



HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Kehittämistutkimus: Lukion pitkän matematiikan valinnainen kurssi rahapelaamisen matematiikasta

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma
Maisterintutkielma
Huhtikuu 2021
Matias Malmi

Ohjaaja: Matti Pauna

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen		Laitos - Institution - Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä - Författare - Author Matias Malmi			
Työn nimi - Arbetets titel - Title Kehittämistutkimus: Lukion pitkän matematiikan valinnainen kurssi rahapelaamisen matematiikasta			
Koulutusohjelma - Utbildningsprogram - Degree programme Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma			
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Maisterintutkielma / Matti Pauna		Aika - Datum - Month and year Huhtikuu 2021	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 51 + 2 liitesivua
Tiivistelmä - Referat - Abstract <p>Tämän tutkimuksen tavoitteena on kehittää lukion pitkän matematiikan valinnainen kurssi, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka. Tutkimuksessa haluttiin saada vastauksia siihen, että onko tällainen kurssi tarpeellinen, mitä tällaisen kurssin suunnittelussa pitää ottaa huomioon ja soveltuuko tällainen kurssi lukion pitkään matematiikkaan. Kurssin tavoitteena on ennaltaehkäistä ja lisätä tietoisuutta nuorten rahapelaamisesta ja tarjota mielekästä matematiikan oppimiskokemusta. Aiemmat tutkimukset ovat osoittaneet, että tällaisen kurssin sisällyttäminen matematiikan opetukseen ei ainoastaan ole mahdollista, mutta sillä on myös positiivisia vaikutuksia nuorten rahapelaamiskäyttäytymistä ajatellen.</p> <p>Kurssin suunnittelu toteutettiin kehittämistutkimuksen avulla. Kurssin teoriapohja kerättiin kahdella teoreettisella ongelma-analyysillä, joista toinen keskittyi matematiikan ja matematiikan opetuksen teoriaan ja toinen rahapelaamisen matematiikkaan. Näiden lisäksi tehtiin empiirinen ongelma-analyysi lukion opetussuunnitelman perusteille 2019, jonka avulla teoriaosuutta rajattiin. Näiden pohjalta kehitettiin tuotos eli rahapelaamisen matematiikan kurssisuunnitelma lukion pitkään matematiikkaan ja yksi esimerkki kurssin oppitunnista. Kehittämisprosessi kuvattiin yksityiskohtaisesti ongelma-analyyseistä tuotoksen kehitykseen.</p> <p>Tutkimuksen tulokseksi saatiin, että tällainen kurssi voisi olla tarpeellinen lisä lukion matematiikan opetukseen. Rahapelaamisen määrä on kasvanut Suomessa 1990-luvulta lähtien tähän päivään asti, mutta sen ehkäisyyn ei ole panostettu tarpeeksi. Koska nuoret ovat kaikista ikäryhmistä alttiimpia rahapeliongelmile, koulu voisi olla juuri oikea paikka missä rahapelaamisen ehkäisyä voitaisiin lisätä. Kurssin suunnittelussa pitäisi kuitenkin olla varovainen siinä, että asian esittää oikealla tavalla, ettei kurssin opetus lisäisi ongelmallista rahapelikäyttäytymistä nuorten keskuudessa ennaltaehkäisemisen sijaan. Kurssi soveltuisi hyvin pitkän matematiikan lukion opetukseen, koska se on suunniteltu mielekästä oppimista ajatellen ja sen matemaattiset aiheet eivät ylitä lukiolaisen ymmärtämisen kapasiteettia, vaan päinvastoin niiden pitäisi tuoda mielenkiintoa matematiikan opiskeluun. Tämän tutkimuksen luettuaan kuka tahansa matematiikan opettaja voi opettaa kurssin rahapelaamisen matematiikasta.</p>			
Avainsanat - Nyckelord - Keywords Kehittämistutkimus, rahapelaaminen, matematiikan opetus, mielekäs oppiminen			
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited Helsinki, E-Thesis			
Muita tietoja - Övriga uppgifter - Additional information			

Sisällys

1 Johdanto	1
2 Kehittämistutkimus	2
2.1 Kehittämistutkimus.....	2
2.2 Tutkimuskysymykset.....	3
3 Teoreettinen ongelma-analyysi I: Matematiikka	4
3.1 Todennäköisyyslaskenta.....	4
3.2 Tilastot.....	5
3.3 Peliteoria.....	6
3.4 Mielekäs oppiminen.....	8
4 Teoreettinen ongelma-analyysi II: Rahapelaaminen	10
4.1 Rahapeliteorian peruseriaatteen.....	10
4.1.1 Päätöksenteko ja hyöty.....	10
4.1.2 Prospektiteoria.....	12
4.1.3 Rahapelaaminen Suomessa.....	13
4.1.4 Rahapelaaminen nuorten keskuudessa.....	14
4.1.5 Rahapelaamisen opettaminen matematiikassa.....	15
4.2 Parrandon periaate.....	16
4.3 Kolikkopelit.....	18
4.4 Noppapelit.....	21
4.5 Korttipelit.....	23
4.6 Blackjack.....	26
4.7 Tilastollinen logiikka ja tilastolliset pelit.....	30
4.8 Muut pelit.....	32
4.9 Harhaluuloja.....	35
5 Empiirinen ongelma-analyysi	37
5.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019: Yleinen osa.....	37
5.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019: Matematiikan osa.....	38
6 Kehittämispöytä	39
7 Kehittämistuotos	41
7.1 Kurssisuunnitelma.....	41
7.2 Esimerkkioppitunti.....	43
8 Jatkokehittäminen	44
9 Johtopäätökset, luotettavuus ja pohdinta	45
LÄHTEET.....	49
LIITTEET.....	52

1 Johdanto

Tämän päivän nuoret kuuluvat ensimmäiseen sukupolveen, joka on kasvatettu ympäristössä, jossa laillinen rahapelaaminen on helposti saatavilla ja sosiaalisesti hyväksyttävää (Jacobs, 2000). Nuoret ovat muita ikäryhmiä alttiimpia rahapeliongelmille ja vaikka koulujen opettajilla ja oppilashuollolla onkin kiinnostusta nuorten rahapelaamisesta, ei sen käsittelyyn ole tarjolla selkeää toimintamallia (Raisamo & Lintonen, 2013). Rahapelaamisen matematiikan opettamista on tutkittu mm. Australiassa ja Yhdysvalloissa positiivisin tuloksin (Peard, 2008; Ethier & Hoppe, 2019; Williams & Connolly, 2006), mutta Suomessa tällaista kurssia ei ole vielä nähty.

