemuksen myötä fyysikko kuitenkin (toivottavasti) oppii päättelemään tarkasteltavien systeemien fysiikkaa syöttämättä suinpäin kaavojaan tietokonematematiikan erinomaisiin valmisohjelmiin. Tässä tapauksessa integraalin $t = t(\theta)$ nimittäjän juurilausekkeella

$$R = 2I_0(1 - u^2)\left(E - \frac{L_3^2}{2I_3} - mghu\right) - (L_{x_3} - L_3u)^2$$

on kaksi juurta välillä $-1 < u < +1$ ja yksi juuri $u > 1$. Viimemainittu on epäfysikaalinen koska $u = \cos \theta$. Juurten kohdalla kulmanopeus $\dot{\theta} = 0$, joten hyrrän symmetria-
akselin suunta heilahtelee näitä juuria vastaavien kulmien välissä. Siis symmetria-akseli ei suinkaan osoita yhteen suuntaan, jolloin hyrrä kaatuisi samantien! Akseli ei myöskään välttämättä kierrä x_3 -akselia vakiokulmassa vaan tekee nk. **nutaatioliikettä**.



Kuva 6.4: Nutaatioliike.

Nutaatioon voi tutustua tarkastelemalla hyrrän vapaan pään liikettä pallon pinnalla, jonka keskipiste on hyrrän kiinteä piste (tässä tapauksessa hyrrän toinen pää). Vapaa pää liikkuu pallolla edellä olleen yhtälön reaalisia juuria vastaavien leveyspiirien θ_1 ja θ_2 välissä. Pallon pinnalle syntyvän käyrän muoto on summa prekessiosta ja nutaatiosta ja riippuu suhteesta L_{x_3}/L_3 . Hyrrän kärki voi edetä monotonisesti koordinaatiston $\{x\}$ longitudikulman suhteen tai piirtää silmukkaa tai sykloidin kaltaista kuviota (Kuva 6.4).

Kevättasauspisteen prekessio

Kuten jo aiemmin todettiin maapallo ei ole aivan pyöreä ja sen pyörimisakseli on lisäksi $23^{\circ}27'$ kulmassa ratatason normaalin suhteen. Tämän vuoksi lähellä olevat kappaleet aiheuttavat pienen vääntömomentin maapallon liikeyhtälöön eli maapallo ei ole aivan vapaa hyrrä. Nyt voidaan osoittaa (esim. Goldsteinin oppikirjassa), että vääntömomentti aiheuttaa prekessionopeuden $\dot{\varphi}$, jonka suhde ratakulmanopeuteen ω_0 on

$$\frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} = -\frac{3\omega_0 I_3 - I_1}{2\omega_3 I_3} \cos \theta.$$

Tämä on tosin hyvin pieni efekti. Auringon aiheuttama vääntömomentti aiheuttaa prekession, joka on yksi kierros noin 81 020 vuodessa. Vaikkakin Kuu on paljon pienempi, se on paljon lähempänä ja vääntää Maan pyörimisakselia yhden kierroksen puolta lyhyemmässä ajassa. Näiden yhteisvaikutus on noin $50.45''$ vuodessa eli täysi kierros 26 000 vuodessa. Lisäksi Kuun rata on noin 5° kulmassa ekliptikaan nähden, mistä aiheutuu pieni nutaatio, joka on noin $9''$ kulman θ suhteen ja $18''$ kulman φ suhteen.

6.5 Harjoituksia

1. Kolmen identtisen massapisteen paikkavektorit ja nopeudet eräällä hetkellä ovat inertiaalikoordinaatistossa

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a\mathbf{e}_3 & \dot{\mathbf{r}}_1 &= v\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{r}_2 &= a(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) & \dot{\mathbf{r}}_2 &= v(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ \mathbf{r}_3 &= a(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) & \dot{\mathbf{r}}_3 &= v\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

missä $\{\mathbf{e}_i\}$ on ortonormaali kanta.

- (a) Osoita, että systeemi muodostaa kyseisellä hetkellä jäykän kappaleen.
- (b) Laske kappaleen massakeskipiste ja sen nopeus.
- (c) Laske kappaleen kulmanopeusvektori.

2. Osoita, että jäykän tasapaksun m -massaisen sauvan kineettinen energia on

$$T = \frac{m}{6}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

missä \mathbf{u} ja \mathbf{v} ovat sauvan päiden nopeudet. Voit olettaa sauvan yksiulotteiseksi.

3. Laske seuraavien homogeenisten m -massaisten kappaleiden päähitausmomentit
 - (a) R -säteinen sylinteri, jonka korkeus on h .
 - (b) Suorakulmainen suunnikassarmiö, jonka sivut ovat a , b ja c .
 - (c) Ellipsoidi, jonka puoliakselit ovat a , b ja c .

4. Pyöritetään tehtävän 3(a) sylinteriä symmetria-akselin suuntaisen mutta siitä etäisyydellä r olevan akselin ympäri. Laske sylinterin hitausmomentti tämän akselin suhteen. Tarkastele myös tilannetta, jossa akseli leikkaa sylinterin kulmassa θ .
5. Laske tasasivuisen kolmion (sivu a) muotoisen ohuen homogeenisen levyn (massa m) hitausmomentti levyn tasolle kohtisuoran pyörimisakselin suhteen, kun akseli kulkee
 - (a) levyn massakeskipisteen kautta
 - (b) kolmion kärjen kautta.

Määritä myös kappaleen pääakselisuunnat.

6. Konstruoi pallohyrrä käyttämällä kuutta palloa (kunkin massa m ja säde a) ja kolmea ohutta massatonta sauvaa (pituus b). Mikä on hyrrän päähitausmomentti? Kaikki osat on käytettävä!
7. Suorakaiteen muotoinen levy (sivut a ja b) pyörii lävistäjänsä kautta kulkevan akselin ympäri vakiokulmanopeudella ω . Molemmista päistään laakeroidun akselin pituus on c ja sen keskipiste on levyn keskipisteessä. Laske laakereihin vaikuttava voima (jätä painovoima huomiotta).
8. Oletetaan, että auton ovi on M -massainen homogeeninen suorakaide (sivut A ja B), joka on kitkattomasti laakeroitu oven etureunaan kiinnitettyyn akseliin. Auto lähtee liikkeelle vakiokiihtyvyydellä a oven ollessa auki ja kohtisuorassa liikesuuntaa vastaan. Minkä ajan kuluttua ovi sulkeutuu? (Vihje: lähde ratkaisemaan yhtälöä $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{N}$.)
9. Kappale, jonka päähitausmomentit ovat I_1 , I_2 ja I_3 (siis symmetrinen hyrrä), pyörii symmetria-akselilla olevan kiinteän pisteen ympäri siten, että kulmanopeus $\boldsymbol{\omega}$ ei aluksi ole minkään pääakselin suuntainen. Pyörimistä hidastaa kitkavoima, jonka momentti on $-k\boldsymbol{\omega}$ (k on vakio). Osoita, että $\boldsymbol{\omega}$ kääntyy joko symmetria-akselin suuntaiseksi tai sitä vastaan kohtisuoraan sen mukaan, onko $I_1 < I_3$ vai $I_3 < I_1$. Miten käy, jos $I_1 = I_3$?
10. Tarkastellaan jäykän kappaleen pyörimisliikettä Eulerin kulmien avulla. Osoita, että kulmanopeuden komponentit *inertiaalikoordinaatistossa* $\{x\}$ ovat

$$\begin{aligned}\omega_{x1} &= \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \omega_{x2} &= \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \omega_{x3} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}\end{aligned}$$

11. Tarkastellaan Lagrangen hyrrän kineettistä energiaa inertiaalikoordinaatistossa. Sen voi tietysti antaa muodossa

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega},$$

missä $\{y\}$ -koordinaatiston origo on kappaleen CM ja \mathbf{R} on CM:n paikkavektori inertiaalikoordinaatistossa. Osoita, että edellä esitetty muoto

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad I_{ik}^0 = I_{ik} + m(R^2 \delta_{ik} - R_i R_k), \quad \mathbf{R} = h \mathbf{e}_3$$

missä siis $\{y\}$ - ja $\{x\}$ -koordinaatistojen origona on hyrrän symmetria-akselin kiinteä piste, on yhtäpitävä CM:n suhteen annetun muodon kanssa.

Luku 7

Hamiltonin mekaniikka

Tässä luvussa mekaniikan formalismia viedään vielä Lagrangen mekaniikkaakin järeämpään muotoon. Tutustuimme jo luvussa 3 joihinkin kanonisen formalismin peruspalikoihin, kuten kanonisiin impulsseihin, syklisiin koordinaatteihin ja Hamiltonin funktioon. Kanoninen formalismi eroaa Lagrangen formalismista siten, että kun Lagrangen formalismissa oli koordinaatit $\{q\}$ ja nopeudet $\{\dot{q}\}$ olivat selkeästi erilaisia muuttujia, niin nyt kanoniset koordinaatit $\{q\}$ ja impulssit $\{p\}$ ovat samanarvoisia **kanonisia muuttujia**. Niiden välillä voidaan tehdä **kanonisia muunnoksia** tarkasteltavan ongelman kannalta mahdollisimman tehokkaan muuttujajoukon löytämiseksi. Vaikka tässä luvussa tehtävät tarkastelut saattavat tuntua tarpeettoman abstrakteilta, niillä on tärkeä osa esimerkiksi siirryttäessä kvanttimekaniikkaan, muotoiltaessa statistista fysiikkaa tai tarkasteltaessa kaaottisen dynamiikan ongelmia.

7.1 Hamiltonin liikeyhtälöt

Lagrangen funktio annetaan koordinaattien, nopeuksien ja ajan funktiona $L(\{q\}, \{\dot{q}\}, t)$. Lisäksi olemme määritelleet kanoniset impulssit

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

Kanonisessa formalismissa systeemi kuvataan (q, \dot{q}) -avaruuden sijasta (q, p) -avaruudessa. Muunnos tehdään antamalla koordinaatinopeudet kanonisten muuttujien funktiona $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\{q\}, \{p\}, t)$. Luvussa 3 johdettu Hamiltonin funktio

$$H = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) \quad (7.1)$$

voidaan nyt määritellä lausekkeella

$$H(\{q\}, \{p\}, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i(\{q\}, \{p\}, t) - L(\{q\}, \{\dot{q}(\{q\}, \{p\}, t)\}, t).$$

(7.2)

Koska kanoniset koordinaatit ja impulssit ovat riippumattomia toisistaan, saadaan Hamiltonin funktion gradienteiksi niiden suhteen yhtälöt

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_k} &= \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} p_k - \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k} \\ &= -\dot{p}_k\end{aligned}\quad (7.3)$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_k} &= \dot{q}_k + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} \\ &= \dot{q}_k.\end{aligned}\quad (7.4)$$

Saatuja yhtälöitä

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k \quad (7.6)$$

kutsutaan **Hamiltonin likeyhtälöiksi**. Yhtälöistä (7.5) näkyy suoraan, että jos koordinaatti q_k on syklinen, niin sitä vastaava kanoninen impulssi p_k on liikevakio.

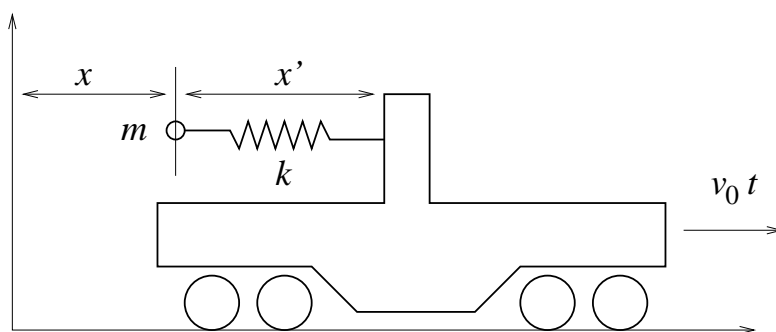
Lagrangen yhtälöissä on vapausasteiden lukumäärän (n) verran toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, kun taas Hamiltonin yhtälöissä on $2n$ kpl ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä. Teoreettisissa tarkasteluissa ensimmäisen kertaluvun yhtälöt ovat useimmiten yksinkertaisempia käsitellä, vaikka niitä olisi kaksinkertainen määrä.

Lasketaan sitten Hamiltonin funktion kokonaisaikaderivaatta, josta tulee

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (7.7)$$

Jos Lagrangen funktio ei riipu eksplisiittisesti ajasta, energia (E) on liikevakio. Tällöin Hamiltonin funktio on muotoa $H = T + U = E$.

Hamiltonin funktio ja kokonaisenergia **eivät välttämättä ole sama asia!** Ne voidaan samaistaa varmuudella ainoastaan skleronomisille (ajasta riippumattomille) konservatiivisille systeemeille. Tarkastellaan asian valaisemiseksi klassista esimerkkiä, jossa tasaisella nopeudella v_0 liikkuvassa kärryssä on jousen (jousivakio k) varassa liikkeen suunnassa oskilloiva massa m (Kuva 7.1)



Kuva 7.1: Demonstraatio sille, että ajasta riippuvassa systeemissä Hamiltonin funktion ja kokonaisenergian vastaavuus riippuvat koordinaatistosta, jossa H annetaan.

Ohittakoon massa origon hetkellä $t = 0$ ollen juuri silloin tasapainoasemassaan (eli valitaan origo sillä tavalla). Lagrangen funktio on nyt

$$L(x, \dot{x}, t) = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(x - v_0t)^2, \quad (7.8)$$

josta saadaan liikeyhtälöksi

$$m\ddot{x} = -k(x - v_0t). \quad (7.9)$$

Tekemällä muuttujan vaihdos kärryn mukana liikkuvaan koordinaatistoon $x' = x - v_0t$ saadaan tästä tietenkin harmonisen oskillaattorin liikeyhtälö

$$m\ddot{x}' = -kx'. \quad (7.10)$$

Hamiltonin funktio on puolestaan

$$H(x, p, t) = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x - v_0t)^2. \quad (7.11)$$

H on kärryn ja oskilloivan massan muodostaman systeemin kokonaisenergia. Se ei kuitenkaan ole vakio, koska ulkoisen voiman täytyy tehdä työtä, jotta kärryn vauhti pysyy oletuksen mukaisesti vakiona v_0 .

Lasketaan sitten L ja H muunnetuissa koordinaateissa

$$L'(x', \dot{x}') = \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + m\dot{x}'v_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}kx'^2 \quad (7.12)$$

$$H'(x', p') = \frac{(p' - mv_0)^2}{2m} + \frac{1}{2}kx'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (7.13)$$

Selvästi H' on ajasta riippumaton, siis säilyvä suure, mutta se ei ole kokonaisenergia. Vaikka H ja H' ovat eri suuria ja niillä on erilainen aikariippuvuus sekä funktionaalinen muoto, niistä molemmista saadaan kuitenkin samat liikeyhtälöt. Koordinaatiston valinta ei tietenkään saa muuttaa itse fyysikaalisen systeemin ominaisuuksia.

Hamiltonin liikeyhtälöt voidaan johtaa myös variaatioperiaatteesta $\delta \int L dt = 0$. Vaikeusintegraalin variaatio on

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(\{q\}, \{p\}, t) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i \right) \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right) dt, \end{aligned} \quad (7.14)$$

missä δq_i :n kertoimen laskemiseksi on tehty yksi osittaisintegrointi. Kun vaaditaan, että variaatioiden δq_i ja δp_i kertoimet ovat nollia kaikilla variaatioilla saadaan Hamiltonin liikeyhtälöt. Yleensä tässä tarkastelussa vaaditaan (muuttujien q_i ja p_i samanarvoisuuden vuoksi), että δp_i häviää päätepisteissä. Kyseessä ei siis ole tarkkaan ottaen luvun 3 Hamiltonin periaate (jossa tämä vaadittiin vain δq :lle). Tätä kutsutaankin sen vuoksi joskus **modifioituksi Hamiltonin periaatteeksi**. Tämä voidaan ottaa samanlaiseksi mekaniikan aksiomaksi kuin Hamiltonin periaate Lagrangen mekaniikassa. Lopulta tärkeintä on kuitenkin löytää systeemiä kuvaavat mahdollisimman käyttökelpoiset liikeyhtälöt.

Esimerkki: Liike konservatiivisessa keskeisvoimakentässä

Tarkastellaan tuttua tapausta, jossa $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$ ja $U = U(r)$. Kanonisen impulssin komponentit ovat $p_r = m\dot{r}$ ja $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ ja Hamiltonin funktioksi tulee

$$\begin{aligned} H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) &= p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 + U(r). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Hamiltonin yhtälöt ovat nyt

$$\begin{aligned} -\frac{p_\varphi^2}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} &= -\dot{p}_r \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 = -\dot{p}_\varphi \\ \frac{p_r}{m} &= \dot{r} \\ \frac{p_\varphi}{mr^2} &= \dot{\varphi} \\ \frac{dH}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Yhtälöistä ensimmäinen on radiaalinen Newtonin liikeyhtälö, toinen ilmaisee liikemäärämomentin säilymisen, kolmas ja neljäs ovat kanonisen impulssin määrittely-yhtälöt ja viimeinen energian säilymlaki.

Esimerkki: Varatun hiukkasen liike

Toinen tärkeä esimerkki on varauksen liike sähkö- ja magneettikentissä. Luvussa 3 saatiin potentiaali muotoon

$$U = q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (7.17)$$

missä Φ on sähkökentän skalaaripotentiaali ja \mathbf{A} sähkömagneettisen kentän vektoripotentiaali. Lagrangen funktio on tietenkin $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U$. Olkoon r_i syklinen koordinaatti. Lasketaan sitä vastaava kanoninen impulssi

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = m\dot{r}_i + qA_i. \quad (7.18)$$

Tämä on elektrodynamiikassa säilyvä liikemäärä. Se on siis hiukkasen mekaaninen liikemäärä plus kentästä itsestään tuleva osa. Hamiltonin funktioksi saadaan sitten suoralla laskulla (käytetään vektorinotaatiota ja summaussääntöä i :n yli)

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) &= \dot{r}_i p_i - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \dot{r}_i p_i - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\Phi - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\Phi. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Tästä saadaan kanonisiksi liikeyhtälöiksi sähkömagneettisessa kentässä

$$\dot{r}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - qA_i) \quad (7.20)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial r_i} = -q\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} + \frac{q}{m}\mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i} - \frac{q^2}{m}\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r_i}. \quad (7.21)$$

Näistä yhtälöistä voi tietenkin laskea takaisin päin Newtonin liikeyhtälön, missä voimana on Lorentzin voima.

Tässä tapauksessa kanoninen formalismi ei ehkä johtanut kovin kauniiseen lopputulokseen, mutta kuten jo luvussa 3 mainittiin, sähkömagneettinen kenttä viedään juuri näillä keinoin kvanttimekaniikkaan. Hamiltonin yhtälöitä käytetään myös klassisessa elektrodynamiikassa ja sen sovellutuksissa, esim. laskettaessa varattujen hiukkasten ratoja monimutkaisissa geometrioissa kuten esimerkiksi erilaisissa fuusiolaitteissa (tokamakit, spheromakit, jne.), joissa kuuman plasman hiukkasia pidetään vangittuina rakenteeltaan monimutkaisiin magneettikenttiin. Menetelmän voima perustuu siihen, että etsitään sellainen koordinaatiston muunnos, jossa on mahdollisimman monta syklistä koordinaattia. Tähän palataan tuonnempana.

7.2 Legendren muunnokset

Edellä tehtiin muunnos $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$ antamalla koordinaatinopeudet funktiona $\{\dot{q}\} = \{\dot{q}(\{q\}, \{p\}, t)\}$. Hamiltonin funktio määriteltiin lausekkeella (7.2).