Tässä tutkimuksessa kehitetään lukion pitkän matematiikan valinnainen kurssi, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka. Kurssin päätavoitteina on ennaltaehkäistä ja lisätä tietoisuutta nuorten rahapelaamista ja niiden ongelmista sekä samalla tarjota mielekästä matematiikan oppimiskokemusta kurssin muodossa. Rahapelaamisella tarkoitetaan tässä tutkimuksessa sellaisia arpajaisia, joista voi voittaa rahaa, ja sitä ei sovi sekoittaa uhkapelaamiseen, jossa pelin pelaajalla ei ole maksukykyä pelin pelaamiseen. Tutkimuksen tutkimusmenetelmänä käytetään kehittämistutkimusta. Luku 2 sisältää kehittämistutkimuksen teoriaa sekä tutkimuksen kolme tutkimuskysymystä, jotka ohjaavat tutkimusta. Tutkimuskysymykset liittyvät kehitettävän kurssin tarpeellisuuteen, sen kehittämiseen ja sen soveltuvuuteen matematiikan opetuksessa.

Kehittämistutkimukselle ominainen teoreettinen ongelma-analyysi on jaettu tässä tutkimuksessa kahtia Lukuihin 3 ja 4. Luvussa 3 tutkitaan matematiikan ja matematiikan opetuksen teoriaa ja Luvussa 4 keskitytään rahapelaamisen matematiikan teorian tutkimiseen. Näistä teoreettisista ongelma-analyyseistä kertyneen laajan teoriapohjan rajaamisen avuksi käytetään lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 empiiristä ongelma-analyysiä eli tarveanalyysiä Luvussa 5. Luvussa 6 kuvataan yksityiskohtaisesti tutkimuksen kehitysprosessi ongelma-analyyseistä kehittämistuotokseen. Kehittämistuotos eli kurssin suunnitelma ja yksi kurssin esimerkkioppitunti esitellään Luvussa 7. Kurssin jatkekehittämistä pohditaan Luvussa 8 ja tutkimus päättyy Luvun 9 johtopäätöksiin, luotettavuustarkasteluun ja pohdintoihin.

2 Kehittämistutkimus

Kehittämistutkimusta (*design research* tai *design-based research*) alettiin kehittää opetuslalla 90-luvun alkupuolella ja sen käyttö on kasvanut siitä tasaisesti 2000-luvulla. Vaikka kehittämistutkimus onkin varsin nuori tutkimusmenetelmä opetuslalla, se on onnistunut vakiinnuttamaan paikkansa opetuksen tutkimuksessa ja sitä tullaan käyttämään yhä enemmän. (Anderson & Shattuck, 2012)

2.1 Kehittämistutkimus

Kehittämistutkimus on tutkimusmenetelmänä niin monitahoinen, että sille on vaikea esittää yhtä yksiselitteistä määritelmää (Pernaa, 2013). Menetelmän kehittämisen taustalla on ollut opetuksen tutkimukseen kohdistunut kritiikki, jonka mukaan opettajien työtä tukevaa tietoa ei pystytty tuottamaan tutkijoiden toimesta. Tarvittiin siis tutkimusmenetelmä, jonka avulla pystyttiin tuottamaan opettajille käytännönläheistä tietoa opetuksen tueksi ja kehittämään opetusta tutkimuspohjaisesti opetustilanteiden tarpeita varten (Pernaa, 2013).

Edelsonin (2002) mukaan kehittämistutkimuksessa yhdistyy kehittäminen ja tutkiminen syklisessä prosessissa, joka sisältää teoreettisia ja kokeellisia vaiheita. Wangin ja Hannafinin (2005) mielestä kehittämistutkimuksen tavoite on kehittää opetusta todellisissa tilanteissa ja ominaista tutkimukselle on erilaisten asiantuntijoiden hyödyntämistä jatkuvan arvioinnin ja kehittämisen yhteydessä. Kehittämistutkimus pohjautuu teoriaan ja tuottaa myös uutta teoriaa (Barab & Squire, 2004; DiSessa & Cobb, 2004). Toimintatutkimuksesta kehittämistutkimus eroaa juuri siinä, että teorian luomista pidetään kehittämistutkimuksen yhtenä päätavoitteena, kun taas toimintatutkimuksessa teorian luomista ei pidetä niinkään tärkeänä (Pernaa, 2013).

Tämä tutkimus pohjautuu Edelsonin (2002) sykliseen malliin, jonka avulla tavoitellaan vastauksia kolmeen kysymykseen: 1) millaisia tarpeita ja mahdollisuuksia kehittämisellä on (**ongelma-analyysi**), 2) miten kehittämisessä edetään (**kehittämisprosessi**) ja 3) millaiseen tuotokseen (**kehittämistuotos**) kehittäminen johtaa? Edelsonin syklinen malli on valittu siksi, koska ilman syklisyyttä tutkimuksen toteutus ei ole tieteellisesti pätevä tai luotettava (Edelson, 2002). Tutkimus alkaa kehittämistutkimukselle pakollisella ongelma-analyysillä, jolla kartoitetaan

kehittämisen tarpeet, mahdollisuudet ja haasteet. Ongelma-analyysi jakautuu teoreettiseen ongelma-analyysiin ja empiiriseen ongelma-analyysiin eli tarveanalyysiin. Teoreettisella ongelma-analyysillä kartoitetaan aiheen aikaisempaa tutkimustietoa ja pohditaan, mitä olisi tärkeää tutkia aiheesta lisää. Tätä täydennetään empiirisellä ongelma-analyysillä, joka pohjautuu teoreettisessa ongelma-analyysissä havaittuihin tarpeisiin, mahdollisuuksiin ja haasteisiin. Ongelma-analyysin jälkeen siirrytään kehittämissvaiheeseen, joka sisältää tutkimuksen kehittämissprosessin kuvauksen ja kehittämistuotoksen. Lopuksi siirrytään raportointivaiheeseen, joka sisältää tutkimuksen jatkokehittämisen sekä johtopäätösten ja pohdinnan vaiheet. Nämä edellä kuvatut tutkimuksen vaiheet yhdessä muodostavat yhden kehittämissyklin. (Pernaa & Aksela, 2013)

2.2 Tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tavoitteena on suunnitella valinnainen lukion pitkän matematiikan kurssi, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka. Kurssin tarkoituksena on ennaltaehkäistä ja lisätä tietoisuutta nuorten uhka/rahapeli-ongelmista ja samalla tarjota mielekästä tapaa opiskella matematiikkaa.

Tutkimusta ohjasivat seuraavat tutkimuskysymykset:

1. Miksi juuri tällainen kurssi on tarpeellinen?
2. Mitä pitää ottaa huomioon tällaista kurssia suunniteltaessa?
3. Soveltuuko kurssi lukion pitkän matematiikan opetukseen?

Kuten edellisessä kappaleessa mainittiin, tämä tutkimus pohjautuu Edelsonin sykliseen malliin ja kolmeen kysymykseen, joihin kehittämistutkimuksen avulla pyritään saamaan vastaus. Nämä kysymykset liittyvät tutkimuksen kolmeen osa-alueeseen: ongelma-analyysiin, kehittämissprosessiin ja kehittämistuotokseen. On siis luonnollista, että kukin tutkimuskysymyksistä liittyvät yhteen näistä osa-alueista. Ensimmäiseen kysymykseen pyritään vastaamaan ongelma-analyysin avulla, toiseen kysymykseen kehittämissprosessin avulla ja kolmanteen kehittämistuotoksen avulla.

3 Teoreettinen ongelma-analyysi I: Matematiikka

Teoreettinen ongelma-analyysi on jaettu tässä tutkimuksessa kahteen osaan, eli Lukuihin kolme ja neljä. Tässä luvussa tutkitaan teoreettisesti kirjallisuuden pohjalta, minkälaista matematiikan ja matematiikan opetuksen teoriaa tarvitaan rahapelaamisen matematiikkaan liittyvän lukion kurssin suunnittelussa ja opetuksessa. Rahapelaamisen teoriaa tutkitaan tarkemmin Luvussa 4.

Rahapelaamisen matematiikan teoria koostuu todennäköisyyslaskennasta, tilastoista ja peliteoriasta. Tässä luvussa esitellään oleellimmat näihin osa-alueisiin kuuluvat teorit, joista osa on jo tuttuja opiskelijoille aikaisemmista matematiikan kursseista. Lisäksi määritellään mielekkään oppimisen käsite.

3.1 Todennäköisyyslaskenta

Todennäköisyys kuvaa tarkkailtavien tai empiirisistä kokemuksista loogisesti ennustettavien ilmiöiden tai toistuvien tapahtumien yleisyyttä. Tapahtuman todennäköisyyden kuvaaminen vaatii siis joko ajassa tai paikassa havaittujen yhtenäisten havaintojen sarjan tai aikaisempia vastaavia kokemuksia. Tapahtuman todennäköisyys voidaan laskea kaavalla

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n},$$

missä P on tapahtuman todennäköisyys, n yritysten määrä ja n_0 tietyn tapahtuman esiintymisten määrä. (Epstein, 2009)

Seuraavat aksioomat ja korollaarit ovat todennäköisyyslaskennalle olennaisia rahapelaamisen kannalta (Epstein, 2009):

Aksiooma 1: Tapahtuman A todennäköisyys on $0 \leq P(A) \leq 1$.

Aksiooma 2: Kaikkien tapahtumien E todennäköisyys on $P(E) = 1$.

Aksiooma 3: Erillisille tapahtumille pätee

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Korollaari 1: Tapahtumalle A ja sen vastatapahtumalle eli komplementtitapahtumalle A^c pätee $P(A) + P(A^c) = 1$.

Korollaari 2: Mahdottoman tapahtuman O todennäköisyys on $P(O) = 0$.

Korollaari 3: Riippuvaisten tapahtumien yhdistetty todennäköisyys on

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

Korollaari 4: Ehdolliseen todennäköisyyteen liittyvä Bayesin sääntö on

$$P(A_i|X) = \frac{P(A_i)P(X|A_i)}{P(A_1)P(X|A_1) + P(A_2)P(X|A_2) + \dots + P(A_n)P(X|A_n)}, i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Näiden lisäksi olennaisia todennäköisyyyslaskennan käsitteitä ovat permutaatio ja kombinaatio. **Permutaatio** on jono jonkin perusjoukon jokaisesta alkioista tietyssä järjestyksessä (jos perusjoukon alkioista valitaan vain tietty osa, puhutaan **variaatiosta**). **Kombinaatio** taas on annetun joukon osajoukko, jossa on tietty määrä alkioita ilman vaadittua järjestystä. Permutaatio lasketaan kaavalla $p_n^r = n! = \frac{n!}{(n-r)!}$,

variaatio kaavalla $p_n^r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$ ja kombinaatio kaavalla

$$c_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

(Epstein, 2009)

Monia rahapelitilanteita voidaan kuvata **todennäköisyysjakaumien** avulla. Hyödyllisimpiä todennäköisyysjakaumia ovat hypergeometrinen jakauma, binomijakauma, geometrinen jakauma ja Poissonin jakauma (Epstein, 2009).