Matematiikassa tällaisia muunnoksia kutsutaan **Legendren muunnoksiksi**. Asian yksinkertaistamiseksi tarkastellaan esimerkkinä kahden muuttujan funktiota $f = f(x, y)$. Sen kokonaisdifferentiaali on

$$df = u dx + v dy,$$

missä

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}; v = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Jospa nyt haluammekin syystä tai toisesta esittää tarkasteltavan fysikaalisen ongelman muuttujien u ja y avulla (mekaniikan näkökulmasta u vastaa siis kanonisen impulssin käyttöä nopeuden sijasta). Nyt differentiaaliset suureet pitää lausua du :n ja dy :n avulla. Tämä onnistuu muodostamalla uusi funktio

$$g = f - ux,$$

jolloin

$$dg = df - u dx - x du = v dy - x du.$$

Nyt puolestaan v ja x ovat

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u}; v = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Tässä yhteydessä tarkastellaan siis mekaniikkaa sellaisesta näkökulmasta, jossa systeemiä halutaan kuvailla koordinaatinopeuksien sijasta kanonisten impulssien avulla. Tällöin Legendren muunnos johtaa Lagrangen funktion käytöstä Hamiltonin funktion käyttöön. Tämä on kaikkein läpinäkyvintä yhden vapausasteen tapauksessa, jolloin kaava (7.2) on yksinkertaisesti

$$H(q, p, t) = \dot{q}p - L(q, \dot{q}, t). \quad (7.22)$$

Vilkaisu termodynamiikkaan

Mekaniikan ja kvanttimekaniikan lisäksi Legendren muunnoksia käytetään paljon termodynamiikassa. Siellä systeemille voidaan määritellä useita erilaisia potentiaaleja, joiden käyttökelpoisuus riippuu tarkasteltavien prosessien ominaisuuksista, esimerkiksi siitä, säilyykö prosessissa entropia vai lämpötila tai paine vai tilavuus.

Termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö ilmaisee energian säilymisen muodossa

$$dU = dQ - dW, \quad (7.23)$$

missä U on systeemin sisäinen energia, Q lämpömäärä ja W työ. Kaasun reversiibelille prosessille

$$dU = T dS - p dV, \quad (7.24)$$

missä T on lämpötila, S entropia, p paine ja V tilavuus. Tässä tilanteessa on siis luonnollista tarkastella U :ta funktiona $U = U(S, V)$, jolloin edellisen perusteella

$$T = \frac{\partial U}{\partial S}; \quad p = -\frac{\partial U}{\partial V}. \quad (7.25)$$

Tilanteissa, joissa pitää huomioida sisäinen energia ja esimerkiksi kaasun laajenemiseen liittyvää mekaanista energiaa, luonnollinen energiefunktio on **entalpia**, joka **määritellään**

$$H = U + pV. \quad (7.26)$$

Huom. Tässä H ei siis ole Hamiltonin funktio! Kirjoitetaan H :n kokonaisdifferentiaali

$$dH = dU + V dp + p dV = T dS + V dp, \quad (7.27)$$

jolloin on mielekäästä tarkastella funktiota $H = H(S, p)$ eli tehdä muunnos $(S, V) \rightarrow (S, p)$ ja

$$T = \frac{\partial H}{\partial S}; \quad V = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (7.28)$$

Vastaavasti termodynamiikassa määritellään esimerkiksi **Helmholtzin vapaa energia**

$$F = U - TS; \quad (S, V) \rightarrow (T, V) \quad (7.29)$$

ja **Gibbsin vapaa energia**

$$G = H - TS; \quad (S, p) \rightarrow (T, p). \quad (7.30)$$

7.3 Poissonin sulut

Poissonin sulut ovat hyödyllinen työkalu kehitettäessä kvanttimekaniikan ja statistisen mekaniikan formalismia. Tarkastellaan kahta kanonisten muuttujien $\{q\}$ ja $\{p\}$ sekä ajan t funktioita f ja g . Näiden Poissonin sulut määritellään lausekkeella

$$[f, g] \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (7.31)$$

Tämän määritelmän avulla on suoraviivainen laskutehtävä osoittaa Poissonin sulkujen algebralliset ominaisuudet

$$[f, g] = -[g, f] \quad (7.32)$$

$$[f, C] = 0, \quad \text{jos } C \text{ on vakio} \quad (7.33)$$

$$[f, g + h] = [f, g] + [f, h] \quad (7.34)$$

$$[f, gh] = [f, g]h + [f, h]g. \quad (7.35)$$

Poissonin suluille on lisäksi voimassa ns. **Jacobin identiteetti**

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0. \quad (7.36)$$

Käyttämällä funktioina kanonisia koordinaatteja itseään, saadaan niiden välille sulkulausekkeet

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}. \quad (7.37)$$

Jos puolestaan lasketaan mielivaltaisen derivoituvan funktion $f(\{q\}, \{p\}, t)$ Poissonin sulut kanonisten koordinaattien kanssa saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} [f, q_i] &= -\frac{\partial f}{\partial p_i} \\ [f, p_i] &= \frac{\partial f}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Poissonin sulkujen avulla voidaan ilmaista minkä tahansa mekaanisen suureen $f(\{q\}, \{p\}, t)$ kokonaisaikaderivaatta eli liikeyhtälö. Ensinnäkin

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (7.39)$$

Sovelletaan tähän Hamiltonin liikeyhtälöitä, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Tästä näemme suoraan, että ajasta eksplisiittisesti riippumaton suure ($\partial f/\partial t = 0$) on liikevakio, jos sen Poissonin sulkua Hamiltonin funktion kanssa on nolla. Myös ajasta riippuva suure voi toki olla liikevakio, jos yllä olevan yhtälön oikea puoli on identtisesti nolla. Käyttämällä tässä jälleen funktioina kanonisia muuttujia itseään saadaan

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= [q_i, H] = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= [p_i, H] = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (7.41)$$

kaikilla i , eli olemme päässeet takaisin Hamiltonin liikeyhtälöihin.

Liike keskeisvoimakentässä

Tarkastellaan esimerkkinä jälleen liikettä keskeisvoimakentässä ja kirjoitetaan Hamiltonin funktio muodossa

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} p_r^2 + \frac{1}{2mr^2} p_\varphi^2 + U(r, \varphi).$$

Lasketaan p_φ :n aikaderivaatta Poissonin sulkujen avulla

$$\begin{aligned}\dot{p}_\varphi &= [p_\varphi, H] \\ &= \frac{1}{2m} [p_\varphi, p_r^2] + \frac{1}{2m} [p_\varphi, p_\varphi^2/r^2] + [p_\varphi, U(r)] \\ &= [p_\varphi, U(r)] = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}.\end{aligned}$$

Nyt nähdään, että mikäli potentiaali U ei ole kulman φ funktio, niin $\dot{p}_\varphi = 0$ eli kulmamuuuttujaa φ vastaava kanoninen impulssi on liikevakio. Tämä on tietenkin tuttu liikemäärämomentti (impulssimomentti). Tässä kanonista impulssia p_φ ei saa sekoittaa tavallisen liikemäärän φ -komponenttiin!

Toisaalta p_r :n aikaderivaataksi saadaan

$$\begin{aligned}\dot{p}_r &= [p_r, H] = \frac{p_\varphi^2}{2m} [p_r, r^{-2}] + [p_r, U] \\ &= \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial U}{\partial r},\end{aligned}$$

mikä on radiaalinen Newtonin yhtälö.

Kirjoitetaan vielä Hamiltonin funktio yleisesti pallokoordinaatistossa muodossa

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r).$$

Tällöin Poissonin sulut laskemalla näkee suoraan, että sekä p_φ että $p_\theta^2 + p_\varphi^2/\sin^2 \theta$ ovat liikevakioita.

7.4 Kanoniset muunnokset

Olemme nähneet jo monta kertaa, että siirtyminen ongelman kannalta edulliseen koordinaatistoon on monesti hyödyllistä ongelman ratkaisun löytämiseksi järjellisellä työmäärällä. Lagrangen formalismissa muunnokset ovat olleet **pistemuunnoksia**, joissa siis systeemin paikkakoordinaatteja q_i on muunnettu tyyliin $Q_i = Q_i(q_i, t)$ ja nopeudet on laskettu näitä derivoimalla. Tällainen muunnos tapahtuu siis konfiguraatioavaruudessa (paikka-avaruudessa).

Hamiltonin formalismissa kuitenkin paikkakoordinaatit q_i ja impulssikoordinaatit p_i ovat molemmat samanarvoisia muuttujia ja vastaavat siten yleistettyjä koordinaatteja q_i Lagrangen formalismissa. Tämän vuoksi Hamiltonin formalismissa on tarpeen etsiä yleisempää näkökulmaa muuttujien q_i ja p_i muunnoksiin tällä kertaa näiden määräämässä $2n$ -ulotteisessa faasiavaruudessa.

Oletetaan, että olemme löytäneet Hamiltonin yhtälöt muuttujajoukossa

$$\{q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n\}.$$

Määritellään sitten uudet paikka- ja impulssimuuttujat $\{Q\}$ ja $\{P\}$ yhtälöillä

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q, p, t) \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi kirjoitetaan $\{q\} = q$, $\{p\} = p$, $\{Q\} = Q$, $\{P\} = P$ ja käytetään indeksejä silloin, kun viitataan yksittäisiin muuttujiin. Näiden muunnosten käänteismuunnokset ovat

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(Q, P, t) \\ p_i &= p_i(Q, P, t). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Jos nyt on olemassa funktio $K(Q, P, t)$ siten, että kanoniset yhtälöt

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned} \quad (7.44)$$

kuvaavat systeemin liikettä, niin muunnoksia kutsutaan **kanonisiksi muunnoksiksi**. Funktiota K kutsutaan joskus "Kamiltonin" funktioksi kuvastamaan sitä, että se on kanonisesti muunnettu Hamiltonin funktio.

Huom. Vaikka kanoninen muunnos tehdäänkin, jotta päästäisiin tarkasteltavan ongelman kannalta mahdollisimman tehokkaisiin koordinaatteihin, ei muunnos saa riippua ongelmasta (eli H :sta). Jos esimerkiksi halutaan kuvailla kaksiulotteista heiluria uusissa koordinaateissa, on niiden avulla pystyttävä formuloimaan myös kaksiulotteinen Keplerin liike. Täytyy siis olla mahdollista löytää myös Keplerin ongelmaa vastaava Kamilton oskillaattorille kehitetyissä koordinaateissa. Tämä ei tietenkään tarkoita, että koordinaattien tarvitsisi soveltua mitenkään erityisen hyvin tämän toisen ongelman tarkastelemaan.

7.4.1 Generoivat funktiot

Koska Hamiltonin yhtälöt ovat sopuinnossa modifioitun Hamiltonin periaatteen kanssa, voidaan kanonisesti muunnetuille koordinaateille kirjoittaa

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i P_i \dot{Q}_i - K \right) dt = 0. \quad (7.45)$$

Tämän integrandia voidaan pitää uutena Lagrangen funktiona. Jotta yhtälöt kuvaisivat samaa systeemiä, uusi ja vanha Lagrangen funktio saavat erota toisistaan additiivisella

vakiolla, vakiokertoimella tai jonkin funktion G aikaderivaatalla. Näistä kaksi ensimmäistä ehtoa ovat muunnoksina triviaaleja, joskin muunnoksen skaalaaminen vakiokertoimella tuo ongelman käsiteltäessä Poissonin sulkuja, joten suljetaan nämä tapaukset tarkastelun ulkopuolelle.

Mahdollisuus lisätä muunnokseen jonkin funktion aikaderivaatta osoittautuu erittäin tehokkaaksi työkaluksi. Kirjoitetaan tämä ehto muodossa

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dG}{dt}. \quad (7.46)$$

Funktiota G kutsutaan **muunnoksen generoivaksi funktioksi**. Tässä yhtälössä on $4n$ kappaletta muuttujia, mutta koska P :t ja Q :t riippuvat muuttujista p ja q , jäljelle jää vain $2n$ riippumatonta muuttujaa. Tämän ansiosta voidaan generaattorin muuttujiksi valita ongelman ratkaisulle sopivin pari joukosta (q, Q) , (q, P) , (p, Q) , (p, P) . Vastaavia muunnoksen generoivia funktioita merkitään alaindekseillä 1–4.

Yksinkertaisin mahdollinen kanoninen muunnos on koordinaatiston muunnos $q \rightarrow Q(q)$. Tämä on siis edellä mainittu **pistemuunnos**. Se on erikoistapaus muunnoksesta, jonka generoi funktio $G = G_2(q, P, t)$.

Tutkitaan ensin muunnoksia, jotka generoi tyyppiä $G = G_1(q, Q, t)$ oleva funktio. Tämän kokonaisaikaderivaatta on

$$\frac{dG_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial G_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial G_1}{\partial t}. \quad (7.47)$$

Nyt kaavasta (7.46) tulee

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \left(\frac{\partial G_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial G_1}{\partial t}. \quad (7.48)$$

Siirretään kaikki termit yhtälön vasemmalle puolelle ja kerätään riippumattomien funktioiden \dot{q} ja \dot{Q} kertoimet yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial G_1}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \sum_i \left(P_i + \frac{\partial G_1}{\partial Q_i} \right) \dot{Q}_i + \left(H - K - \frac{\partial G_1}{\partial t} \right) = 0. \quad (7.49)$$

Tämä toteutuu identtisesti, kun

$$p_i = \frac{\partial G_1}{\partial q_i} \quad (7.50)$$

$$P_i = -\frac{\partial G_1}{\partial Q_i} \quad (7.51)$$

$$K = H + \frac{\partial G_1}{\partial t} \quad (7.52)$$

kaikilla $i = 1, \dots, n$. Tässä $2n + 1$ yhtälön rykelmässä siis G_1 on joku tunnettu funktio. Sen avulla voidaan esimerkiksi n :n yhtälön ryhmästä (7.51) ratkaista $q_i = q_i(Q, P, t)$ ja sijoittamalla tämä n :n yhtälön ryhmään (7.50) saadaan puolestaan yhtälöt $p_i = p_i(Q, P, t)$. Tämä voidaan tehdä myös päinvastoin, jos halutaan lausekkeet P_i :lle ja Q_i :lle. Lopuksi sijoitetaan p_i :t ja q_i :t H :n lausekkeeseen, jonka jälkeen meillä onkin lause K :lle. Eli G_1 on generoinut kanonisen muunnoksen. Siitä nimitys.

Kanonisen muunnoksen johtaminen annetusta generoivasta funktiosta on siis suoraviivainen tehtävä. Paljon hankalampaa on löytää generaattori annetulle muunnokselle.

Kun kerran on päästy alkuun, niin muiden riippumattomien muuttujaparien generoivat funktiot löytyvät tekemällä G_1 :lle Legendren muunnoksia.

Muuttujaparille (q, P) :

$$G_2(q, P, t) = G_1 + \sum_i P_i Q_i. \quad (7.53)$$

Muuttujaparille (p, Q) :

$$G_3(Q, p, t) = G_1 - \sum_i p_i q_i. \quad (7.54)$$

Muuttujaparille (p, P) :

$$G_4(p, P, t) = G_1 + \sum_i P_i Q_i - \sum_i p_i q_i. \quad (7.55)$$

Näille on suoraviivainen tehtävä johtaa (7.50–7.52):n kaltaiset yhtälöryhmät kirjoittamalla kunkin G_i :n kokonaisaikaderivaatta ja sijoittamalla se lausekkeeseen (7.46). Esimerkiksi G_2 :lle saadaan

$$p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \quad (7.56)$$

$$Q_i = \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \quad (7.57)$$

$$K = H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \quad (7.58)$$

ja loput jääkööt harjoitustehtäviksi. Nyt on tärkeää ymmärtää, että jokainen G_i ($i = 1, \dots, 4$) pitää sisällään rajattomasti erilaisia muunnoksia, jotka soveltuvat paremmin tai huonommin eri tilanteisiin. Alaindekset viittaavat ainoastaan siihen, **minkä tyyppiseen** kanonisten muuttujajoukkojen pariin lopulta päädytään.

Esimerkkejä

Millaisia muunnoksia edellä esitetyt kanoniset muunnokset oikein ovat? Tarkastellaan ensiksi generoivaa funktiota $G_1 = \sum_i q_i Q_i$. Yhtälöistä (7.50–7.52) näkee suoraan, että

$$\begin{aligned} p_i &= Q_i \\ P_i &= -q_i. \end{aligned}$$

Kanonisessa formalismissa voidaan siis haluttaessa muuntaa koordinaatteja impulssisuuriksi ja päinvastoin.

Tarkastellaan sitten generoivaa funktiota $G_3 = -\sum_i p_i Q_i$, jolle

$$\begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial G_3}{\partial p_i} = Q_i \\ P_i &= -\frac{\partial G_3}{\partial Q_i} = p_i \end{aligned}$$

eli näin määritelty G_3 generoi **identiteettimuunnoksen**. Saman tekee G_2 , jos se määritellään lausekkeella $G_2 = \sum_i q_i P_i$. Vaihtamalla näiden generaattoreiden etumerkit, saadaan puolestaan muunnos, joka ainoastaan muuttaa muuttujien etumerkit eli kääntää faasiavaruuden koordinaattiakselien suunnat päinvastaisiksi.

Palataan sitten jo aiemmin mainittuun pistemuunnokseen ja tarkastellaan generoivaa funktiota $G = G_2(q, P, t) - \sum_i Q_i P_i$. Nyt

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \dot{q}_i - H &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dG}{dt} \\ &= \sum_i P_i \dot{Q}_i - K + \sum_i \left(\frac{\partial G_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \dot{P}_i - P_i \dot{Q}_i - \dot{P}_i Q_i \right) + \frac{\partial G_2}{\partial t}, \end{aligned}$$

josta seuraa

$$\sum_i \left(p_i - \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \right) \dot{P}_i - \left(H - K + \frac{\partial G_2}{\partial t} \right) = 0.$$

Näin on saatu

$$\frac{\partial G_2}{\partial q_i} = p_i \quad (7.59)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial P_i} = Q_i \quad (7.60)$$

$$K = H + \frac{\partial G_2}{\partial t}. \quad (7.61)$$

Valitaan nyt

$$G_2(q, P, t) = \sum_j P_j Q_j(q, t), \quad (7.62)$$

missä \mathcal{Q}_j :t ovat muuttujien q_i ja t funktioita. Tällöin

$$Q_i = \mathcal{Q}_i(q, t), \quad p_i = \sum_j P_j \frac{\partial \mathcal{Q}_j}{\partial q_i}. \quad (7.63)$$

Näistä ensimmäinen on selvästi pistemuunnos eli muunnos, jollaisia on tehty pitkin matkaa Lagrangen mekaniikassa. Jälkimmäisen voi puolestaan kääntää: $P_j = P_j(q, p, t)$. Lausekkeen (7.62) määrittelemä muunnos on yksi (muttei ainoa) pistemuunnoksen $Q_i = \mathcal{Q}_i(q, t)$ generoiva funktio. Jos vielä $\mathcal{Q}_i = q_i$ kyseessä on identiteettimuunnos.

Harmoninen oskillaattori

Ratkaistaan malliksi kanonisten muunnosten käytöstä vanha tuttu harmoninen oskillaattori. Sen Hamiltonin funktio on

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 q^2.$$

Yritetään löytää muunnos sykliseen koordinaattiin Q . Koska harmonisen oskillaattorin rata on faasiavaruudessa (q, p) ellipsi, se voidaan skaalata ympyräksi, jolloin on mielekästä siirtyä napakoordinaatteihin. Etsitään siis muotoa

$$\begin{aligned} p &= f(P) \cos Q \\ q &= \frac{f(P)}{m\omega_0} \sin Q \end{aligned}$$

oleva kanoninen muunnos. Nyt

$$K = H_{p(Q,P), q(Q,P)} = \frac{f^2(P)}{2m} (\cos^2 Q + \sin^2 Q) = \frac{f^2(P)}{2m}.$$

Tehtävänä on siis löytää skaalaustekijän $f(P)$. Jaetaan muunnosyhtälöt puolittain, jolloin

$$p = qm\omega_0 \cot Q = p(q, Q)$$

eli muunnos on tyyppiä $G_1(q, Q)$ ja $p = \partial G_1 / \partial q = qm\omega_0 \cot Q$, joten integroimalla saadaan generoivaksi funktioksi

$$G_1(q, Q) = \frac{1}{2} m\omega_0 q^2 \cot Q.$$

Nyt

$$P = -\frac{\partial G_1}{\partial Q} = \frac{m\omega_0 q^2}{2 \sin^2 Q}.$$

Ratkaistaan sitten alkuperäiset kanoniset muuttujat uusien muuttujien avulla

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}} \sin Q \\ p &= \sqrt{2m\omega_0 P} \cos Q, \end{aligned}$$

joten etsitty $f(P) = \sqrt{2m\omega_0 P}$. Koska G ei riipu ajasta $K = H = E$ ja

$$K = \omega_0 P \cos^2 Q + \omega_0 P \sin^2 Q = \omega_0 P.$$

Tästä saadaan suoraan $P = E/\omega_0$. Koska H ei riipu Q :sta, Q on syklinen koordinaatti ja se löytyy kanonisesta liikeyhtälöstä

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega_0.$$

Tämä on triviaali integroitava: $Q = \omega_0 t + \varphi_0$. Siis fiksusti valittu kanoninen muunnos on tehnyt muunnetusta impulssista suureen energia/taajuus ja valinnut koordinaatiksi oskillaattorin vaihekulman. Sijoitetaan nämä nyt q :n lausekkeeseen ja olemme löytäneet tutun ratkaisun.