3.2 Tilastot

Tässä luvussa määritellään tärkeimmät tilastolaskennan käsitteet rahapelaamisen kannalta. Rahapeliin perusarvon laskemisen parametri on **odotusarvo**. Jos satunnaismuuttuja X voi saada arvoja x_1, x_2, \dots, x_n vastaavilla todennäköisyyksillä p_1, p_2, \dots, p_n , niin odotusarvoksi $E(X)$ saadaan

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Toinen tärkeä satunnaismuuttujien arvoja kuvaava parametri on **varianssi**, joka kuvaa arvojen hajontaa. Se voidaan laskea kaavalla

$$\text{Var}(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 p(x_i).$$

Varianssin neliöjuurta kutsutaan **keskihajonnaksi** eli standardipoikkeamaksi:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{E((X - \mu)^2)}.$$

(Epstein, 2009)

Todennäköisyysjakaumille voidaan laskea odotusarvo ja varianssi. Oletetaan tilanne, jossa n kortin pakasta, jossa on n_1 punaista korttia ja $n - n_1$ mustaa korttia, nostetaan r korttia ilman korttien laittamista takaisin pakkaan. Nyt hypergeometrisen jakauman

avulla voidaan laskea nostettujen punaisten korttien odotusarvo $\mu = E(X) = \frac{n_1 r}{n}$ ja varianssi $\sigma^2 = \frac{n_1 r (n - n_1) (n - r)}{n^2 (n - 1)}$. Vastaavasti voidaan laskea binomijakauman odotusarvo $\mu = E(X) = np$ ja varianssi $\sigma^2 = npq$. Poissonin jakauman tietyssä ajassa T esiintymien tapahtumien odotusarvo ja varianssi on $\mu = \sigma^2 = \alpha T$. (Epstein, 2009)

Tšebyšov in epäyhtälön $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ mukaan lähes kaikki todennäköisyysjakauma jakautuu keskiarvon lähelle. Sen sovelluksesta saadaan **suurten lukujen laki**, jonka mukaan saman odotusarvon omaavien satunnaismuuttujien jonon keskiarvo suppenee tietyin edellytyksin kohti niiden odotusarvoa satunnaismuuttujien lukumäärän kasvaessa rajatta. Se ilmaistaan kaavalla

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + \dots + X_n) \rightarrow \mu, \text{ kun } n \rightarrow \infty .$$

(Epstein, 2009)

Todennäköisyysjakaumille voidaan määritellä myös **luottamusväli**. Olkoon X jokin satunnaismuuttuja jollain tunnetulla jakaumalla. Tällöin todennäköisyydellä ξ jonkun otoksen arvio θ osuu kahden tilastollisen arvion θ_1 ja θ_2 väliin, eli $P(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = \xi$. On kuitenkin huomioitava, että θ ei ole satunnainen, vaan jokin tarkka tuntematon luku, kun taas θ_1 ja θ_2 ovat satunnaismuuttujia. Todennäköisyysjakaumien lisäksi laskuissa saatetaan tarvita joitakin **tilastollisia jakaumia**. Näistä hyödyllisimpiä ovat normaalijakauma $X = \frac{r - np}{\sqrt{np(1-p)}}$, χ^2 -jakauma ja Studentin t-jakauma. (Epstein, 2009)

3.3 Peliteoria

Peliteoria on matemaattinen väline ihmisten tai ihmisjoukkojen (**toimijoiden**, kuten armeijat, korporaatit tai Bridge-parit) välisten konfliktien analysoimiseen. Sitä voidaan soveltaa aina, kun ristiriitatilanne voidaan ratkaista älyllisin keinoin. Peliteoriaa voidaan soveltaa esimerkiksi taloustieteen aloilla, sotilaallisissa operaatioissa, psykologiassa, lakitieteissä, biologiassa ja peleissä kuten shakki, Bridge ja pokeri. **Peli** määritellään ristiriitatilanteen kuluksi ja ratkaisemiseksi tiettyjen ennalta määriteltujen sääntöjen ja yleisten sopimusten mukaan. Pelit erottuvat toisistaan toimijoiden lukumäärän, voittajan saaman palkinnon, tarvittavien siirtojen lukumäärän ja käytettävissä olevan informaation mukaan. (Epstein, 2009)

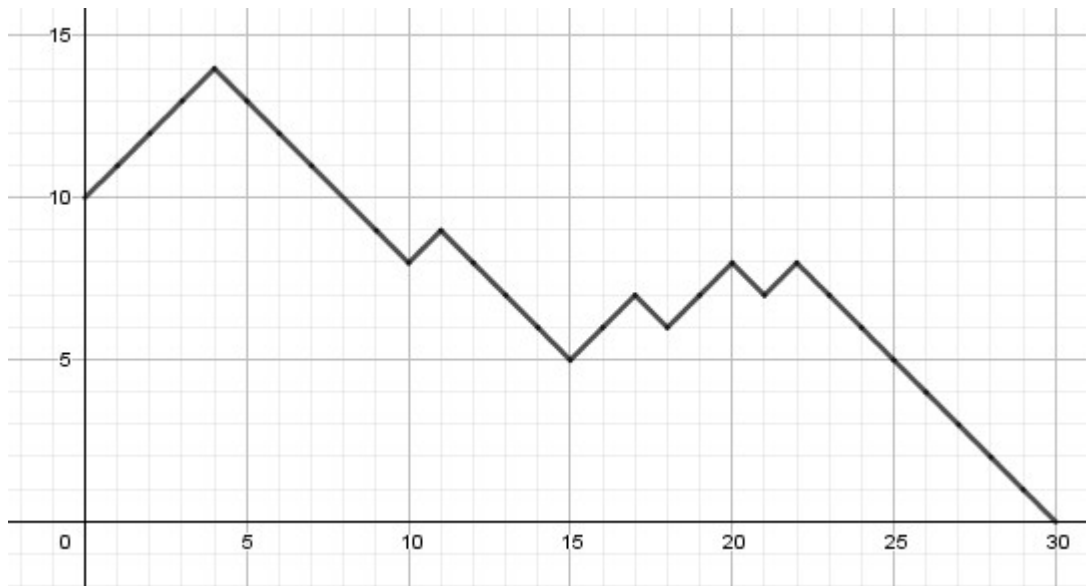
Pelaajat jakautuvat pelissä erillisiin päätöksentekijäyksiköihin eli toimijoihin. Esimerkiksi Bridgessä on 4 pelaajaa mutta 2 toimijaa (vastakkaiset pelaajat muodostavat parin eli yhden toimijan). Oletetaan, että pelin arvo eri toimijoille voidaan mitata ja ilmoittaa kvantitatiivisesti jollain numerolla. Tätä kutsutaan **voitoksi**. Jos voitot jakautuvat ainoastaan n toimijan kesken (eli toimijoiden asettamat panokset eivät häviä mihinkään), peliä kutsutaan **nollasummapeliksi**. Pelit voidaan jakaa äärellisiin ja äärettömiin peleihin. Äärellisessä pelissä on rajattu määrä vaihtoehtoja siirroille, joista jokainen valitaan äärellisestä määrästä vaihtoehtoja. Vastakohta tälle on ääretön peli. Täyden informaation peleissä jokaisen pelaajan siirrot ovat avoimesti nähtävillä hänen vastustajilleen. (Epstein, 2009)

Järjestelmää, jossa jokainen siirto valitaan kaikista mahdollisista siirroista tietyissä tilanteissa tietyin ehdoin, kutsutaan **strategiaksi**. Strategia voi koostua pelaajan omista siirroista (perustuen pelaajan omaan harkintakykyyn, vastustajan strategiaan tai molempiin), lasketuista siirroista (perustuen erilaisten siirtojen todennäköisiin tuloksiin) tai kuten suurimmassa osassa peleistä, molemmista. Jos pelaajalla A on m strategiaa A_1, A_2, \dots, A_m ja pelaajalla B on n strategiaa B_1, B_2, \dots, B_n , peliä kutsutaan $m \times n$ -peliksi. Tällaisessa pelissä kaikkia pelaajan A strategioita verrataan kaikkiin pelaajan B strategioihin ja niiden väliset voitot ilmaistaan **voittomatriisissa**. Optimaalinen strategia voidaan monesti määrittää voittomatriisista minimax-periaatteen avulla, jonka avulla pelaaja saa varmoista voitoista suurimman voiton. (Epstein, 2009)

Suurinta osaa rahapelitilanteista voidaan kuvata binomikokeiden sarjoina, joissa pelaaja joko voittaa yhden yksikön onnistuessaan tai menettää yhden yksikön epäonnistuessaan todennäköisyyksillä p ja $q = 1 - p$. Tätä kutsutaan **satunnaiskuluksi** (*random walk*). Pelaajan pääomaa x kuvataan pisteenä lukusuoralla. Alkuperäisestä pääomasta x_0 muuttuja x liikkuu jokaisella pelillä joko määrän $x_0 + 1$ todennäköisyydellä p tai määrän $x_0 - 1$ todennäköisyydellä q . Epämääräisen määrän pelejä jälkeen satunnaiskulku päättyy joko kohtaan $x = 0$ tai $x = C$, missä C on vastustajan pääoma. (Epstein, 2009)

Esimerkkinä satunnaiskulusta kokeilin heittää noppaa 50 kertaa ja dokumentoida jokaisen heiton tuloksen. Heitoilla 1, 2, 3 voitin yhden yksikön ja heitoilla 4, 5, 6 hävisin yhden yksikön. Oletettu alkuperäinen pääomani oli $x_0 = 10$ yksikköä. Heittojen tulokset olivat järjestyksessä 2, 3, 1, 3, 4, 4, 5, 4, 6, 4, 2, 4, 4, 5, 5, 1, 3, 6, 3, 3, 5, 3, 5, 6, 4, 4, 6,

6, 5, 6. En päässyt pidemmälle, koska pääomani loppui tässä vaiheessa kesken. Tämän satunnaiskulun graafinen esitys (Kuva 1):



Kuva 1. 50 nopanheiton satunnaiskulku (päättynyt 30 heiton jälkeen).

Hävisin siis tässä hypoteettisessa kokeessa kaikki 10 yksikköäni eli satunnaiskulku päättyi kohtaan $x = 0$.

3.4 Mielekäs oppiminen

Monesti uuteen aiheeseen siirryttäessä opettajan ja opiskelijan välille syntyy merkityskuilu, jos opetus aloitetaan vähäisellä aiheeseen johdattelemisella. Tällöin oppijan kokemusmaailma ja matematiikan formaali esitys eivät kohtaa, jolloin oppijalle jää "Miksi tätä opiskellaan?"-mielentila päälle häiritsemään keskittymistä (Koskinen, 2016). Tämän estämiseksi oppimista pyritään muuttamaan mielekkäämmäksi.

Mielekkään oppimisen käsitettä on kuvailtu monella eri tavalla. Brunerin (1974) mukaan opetus on mielekästä silloin, kun opetettava asia on todentuntuista ja mielenkiintoa herättävää. Mielekkäessä opetuksessa aiheiden valinnat ovat opiskelijoille mielenkiintoisia ja opetuksessa painotetaan oppiaineelle oleellisia elementtejä (Wiske, 1998). Matematiikassa oppimisen mielekkyys on erityisen tärkeää, koska käsitteet ovat abstrakteja ja ne irtaantuvat monesti arkikokemuksesta (Leino, 1977).