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}} \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Tässä q :ta ratkaistaessa olisi tietenkin voitu valita myös miinus-merkki. Se olisi siirtänyt oskillaattorin vaihetta tekijällä π .

No mitäs iloa tästä sitten oli? Oikeastaan koko ongelma oli ratkaistu, kun löydettiin sopiva generaattori. Ainoa integrointi oli vakion integrointi ajan suhteen, jota ei voi pitää kovin vaativana tehtävänä. Kuten jo aiemmin todettiin muunnoskaavojen laskeminen generaattorista on suoraviivainen tehtävä, mutta generaattorin keksiminen näppärää muunnosta varten on vaikeampaa.

7.4.2 Infinitesimaaliset kontaktimuunnokset

Tarkastellaan seuraavaksi ajasta riippumattomia infinitesimaalisia muunnoksia

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i. \end{aligned} \tag{7.64}$$

Kyseessä on siis infinitesimaalisen lähellä identiteettimuunnosta oleva muunnos. Sellaisen voi generoida esimerkiksi funktiolla

$$G_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P), \tag{7.65}$$

missä ε on infinitesimaalinen parametri. G_2 -tyyppiselle generaattorille

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial G_2}{\partial q_i} = P_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial G_2}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, \end{aligned} \tag{7.66}$$

joten

$$\begin{aligned}\delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \\ \delta q_i &= \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}.\end{aligned}\tag{7.67}$$

Nyt

$$G(q, P) = G\left(q, p - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}\right) \approx G(q, p) - \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i} \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i}.$$

joten muunnosyhtälöissä

$$\begin{aligned}\delta p_i &= -\varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \delta q_i &= \varepsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial P_i} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{7.68}$$

Jätetään suuruusluokkaa $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ olevat termit pois, jolloin $G(q, P) = G(q, p)$.

Koska G :tä ei ole rajoitettu sen tarkemmin, voidaan valita

$$G(q, p) = H(q, p),\tag{7.69}$$

jolloin ε on luonnollista tulkita pieneksi ajalliseksi siirroksi dt . Tällöin

$$\begin{aligned}\delta q_i &= dt \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i dt = dq_i \\ \delta p_i &= -dt \frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i dt = dp_i\end{aligned}\tag{7.70}$$

Siis G eli tässä tapauksessa Hamiltonin funktio H generoi muuttujien $\{q\}$ ja $\{p\}$ joukossa kanonisen muunnoksen, joka voidaan ymmärtää systeemin liikkeeksi faasiavaruudessa (q, p) aikavälillä dt . Hamiltonin funktio voidaan siten tulkita liikkeen infinitesimaaliseksi generaattoriksi ja systeemin dynaaminen kehitys on jono perättäisiä kontaktimuunnoksia. Tälläkin asialla on hyödyllinen vastineensa kvanttimekaniikassa, jossa systeemin aikakehitystä kuvataan Hamiltonin operaattorin avulla.

Tarkastellaan sitten, kuinka joku annettu funktio $f(q, p)$ muuntuu tällaisessa kontaktimuunnoksessa. Ensinnäkin

$$\delta f = f(q + \delta q, p + \delta p) - f(q, p)\tag{7.71}$$

ja toiseksi

$$\delta f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i.\tag{7.72}$$

Ilmaistaan δq_i ja δp_i generaattorin G avulla

$$\delta f = \varepsilon \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \varepsilon [f, G].\tag{7.73}$$

Valitaan sitten ajasta riippumattoman systeemin Hamiltonin funktio H funktioksi f eli $\delta H = \varepsilon [H, G]$. Nyt G :n liikeyhtälö on kaavan (7.40) mukaisesti

$$\frac{dG}{dt} = [G, H] + \frac{\partial G}{\partial t}. \quad (7.74)$$

Jos nyt G on ajasta riippumaton ($\partial G/\partial t = 0$) ja liikevakio ($dG/dt = 0$), niin $[G, H] = 0 \Rightarrow \delta H = 0$. Tällöin siis H on invariantti. Tämän voi tulkita niin, että ajasta riippumattomat liikevakiot ovat sellaisten kontaktimuunnosten generaattoreita, jotka jättävät H :n invariantiksi. Tämä voi auttaa liikevakioiden etsimisessä.

7.4.3 Kanoniset muunnokset ja Poissonin sulut

Osoitetaan seuraavaksi, että Poissonin sulut ovat invariantit kanonisissa muunnoksissa eli

$$[f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}. \quad (7.75)$$

Sitten vaan reippaasti laskemaan

$$\begin{aligned} [f, g]_{q,p} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \right\} \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial Q_j} [f, Q_j]_{q,p} + \frac{\partial g}{\partial P_j} [f, P_j]_{q,p} \right). \end{aligned} \quad (7.76)$$

Sovelletaan tätä tulosta sulkuihin $[Q_i, f]_{q,p}$ eli lasketaan

$$[Q_i, f]_{q,p} = \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} [Q_i, Q_j]_{q,p} + \frac{\partial f}{\partial P_j} [Q_i, P_j]_{q,p} \right). \quad (7.77)$$

Nyt pitää selvittää, mitä ovat $[Q_i, Q_j]_{q,p}$ ja $[Q_i, P_j]_{q,p}$. Lähdetään liikkeelle infinitesimaalisesta kontaktimuunnoksesta $G_2 = \sum_i q_i P_i + \varepsilon G(q, P)$, jolle olemme jo johtaneet tulokset

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i} \\ P_i &= p_i - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Nyt saadaan suorilla laskuilla (rajalla $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} [Q_i, Q_j]_{q,p} &= \left[q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, q_j + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \right] \\ &= \left[q_i, \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_j} \right] + \left[\varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, q_j \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial^2 G}{\partial p_j \partial p_i} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) = 0, \end{aligned} \quad (7.78)$$

ja

$$\begin{aligned}
 [Q_i, P_j]_{q,p} &= \left[q_i + \varepsilon \frac{\partial G}{\partial P_i}, p_j - \varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \right] \\
 &= \delta_{ij} + \left[\varepsilon \frac{\partial G}{\partial p_i}, p_j \right] + \left[q_i, -\varepsilon \frac{\partial G}{\partial q_j} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
 &= \delta_{ij} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 G}{\partial p_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 G}{\partial q_j \partial p_i} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

Vaikka tämä onkin todistettu vain G_2 -tyyppiä olevan generaattorin tuottamalle kanoniselle muunnokselle, tulos on yleispätevä. Voimme nimittäin tehdä ensin kanonisen muunnoksen ajasta riippumattomaan systeemiin

$$(q, p) \rightarrow (Q(q, p, t_0), P(q, p, t_0)),$$

jolle Poissonin sulkujen invarianssi löytyy näppärästi. Funktiota g voidaan nimittäin tässä tapauksessa pitää jonkin kuvitteellisen systeemin Hamiltonin funktiona, joten $[f, g]_{q,p} = df/dt$. Koska nyt df/dt ei voi riippua koordinaattien (q, p) valinnasta, invarianssi on totta. Tämän jälkeen systeemin aikakehitys hetkestä t_0 hetkeen t voidaan tulkita jonoksi infinitesimaalisia kontaktimuunnoksia, joille jokaiselle relaatiot (7.78 ja 7.79) ovat voimassa. Näin ollen ne ovat voimassa mille tahansa kanoniselle muunnokselle

$$(q, p) \rightarrow (Q(q, p, t), P(q, p, t)).$$

Sijoittamalla nämä relaatiot yhtälöön (7.77) saadaan

$$[Q_i, f]_{q,p} = \frac{\partial f}{\partial P_i},$$

mistä seuraa tietenkin $[f, Q_j]_{q,p} = -\partial f/\partial P_j$ ja vastaavasti $[f, P_j]_{q,p} = \partial f/\partial Q_j$. Sijoittamalla nämä yhtälön (7.76) viimeiseen lausekkeeseen on invarianssi (7.75) todistettu. Tästä seuraa, että voimme suorittaa laskutoimituksen käyttäen mieleisiamme kanonisia muuttujia ja luottaa siihen, että lopputulos on oikein.

Poissonin sulkujen invarianssin voi itse asiassa ottaa kanonisen muunnoksen määritelmäksi. Jos siis on tarve todistaa joku muunnos kanoniseksi, riittää osoittaa, että (7.75) toteutuu.

Jos olisimme alun perin kelpuuttaneet kanonisiksi myös sellaiset muunnokset, joissa (7.46):n vasen puoli kerrotaan jollain vakiolla, yllä oleva tulos ei olisi voimassa eli Poissonin suluilla olisi eri numeroarvo eri koordinaatistoissa.

7.5 Hamiltonin–Jacobin teoriaa

Hamiltonin liikeyhtälöiden

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

ratkaisut ovat muotoa

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(q_0, p_0, t) \\ p_i &= p_i(q_0, p_0, t), \end{aligned} \quad (7.80)$$

missä p_0 ja q_0 ovat integroimisvakioita, esim. kanonisten muuttujien q ja p alkuarvojoukot. Nämä yhtälöt voidaan kääntää, jolloin

$$\begin{aligned} q_{0j} &= q_{0j}(q, p, t) \equiv Q_j \\ p_{0j} &= p_{0j}(q, p, t) \equiv P_j. \end{aligned} \quad (7.81)$$

Tämä voidaan tulkita kanonisena muunnoksena $(q, p) \rightarrow (Q, P)$. Koska uudet muuttujat ovat vakioita, Hamiltonin yhtälöt näille muuttujille kirjoitettuna ovat

$$\begin{aligned} \dot{Q}_j &= \frac{\partial K}{\partial P_j} = 0 \\ \dot{P}_j &= -\frac{\partial K}{\partial Q_j} = 0 \end{aligned} \quad (7.82)$$

eli muunnettu Hamiltonin funktio K ei riipu uusista muuttujista ja on siten vakio, joka voidaan asettaa identtisesti nolllaksi.

Otetaan sitten käyttöön generoiva funktio $G_2 = S = S(q, P, t)$, jolle on voimassa

$$K = H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.83)$$

Toisaalta muotoa G_2 olevalle generaattorille on voimassa

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial S}{\partial P_i}. \end{aligned} \quad (7.84)$$

Merkitään $Q_i \equiv \beta_i$ ja $P_i \equiv \alpha_i$, jotka nyt ovat vakioita. Niinpä $S = S(q, \alpha, t)$ eli S on $n + 1$:n muuttujan (q_1, \dots, q_n, t) funktio. Olemme päässeet yhtälöön

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.85)$$

Tämä yhtälö tunnetaan nimellä **Hamiltonin–Jacobin yhtälö**. Se on $n + 1$:n muuttujan ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälö funktiolle S . Funktiota S kutsutaan

Hamiltonin prinsipaalifunktioksi (mikä on kökkö suomennos englanninkielisestä termistä *principal function*).

Funktio S generoi kanonisen muunnoksen, jossa muunnetut koordinaatit ja impulssit ovat vakioita. Nyt tarkasteltavan ongelman ratkaisuproseduuri on ilmeinen. Ratkaistaan ensin funktio $S = S(q, \alpha, t)$ yhtälöstä 7.85, jonka jälkeen saadaan lasketuksi suoraan

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}(q, \alpha, t).$$

Nämä yhtälöt antavat systeemin radan implisiittimuodossa. Kääntämällä yhtälöt päästään radan lausekkeisiin $q = q(\alpha, \beta, t)$, joten meillä on systeemin rata konfiguraatioavaruudessa $\{q\}$ alkuarvoineen päivineen. Ongelman ainoa vaikea tehtävä on määrätä S . Mekaanisen ongelman ratkaisu on siis Hamiltonin–Jacobin teoriassa sama asia kuin sopivan kanonisen muunnoksen löytäminen!

Konservatiivisessa tapauksessa

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$$

ja $\mathbf{p} = \nabla S$ eli komponenttimuodossa $p_i = \partial S / \partial r_i$. Nyt Hamiltonin–Jacobin yhtälö saa muodon

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U(q) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.86)$$

Konservatiiviselle systeemille $H = E$, joten $E + \partial S / \partial t = 0$, joka on triviaali integroitava

$$S = S_q(q, \alpha) - Et. \quad (7.87)$$

Funktio S separoituu siis paikka- ja aikaosiinsa. α :t ovat systeemin liikevakioita ja koska S_q väkisinkin riippuu E :stä, kannattaa yhdeksi α :ksi valita E .

S :n aikaderivaatta pitkin systeemin rataa (n -ulotteisessa q -avaruudessa) on

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L. \quad (7.88)$$

Tästä seuraa $S = \int L dt + \text{vakio}$, joten Hamiltonin periaate voidaan kirjoittaa $\delta S = 0$. Näin ei onnistuta määräämään S :ää, sillä tässähän rata täytyy tuntea ennestään, mutta yhtälö antaa kuitenkin fysikaalisen tulkinnan funktiolle S . Kyseessä on selvästi Hamiltonin vaikutusintegraali.

Harmoninen oskillaattori

Esimerkkinä ongelman ratkaisemisesta Hamiltonin–Jacobin teoriassa tarkastellaan jälleen tuttua lineaarista harmonista oskillaattoria, jonka Hamiltonin funktio on

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kq^2 = E.$$

Hamiltonin–Jacobin yhtälöksi tulee

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} kq^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Koska systeemi on konservatiivinen, etsitään ratkaisua edellä esitetyn innoittamana yrittäällä $S = S_q(q, E) - Et$, jolloin

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} kq^2 = E.$$

Integroitava yhtälö on siis

$$\frac{\partial S_q}{\partial q} = \sqrt{mk \left(\frac{2E}{k} - q^2 \right)}.$$

joten

$$S = \sqrt{mk} \int dq \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} - Et.$$

Lasketaan sitten kanoninen koordinaatti β eli Q

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \sqrt{\frac{m}{k}} \int dq \left(\frac{2E}{k} - q^2 \right)^{-1/2} - t,$$

josta

$$\beta + t = -\sqrt{\frac{m}{k}} \arccos \left(q \sqrt{\frac{k}{2E}} \right).$$

Nyt $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ on tietenkin oskillaattorin taajuus ja olemme saaneet tutun tuloksen

$$q = \sqrt{\frac{2\alpha}{k}} \cos \omega_0(t + \beta).$$

Muunnetun systeemin kanoniset muuttujat ovat siis $Q = \beta$ ja $P = E$ ovat liikevakioita, jotka riippuvat oskillaattorin alkuarvoista, mutta eivät selvästikään ole $q(0)$ ja $p(0)$.

Keskeisliike

Toinen toistuva esimerkki on liike keskeisvoimakentässä. Pallokoordinaatiston tasossa $\theta = \pi/2$ Hamiltonin funktio on

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r).$$

Koska systeemi on konservatiivinen, $S = S_q(r, \varphi, \alpha) - \alpha_1 t$, missä $\alpha_1 = E$. Hamiltonin–Jacobin yhtälöksi tulee nyt

$$\frac{1}{2m} \left((\partial_r S_q)^2 + \frac{(\partial_\varphi S_q)^2}{r^2} \right) + U(r) = \alpha_1.$$

Nyt φ on syklinen koordinaatti, joten $p_\varphi = \text{vakio} = l \equiv \alpha_2$ ja $\partial_\varphi S_q = \alpha_2$. Tämän integraali on muotoa

$$S_q = S_r(r; \alpha) + \varphi \alpha_2$$

ja

$$\frac{1}{2m} \left((\partial_r S_r)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} \right) + U(r) = \alpha_1.$$

Ratkaistaan jälkimmäisestä $\partial_r S_r$ eli

$$\frac{\partial S_r}{\partial r} = \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}.$$

Integroidaan tämä ja sijoitetaan lausekkeeseen $S = S_q - \alpha_1 t = S_r + \varphi \alpha_2 - \alpha_1 t$

$$S = \int dr \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} + \varphi \alpha_2 - \alpha_1 t.$$

Kanoniset koordinaatit β_1 ja β_2 ovat

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} - t \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = - \int \frac{\alpha_2 dr}{r^2 \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} + \varphi. \end{aligned}$$

Nämä antavat liikeradan yhtälöt muodossa $r(t, \alpha, \beta)$ tai $\varphi(t, \alpha, \beta)$.

7.6 Vaikutus- ja kulmamuuttujat

Mekaaniset systeemit ovat usein tavalla tai toisella periodisia. Harmoninen oskillaattori on ollut tällä kurssilla esimerkkinä jo liiankin monta kertaa, planeettojen radat ovat ainakin melkein periodisia, klassisessa kuvassa elektronit kiertävät atomien ytimiä, atomit värähtelevät molekyyliissä, molekyyleistä rakentuva aine johtaa paineaaltoja ja niin edelleen. Periodinen liike voidaan jakaa kahteen perustyyppiin: **libraatio**, jossa systeemi heilahtelee tasapainoasemansa ympäri, ja **rotaatio**, jossa systeemi tekee täysiä kierroksia. Tällaisia tilanteita tarkasteltaessa siirrytään usein vaikutus- ja kulmamuuttujiin.

Edellä käsitellyssä Hamiltonin–Jacobin menetelmässä päädyttiin käyttämään kanonisina impulsseina integrointivakioita α_i . Merkintöjen yksinkertaistamiseksi kirjoitetaan $\alpha = \{\alpha_i\}$. Otetaan käyttöön **vaikutusmuuttujat** $J_i(\alpha)$, jotka määritellään kaavoilla

$$J_i = \oint p_i dq_i \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, n, \quad (7.89)$$

missä q_i :t ovat periodisia muuttujia, integrointi on kunkin täyden periodin yli ja merkitään jatkossa jälleen $J = \{J_i\}$. Rajoitutaan lisäksi sellaisiin konservatiivisiin systeemeihin, joiden edellä esitelty S -funktio separoituu täydellisesti q -koordinaateissa eli $S_q = \sum_i S_{q_i}(q_i; \alpha)$. Edellisen jakson perusteella $p_i = \partial S_q / \partial q_i$, joten

$$J_i(\alpha) = \oint \frac{\partial S_q(q_i; \alpha)}{\partial q_i} dq_i \quad (7.90)$$

kaikille i . Tässä ei tietenkään oleteta summausta i :n yli. Integrointi antaa siis J_i :n α_i :tten funktiona, josta voidaan kääntää tulos

$$\alpha_i = \alpha_i(J). \quad (7.91)$$

Tämän ansiosta S_q voidaan ilmaista muodossa

$$S_q = S_q(q, J). \quad (7.92)$$

Nyt $H = E$ eli vakio ja siten ainoastaan vakioiden $\{J\}$ funktio

$$H = H(J). \quad (7.93)$$

Samaan tapaan kuin edellä määriteltiin kanoniset muunnokset ($\beta_i = \partial S / \partial \alpha_i$), määritellään vaikutusmuuttujia J_i vastaavat **kulmamuuttujat** lausekkeella

$$w_i = \frac{\partial S_q}{\partial J_i}. \quad (7.94)$$

Tämä vastaa kanonista muunnosta $(q, p) \rightarrow (w, J)$, jonka generoi $S_q(q, J)$.

Koska systeemi on konservatiivinen, $H = E = \alpha_1(J)$. Muunnos ei riipu ajasta, joten $K = H(J)$, mikä ei ole w :n funktio, eli kulmamuuttujat ovat syklisiä koordinaatteja. Nyt kanonisiksi liikeyhtälöiksi tulee

$$\dot{w}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \equiv \nu_i(J) = \text{vakio}, \quad (7.95)$$

joten

$$w_i = \nu_i(J)t + \beta_i. \quad (7.96)$$

Siis w_i :t ovat ajan lineaarisia funktioita.

Nyt voidaan esittää kysymys, paljonko kulmamuuttuja w_i muuttuu, kun koordinaatti q_i tekee täyden syklin, joko edestakaisen heilahduksen tai täyden kierroksen? Lasketaanpa

$$\Delta w_i = \sum_j \oint \frac{\partial w_i}{\partial q_j} dq_j = \sum_j \oint \frac{\partial^2 S_q}{\partial q_j \partial J_i} dq_j = \sum_j \oint \frac{\partial p_j}{\partial J_i} dq_j. \quad (7.97)$$

Koska J_i :t ovat vakioita, niiden suhteen otetut derivaatat voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle ja saamme tuloksen

$$\Delta w_i = \sum_j \frac{d}{dJ_i} \oint p_j dq_j = \sum_j \frac{dJ_j}{dJ_i} = 1. \quad (7.98)$$

Siis kulmamuuttuja kasvaa yhden yksikön täyden periodin aikana. Merkitään periodin pituutta τ_i :lla, jolloin

$$\Delta w_i = \nu_i \tau_i = 1. \quad (7.99)$$

Vakio ν_i on siis periodin käänteisluku eli q_i :n periodisen liikkeen taajuus. Vaikutuskulmamuuttujien avulla voidaan siis määrätä liikkeen periodi ratkaisematta systeemin liikerataa.