Koskisen (2016) mukaan systemaattisimmat mielekkään oppimisen teoriat ovat Ausubelin, Galperinin ja Rogersin oppimisen teoriat. Ausubel (1968) painottaa

omakohtaiseen oivaltamiseen liittyvän suuremman motivaation johtavan parempaan oppimiseen ja muistamiseen. Galperin (1957) esittää opetus-oppimisprosessin mallin, jossa uuden asian sisäistäminen tapahtuu käymällä kaikki mallin vaiheet läpi. Malli koostuu seuraavista vaiheista:

1. Orientaatiovaihe: Oppija alkaa muodostamaan kuvaa opettajan selittämästä uudesta aiheesta. Hän ei itse tee vielä mitään, mutta osallistuu aktiivisesti opettajan selitykseen ajattelemalla.
2. Konkreettisen toiminnan vaihe: Oppija tutustuu uuteen asiaan vuorovaikutuksessa opettajan kanssa käyttämällä itse erilaisia materiaaleja.
3. Puhuttu vaihe: Objektien tai materiaalien avulla uusi opittu asia, kuten laskeminen helmitaulun avulla, siirtyy objektien avustamana oppijan puheeseen, eli hän oppii laskemaan ääneen.
4. Sisäisen puheen vaihe: Kun uusi opittu asia on opittu ilmaisemaan ääneen, se siirtyy hiljaiseksi ääneksi oppijan pään sisään, eli sisäiseksi puheeksi.
5. Sisäistynyt vaihe: Opittu asia on sisäistetty, eli oppija pystyy päänsä sisällä kuvittelemaan sekä puhutun että materiaalisen puolen opitusta asiasta.

Rogersin (1969) mukaan mielekäs oppiminen edellyttää oppijalta sisäisen motivaation ylläpitämää pitkäjänteistä sitoutumista työskentelyyn, jota seuraa oppilaan oma arviointiprosessi. Nämä kolme teoriaa yhdessä auttavat muodostamaan kuvan mielekkästä oppimisesta. Koskisen (2016) mielestä tärkeimpiä huomioita mielekkyyden kannalta ovat oppilaan oman käsitteistön varaan rakentuva tulkinta uudesta opitusta asiasta sekä uuden opitun asian kytkeytyminen jo aiemmin opittuun ainekseen, jotka molemmat edellyttävät opettajan ohjauksen tuekseen. Sosiaalisuus, konkreettisuus ja kontekstuaalisuus liittyvät vahvasti mielekkääseen oppimiseen ().

4 Teoreettinen ongelma-analyysi II: Rahapelaaminen

Toisessa teoreettisessa ongelma-analyysissä syvennyttään tarkemmin rahapelaamisen teoriaan ja sen opetukseen matematiikassa. Aluksi määritellään muutamia jokaiselle rahapelille tyypillisiä käsitteitä sekä tutkitaan rahapelaamista nuorten keskuudessa, Suomessa ja matematiikan opetuksessa. Tämän jälkeen selitetään tarkemmin yksi merkittävimmistä hiljattain kehitetyistä peliteorian periaatteista eli Parrandon periaate sekä tutustutaan tarkemmin erilaisiin rahapeleihin. Lopuksi luetellaan muutamia yleisiä psykologisista vaikutteista seuraavia rahapelaamisen harhaluuloja.

4.1 Rahapeliteorian peruseriaatteen

Rahapeli on Suomen arpajaislaissa (1047/2001) määritelty sellaisiksi arpajaisiksi, joissa pelaaja voi voittaa rahaa. **Uhkapeli** määritellään Suomen rikoslain (39/1889) mukaan *“veikkaus-, bingo-, toto- ja vedonlyöntipeliksi, raha- tai tavara-arpajaiseksi ja pelikasinotoiminnaksi sekä muuksi vastaavaksi peliksi tai toiminnaksi, jossa voiton saaminen perustuu kokonaan tai osittain sattumaan taikka peliin tai toimintaan osallistuvista riippumattomiin tapahtumiin ja jossa mahdollinen häviö on ilmeisessä epäsuhteessa ainakin jonkun osallistujan maksukykyyn”*. Tässä tutkimuksessa käytetään arpajaislain mukaista termiä rahapeli, vaikka arkikielessä se sekoittuu monesti nimitykseen uhkapeli. Tässä luvussa määritellään joitakin tärkeitä rahapeliteorian peruseriaatteita, joihin törmätään usein, kun tutkitaan erilaisia rahapelejä tarkemmin. Lisäksi tutkitaan, millaista nuorten ja suomalaisten rahapelaaminen on, ja miten rahapelaamista on aikaisemmin opetettu matematiikan tunneilla.

4.1.1 Päätöksenteko ja hyöty

Rahapelaamisen ydin on päätöksenteko. **Päätöksenteko** koostuu strategian tai peliliikkeen (pelin) valitsemisesta saatavilla olevista strategioista tai peleistä. Päätöksenteossa auttaa neljä hyödyllisyysteorian aksioomia, joita noudattamalla kuka tahansa päätöksentekijä voi teoreettisesti ratkaista minkä tahansa päätöksenteko-ongelman. Näiden selittämisen helpottamista varten käytetään seuraavaa arpajaisen määritelmää ja muutamaa notaatiota. **Arpajainen** (*Lottery*) L muodostuu palkinnoista

A_1, A_2, \dots, A_n vastaavilla todennäköisyyksillä p_1, p_2, \dots, p_n , eli $L = (p_1 A_1; p_2 A_2; \dots; p_n A_n)$. Arpajaisten välisiä etusijasuhteita merkitään seuraavilla notaatioilla: **p**: arpajainen on mieluisampi tai etusijalla toiseen arpajaiseen nähden, **e**: arpajainen on ekvivalentti tai yhtä todennäköinen kuin toinen arpajainen, ja **q**: arpajainen on joko etusijalla tai yhtä todennäköinen kuin toinen arpajainen. Näiden avulla voidaan määrittellä hyödyllisyysteorian neljä aksiomaa:

1. **Aksioma I(a): Täydellinen järjestys:** Olkoon joukko vaihtoehtoja A_1, A_2, \dots, A_n . On olemassa vastaavuus minkä tahansa kahden vaihtoehdon A_i ja A_j välillä: Joko $A_i \mathbf{q} A_j$ tai $A_j \mathbf{q} A_i$ tai molemmat.