Vaikutusmuuttujan J määrittely-yhtälöstä näkyy suoraan, että J :n dimensio on sama kuin liikemäärämomentin (impulssimomentin) dimensio $[J] = [qp]$. Niinpä sen kanonisen konjugaatin eli kulmamuuttujan dimensio on juuri kulman dimensio, mikä SI-yksiköissä on ykkönen. Tällaisia luonnollisia kanonisia konjugaattipareja ovat (r, p) , (θ, L_i) , (t_0, E) jne. Kvanttimekaniikassa näihin pareihin liittyy Heisenbergin epätarkkuusperiaate eli mitä tarkemmin parin toinen jäsen tiedetään, sitä suurempi epätarkkuus liittyy parin toiseen jäseneseen. Mutta fysikaalisilta perusteiltaan se on kuitenkin jo toinen tarina.

Mainittakoon vielä, että joissain klassisen mekaniikan oppikirjoissa juuri vaikutuskulmamuuttujia kutsutaan kanonisiksi muuttujiksi (esim. Landau–Lifshitz).

Harmonisen oskillaattorin periodi

Näillä työkaluilla onnistumme määrittämään harmonisen oskillaattorin periodin ratkaisematta sen liikettä. Hamiltonin funktio on siis

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 = E.$$

Nyt

$$J = \oint p dq = \sqrt{mk} \oint \sqrt{\frac{2E}{k} - q^2} dq.$$

Integraali yksinkertaistuu sijoituksella $q = \sqrt{2E/k} \sin \theta$, jolloin

$$J = 2E \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Koska $H = E$, saadaan

$$H = \frac{J}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}},$$

joten

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left(= \frac{\omega_0}{2\pi} \right).$$

Tämä tulos tietenkin pitikin saada.

7.7 *Kanonista häiriöteoriaa

Fysikaalisten systeemien likeyhtälöt ovat usein ei-integroituvia. Vaikka yhtälöt voidaan johtaa esim. Hamiltonin–Jacobin teorialla, niiden integroiminen analyttisesti ei välttämättä onnistu edes periaatteessa. Monesti systeemin integroitumattomuus johtuu likeyhtälön termeistä, joita voi approksimoida pieninä. Kuten epälineaaristen oskillaattoreiden yhteydessä opittiin, hyödyllinen tapa käsitellä tällaisten systeemien liikettä on häiriöteoria. Oletetaan, että fysikaalisen systeemin dynamiikka voidaan esittää integroituvalla Hamiltonin funktiolla, johon on lisätty joku pieni häiriö. Tätä menetelmää käytetään esimerkiksi taivaanmekaniikassa. Maan rata Auringon ympäri on integroituva systeemi, johon lähinnä Mars ja Jupiter tuottavat häiriöitä. Häiriöt ovat kuitenkin varsin pieniä. Tarkastellaan häiriöteoriaa kanonisen formalismin keinoin, jolloin sitä kutsutaan **kanoniseksi häiriöteoriaksi**. Sen idea on seuraavanlainen.

Kuvaillaan systeemin Hamiltonin funktiota integroituvalla osalla H_0 ja pienellä häiriöllä ΔH

$$H = H_0 + \Delta H. \quad (7.100)$$

Jätetään aluksi ΔH huomiotta ja muunnetaan H_0 kanonisesti käyttäen tyyppiä $G_2(q, P, t)$ olevaa generoivaa funktiota $S_0(q, P, t)$ sellaisiin kanonisiin muuttujiin (Q, P) , joilla $K_0(Q, P) = 0$. Hamiltonin–Jacobin teorian perusteella funktio S_0 toteuttaa yhtälön

$$H_0\left(q, \frac{\partial S_0}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \quad (7.101)$$

Hamiltonin yhtälöiden mukaan silloin uudet muuttujat Q_0 ja P_0 ovat liikevakioita. Tehdään sitten sama kanoninen muunnos

$$Q(q, P, t) = \frac{\partial S_0}{\partial P_i}(q, P, t) \quad (7.102)$$

$$p(q, P, t) = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}(q, P, t) \quad (7.103)$$

koko Hamiltonin funktiolle $H = H_0 + \Delta H$, jolloin saadaan muunnettu Hamiltonin funktio

$$\Delta K(Q, P, t) = H + \frac{\partial S_0}{\partial t} = \Delta H(q(Q, P, t), p(Q, P, t), t). \quad (7.104)$$

Tämä on siis koko systeemin Hamiltonin funktio uusissa koordinaateissa (Q, P) . Nyt voidaan kirjoittaa Hamiltonin likeyhtälöt uusille koordinaateille muodossa

$$\dot{Q} = \frac{\partial}{\partial P} \Delta K(Q, P, t) \quad (7.105)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial}{\partial Q} \Delta K(Q, P, t). \quad (7.106)$$

Pelkkä kanoninen muunnos ei tietenkään tee systeemistä integroituvaa, mutta nyt voimme käyttää hyväksi sitä, että häiriö on pieni ja uudet muuttujat likimain vakioita. Derivoitien jälkeen sijoitetaan yhtälön oikealle puolelle (Q, P) -muuttujiksi häiriötömät muuttujat (Q_0, P_0) . Tämän jälkeen yhtälöt integroidaan ajan suhteen ja saadaan ensimmäisen kertaluvun ratkaisut uusille koordinaateille $Q = Q_1(t, Q_0, P_0)$ ja $P = P_1(t, Q_0, P_0)$.

Välittömästi huomataan, että meidän ei välttämättä tarvitse pysähtyä tähän. Ensimmäisen kertaluvun ratkaisuthan voidaan nyt sijoittaa liikeyhtälöiden (7.105–7.106) oikealle puolelle, jolloin yhtälöt saadaan edelleen integroiduiksi. Tämä johtaa toisen kertaluvun ratkaisuihin $Q_2(t, Q_0, P_0)$ ja $P_2(t, Q_0, P_0)$ ja niin edelleen. Iteraatioprosessi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\dot{Q}_{i+1} = \frac{\partial(\Delta K)}{\partial P}(Q_i, P_i, t) \quad (7.107)$$

$$\dot{P}_{i+1} = -\frac{\partial(\Delta K)}{\partial Q}(Q_i, P_i, t), \quad (7.108)$$

missä derivoinnin jälkeen tehdyt sijoitukset on merkitty näkyviin.

Huom. Tässä indeksit viittaavat siis iterointikierrökseen eivät muuttujajoukkojen P ja Q elementteihin, joita on n kappaletta kumpiakini!

Perihelin kiertymä

Tarkastellaan esimerkkinä planeetan perihelin suunnan kiertymistä. Eritoten Merkuriuksen perihelin kiertymä on ollut historiallisesti tärkeä, koska sillä oli merkittävä asema yleisen suhteellisuusteorian todentamisessa.

Bertrandin teoreemana tunnetun tuloksen mukaan ympyrä ratojen häiriöt johtavat toisessa kertaluvussa suljettuihin ratoihin vain Keplerin ($\propto -(1/r)$) ja Hookeen ($\propto r^2$) potentiaalien tapauksessa (kappale 2.1.5). Näissä tilanteissa radat ovat suljettuja ja Keplerin liikkeessä perihelin suunta on vakio. Planeettakunta ei kuitenkaan ole kahden kappaleen ongelma. Toiset planeetat häiritsevät tarkasteltavan planeetan liikettä ja seurauksena on planeetan perihelin kiertymä.

Hamiltonin funktio on nyt

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \Delta H(r, \varphi, t) \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r} + \Delta H(r, \varphi, t). \end{aligned}$$

Olemme jo aiemmin ratkaisseet radan Hamiltonin–Jacobin teoriassa ilman häiriötermiä

$$\beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} - t$$

$$\beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = - \int \frac{\alpha_2 dr}{r^2 \sqrt{2m[\alpha_1 - U(r)] - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} + \varphi,$$

missä nyt $U(r) = -k/r$, $\alpha_1 = E \equiv P_{01}$ ja $\alpha_2 = p_\varphi = l = P_{02}$. Näin saadaan muunnetuiksi koordinaateiksi

$$Q_{01} = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m \left(P_{01} + \frac{k}{r} \right) - \frac{P_{02}^2}{r^2}}} - t,$$

joka antaa ajan paikan funktiona $t = t(r_0)$, ja

$$Q_{02} = - \int \frac{P_{02} dr}{r^2 \sqrt{2m \left(P_{01} + \frac{k}{r} \right) - \frac{P_{02}^2}{r^2}}} + \varphi,$$

joka puolestaan antaa paikan radan vaihekulman funktiona eli

$$r = r_0(\varphi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - Q_{02})},$$

missä

$$p = \frac{P_{02}^2}{mk} = \frac{l}{mk}; \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2P_{01}P_{02}^2}{mk^2}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}.$$

Rataelementteinä ilmaistuna $Q_{01} = -\tau$ eli periheliaika, $Q_{02} = -\varpi$ eli perihelin pituus ja ϵ on tietenkin radan eksentrisyys.

Nyt $\dot{\varpi} = \partial \Delta K / \partial l$, joten

$$\Delta \varpi = \frac{\partial}{\partial l} \int_0^T \Delta K dt = \frac{\partial}{\partial l} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta H(r_0, \varphi_0, t_0) mr_0^2}{l} d\varphi,$$

missä jälkimmäisessä yhtälössä on käytetty tietoa $l = mr_0^2 \dot{\varphi}$.

Jos esimerkiksi häiriö-Hamilton on muotoa $\Delta H = C/r^2$, saadaan perihelin pituudeksi

$$\Delta \varpi = \frac{\partial}{\partial l} \int_0^{2\pi} \frac{\Delta H(r_0, \varphi_0, t_0) mr_0^2}{l} d\varphi = \frac{\partial}{\partial l} \frac{2\pi m C}{l} = -\frac{2\pi m C}{l^2}.$$

Sovelletaan tätä sitten Merkuriuksen rataa. Havaintojen mukaan planeetan periheli kiertyy $5600''/100$ a (siis kaarisekunteja 100 vuodessa). Suurimman osan tästä ($5026''/100$ a) aiheuttaa kevättasauspisteen prekessio, joten "todellista" perihelin kiertymää on $574''/100$ a. Muiden planeettojen aiheuttamat häiriöt ovat muotoa

$$\Delta H(r, \varphi, t) = - \frac{GM_i m}{\sqrt{r^2 + R_i^2 - 2rR_i \cos \psi_i}},$$

missä $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_i(t)$ on planeetan i rata ja $\psi_i = \angle(\mathbf{r}, \mathbf{R}_i)$. Numeeriset laskut, jossa huomioidaan kaikkien muiden planeettojen häiröt, antavat yhdessä keskimääräisen kiertymänopeuden $\langle \dot{\omega} \rangle = 531''/100 \text{ a}$.

Tämä tulos tunnettiin jo 1800-luvulla ja puuttuville 43 kaarisekunnille vuosisadasa etsittiin kuumeisesti selitystä. Hyvin suosittu selitysyrittäjä oli oletus Merkuriuksen radan sisäpuolella olevasta planeetasta, jolle annettiin nimeksi Vulkanus. Vulkausta ei kuitenkaan löytynyt. Vuonna 1916 Einstein julkaisi yleisen suhteellisuusteoriansa, jonka mukaan avaruuden kaareutuminen tuo vielä yhden korjaustermin, joka on muotoa $\Delta H = -h/r^3$. Tämä antaa kiertymän

$$\Delta\varpi = -\frac{\partial}{\partial l} \int_0^{2\pi} \frac{mh}{l} \frac{(1 + \epsilon \cos \varphi)}{p} d\varphi = -\frac{\partial}{\partial l} \frac{2\pi m^2 k h}{l^3} = \frac{6\pi m^2 k h}{l^4}.$$

Suhteellisuusteoria antaa h :ksi

$$h = \frac{k}{c^2} \frac{l^2}{m^2},$$

mistä tulee juuri tuo puuttuva $43''/100 \text{ a}$. Tämä oli yksi ensimmäisiä yleisen suhteellisuusteorian suuria voittoja. Myös kilpailevat gravitaatioteoriat ennustivat perihelin kiertymää, mutteivät oikean suuruista.

Kysymykseen perihelin kiertymästä jäi kuitenkin yksi epävarmuustekijä, nimittäin Auringon mahdollisesta litistymisestä johtuva vaikutus. Auringon muoto on vaikea mitata tarkasti, mutta parhaat nykyaikaiset havainnot osoittavat, että efekti on niin pieni, ettei se vaikuta tähän tulokseen.

7.8 *Adiabaattiset invariantit

Kvanttifysiikan aamuhämärissä vuonna 1911 kerrotaan herrojen Lorentz ja Einstein pohdineen seuraavanlaista mekaanista ongelmaa. Olkoon meillä katosta riippuva heiluri, jonka varsi on katossa olevasta rei'ästä pujotettu lanka. Lankaa joko nostetaan tai laskeetaan hyvin hitaasti heilurin periodiin verrattuna, jolloin heilurin varren pituus muuttuu hitaasti. On selvää, että tässä prosessissa heiluriin tehdään työtä ja siten sen kokonaisenergia ei säily. Lorentzin Einsteinille esittämä kysymys oli, mikäs tässä tilanteessa sitten säilyy. Einstein vastasi, että energia (E) on verrannollinen taajuuteen (ν) eli $J = E/\nu$ on säilyvä suure. Tällaisia melkein periodisen systeemin jonkun parametrin, tässä tapauksessa heilurin varren pituuden, hitaan muutoksen seurauksena säilyviä suureita kutsutaan **adiabaattisiksi invarianteiksi**.

Tarkastellaan asiaa Hamiltonin mekaniikan välineillä. Systeemiä kuvaavan parametrin λ hidaski muutos voidaan esittää muodossa

$$T d\lambda/dt \ll \lambda, \quad (7.109)$$

missä T on liikkeen jakso. Jos λ olisi vakio, systeemi olisi tarkasti periodinen säilyttäen sekä energian että energiasta riippuvan periodin. Olkoon $H(q, p; \lambda)$ systeemin Hamiltonin funktio, joka siis riippuu ajasta riippuvasta parametrilla $\lambda(t)$. Nyt

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt}. \quad (7.110)$$

Oikeanpuoleinen lauseke riippuu myös nopeasti oskilloivista muuttujista q ja p . Koska tilannetta tarkastellaan hitaasti muuttuvan parametrin aikaskaalassa, voidaan yllä olevasta lausekkeesta ottaa aikakeskiarvo periodisen liikkeen yli. Merkitään tätä

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{d\lambda}{dt} \left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle. \quad (7.111)$$

Koska λ muuttuu hitaasti, laskettaessa H :n keskiarvoa riittää tarkastella pelkästään nopeita muuttujia q ja p . Oikealla puolella oleva keskiarvo on siis

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial \lambda} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt. \quad (7.112)$$

Hamiltonin liikeyhtälöstä $\dot{q} = \partial H / \partial p$ seuraa

$$dt = dq \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1}, \quad (7.113)$$

joten periodi T on

$$T = \int_0^T dt = \oint dq \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1}. \quad (7.114)$$

Energian muutoksen aikakeskiarvo voidaan nyt kirjoittaa muodossa

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint dq (\partial H / \partial \lambda) (\partial H / \partial p)^{-1}}{\oint dq (\partial H / \partial p)^{-1}}. \quad (7.115)$$

Nyt on tärkeää muistaa, että osittaisderivaattojen kyseessä ollen **ei saa automaattisesti kirjoittaa** $(\partial H / \partial p)^{-1} = \partial p / \partial H$! Tässä tapauksessa integroinnit täytyy tehdä pitkin rataa q pitäen λ vakiona. Sellaisella radalla Hamiltonin funktion arvo on vakio E ja kanoninen impulssi p on koordinaatin q ja kahden vakioparametrin E ja λ funktio eli $p = p(q; E, \lambda)$. Tästä seuraa, että

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)^{-1} = \frac{\partial p}{\partial E}. \quad (7.116)$$

Päästäksemme käsiksi lausekkeen (7.115) osoittajaan derivoidaan yhtälöä $H(q, p; \lambda) = E$ parametrin λ suhteen

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad (7.117)$$

eli

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \quad (7.118)$$

Edellä olevan mukaisesti lausekkeen (7.115) nimittäjän integraalissa $(\partial H/\partial p)^{-1} = \partial p/\partial E$, joten

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\oint (\partial p/\partial \lambda) dq}{\oint (\partial p/\partial E) dq}, \quad (7.119)$$

mikä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E} \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle + \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 0. \quad (7.120)$$

Sulkulauseke on p :n keskiarvon aikaderivaatta, joten integraali on muotoa

$$\langle dJ/dt \rangle = 0, \quad (7.121)$$

missä

$$J = \oint p dq. \quad (7.122)$$

Olemme siis osoittaneet, että J on vakio, kun λ :aa muutetaan hitaasti, eli J on adiabattinen invariantti.

Nyt J on systeemin energian funktio. Derivoidaan sitä E :n suhteen

$$\frac{\partial J}{\partial E} = \oint \frac{\partial p}{\partial E} dq = T, \quad (7.123)$$

josta seuraa

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \nu. \quad (7.124)$$

Palataan sitten takaisin Lorentzin ja Einsteinin heiluriin. Kyseessä on yksiulotteinen systeemi, jonka liike voidaan kuvata kaksiulotteisessa faasiavaruudessa (q, p) . Periodisen systeemin rata faasiavaruudessa on suljettu käyrä. Integraali $J = \oint p dq$ laskettuna käyrän ympäri on sen sisään jäävä pinta-ala. Adiabattiselle invariantille tämä pinta-ala on vakio.

Lorentzin ja Einsteinin heilurin Hamiltonin funktio on

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2,$$

missä ω on oskillaattorin ominaistajuus, joka tässä tapauksessa on hitaasti muuttuvan varren pituuden funktio. Oskillaattorin radan faasiavaruudessa määrää yhtälö $H(p, q) = E$. Rata on ellipsi, jonka puoliakselit ovat $\sqrt{2mE}$ ja $\sqrt{2E/m\omega^2}$. Ellipsin pinta-ala tulee silloin

$$J = E/\nu,$$

joka on nyt säilyvä suure eli energia on verrannollinen taajuuteen kuten Einstein oivalsi.

Miksi adiabaattiset invariantit ilmestyivät fysiikkaan juuri kvanttiteorian kehittelyn alkuvaiheissa, johtui siitä, että riittävän hitaat muutokset atomien ympäristössä, esim. sähkömagneettisissa kentissä eivät aiheuttaneet siirtymiä kvanttitilojen välillä. Sitä tällaisissa muutoksissa säilyvien adiabaattisten invarianttien löytäminen oli tervetullutta. Nykypäivän fysiikassa adiabaattisia invariantteja hyödynnetään eritoten tutkittaessa varattujen hiukkasten liikettä magneettikentissä kentissä kuten maapallon lähiavaruuden van Allenin säteilyvöissä, fuusiolaitteissa, hiukkaskiihdyttimissä, jne. Jos magneettikenttä muuttuu paljon hitaammin kuin hiukkasen pyörähdysliike magneettikentän ympäri, hiukkasen magneettinen momentti on adiabaattinen invariantti. Tästä on suurta hyötyä esimerkiksi konstruoidessa varatuista hiukkasista muodostuvan plasman koossapitolaitteita, jotka ovat välttämättömiä fuusioenergian tuottamiseksi.

7.9 Harjoituksia

1. Osoita, että liikemäärämomentin komponenteille pätee

$$[L_x, L_y] = L_z,$$

missä $[,]$ ovat Poissonin sulut.

2. Olkoon kanonisen muunnoksen generoiva funktio tyyppiä

$$G_2(q, P, t) = G_1 + \sum_i P_i Q_i,$$

missä G_1 on siis muotoa $G_1(q, Q, t)$ (katso luennot). Osoita, että

$$p_i = \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \quad \text{ja} \quad Q_i = \frac{\partial G_2}{\partial P_i}.$$

Johda vastaavat kaavat myös tyyppejä $G_3(Q, p, t)$ ja $G_4(p, P, t)$ oleville generoiville funktioille.

3. Olkoot q ja p kanoniset muuttujat. Määrää α ja β siten, että muunnos

$$Q = q^\alpha \sin(\beta p); \quad P = q^\alpha \cos(\beta p)$$

on kanoninen muunnos. (Vihje: laske Q :n ja P :n Poissonin sulut.)

4. Etsi tyyppiä

$$G = G_3(Q, p, t) + \sum_i q_i p_i$$

ja

$$G = G_4(p, P, t) - \sum_i Q_i P_i + \sum_i q_i p_i$$

olevien generaattoreiden muunnosyhtälöt.

5. Osoita, että muunnos $(q, p) \rightarrow (Q, P)$

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \\ P &= 2(1 + \sqrt{q} \cos p)\sqrt{q} \sin p \end{aligned}$$

on kanoninen ja että sen generoi funktio

$$G = -(e^Q - 1)^2 \tan p.$$

6. Millä vakioiden α ja β välisellä ehdolla muunnos

$$Q = \frac{\alpha p}{q}; \quad P = \beta q^2$$

on kanoninen? Etsi tämän muunnoksen generoiva funktio. Sovelletaan muunnosta harmonisen värähtelijän (ominaistajuus ω_0 , massa m) ratkaisemiseen. Millä vakion β arvolla muunnetun systeemin Hamiltonin funktio on

$$K = \omega_0 P(1 + Q^2) ?$$

Kirjoita muunnetun systeemin Hamiltonin likeyhtälöt, ratkaise ne ja anna $q(t)$ ja $p(t)$. (Muista: $K = E$.)

7. Palloheilurin (varren pituus a , massa m) Lagrangen funktio on

$$L = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mga \cos \theta,$$

missä θ on heilurin varren ja alaspäin osoittavan z -akselin välinen kulma ja φ on kiertokulma z -akselin ympäri. Muodosta systeemin Hamiltonin funktio $H(\theta, \varphi, p_\theta, p_\varphi)$ ja ratkaise sen liike muodossa

$$t = t(\theta; \alpha, \beta); \quad \varphi = \varphi(\theta; \alpha, \beta)$$

käyttäen Hamiltonin–Jacobin teoriaa.

8. Kirjoita edellisen tehtävän palloheilurin vaikutusmuuttujien lausekkeet (muista $H = E$). Anna tämän jälkeen J_θ muodossa

$$J_\theta = J_\theta(E, J_\varphi)$$

ja sijoita tähän $E = H(J_\theta, J_\varphi)$.

Derivoi saatu yhtälö puolittain erikseen kummankin vaikutusmuuttujan suhteen ja määrää näin φ :n ja θ :n taajuuksien $\nu_i = \partial H / \partial J_i$ lausekkeet E :n ja vaikutusmuuttujien (jotka ovat vakioita) funktiona. (Huom. Lausekkeet sisältävät integraaleja θ :n yli, joita ei ole tarkoituskaan yrittää ratkaista.)

9. Kuinka paljon Lorentzin–Einsteinin heilurin amplitudi eli suurin heilahduskulma muuttuu varren pituuden kaksinkertaistuessa?

Luku 8

*Kaaosteoriaa

Kurssin aiemmissa luvuissa olemme keskittyneet tarkastelemaan systeemejä, joiden liike voidaan kuvata integroimalla aikaansaadut liikeyhtälöt, kuten kahden kappaleen ongelma, lineaariset oskillaattorit jne. Olemme kutsuneet tällaisia systeemejä hieman löyhästi **integroituviksi**¹. Keplerin liikkeen yhteydessä todettiin kuitenkin, että jo kolmen kappaleen tapauksessa ei enää ole olemassa yleistä integroituvaa ratkaisua. Myöskään epälineaariset oskillaattorit eivät integroituneet vaan niille kehiteltiin erilaisia likimääräisiä ratkaisukikkoja. Tässä kirjan viimeisessä luvussa tarkastellaan integroituvuuden puutetta **kaaosteorian**a tunnetun mekaniikan sivuhaaran näkökulmasta. Kaaosteoria ei yleensä kuulu tyypillisen klassisen mekaniikan aineopintokurssin ydinainekseen, mutta sen keskeisimmät käsitteet ja ideat esitellään tässä lyhyesti esimerkkinä klassisen mekaniikan modernista tutkimuksesta.

Vaikka kaaosteoria onkin fysiikan nuorimpia tutkimuskohteita, sen juuret ovat jo Poincarén tutkimuksissa 1890-luvulla. Poincaré huomasi, että useamman kappaleen ongelmissa ei ole integroituvia ratkaisuja ja näissä tapauksissa kappaleiden radat ovat hyvin herkkiä alkuarvoille. Kaaottisten systeemien tutkimus jäi kuitenkin menneen vuosisadan alkuvuosikymmeninä kvanttifysiikan, suhteellisuusteorian ja statistisen fysiikan sankaritarinoiden varjoon. Se oikeastaan keksittiin uudelleen vasta 1960-luvulla. Yksi tärkeimmistä tapahtumista oli Edward Lorenzin havainto liittyen yksinkertaistettuihin mutta epälineaarisiin yhtälöihin, joilla hän yritti kuvata ilmakehän liikettä. Yhtälöt osoittautuivat kaaottisiksi ja tämä johti kuuluisaan ajatukseen ”perhosefektistä”. Koska pienikin häiriö voi aiheuttaa suuren muutoksen myöhemmin, voisi ajatella, että perhosen siipien heilahdus jossain Amazonasin sademetsässä voi johtaa hirmumyrskyyn Euroopassa.

Ennen kuin menemme kaaosteorian käsittelyyn on hyvä tehdä pari asiaa selväksi. Kaaos ei ole sama asia kuin satunnaisuus tai stokastisuus. Tarkasteltavat yhtälöt ovat

¹Integroituvuudelle ei ole yhtä yleisesti käytössä olevaa määritelmää. Useimmiten dynaamisen systeemin integroituvuudella tarkoitetaan, että systeemi käyttäytyy säännöllisesti. Täsmällisemmin ilmaistuna (konservatiivinen) systeemi on integroituva, mikäli sillä on vapausasteiden osoittama määrä toisistaan riippumattomia liikevakioita. Mikäli liikevakioita on vähemmän kuin vapausasteita, systeemi voi käyttäytyä epäsäännöllisesti.

deterministisiä eli annetut alkuarvot määräävät systeemin kehityksen yksikäsitteisesti. Toisaalta systeemit ovat hyvin herkkiä näille alkuarvoille ja jo pienikin virhe alkuarvoissa johtaa jossain vaiheessa suureen eroon lopputilojen välillä. Tämän vuoksi kaaottisista ilmiöistä ei voi tehdä luotettavasti pitkän aikavälin ennusteita. Sitä vastoin yhtälöiden deterministisyys takaa, että lyhyellä aikavälillä systeemin kehitystä voi laskea hyvinkin tarkasti eteenpäin. Mikäli sääilmiöt todella ovat kaaottisia, tämän voi tulkita siten, että lyhyen aikavälin ennusteet kehittyvät yhä paremmiksi, mutta pitkät ennusteet jäävät tulevaisuudessakin enemmän viihteen puolelle. Tätä ei kuitenkaan pidä tulkita siten, että tulevaisuuden ilmaston ennustaminen olisi välttämättä yhtä toivotonta kuin yksittäisten sääilmiöiden.

Ennen kuin lähemme tarkastelemaan kaaottista liikettä, on tärkeää todeta, että kaaos voi dynaamisessa systeemissä ilmetä monin eri tavoin. Jotkut kaaoksen tunnusmerkit ovat ominaisia konservatiivisille systeemeille, jotkut dissipatiivisille, jotkut taas esiintyvät molemmissa. Aloitamme tarkastelun konservatiivisista systeemeistä ja siirrymme tämän jälkeen yleisempään käsittelyyn, jossa esitellään myös dissipatiivisille systeemeille ominaisia kaaoksen tunnusmerkkejä.

8.1 Periodinen liike

Kahden kappaleen Keplerin ongelma ja harmoninen oskillaattori ovat meille jo tuttuja esimerkkejä periodisesta liikkeestä. Keplerin ongelmassa sekä vaihekulma että kierto-laisen etäisyys voimakeskuksesta ovat periodisia muuttujia. Tässä tapauksessa molemmat periodit ovat yhtä pitkät ja periodin löytämiseksi riittää tarkastella jompaakumpaa muuttujista. Vapausasteita tasoliikkeessä on kaksi ja energia ja liikemäärämomenti ovat systeemin riippumattomat liikevakiot. Ratkaisu on integroitava, joskin elliptinen integraali tuottaa teknisesti hankalia erikoisfunktioita.

Edellisessä luvussa tutustuttiin vaikutus- ja kulmamuuttujiin. Vaikutusmuuttuja $J = \oint p dq$ on liikevakio ja sitä vastaava kanoninen konjugaatti w on ajan lineaarinen funktio $w = \nu t + \beta$. Tarkastellaan konservatiivista systeemiä, jossa on paljon muuttujia q_i, p_i , joiden suhteen liike on rajoitettua. Systeemin Hamiltonin funktio on siten muotoa

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t).$$

Jos nyt H muunnetaan kanonisesti koordinaatteihin Q_i, P_i , joista kaikki Q_i :t ovat syklisiä eli $K = K(P_1, \dots, P_n, t)$, niin edellisen luvun tiedoin Hamiltonin liikeyhtälöt integroituvat ratkaisuihin

$$\begin{aligned} Q_i(t) &= w_i(t) = \nu_i t + \beta_i \\ P_i(t) &= J_i(\alpha). \end{aligned} \tag{8.1}$$

Tässä (β_i, α_i) ovat integrointivakioita ja näistä vakiot α_i systeemin toisistaan riippumattomat liikevakiot, joita on siis yhtä monta kuin systeemissä vapausasteita. Siis jos tällainen kanoninen muunnos on olemassa, systeemi on integroitava.

Olemme jo aiemmin osoittaneet, että harmoninen oskillaattori voidaan muuntaa kanonisiin muuttujiin, jotka ovat muotoa (8.1). Siten myös mikä tahansa periodinen systeemi, jolla on tällaiset kanoniset muuttujat $Q_i(t), P_i(t)$, voidaan muuntaa joukoksi harmonisia oskillaattoreita! Tällaisia systeemejä ovat siis ainakin ne, joiden Hamiltonin prinssi-paalifunktio $S(q, t; \alpha)$ oli täysin separoituva; näillehän todistimme ko. kanonisen muunnoksen olemassaolon luvussa 7. Muunnoksen jälkeen esimerkiksi kahden vapausasteen ($n = 2$) tapauksessa systeemin Hamiltonin funktio on

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{1}{2} m_1 \omega_1^2 q_1^2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{1}{2} m_2 \omega_2^2 q_2^2. \quad (8.2)$$

Tämä kuvaa kahta vapaata harmonista oskillaattoria. Hamiltonin funktio antaa kokonaisenergian

$$H = H_1 + H_2 = E. \quad (8.3)$$

Vaikutusmuuttujien avulla kirjoitettuna H_1 ja H_2 ovat

$$H_1 = \frac{J_1 \omega_1}{2\pi} = E_1; \quad H_2 = \frac{J_2 \omega_2}{2\pi} = E_2. \quad (8.4)$$

Skaalaamalla muuttujat p_i ja q_i sopivasti

$$p_i \rightarrow \frac{p'_i}{\sqrt{2m_i}} \quad \text{ja} \quad q_i \rightarrow q'_i \sqrt{m_i \omega_i^2 / 2} \quad (8.5)$$

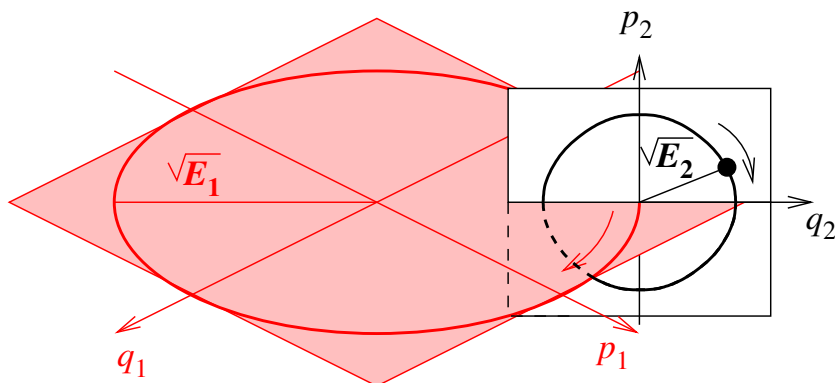
kumpikin Hamiltonin operaattoreista vastaa faasiavaruudessa (q_i, p_i) ympyrää

$$p_i^2 + q_i^2 = E_i. \quad (8.6)$$

Oletetaan, että toisen oskillaattorin taajuus on paljon suurempi kuin toisen ($\omega_2 \gg \omega_1$). Nyt systeemin neliulotteista faasiavaruutta voi tarkastella seuraavasti. Olkoon hitaan oskillaation (ω_1) faasiavaruus (q_1, p_1) taso, jossa systeemi siis kiertää ympyrää, jonka säde on $\sqrt{E_1}$. Faasiavaruus (q_2, p_2) on puolestaan joka paikassa kohtisuorassa tätä ympyrää vastaan oleva taso ja systeemi tekee tässä tasossa ympyräliikettä suuremmalla taajuudella (ω_2) (Kuva 8.1). Yhdistettynä systeemin liike on siis spiraalin muotoinen rata toruksen pinnalla.

Jos taajuuksien suhde on kokonaisluku $\omega_2/\omega_1 = n$, niin rata sulkeutuu jokaisen pidemmän periodin $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$ jälkeen. Jos taajuuksien suhde on rationaaliluku, niin rata edelleen sulkeutuu, kunhan kierroksia on tehty niin monta, että kierrosluku on molempien taajuuksien monikerta. Jos taajuuksien suhde on puolestaan irrationaaliluku, rata ei sulkeudu koskaan itseensä. Tällöin sanotaan, että taajuudet ovat yhteismitattomat. Tällainen rata on yhä rajoitettu toruksen pinnalle muttei suljettu.

Tämä tarkastelu on yleistettävissä useampaan ulottuvuuteen. Jos oskillaattoreita on n kappaletta, niin faasiavaruus on $2n$ -ulotteinen, mutta liike tapahtuu n -ulotteisella toruksen pinnalla.



Kuva 8.1: 4-dimensioinen faasiavaruus.

8.2 KAM-teoreema

Luvussa 7 käsiteltiin ei-integroituvia konservatiivisia systeemejä käyttäen kanonista häiriöteoriaa. Menetelmä toimii, jos häiriö on pieni. Jäljelle jäävät kuitenkin kysymykset, onko näin saatu ratkaisu stabiili ja jäävätkö häiriyt ratkaisut lähelle häiriöttömiä ratkaisuja pitkiksi ajoiksi. Fysikaalinen esimerkki näistä kysymyksistä on, kuinka stabiili aurinkokuntamme on ja kuinka pitkään. Suuret häiriöt tietenkin rikkovat säännöllisen liikkeen. Esimerkiksi liian lähelle Jupiteria joutuvan asteroidin tai komeetan rata saattaa muuttua ratkaisevasti toiseksi.

Yksi kaaosteorian peruspilareista on kuuluisa Kolmogorovin–Arnoldin–Moserin (KAM) teoreema, joka antaa ehdot säännöllisen liikkeen säilymiselle konservatiivisessa systeemissä. Teoreema sanoo seuraavaa:

Oletetaan, että rajoitettua liikettä kuvaavaa integroituvaa Hamiltonin funktiota H_0 häiritään sellaisella häiriöllä ΔH , joka tekee systeemistä integroitumattoman. Oletetaan lisäksi, että (1) **häiriö ΔH on pieni** ja (2) **häiriöttömän systeemin taajuudet ω_i ovat yhteismitattomat**. Tällöin liike rajoittuu n -ulotteiselle torukselle lukuun ottamatta häviävän pientä joukkoa alkuehtoja, joista seuraa polveileva liike energiapinnalla.

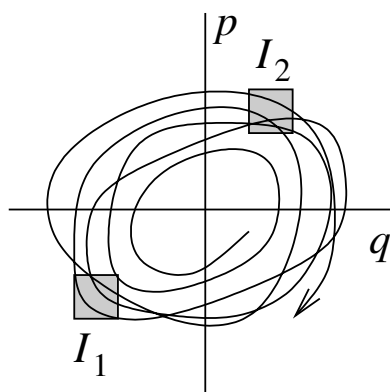
KAM-teoreeman todistus on matemaattisesti vaativa tehtävä ja se löytyy pidemmälle menevistä kaaosteorian oppikirjoista. Teoreema sanoo, että pienet häiriöt eivät aiheuta suuria muutoksia kvasiperiodiseen liikkeeseen. Mikäli KAM-teoreeman oletukset eivät ole voimassa, kaaos on mahdollinen.

Mainittu poikkeus häviävän pienelle joukolle alkuehtoja ei ole käytännössä merkittävä ongelma. Energiapinnalla tarkoitetaan tässä ehdon $E = \text{vakio}$ kiinnittämää $2n - 1$ -ulotteista pintaa $2n$ -ulotteisessa faasiavaruudessa.

8.3 Kaottinen liike ja Ljapunovin eksponentit

Mikäli konservatiivinen systeemi on ei-integroituva ja KAM-teoreeman oletukset eivät ole voimassa, sen liike voi olla kaottista. Kaottisilla systeemeillä liike on epäsäännöllistä ja niiden rata faasiavaruudessa näyttää vaeltelevan satunnaisesti sinne tänne. Täsmällisemmin ilmaistuna kaottiselle liikkeelle ovat ominaisia **sekoittuminen** (mixing), **tiheä kvasiperiodisuus** ja **herkkyys alkuarvoille**.

Tarkastellaan sitä osaa faasiavaruudesta, missä systeemi liikkuu. Olkoot I_1 ja I_2 kaksi mielivaltaisen pientä, mutta äärellistä aluetta tässä osassa faasiavaruutta. Sekoittuminen tarkoittaa, että I_1 :n läpi kulkeva systeemi tulee jossain vaiheessa kulkemaan myös I_2 :n läpi (Kuva 8.2). Radat ovat kvasiperiodisia siinä mielessä, että ne kulkevat toistuvasti ja epäsäännöllisesti koko systeemin kattavassa faasiavaruuden alueessa kuitenkin koskaan sulkeutumatta itseensä ja ilman erityistä taajuutta samalle tienolle saapumisten välillä. Tiheitä radat ovat sikäli, että ne jossain vaiheessa kulkevat mielivaltaisen läheltä jokaista alueen pistettä.



Kuva 8.2: Kaottinen liike.

Herkkyys alkuarvoille tarkoittaa sitä, että pieni muutos alkuehdoissa voi johtaa suureen poikkeamaan joskus myöhemmin. Esimerkiksi pieni muutos voi muuttaa parabolisen Keplerin radan joko suljetuksi ellipsiksi tai äärettömyyteen pakenevaksi hyperbeliksi. Näin esimerkiksi aurinkokunta voi kaapata kaukaa saapuvan komeetan lyhytperiodiseksi muutaman vuoden välein palaavaksi komeetaksi.

KAM-teoreema on voimassa pienille häiriöille konservatiivisissa systeemeissä. Kun häiriöt kasvavat, niiden vaikutus liikkeeseen kasvaa ja lopulta liike voi muuttua kaottiseksi. Vaikka pari ensimmäistä rataa kaottisessa jaksossa vielä voivatkin olla lähellä toisiaan, jokainen uusi kierros joutuu kauemmaksi ja kauemmaksi edellisistä ja erkaantuminen saattaa kiihtyä eksponentiaaliseksi. Tätä erkaantumista kuvataan mitalla λ , jota kutsutaan **Ljapunovin eksponentiksi** (englanninkielisessä kirjallisuudessa nimi translitteroidaan joko Liapunov tai Lyapunov).

Usein kaottisille systeemeille on voimassa seuraava ominaisuus: Jos s_0 on pieni kahden radan etäisyys hetkellä $t = 0$, niin hetkellä t etäisyys on

$$s(t) \sim s_0 e^{\lambda t}. \quad (8.7)$$

Jos $\lambda > 0$, liike on kaoottista ja Ljapunovin eksponentti λ antaa aikaskaalan poikkeaman kasvulle $\tau = 1/\lambda$. Lopulta $s(t)$ kasvaa samaan suuruusluokkaan kuin systeemin käytössä oleva osa koordinaattiavaruudesta eikä voi enää kasvaa sen suuremmaksi. Tämän jälkeen $s(t)$ vaihtelee näennäisen satunnaisesti ajan funktiona. Jos Ljapunovin eksponentti on puolestaan negatiivinen, se antaa mittakaavan nopeudelle, jolla systeemi lähestyy tavallista attraktoria (kappale 8.4).