Aksioma I(b): Transitiivisuus: Jos $A_i \mathbf{q} A_j$ ja $A_j \mathbf{q} A_k$, niin $A_i \mathbf{q} A_k$.

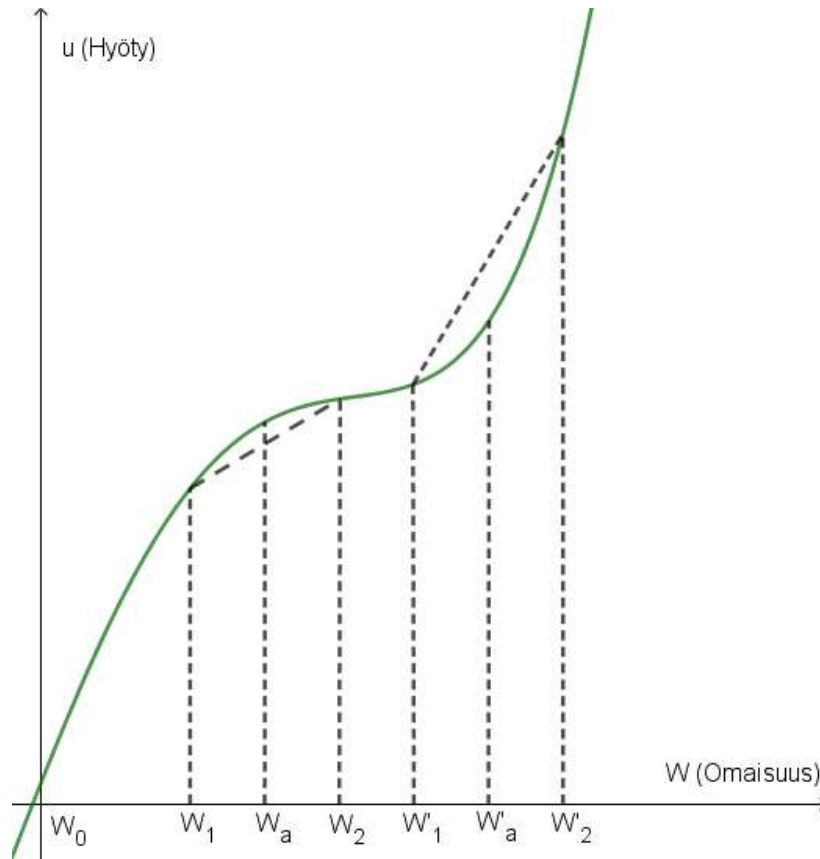
2. **Aksioma II(a): Jatkuvuus:** Jos $A_i \mathbf{p} A_j \mathbf{p} A_k$, on olemassa reaalinen ei-negatiivinen luku $0 < r_j < 1$ siten että palkinto A_j on ekvivalentti sellaisen arpajaisen kanssa, jossa palkinnon A_i saa todennäköisyydellä r_j ja palkinnon A_k saa todennäköisyydellä $1 - r_j$.

Aksioma II(b): Korvattavuus: Mikä tahansa arpajainen, jonka palkinnot on järjestetty $A_i \mathbf{p} A_j \mathbf{p} A_k$, voidaan korvata palkinnolla A_j .

3. **Aksioma III: Monotonisuus:** Arpajainen $[rA_i; (1 - r)A_k] \mathbf{q} [r_j A_i; (1 - r_j)A_k]$ jos ja vain jos $r \geq r_j$. Kahdesta arpajaisesta, jolla on sama lopputulos, suositaan sitä, joka tuottaa suuremman todennäköisyyden ensisijaisen vaihtoehdon voittamiseen.

4. **Aksioma IV: Riippumattomuus:** Jos palkintojen (tai arpajaiskuponkien) A_1, A_2, \dots, A_n ja B_1, B_2, \dots, B_n välillä pätee $A_1 \mathbf{q} B_1, A_2 \mathbf{q} B_2$ jne., niin yhtä suuri mahdollisuus saada palkinto A_1 tai A_2 tai ... tai A_n on mieluisampi verrattuna yhtä suureen mahdollisuuteen saada palkinto B_1 tai B_2 tai ... tai B_n . (Epstein, 2009)

Arpajaisilla on olemassa **hyötyfunktio** u . Jokaiselle arpajaiselle L voidaan määrittää luku $u(L)$ siten, että arvojen $u(L)$ suuruudet ovat arpajaisten etusijasuhteiden mukaisia. Siis $u(L_i) \geq u(L_j)$ jos ja vain jos $L_i \mathbf{q} L_j$. Oletetaan, että peluri on *rationaalinen toimija*, eli hän on looginen, matemaattinen ja johdonmukainen. Ollessaan riskialttiissa tilanteessa hän pyrkii maksimoimaan saamansa hyödyn. Seuraava kuvaaja (Kuva 2) havainnollistaa hyötyfunktioita.

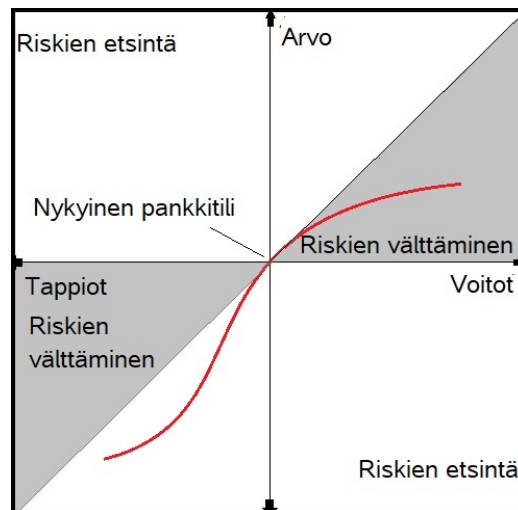


Kuva 2. Hyötyfunktion kuvaaja.