Planeettakunnan stabiilisuudesta

Tarkastellaan esimerkkinä planeettojen liikettä aurinkokunnassa. Planeettojen toisilleen aiheuttamat häiriöt ovat epälineaarisia ja rikkovat keskeisliikkeessä tärkeän symmetrian eli planeetan liikemäärämomentin säilymisen, joten systeemi ei ole integroitava. Häiriöt ovat kuitenkin yleensä pieniä, joten voisi ajatella, että KAM-teoreema takaa systeemin stabiilisuuden. Näin ei kuitenkaan ole.

Ensinnäkin aurinkokunnan monien taajuuksien välillä saattaa olla resonansseja eli siltä osin KAM-teoreeman oletukset eivät ole välttämättä voimassa. Tästä ovat esimerkiksi taivaankappaleiden pyörimisliikkeen lukkiutuminen rataliikkeeseen. Kuu näyttää aina saman puolen Maahan. Venuksen pyörähdysaika on noin yksi Venuksen vuosi, Merkuriuksen 59 Maan vuorokauden mittainen pyörähdysaika on puolestaan $2/3$ planeetan kiertoajasta Auringon ympäri. Neptunuksen kiertoaika on $2/3$ Pluton kiertoajasta.

Vaikka häiriön (esim. Jupiterin) jakso ei ole resonanssissa tarkasteltavan taivaankappaleen (esim. asteroidin tai komeetan) kanssa, voi kappale kuitenkin jossakin vaiheessa päätyä häiritsijän läheisyyteen. Näin käy ennen pitkää, jos esimerkiksi asteroidin rata leikkaa Jupiterin radan. Tällöin häiriö kappaleen rataa ei enää ole pieni. Niinpä komeettoja ja asteroideja ponnahtelee aurinkokunnassa sinne tänne ja kokonaisuutena systeemi käyttäytyy kaoottisesti.

Koko systeemin stabiilisuudelle kaikkein kriittisimpiä ovat ulommat jättiläisplaneetat. Ne ovat ilmeisesti marginaalisesti stabiileilla radoilla, jonne ne ilmestyivät noin 4,5 Ga (Gigavuotta) sitten. Mikään ei kuitenkaan takaa, että ne pysyisivät siellä ikuisesti. Venus ja Maa vuorovaikuttavat toisiinsa kaoottisesti, mutta niiden periodien muutokset ovat pieniä. Pienemmät planeetat Merkurius ja Mars sekä kääpiöplaneetat kuten Pluto ovat arvatenkin herkimpiä muutoksille.

Ratojen pitkän aikavälin stabiilisuusennusteet ovat tietenkin hyvin epäluotettavia, sillä pieni virhe alkuehdoissa voi johtaa miljardien vuosien aikaskaaloissa täysin vääriin tuloksiin. Joidenkin laskelmien mukaan Merkurius saattaa karata aurinkokunnasta tai mahdollisesti jopa törmätä Venukseen 3,5 Ga:n aikaskaalassa. Tämä vastaisi Ljapunovin eksponenttia $3 \cdot 10^{-10}$ per vuosi eli tapahtumasarjan ei vielä tarvitse olla havaittavissa. Pluto puolestaan näyttää olevan kaoottisella mutta rajoitetulla radalla, jonka dynamiikka säätelee Neptunus. Pluton perihelihan on Neptunuksen radan sisäpuolella.

8.4 Attraktorit, oudot attraktorit ja fraktaalit

Konservatiiviselle systeemille ominaista on se, että sen valtaaman faasiavaruuden tilavuus pysyy vakiona liikkeen aikana huolimatta siitä, onko liike säännöllistä vai kaoottista. Dissipatiivisissa systeemeissä systeemin valtaama tilavuus kuitenkin pienenee ajan funktiona, ja ne hakeutuvat kohti jonkinlaista attraktoria.

Tutustuimme attraktoreihin lyhyesti jo epälineaaristen oskillaattoreiden yhteydessä luvussa 4, jossa tarkasteltiin mm. van der Polin oskillaattoria. Siinä oli kyse oskillaattorista, jonka värähtely ei ala stabiililta faasiavaruuden radalta, mutta hakeutuu sellaista kohti. Tällöin voi olla kyseessä **kiintopiste** (fixed point) tai **rajasykli** (limit cycle). Nämä ovat esimerkkejä attraktoreista.

Attraktorin dimensio voi olla 0, jolloin kyseessä on siis faasiavaruuden kiintopiste, johon systeemi hakeutuu. Jos dimensio on 1, kyseessä on rajasykli. 2-ulotteinen attraktori voisi olla esimerkiksi toruksen pinta ja niin edelleen. Sitten on olemassa vielä nk. **outoja attraktoreita**. Ne liittyvät kaoottisiin ilmiöihin ja muodostuvat eri tavoin faasiavaruuden levinneistä pisteistä. Oudoilla attraktorijoukoilla ei ole klassista dimensiota vaan niiden dimensiot ovat **fraktaalisia**.

Vaimennettu lineaarinen oskillaattori on esimerkki systeemistä, jonka attraktori on piste. Lopulta heiluri hakeutuu lepotilaansa.

Tarkastellaan sitten luvussa 4 esiteltyä van der Polin oskillaattoria ja kirjoitetaan sen differentiaaliyhtälö dimensiottomassa muodossa ($x_0 \rightarrow 1$, $m \rightarrow 1$, $\omega_0 \rightarrow 1$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \epsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = F \cos \omega_D t, \quad (8.8)$$

missä F ja ω_D ovat pakkovoiman amplitudi ja taajuus. Tätä yhtälöä käytetään kuvailemaan erilaisia mekaanisia ja sähköisiä systeemejä ja onpa sitä sovellettu mm. sydämen rytmihäiriöiden tutkimiseen.

Jos $\epsilon = 0$, kyseessä on pakotettu harmoninen oskillaattori, jonka ominaistajuus (ja resonanssitaajuus) on 1 ($= \omega_0$) ja pakkovoiman taajuus ω_D . Koska systeemissä ei ole vaimennusta, pakkovoima syöttää siihen jatkuvasti lisää energiaa sitä tehokkaammin mitä lähempänä voiman taajuus on oskillaattorin resonanssitaajuutta.

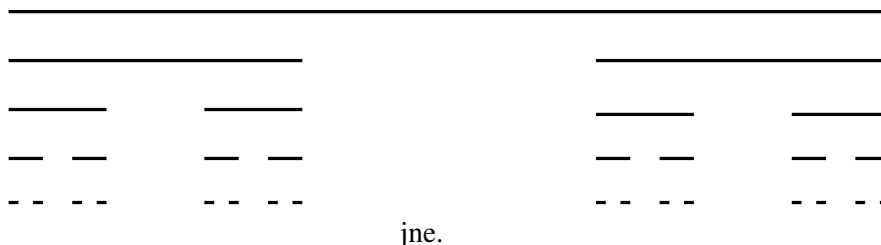
Jos otetaan mukaan pieni vaimennustermi $\epsilon(1-x^2) dx/dt$ mutta asetetaan $F = 0$, niin liike faasiavaruudessa ajautuu kohti rajasykliä, joka on ensimmäisessä approksimaatiossa 2-säteinen ympyrä, kuten luvussa 4 todettiin. Tällöin vaimennus on positiivista, kun $|x| > 1$, ja negatiivista, kun $|x| < 1$, mutta sen suuruus yhden kierroksen aikana on keskimäärin nolla.

Jos ϵ on riittävän iso, vaimennustermi kasvaa samaan suuruusluokkaan muiden termien kanssa. Tällöinkin liike faasiavaruudessa lähenee rajasykliä joko sisään tai ulospäin, mutta sykli itsessään vääristyy ympyrämuodostaan. Suuren vaimennuksen tapauksessa oskillaation muoto (x, t) avaruudessa alkaa poiketa sinikäyrästä ja deformatua kohti

kanttialtoa. (Internetistä löytyy runsaasti kuvia van der Polin oskillaattorin radasta faasiavaruudessa erilaisissa tilanteissa)

Mikäli van der Polin oskillaattorissa on riittävän iso vaimennus ja sopivasti valittu pakkovoima, sen liike voi muuttua epäsäännölliseksi siten, että liike ei hakeudukaan yksinkertaiselle käyrälle faasiavaruudessa. Oudot attraktorit ovat otuksia, joita voidaan kuvailla käyttäen **fraktaaleja**. Matematiikassa tällaisia joukkoja on tutkittu modernin joukko-opin kehityksen alkua ajoista 1800–1900-lukujen taitteesta alkaen, mutta varsinaisesti fraktaalit tulivat kuuluisiksi *Benoit Mandelbrotin* tutkimusten myötä 1970-luvun puolivälin jälkeen. Tuskinpa kukaan matematiikasta, fysiikasta tai tietokonegrafikasta kiinnostunut on onnistunut välttymään näkemästä yksikertaisten algoritmien tuottamia fraktaalisia kuvioita, joiden yksi perusominaisuus on **itsesimilaarisuus**. Fraktaali näyttää olennaisilta osiltaan samanlaiselta mentäessä yhä syvemmälle ja syvemmälle systeemin hienorakenteeseen.

Yksinkertainen esimerkki fraktaalisen pistejoukon rakentamiseksi on nk. **Cantorin joukko** (Kuva 8.3). Otetaan yhden pituusyksikön mittainen jana. Poistetaan siitä keskimäinen kolmasosa. Tämän jälkeen poistetaan jäljellä olevien janojen keskimäiset kolmasosat ja jatketaan näin loputtomiin. Äärettömällä rajalla jäljellä on pistejoukko, jonka elementtien etäisyyksillä on tiettyjä matemaattisesti mielenkiintoisia ominaisuuksia. Systemi on sikäli itsesimilaarinen, että tarkasteltaessa sitä konstruktion missä tahansa vaiheessa se näyttää samalta. Mutta mikä on tällaisen pistejoukon dimensio? Jananpätkät ovat varmasti yksiulotteisia ($d = 1$) ja pisteet nollaulotteisia ($d = 0$). Näitä kutsutaan **euklidisiksi dimensioiksi** d_E , mutta kumpaan luokkaan Cantorin joukko kuuluu?



Kuva 8.3: Cantorin joukko.

Lähdetään etsimään vastausta tavallisen karteesisen tai euklidisen avaruuden dimensioista. Yksiulotteinen jana, jonka pituus on a_0 voidaan jakaa moneen yhtä pitkään pätkään $a \ll a_0$. Kaksiulotteinen neliö, jonka sivu on a_0 , voidaan jakaa yhtä suuriin neliöihin, joiden sivut ovat $a \ll a_0$, samoin kuutio kolmessa ulottuvuudessa ja niin edelleen korkeampiulotteisiin avaruuksiin. Kaikissa näissä tapauksissa saatujen uusien osasten lukumäärä on

$$N(a) = (a_0/a)^d, \quad (8.9)$$

missä d on avaruuden dimensio $d = 1, 2, 3, \dots$. Tekemällä kyseinen jako ja laskemalla

palikat voidaan d määrätä lausekkeesta

$$d = \frac{\ln N(a)}{\ln(a_0/a)}. \quad (8.10)$$

Tätä menetelmää voidaan soveltaa myös patologisemmalla tavalla tehtyihin jakoihin kuten edellä määritellyn Cantorin joukkoon. Näin määriteltyä dimensiota kutsutaan matematiikassa **Hausdorffin dimensioksi** tai **fraktaaliseksi dimensioksi** d_F .

Ennen kuin lasketaan Cantorin joukon fraktaalinen dimensio, otetaan käyttöön vielä kolmaskin dimensio, jota kutsutaan **topologiseksi dimensioksi** d_T . Cantorin joukko muodostuu irrallisista pisteistä, joten sen topologinen dimensio on $d_T = 0$. Tarkastellaan Cantorin joukon konstruktiota, kun aluksi a_0 :n mittaista janaa on pätkitty n kertaa. Tällöin viivanpätkien pituus on $a = a_0/3^n$ ja niitä on kertynyt $N(a) = 2^n$ kappaletta. Siispä Cantorin joukon fraktaalidimensioksi tulee

$$d_F = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,6309\dots \quad (8.11)$$

Fraktaalidimensio on siis joukon topologisen ja euklidisen dimension välissä

$$d_T < d_F < d_E. \quad (8.12)$$

Toinen esimerkki yksinkertaisesta fraktaalikonstruktioista on **Sierpinskiin matto**. Se konstruoidaan jakamalla neliö yhdeksään yhtä suureen osaneliöön ja poistamalla niistä keskimäinen. Sama prosessi tehdään jokaiselle jäljellä olevalle neliölle ja niin edelleen jälleen loputtomiin. Alkuperäisen objektin euklidinen dimensio on 2. Lopputulos on puolestaan äärettömän ohuiden janojen verkosto, jonka topologinen dimensio on 1. Alkuperäinen pinta-ala on $A_0 = a_0^2$. Ensimmäisen jaon jälkeen neliöiden pinta-alat ovat $A = (a_0/3)^2$. n :nnen jaon jälkeen neliön sivun pituus on $a = a_03^{-n}$. Koska jokaisen yksittäisen neliön jaon jälkeen on poistettu yksi neliö, niitä on jäljellä $N(a) = 8^n$. Fraktaalidimensioksi tulee siten

$$d_F = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1,8928\dots, \quad (8.13)$$

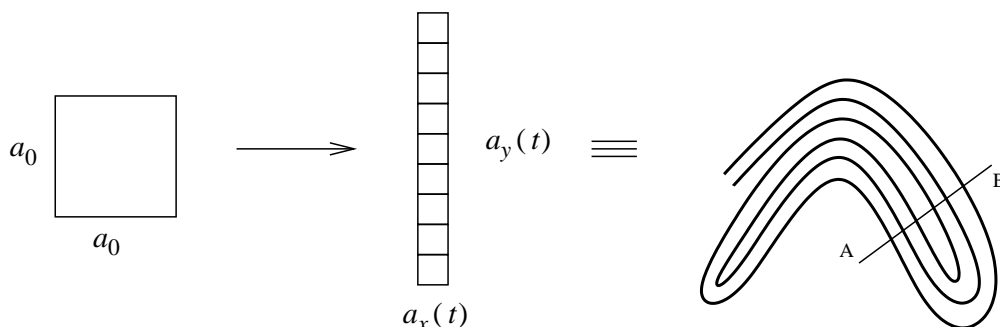
mikä on jälleen topologisen ja euklidisen dimension välissä.

Oudon attraktorin fraktaalidimensio

Yleensä kaoottiset systeemit eivät ole aivan yhtä yksinkertaisia kuin Cantorin joukko tai Sierpinskiin matto eikä outojen attraktorien dimension laskeminen ole mikään triviaali tehtävä. Esimerkiksi pakotetulle vaimennetulle oskillaattorille dimensiot ovat välillä 1,2–1,4 riippuen vaimennuksen tehokkuudesta.

Yksi menetelmä oudon attraktorin fraktaalidimension laskemiseksi perustuu Ljapunovin eksponenttien käyttämiseen. Tarkastellaan esimerkkinä sellaista outoa attraktoria, jonka muodostuminen alkaa a_0 sivuisesta neliöstä. Oletetaan, että se kapenee ja venyy

jatkuvasti ajan mukana siten, että sen pinta-ala kuitenkin pienenee, mikä vastaa dissipatiivista fysikaalista systeemiä. Venyvä attraktori kykenee kiemurtelemaan käytettävissä olevassa faasiavaruuden alueessa (Kuva 8.4) kietoutuen samalla itsensä ympärille. Attraktorin euklidinen dimensio on tietenkin $d_E = 2$ ja venyttyään rajattomasti kyseessä on topologisesti yksiulotteinen käyrä ($d_T = 1$). Kapenevan dimension suunnassa (esim. leikkaus A–B kuvassa 8.4) outo attraktori koostuu kasvavasta määrästä kapenevia nauhoja muistuttaen lopulta Cantorin joukkoa. Venyvän dimension suunnassa attraktori on jatkuva käyrä. Näin ollen koko attraktorin fraktaalidimensio on välillä $1 < d_F < 2$.



Kuva 8.4: Oudon attraktorin fraktaalidimension määrittäminen.

Kuvataan kehitystä leveyssuunnassa (x) Ljapunovin eksponentilla λ_1 ja pituussuunnassa (y) eksponentilla λ_2

$$\begin{aligned} a_x(t) &= a_0 e^{-|\lambda_1|t} \\ a_y(t) &= a_0 e^{\lambda_2 t}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

jolloin pinta-alaksi tulee

$$A(t) = A_0 e^{(\lambda_2 - |\lambda_1|)t}. \quad (8.15)$$

Koska $\lambda_2 > 0$, täytyy olla $|\lambda_1| > \lambda_2$, jotta pinta-ala pienenee ajan myötä. Outoja attraktoreita esiintyy vain dissipatiivisissa systeemeissä.

Oletetaan, että hetkellä t venynyt pinta-ala $A(t)$ pitää sisällään $N(t)$ kappaletta pieniä neliöitä, joiden pinta-alat ovat $\Delta A = a_x^2$ eli

$$\Delta A(t) = a_0^2 e^{-2|\lambda_1|t} \quad (8.16)$$

ja

$$N(t) = \frac{A(t)}{\Delta A(t)} = \frac{a_0^2 e^{(\lambda_2 - |\lambda_1|)t}}{a_0^2 e^{-2|\lambda_1|t}} = e^{(\lambda_2 + |\lambda_1|)t}. \quad (8.17)$$

Analogisesti edellisten esimerkkien mukaan oudon attraktorin fraktaalidimensioksi tulee

$$d_F = \frac{\ln N(t)}{\ln(a_0/a_x(t))} = 1 + \frac{\lambda_2}{|\lambda_1|}. \quad (8.18)$$

Siis jos Ljapunovin eksponentit onnistutaan jotenkin mittaamaan saadaan niiden avulla lasketuksi attraktorin fraktaalidimensio. Tässä tapauksessa siis $|\lambda_1| > \lambda_2$, joten

$$1 < d_F < 2, \quad (8.19)$$

kuten edellä ennustimme. Tässä on yksi syy kutsua outoja attraktoreita oudoiksi. Säännöllisen liikkeen attraktorit ovat joko pisteitä tai säännöllisiä käyriä, mutta kaoottisen liikkeen attraktorit ovat sikäli outoja, että niiden dimensio ei ole kokonaisluku.

8.5 Poincarén kuvaukset

Tarkasteltaessa mekaanisen systeemin aikakehitystä tärkeä tehtävä on pyrkiä määrittämään, missä osassa faasiavaruutta systeemi liikkuu minäkin aikana. Dissipatiivisissa systeemeissä liike hakeutuu lopulta aina attraktorille, vaikka oudollekin. Jaksossa 8.1 tarkasteltu kahden vapaan oskillaattorin periodisen liikkeen kuvailu toruksen pinnalla oli myös varsin yksinkertaista. Entäpä liikkeen liikkeen havainnollistaminen kaoottisille konservatiivisille systeemeille? Jos oskillaattorit kytkeytyvät toisiinsa vaikkapa muotoa $q_1^2 q_2$ olevalla termillä, liikkeestä tulee hyvin monimutkaista neliulotteisessa faasiavaruudessa. Liikkeestä voi kuitenkin saada olennaista tietoa keräämällä siitä näytteitä jollain säännöllisellä tavalla. Tämä on usein tapana tehdä keräämällä näytteet jollakin faasiavaruuden leikkauspinnalla.

Kun kytketyn kaksoisoskillaattorin kokonaisenergia E on kiinnitetty, ongelman dimensio pienenee yhdellä, tässä tapauksessa kolmeksi. Liike rajoittuu siis neliulotteisen avaruuden kolmiulotteiselle energiapinnalle. Tämäkään ei vielä ole havainnollinen tarkastelutapa. Käytännöllisempää on tarkastella tämän energiapinnan kaksiulotteista leikkausta. Tällaista leikkausta kutsutaan **Poincarén leikkaukseksi** ja liikettä kuvaillaan määräämällä pisteet, joissa radat kulkevat tämän leikkauksen läpi. Käytännöllisintä on valita leikkaukseksi joko $p_1 q_1$ - tai $p_2 q_2$ -taso. Liikkeen kuvaamista näiden pisteiden avulla kutsutaan **Poincarén kuvaukseksi**.

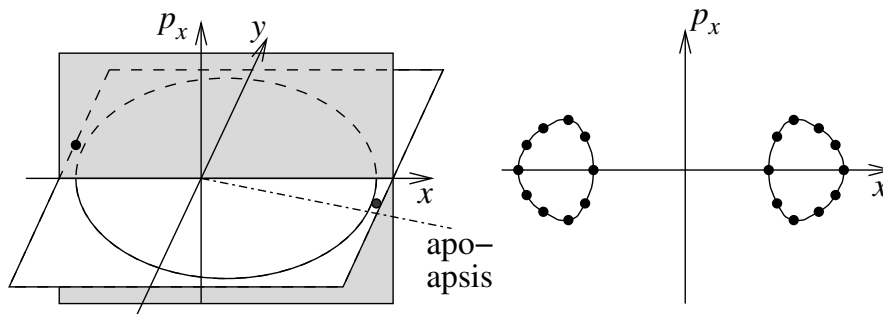
Prekessoiva ellipsi

Tarkastellaan esimerkkinä Poincarén kuvauksista rajoitettua Keplerin liikettä ($E < 0$), jossa ellipsin isoakseli prekessoi. Käytetään karteesisia koordinaatteja ($x, p_x = m\dot{x}, y, p_y = m\dot{y}$). Energia on säilyvä suure ja sen lauseke on

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{k}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{k}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Olkoon radan alkuperäinen apsidiviiva x -akselilla. Tehdään Poincarén leikkaus siten, että asetetaan ratatasoa vastaan kohtisuoraan taso $y = 0$ ja olkoon tason pystysuora

akseli p_x -akseli. Poincarén kuvaus tehdään merkitsemällä tälle tasolle aina piste, kun massapiste kulkee x -akselin läpi. Pisteen x -koordinaatiksi tulee x -akselin leikkauspiste ja p_x -koordinaatiksi sen hetkinen $p_x = m\dot{x}$ (Kuva 8.5).



Kuva 8.5: Prekessoiva ellipsi ja sen Poincarén kuvaus.

Mikäli kyseessä olisi häiriötön Keplerin rata, kuvaukseksi tulisi vain kaksi pistettä, sillä $p_x = m\dot{x}$ olisi x -akselilla aina nolla (apsidiviiva x -akselin suuntainen) ja rata menisi yhdessä pisteessä leikkauksen läpi yhteen suuntaan ja toisessa toiseen. Kun otetaan huomioon prekessoinnin aiheuttava häiriö, tulevat leikkauspisteet kahdelle suljetulle silmukalle (Kuva 8.5). Mikäli prekessiotaaajuus ja kiertoaika eivät ole yhteismitalliset, täyttyy silmukka ajan mittaan tiheästi leikkauspisteistä.

Poincarén leikkauksista on visuaalista hyötyä ainoastaan kaksiulotteisissa konservatiivisissa systeemeissä. Jos systeemillä on useampia vapausasteita, sen visualisointi on perin juurin hankalaa. Tarkastellaan seuraavaksi Poincarén kuvauksien käyttöä epälineaarissa kaksiulotteisissa systeemeissä.

8.6 Hénonin ja Heilesin Hamiltonin funktio

Hénon ja Heiles tutkivat 1960-luvun lopulla tähtien liikettä galaksin keskuksen ympäri. Tässäkin tapauksessa on kaksi luonnollista liikevakiota, liikemäärämomentti ja energia. Ongelman ratkaiseminen käyttäen galaksin oikeaa potentiaalia on käytännössä mahdotonta. Hénon ja Heiles yksinkertaistivat tilannetta tarkastelemalla liikettä (x, y) -tasossa ja käyttivät keinotekoisia potentiaalia $U(x, y)$, joka valittiin kuvaamaan ongelman yleisiä ominaisuuksia. Tämä johti Hamiltonin funktioon

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \lambda(x^2y - \frac{1}{3}y^3), \quad (8.21)$$

missä λ on pieni kerroin ja termi, jota sillä kerrotaan, voidaan ajatella häiriönä, joka tekee integroituvasta Hamiltonin funktiosta integroitumattoman. Kirjoitettuna napakoor-

dinaateissa Hamiltonin funktio näyttää vähän yksinkertaisemmalta

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kr^2 + \frac{1}{3}\lambda r^3 \sin 3\theta. \quad (8.22)$$

Tässä tapauksessa on siis kyse potentiaalista, joka riippuu sekä etäisyydestä että suunnasta.

Ongelmaa on arvatunkin tarkasteltava tietokonelaskuilla, joten suureet on normitettava dimensiottomiksi. Valitsemalla yksiköt siten, että $k = \lambda = 1$, systeemin (dimensioton) energia voidaan kirjoittaa muodossa

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{3}y^3. \quad (8.23)$$

Liikkeyhtälöt saa joko Lagrangen tai Hamiltonin yhtälöistä ja ne tulevat muotoon

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x - 2xy \\ \ddot{y} &= -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Tämä on kytketty epälineaarinen yhtälöryhmä, jolla ei ole ratkaisua suljetussa muodossa.

Tarkastelemalla potentiaalifunktiota

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3 \sin 3\theta \quad (8.25)$$

nähdään, että annetulle potentiaalienergialle $U(r, \theta)$ saavutta r maksiminsa, kun $\sin 3\theta = -1$, ja miniminsä, kun $\sin 3\theta = +1$.

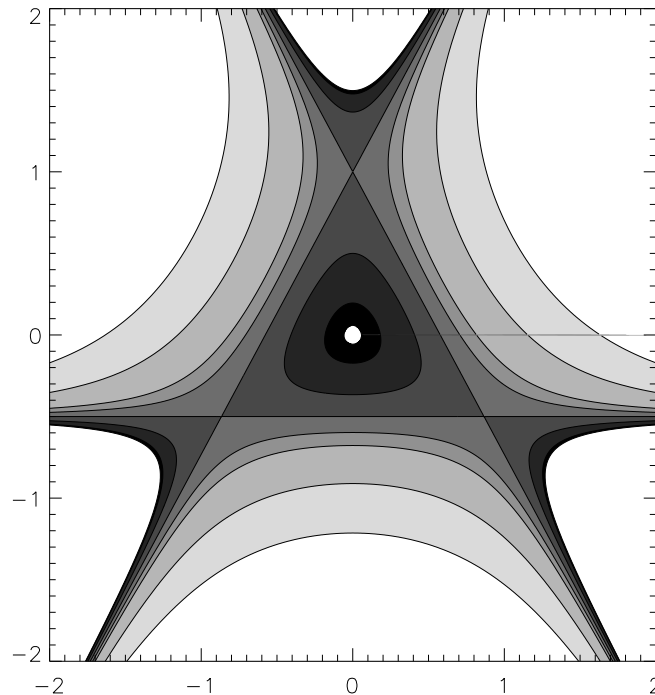
Nyt voidaan piirtää tasapotentiaalikäyrät (x, y) -tasoon (Kuva 8.6). Tällöin energia $E = 1/6$ muodostaa rajatapauksen. Sitä vastaava käyrä on tasasivuinen kolmion, jonka kärjet ovat suunnissa $\theta = 90^\circ$ (y -akselin suunta), $\theta = 210^\circ$ ja $\theta = 330^\circ$. Energioille $E < 1/6$ käyrät ovat kolmion sisällä. Ne ovat suljettuja ja niiden kulmat pyörivät pienenevän energian mukana. Kun $E \ll 1/6$, vuorovaikutustermi x^2y on merkityksettömän pieni ja käyrät ovat lähes ympyröitä origon ympäri. Kolmion sisällä on siis potentiaali-kuoppa, jossa tarkasteltavat kappaleet, tässä tapauksessa tähdet, liikkuvat. Kolmion ulkopuolella tasaenergiakäyrät ovat avoimia ja tähdet pääsevät pakenemaan galaksista.

Tarkastellaan sitten kokonaisenergioita $E < 1/6$. Nyt täytyy olla

$$\begin{aligned} U(x, y) &\leq E \\ \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 &\leq E. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Tästä seuraa, että jokainen rata, joka alkaa suljetun tasapotentiaalikäyrän $U(x, y) = E$ sisäpuolelta, on loukussa käyrän sisäpuolella. Tehdään sitten Poincarén leikkaus faasiavaruuden (y, \dot{y}) tasossa x -akselia pitkin. Se leikkauksen osa, johon systeemi pääsee, löytyy asettamalla $x = 0$ ja $\dot{x} = 0$, jolloin

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 = E. \quad (8.27)$$

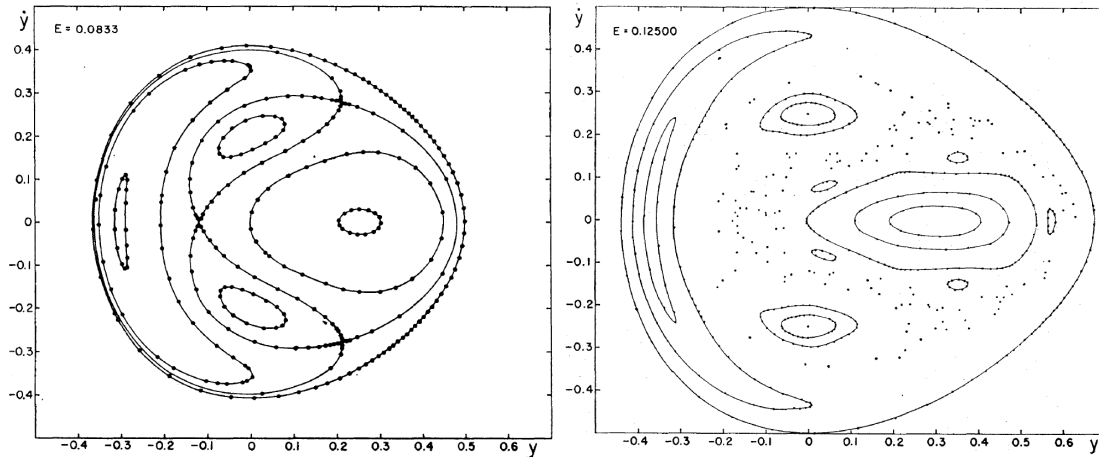


Kuva 8.6: Henonin ja Heilesin potentiaali.

Maksiminopeus saadaan tästä asettamalla $y = 0$ ja y -koordinaatin ääriarvot asettamalla $\dot{y} = 0$.

Tarkastellaan kaaoksen ilmestymistä tähän systeemiin. Tähän liittyviä kuvia löytyy sekä kirjallisuudesta että Internetistä. Kuvassa 8.7 on esimerkkejä parilla energian arvolla. Seuraten Hénonin ja Heilesin esimerkkiä aloitetaan energiasta $E = 1/12$. Tällöin systeemin käytettävissä oleva alue Poincarén leikkauksella jakautuu neljään eri osaan, eräänlaisiin saarekkeisiin, joissa ratkaisut muodostavat suljettuja vääristyneiden ellipsien muotoisia käyriä. Riippuen alkuarvoista jokaisen elliptisen saarekkeen keskellä on yksi kiintopiste, jota kutsutaan elliptiseksi kiintopisteeksi. Saarekkeita erottava käyrä puolestaan leikkaa itseään kolmessa hyperboliseksi nimitetyssä pisteessä. Liike on kuitenkin säännöllistä.

Jos energiaa kasvatetaan arvoon $E = 1/8$, niin leikkaus näyttää jo aivan erilaiselta. Siitä on yhä tunnistettavissa edellä mainitut neljä säännöllisen liikkeen saareketta, joiden keskipisteissä on elliptiset kiintopisteet. Saarekkeita ei kuitenkaan enää erota toisistaan säännöllisen liikkeen määräämä rajakäyrä vaan pisteet ovat levittäytyneet sikin sokin saarekkeiden ympärille samalla, kun saarekkeiden peittämä osa leikkauksesta on selvästi pientynyt. Saarekkeiden välisessä alueessa liike on ilmeisen kaaottista. Kun energiaa



Kuva 8.7: Poincarén kuvaus Hénonin ja Heilesin potentiaalissa liikkuvalla hiukkasella kokonaisenergioilla $E = 1/12$ ja $E = 1/8$. (Henon ja Heiles, 1964: Astron. J. 69, 73).

nostetaan lähemmäs kriittistä arvoa $E = 1/6$, kaaottinen alue kasvaa ja säännöllisen liikkeen saarekkeet pienenevät ja lopulta koko systeemi käyttäytyy kaaottisesti.

Kaaos ilmestyy kuvaan arvoa $E = 1/9$ lähellä olevilla energioilla. Tätä pienemmillä energioilla systeemiä kuvaavat yhtälöt ovat integroituvia kaikilla alkuarvoilla, sen jälkeen tietyillä alkuarvoilla ja energialla $E = 1/6$ integroituvuus on käytännössä kadonnut.

Alun alkaen elliptiset saarekkeet syntyvät pienistä ympyränmuotoisten ratojen häiriöistä jo paljon arvoa $E = 1/12$ pienemmällä energioilla. Systeemin kehittyessä kohti kaaosta kaaottisen alueen sisään alkaa syntyä uusia pieniä säännöllisen liikkeen saarekkeita. Nämä näkyvät parhaiten tarkasteltaessa liikettä (x, y) -tasossa. Saarekkeita ilmenee aina uudelleen mentäessä pienempiin ja pienempiin struktuureihin. Uusien saarekkeiden ilmiasu on kuitenkin mittakaavaa lukuun ottamatta samankaltainen kuin suurempien saarekkeiden. Eli tämä systeemi käyttäytyy tässä mielessä itsesimilaarisesti.

8.7 Bifurkaatiot

Minimivaatimus sille, että ensimmäisen kertaluvun autonominen differentiaaliyhtälöryhmä kuvaa kaaottista liikettä, on, että yhtälöt ovat epälineaarisia ja että niissä on vähintään kolme muuttujaa. Hénonin ja Heilesin Hamiltonin funktio toteuttaa nämä minimikriteerit. Kirjoitetaan sen kaksi toisen kertaluvun liikeyhtälöä neljänä ensimmäisen kertaluvun yhtälönä (vrt. $n:n$ kpl Lagrangen toisen kertaluvun liikeyhtälön muuttamista $2n$:ksi Hamiltonin ensimmäisen kertaluvun yhtälöksi)

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= v_y \\ \frac{dv_x}{dt} &= -x - 2xy \\ \frac{dv_y}{dt} &= -y - x^2 + y^2,\end{aligned}\tag{8.28}$$

joissa on nyt neljä muuttujaa (x, y, v_x, v_y) . Näistä yhtälöistä kaksi on epälineaarisia.

Tarkastellaan toisena esimerkkinä pakotettua vaimennettua harmonista oskillaattoria

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = g \cos(\omega_D t),\tag{8.29}$$

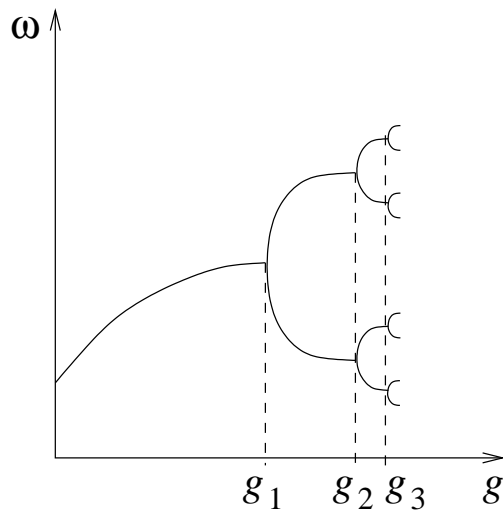
missä pakkovoiman taajuus ω_D ei riipu ajasta. Yhtälössä kulma ja aika on normitettu siten, että siinä ei näy ongelman kannalta epäolennaisia vakioita. q^{-1} on tässä vaimennuskerroin ja g pakkovoiman amplitudi dimensiottomissa yksiköissä. Tämä epälineaarinen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa kolmen ensimmäistä kertalukua olevan yhtälön autonomiseksi ryhmäksi

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \omega_D \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\omega}{q} - \sin\theta + g \cos\varphi,\end{aligned}\tag{8.30}$$

missä φ on pakkovoimatermin vaihe. Tässä on kolme ajasta riippuvaa muuttujaa $\varphi(t)$, $\theta(t)$ ja $\omega(t)$ sekä yksi riippumaton muuttuja t . Viimeinen yhtälöistä on epälineaarinen, joten on odotettavissa, että yhtälöllä voi olla kaottisia ratkaisuja. Tätä odotusta perustelee myös se, että yhtälöissä kytkeytyy kaksi taajuutta, oskillaattorin taajuus ω ja pakkovoiman taajuus ω_D , joten voi syntyä resonansseja. Huomaa, että tässä pakkovoima toi systeemiin tavallaan uuden vapausasteen. Tämä mahdollistaa sen, että systeemin radan projektio tasoon (θ, ω) voi kulkea itsensä yli (vrt. Kuva 8.2), mikä ei kaksidimensioisessa autonomisessa tapauksessa ($\omega_D = 0$) ole mahdollista kuin (yleensä) pienessä määrässä singulaarisia pisteitä.

Valitaan $q = 2$ ja pidetään pakkovoiman amplitudia kuvaavaa g :tä muunneltavana **kontrolliparametrina**. Tarkastellaan systeemiä käyttämällä seuraavanlaista **stroboskoopista kuvausta**: Merkitään muuttujien $\omega(t)$, $\theta(t)$ (huom. $\omega = \dot{\theta}$) arvot pisteellä (θ, ω) -tasoon aina, kun jaksollinen pakkovoima on samassa vaiheessa (esim. $\varphi = 2\pi n$). Tämä vastaa selvästi edellä esitettyä Poincarén kuvausta, kun faasiavaruusmuuttujia on kolme. Kontrolliparametrin arvolla $g = 0.9$ stroboskooppi kuvaus on siisti soikio, joten liike on säännöllistä. Jos valitaan $g = 1.15$, pisteet jakautuvat satunnaisemmin tasoon ja liike on ilmeisen kaottista.

Tutkittaessa, kuinka oskillaattorin taajuus ω riippuu g :n arvosta kiinteällä vaiheella φ , havaitaan kaksi asiaa. Ensinnäkin kaottisen ja säännöllisen liikkeen alueet tulevat ja



Kuva 8.8: Luonnos epälineaarisen oskillaattorin Feigenbaumin kuviosta. Kontrolliparametria g kasvatettaessa systeemi kokee bifurkaatioita, joissa sen taajuuksien määrä kaksinkertaistuu. Kuviossa bifurkaatioiden ympäristöt ovat itsesimilaarisia. Bifurkaatioiden välimatka g :n funktiona pienenee ja lopulta systeemi muuttuu kaottiseksi.

menevät g :n kasvaessa. Toiseksi systeemi kokee taajuuksien **bifurkaatioita**. Jokaisessa bifurkaatiossa systeemin taajuuksien lukumäärä kaksinkertaistuu. Nämä bifurkaatiot tapahtuvat **ei-kaottisen** liikkeen vaiheissa. Tätä on tapana kuvata nk. **Feigenbaumin kuvioiden** avulla (Kuva 8.8). Näistä näkyy bifurkaatioille tyypillinen ilmiö, jonka mukaan bifurkaatiokohtien ympäristöt näyttävät samanlaisilta mentäessä pienempiin ja pienempiin yksityiskohtiin. Kyseessä on samantapainen itsesimilaarinen ominaisuus kuin edellä käsitellyssä Hénonin ja Heilesin esimerkissä. Tutustumme bifurkaatioihin lähemmin seuraavassa logistisen yhtälön avulla.

8.8 Logistinen yhtälö

Edellisten esimerkkien yksityiskohtainen analyysi edellyttää pitkälle vietyjen numeeristen menetelmien käyttöä ja niitä varten on olemassa työkaluja tietokonematematiikan ohjelmistoissa. Tutustutaan tässä lyhyesti hieman yksinkertaisempaan kaottisen dynamiikan malliin nk. **logistiseen yhtälöön**. Sen ratkaisuna on sekä säännöllistä että kaottista liikettä. Vaikka malli onkin riittävän yksinkertainen laskettavaksi taskulaskimella, se ei ole pelkkä lelu vaan sitä on sovellettu lukuisissa erilaisissa yhteyksissä fysiikasta populaatiodynamiikkaan ja taloustieteisiin. Logistinen yhtälö on iteratiivinen kuvaus, joka liittää toisiinsa dynaamisen muuttujan x kaksi peräkkäistä arvoa. Huomatakoon, että esimerkiksi jatkuvien systeemien stroboskooppiset ja Poincarén kuvaukset ovat myös iteratiivisia kuvauksia, joissa liikeyhtälöt määrävät sen lain, jolla leikkauksella (x, v) sijaitseva piste $(x(t_n), v(t_n))$ kuvautuu pisteeksi $(x(t_{n+1}), v(t_{n+1}))$. Nämä liikeyhtälöt täytyy tosin yleensä ratkaista numeerisesti.

Logistinen yhtälö määritellään lausekkeella

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), \quad (8.31)$$

missä a on kontrolliparametri ja x on rajoitettu alueeseen $0 \leq x \leq 1$. Tämä on siis epälineaarinen (x_n^2) diskreetti malli, jolla edellisestä arvosta saadaan iteroiduksi seuraava. Peräkkäiset iteraatiot tuovat x_{n+1} :n lähemmäs ja lähemmäs raja-arvoa x_∞ . Tämä on siis kiintopiste ja se löytyy sijoittamalla logistisessa yhtälössä $x_n = x_{n+1}$, jolloin

$$x_\infty = \frac{a-1}{a}. \quad (8.32)$$

Tämän perusteella kontrolliparametri $a \geq 1$. Koska yhtälön (8.31) mukaan määritelly x_{n+1} on maksimissaan kohdassa $x_n = 1/2$ ja saa tuolloin arvon $a/4$, tarkasteltava kontrolliparametrin alue on $1 \leq a \leq 4$.

Nyt voidaan kysyä, kuinka stabiili kiintopiste on. Tämä tarkoittaa sitä, iteroituuko lähellä kiintopistettä oleva x_{n+1} lähemmäs kiintopistettä kuin mitä x_n oli. Valitaan siis piste läheltä kiintopistettä

$$x_n = \frac{a-1}{a} \pm \delta, \quad (8.33)$$

missä $\delta \ll 1$. δ :n ensimmäisessä kertaluvussa

$$x_{n+1} = (a-1 \pm a\delta) \left(1 - \frac{a-1}{a} \mp \delta\right) = x_\infty \pm (2-a)\delta + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (8.34)$$

Jotta systeemi konvergoituisi kohti kiintopistettä, täytyy edellyttää, että $1 < a < 3$. On triviaali mekaaninen lasku näyttää, että esim. tapauksessa ($a = 2, x_0 = 0.3$) jo neljän iteraation jälkeen suhteellinen poikkeama on alle kymmenestuhannesosa kiintopisteestä $x_\infty = 0.5$.

Lähdetään liikkeelle samasta alkupisteestä ($x_0 = 0.3$), mutta tarkastellaan tilannetta $a = 3.2$. Tällöin liike säilyy yhä säännöllisenä, mutta lopputulos alkaa heilahdella kahden kiintopisteen

$$x_n = 0.51304 ; \quad x_{n+1} = 0.79946$$

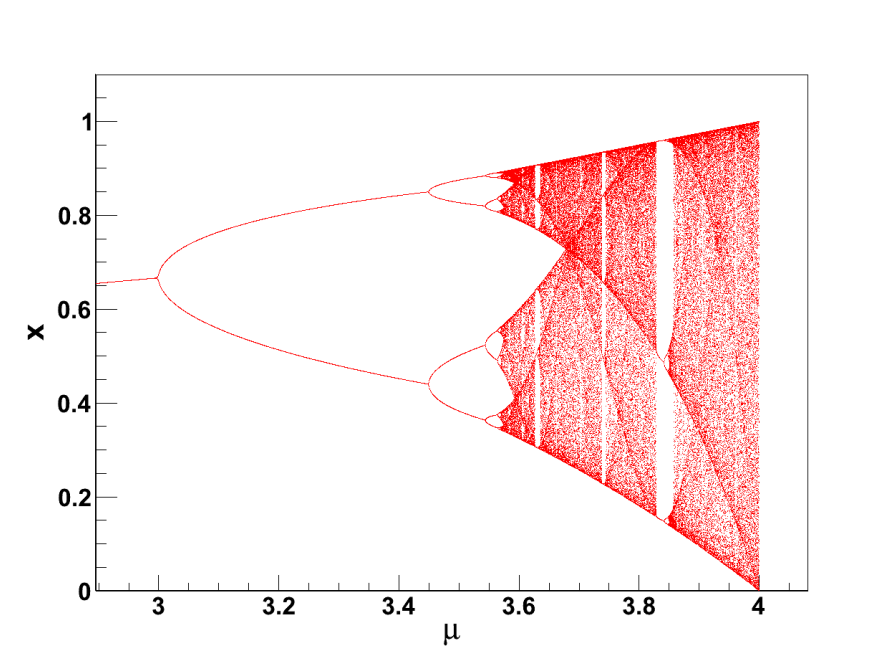
välillä. (Nämä voidaan periaattessa löytää analyttisesti merkitsemällä $x_{n+2} = x_n$ ja ratkaisemalla yhtälön juuret.) Liike siis **bifurkoituu** kohti kahta kiintopistettä. Vastavalla tavalla kuin yhdelle kiintopisteelle, näiden kiintopisteiden stabiilisuus voidaan selvittää. Osoittautuu, että kiintopisteet tulevat epästabiileiksi kontrolliparametrin arvolla $a = 3.5$, missä tapahtuu kaksi bifurkaatiota neljään kiintopisteeseen. Arvolla $a = 3.55$ kiintopisteitä on 8 ja arvolla $a = 3.566$ jo 16 kpl ja niin edelleen. Lopulta kontrolliparametrin arvon $a_\infty = 3.5699456\dots$ jälkeen liike muuttuu kaoottiseksi. Tätä kutsutaan **Feigenbaumin pisteeksi**.

Peräkkäisten bifurkaatioiden etäisyydet konvergoivat kohti lukua δ

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} = 4.6692016\dots \quad (8.35)$$

Tätä lukua kutsutaan **Feigenbaumin luvuksi**. Se on useista kaoottisista systeemeistä löytyvä universaali luku.

Logistisen kuvauksen Feigenbaumin kuviota (Kuva 8.9) tarkastelemalla havaitaan, että kaoottisessakin alueessa on aina tietyillä kontrolliparametrin arvoväleillä säännöllisen liikkeen vyöhykkeitä, joissa liike jälleen bifurkoituu samalla tavoin kuin alueessa $a < a_\infty$. Tämä ominaisuus on arvatenkin sukua Hénonin ja Heilesin potentiaalın ja pakotetun vaimennetun oskillaattorin yhteydessä havaitulle uusien säännöllisen liikkeen alueiden ilmestymiselle kaoottisen liikkeen keskelle.



Kuva 8.9: Logistisen kuvauksen Feigenbaumin kuvio. (Huom: $\mu = a$)

Ljapunovin eksponenttien avulla säännöllinen alue voidaan kuvata yhtälöllä

$$|x_n - x_\infty| = e^{n\lambda} = e^{-n|\lambda|} \quad (8.36)$$

ja kaoottinen liike yhtälöllä

$$|x_n - x'_n| = e^{n\lambda} = e^{n|\lambda|}, \quad (8.37)$$

missä x_0 ja x'_0 vastaavat kahta hieman toisistaan poikkeavaa alkuarvoa. Nyt λ on negatiivinen säännöllisissä alueissa, nolla bifurkaatiokohdissa ja positiivinen kaoottisessa liikkeessä. Mainittakoon, että logistisen yhtälön fraktaalidimensioksi on saatu $d_F = 0.538$.

On ehkä hieman yllättävää, että näennäisen sekavista systeemeistä löytyy sellaisia universaaleja ominaisuuksia, kuten bifurkoituminen Feigenbaumin lukuineen, itsesimilaarisuus jne. Kaoottisuus on siis ainakin tietyn tyyppisten matemaattisten yhtälöjoukkojen syvälinen ominaisuus. Kuinka hyvin se sitten vastaa fyysikaalisen luonnon ilmiöitä,

on toinen ja varmasti vaikeampi kysymys, joka liittyy siihen selittämättömään tosiasiaan, että fysiikka on ylipäänsä kuvattavissa matematiikan kielellä.

Kaaoksesta ja fraktaaleista on kirjoitettu lukemattomia populaarikirjoja ja näihin liittyviä tietokoneohjelmia on saatavana valmiina ja yksinkertaisia malleja voi toki ohjelmoida itsekin. Näihin kannattaa tutustua lisää omin päin. Siitä voi olla sekä hupia että hyötyä.

8.9 Harjoituksia

1. Muunna van der Polin oskillaatorin yhtälö (8.8) n :n autonomisen 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön ryhmäksi ja osoita, että sillä voi olla kaaottisia ratkaisuja.
2. Tarkastellaan **potkittua oskillaattoria**, jota kuvaavat liikeyhtälöt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -2\beta v - \omega_0^2 x + u I(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \end{aligned}$$

missä β , ω_0 , u ja T ovat vakioita, $I(x)$ on dimensioton, mielivaltainen (mutta annettu) x :n funktio ja $\delta(t)$ on Diracin delta-funktio. Pakkovoima kuvaa jaksollisesti (hetkillä nT) toistuvia potkuja, joissa oskillaattori saa "impulssin" $\Delta v = u I(x)$. Johda systeemille seuraava stroboskooppinen kuvaus:

$$x_{n+1} = ECx_n + \frac{ES}{\omega_0} v_n \quad (8.38)$$

$$v_{n+1} = -ES\omega_0 x_n + ECv_n + u I(x_{n+1}), \quad (8.39)$$

missä $E = e^{-\beta T}$, $S = \sin \omega_0 T$ ja $C = \cos \omega_0 T$. Tässä $x_n \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} x(nT + \delta t)$ ja $v_n \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0^+} v(nT + \delta t)$ ovat välittömästi n :nnen potkun jälkeen mitatut paikka ja nopeus.

3. Tutkitaan tehtävän 2 potkittua oskillaattoria faasitasossa (x_n, v_n) , kun $\omega_0 = \pi/2T$ ja $u = 1$ (nopeuden yksikkö). Skaalataan muuttuja $Ev_n \rightarrow v_n$ ja valitaan $E I(x) \equiv f(x) = 1 - ax^2$.

- (a) Osoita, että kuvaus on nyt muotoa

$$x_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = -E^2 x_n + f(v_n).$$

Mikä kuvaus tästä saadaan erittäin suuren vaimennuksen rajalla, $E \rightarrow 0$?

- (b) Etsi kuvauksen kiintopisteet eli ne pisteet (2 kpl), joille $x_{n+1} = x_n$ ja $v_{n+1} = v_n$.

4. Tämä tehtävä kannattaa tehdä jollain sopivalla tietokonetyökalulla kuten Matlab, Mathematica tai Maple.

E. N. Lorenzin klassinen malli ilmakehän liikkeelle oli:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) ; \frac{dy}{dt} = rx - y - xz ; \frac{dz}{dt} = xy - bz ,$$

missä σ , r ja b ovat positiivisia vakioita ja x , y ja z reaalisia. Lorenz asetti fysi-
kaalisin perustein $\sigma = 10$ ja $b = 8/3$ ja vaihteli parametria r arvosta 0 ylöspäin.
Olkoot koordinaattien alkuarvot $x(0) = 2$, $y(0) = 5$ ja $z(0) = 5$. Tutki liikkeen
käytöstä kun

- (a) $r = 0$, 10 ja 20 aikavälillä $0 \leq t < 20$
(b) $r = 28$, $0 \leq t < 20$, missä kaotallinen käyttäytyminen alkaa, kun $t \approx 7$.

Tutki molemmissa tapauksissa ratoja käyttäen joko 3-ulotteisia koordinaattien
 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ kuvaajia eri aika-askelilla.

5. Tutkitaan logistisen kuvauksen

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

ensimmäistä bifurkaatiota. Kirjoita yhdistetyn kuvauksen $x_{n+2}(x_n)$ lauseke ja et-
si kuvauksen kiintopisteet. (Muista, että logistisen kuvauksen kiintopiste on myös
yhdistetyn kuvauksen kiintopiste.) Tutki kiintopisteiden stabiilisuutta a :n funktio-
na.

6. Tarkastellaan pientä massiivista kappaletta, joka liukuu kitkatta ympyrän (säde a)
muotoisella raiteella. Raide pyörii ympyrän halkaisijan suuntaisen akselin ympäri
vakiokulmanopeudella ω . Akseli on pystyasennossa gravitaatiokentässä g . Kappa-
leen liikettä raiteella voidaan kuvata liikeyhtälöllä

$$a\ddot{\theta} = -g \sin \theta + a\omega^2 \cos \theta \sin \theta,$$

missä (a, θ) on kappaleen paikka raiteella napakoordinaatistossa (origona ympyrän
keskipiste).

- (a) Johda liikeyhtälö Lagrangen formalismilla.
(b) Muunna liikeyhtälö kahden 1. kertaluvun differentiaaliyhtälön ryhmäksi sijoit-
uksella $\phi = \dot{\theta}$.
(c) Etsi systeemin kiintopisteet ja tutki niiden stabiiliutta kulmanopeuden ω
funktiona. (Vihje: tarkastele efektiivisen potentiaalin minimi-/maksimikohtia.)

Hakemisto

- adiabaattinen invariantti, 166
- amplitudiresonanssi, 81
- apoapsis, 21
- aposenri, 21
- apsidiviiva, 31
- attraktori, 95
 - dimensio, 177
 - kiintopiste, 177
 - outo, 95, 177
 - rajasykli, 177
- Bertrandin teoreema, 23
- bifurkaatio, 187
- brachistocrone-ongelma, 57
- Coriolis-voima, 106, 110
- d'Alembert, Jean le Rond, 45
- d'Alembertin periaate, 46
- Debyen potentiaali, 36
- dimensio
 - Euklidinen, 178
 - fraktaalinen, 179
 - Hausdorffin, 179
 - topologinen, 179
- dissipaatio, 52
- Duffingin menetelmä, 96
- efektiivinen potentiaali, 19
- Einsteinin summaussääntö, 121
- ekliptika, 32
- eksentrisyys, 28
- ekvivalenssiperiaate, 3
- elliptinen integraali, 11
- energia
 - kineettinen, 5
 - liike-energia, 5
 - potentiaalienergia, 6
- Euler, Leonhard, 38, 53
- Eulerin
 - kaava, 75
 - kulmat, 130
 - voima, 106
 - yhtälö variaatiolaskennassa, 55
 - yhtälöt hyrrälle, 129
- faasi-integraali, 93
- faasiavaruus, 93
- faasikäyrämenetelmä, 93
- Faradayn laki, 50
- Feigenbaumin
 - kuvio, 187
 - luku, 188
 - piste, 188
- Fermat, Pierre de, 53
- Foucault, Jean Bernard Léon, 115
- Foucault'n heiluri, 113
- fraktaali, 177, 178
 - Cantorin joukko, 178
 - Sierpinskiin matto, 179
- Galilein voima, 106
- Galileo Galilei, 3
- gravitaatiovakio, 24
- Hamilton, Sir William Rowan, 41
- Hamiltonin
 - funktio, 65, 139
 - periaate, 53
 - periaate, modifioitu, 142
 - prinsipaalifunktio, 158
 - vaikutusintegraali, 53, 158
 - yhtälöt, 140

- Hamiltonin–Jacobin yhtälö, 157
 harmoninen oskillaattori, 74
 Herschel, William, 37
 hitausellipsoidi, 125
 hitausmomentti, 123
 hitaustensori, 122
 hitaustulo, 123
 Hooken laki, 22
 hyrrä
 Lagrangen, 133
 pallo, 124
 symmetrinen, 124
 vapaa, 126
 häiriökehitemä, 97

 impulssi, 5
 impulssimomentti, 7
 inkliinaatio, 32
 integroituva systeemi, 171
 itsesimilaarinen, 178

 Jacobin identiteetti, 146
 jousivakio, 85
 jousivakiomatriisi, 85
 jäykkä kappale, 42, 119

 kaaos, 171
 deterministinen, 172
 dissipatiivinen, 177
 fraktaalidimensio, 177
 konservatiivinen, 172
 liikkeen ominaisuudet, 175
 Ljapunovin eksponentti, 175
 outo attraktori, 177
 perhosefekti, 171
 kahden kappaleen ongelma, 15
 kaksoisheiluri, 83
 KAM-teoreema, 174
 kanoninen
 formalismi, 139
 häiriöteoria, 163
 impulssi, 62
 kanoninen muunnos, 148
 generoiva funktio, 149
 identiteettimuunnos, 151
 infinitesimaalinen kontaktimuunnos, 153
 pistemuunnos, 149
 karakteristinen yhtälö, 75
 kartioleikkaukset, 28
 Kepler, Johannes, 23
 Keplerin lait, 23
 keskeisvoima, 16
 keskipakoisvoima, 106
 keskipakopotentialiaali, 18, 109
 ketjukäyrä, 57
 kevättasauspiste, 32
 kiertomatriisi, 131
 kiihtyvyys, 3
 kokonaisenergia, 6
 kokonaisvaikutusala, 35
 kontrolliparametri, 186
 Kroneckerin symboli, 87
 kulmaliikemäärä, 8
 kulmamuuttujat, 161
 kulmanopeusmatriisi, 107

 Lagrange, Joseph-Louis, 41
 Lagrangen
 hyrrä, 133
 kertoajat, 59
 pisteet, 38
 tiheys, 91
 yhtälöt, 47
 Laplace, Pierre Simon, 37
 Laplace–Runge–Lenz-vektori, 30
 Legendren muunnos, 144
 Leibnitz, Gottfried Wilhelm von, 53
 liike-energia, 5
 liikemäärä, 2
 sähkömagneettisen kentän, 63
 liikemäärämomentti, 7
 liikerata
 ellipsi, 21
 hyperbeli, 20
 paraabeli, 20
 ympyrä, 21
 Lindelöf, Lorenz, 53
 logistinen yhtälö, 187

- Lorentzin ja Einsteinin heiluri, 166
 Lorentzin voima, 50
 Lorenz, Edward, 171
 Mandelbrot, Benoit, 178
 massa, 2
 massakeskipiste, 4, 119
 massamatriisi, 85
 matemaattinen heiluri, 9
 Maupertuis, Pierre-Louis Moreau de, 53
 momentti
 vääntömomentti, 8
 voiman, 7
 Newton, Sir Isaac, 2
 Newtonin liikelait, 2
 Newtonin painovoimalaki, 24
 nopeus, 2
 normaalikoordinaatisto, 87
 normaalimoodi, 90
 nousevan solmun pituus, 32
 nutaatio, 135
 ominaisarvoyhtälö, 86
 ominaistaajuus, 86
 ominaisvektori, 86
 painovoima, 24
 pakonopeus, 29
 pallohyrrä, 124
 parametrinen resonanssi, 82
 periapsis, 21
 periheliaika, 32
 perihelin
 argumentti, 32
 kiertymä, 32, 164
 pituus, 32
 perisentri, 21
 permutaatioymboli, 128
 pintalause, 17
 pintanopeus, 17
 Poincaré, Jules Henri, 37, 171
 Poincarén kuvaus, 181
 Poissonin sulut, 145
 potentiaalienergia, 6
 potentiaalifunktio, 6
 prekessio, 126
 pyörimismäärä, 8
 pääakselikoordinaatisto, 124
 päähitausmomentti, 124
 rakettyhtälö, 9
 Rayleigh'n dissipaatiofunktio, 52
 redusoitu massa, 16
 Rutherford, Ernest, 35
 Rutherfordin sironta, 35
 Scheringin potentiaali, 109
 sekundaariyhtälö, 86
 sidos
 holonominen, 43
 reonominen, 43
 skleronominen, 43
 sidosehto, 10, 42
 sidosvoima, 10, 42
 sirontakulma, 34
 sirontapinta-ala, 33
 solmuviiva, 130
 Steinerin sääntö, 125
 stroboskooppinen kuvaus, 186
 Sundman, Karl Frithiof, 37
 superpositioperiaate, 75
 syklinen koordinaatti, 64
 syklodi, 57
 sähkömagneettinen kenttä, 50
 skalaaripotentiaali, 51
 vektoripotentiaali, 51
 säilymlaki
 kokonaisenergian, 6, 65
 liikemäärämomentin, 8, 64
 liikemäärän, 5
 säilymlaki, 64
 troijalaiset asteroidit, 39
 työ, 5
 törmäysparametri, 34
 vaiheavaruus, 93
 vaiheintegraali, 93
 vaikutusala, 33

- vaikutusintegraali, 53
- vaikutusmuuttujat, 160
- vaimennuskerroin, 77
- van der Polin oskillaattori, 94, 177
- vapausaste, 42
- variaatiolaskennan peruslemma, 55
- variaatiolaskenta, 54
- virtuaalinen siirros, 45
- virtuaalinen työ, 46
- voima, 2
 - keskeisvoima, 16
 - kitkavoima, 52
 - konservatiivinen, 6
 - Lorentzin voima, 50
 - painovoima, 24
- voimapari, 128
- värähdysliike
 - alivaimennettu, 76
 - amplitudi, 75
 - epälineaarinen, 92
 - harmoninen oskillaattori, 74
 - kriittinen vaimennus, 77
 - kvasiharmoninen, 94
 - pakkovoima, 77
 - tasapainoasema, 73
 - vaihe, 75
 - ylivaimennettu, 77
- yleistetty voima, 46
- yleistetyt koordinaatit, 43
- Yukawan potentiaali, 36