Kuvan 2 vaihtoehdoista a) varma voitto W_a , tai b) arpajainen, jossa on yhtä suuri mahdollisuus voittaa W_2 tai hävitä W_1 , kannattavampi vaihtoehto on varma voitto, koska sen hyötyfunktion arvo on arpajaisen voiton ja tappion hyötyfunktion arvojen muodostaman suoran vastaavaa arvoa korkeammalla. Toisaalta vaihtoehdoista a) varma voitto W'_a , tai b) arpajainen, jossa on yhtä suuri mahdollisuus voittaa W'_2 tai hävitä W'_1 , kannattavampi vaihtoehto on arpajainen. Hyötyfunktion tuntemalla päätöksentekijä voi siis tehdä valistuneita päätöksiä. (Epstein, 2009)

4.1.2 Prospektiteoria

Prospektiteorian on kehittänyt kognitiivinen psykologi Daniel Kahneman ja Amos Tversky (Kahneman & Tversky, 1999). Se kuvaa keinoja, joilla yksilöt arvioivat voittoja ja tappioita. Prospektiteorian arvotusfunktio (Kuva 3) on konkaavi voitoille (riskien välttäminen), konveksinen tappioille (riskien etsiminen) ja jyrkempi tappioille kuin voitoille (tappioiden välttäminen) (Epstein, 2009).



Kuva 3. Prospektiteorian arvotusfunktio.

Neljä peruseriaatetta selittää suuren osan prospektiteoriasta:

1. Ihmiset ovat luonnostaan vähemmän taipuvaisia pelaamaan saamallaan voitoilla kuin tappiolla olevalla pankkitilillä (eli pelaajan rahapelaamiseen tarkoitettu rahamäärä on vähentynyt).
2. Jos ehdotuksen mahdollisia voittoja korostetaan, ihmiset todennäköisemmin hyväksyvät sen; jos identtisen ehdotuksen mahdollisia tappioita korostetaan, ihmiset todennäköisemmin hylkäävät sen.
3. Suurin osa ihmisistä ottaisi ennemmin a) varmat 5000 euroa, kuin b) pelaisivat mahdollisuudesta voittaa 10 000 euroa voittotodennäköisyydellä 0,6 saamatta mitään todennäköisyydellä 0,4 (odotettu voitto 6000 €).
4. Riskien välttäminen/riskien etsiminen: Vaihtoehtoista a) varma 4000 euron tappio, tai b) todennäköisyydellä 0,05 hävitä 100 000 euroa ja todennäköisyydellä 0,95 hävitä 0 euroa (odotettu tappio 5000 €), suurin osa ihmisistä valitsee jälkimmäisen vaihtoehdon. (Epstein, 2009)

4.1.3 Rahapelaaminen Suomessa

Kaikessa rahapelaamisessa on Suomessa 18 vuoden ikäraja (Kinnunen ym., 2019). Veikkaus Oy, Raha-automaattiyhdistys (RAY) ja Fintoto Oy hallitsevat Suomen rahapelijärjestelmää yksinoikeudella (Varvio, 2007). Suomessa rahapelaamisen määrä on kasvanut 1990-luvun alusta asti jatkuvasti (Kuuluvainen ym., 2012). Yksi tähän vaikuttava tekijä on rahapelien markkinointi. Vaikka tiettyjen rahapelien markkinointia tiukennettiin uudistetussa arpajaislaissa vuonna 2010, rahapeliyhtiöt

voivat edelleen kiertää uuden arpajaislain mainontakieltoa mainostamalla kaupallisilla Suomessa näkyvillä TV-kanavilla (esimerkiksi Eurosportilla) ulkomailta käsin (Kuuluvainen ym., 2012).

Suomalaisten suosituimpia rahapelejä ovat Lotto, rahapeliautomaatit sekä raaputusarvat (Kuuluvainen ym., 2012). Vuoden 2019 suomalaisten rahapelaamisesta tehdyssä tutkimuksessa vastaajista 78,4 % oli pelannut jotakin rahapeliä vuoden sisällä, 36,3 % oli pelannut internetissä vuoden sisällä ja 21,1 % kertoi vähintään yhden läheisensä kärsineen ongelmallisesta rahapelaamisesta (Salonen ym., 2020). Peliongelmiin ehkäisyyn ei ole Jaakkolan (2009) mukaan panostettu Suomessa tarpeeksi. Peluuri on tunnetuin peliongelmaisia auttava taho Suomessa (Kuuluvainen ym., 2012).

4.1.4 Rahapelaaminen nuorten keskuudessa

Tämän päivän nuoret on kasvatettu ympäristössä, jossa jopa lapsen kapasiteetilla voidaan ymmärtää rahapelien säännöt ja jossa laillinen rahapelaaminen on helposti saatavilla ja sosiaalisesti hyväksyttävää (Jacobs, 2000). Kinnusen ym., (2019) tutkimuksessa tutkituissa ikäryhmissä (12-18 vuotiaat) poikien rahapelaaminen oli selvästi tyttöjä yleisempää. Varsinkin 16-vuotiaiden poikien rahapelaaminen oli yleistä: lähes kolmannes (28%) oli pelannut rahapelejä puolen vuoden sisään. Poikien osuus korostui myös rahapeliautomaattien pelaamisessa. Lisäksi vastanneista alaikäisistä vain 6 % kertoi pelanneensa Veikkauksen pelisivustolla.

Alaikäisten suojelemiseen rahapelaamiselta ja siitä aiheutuville haitoille edellytetään vankkaa tutkimustietoa ja siihen pohjautuvaa ehkäisevää työtä ikärajoituksen lisäksi. Nuoret ovat muita ikäryhmiä alttiimpia rahapeliongelmille. Nuorten käsityksiin rahapelaamisesta vaikuttaa rahapelaamisen hyväksyttävyyden nuoren lähiympäristössä ja vertaisten keskuudessa. Säännöllisesti rahapelejä pelaava nuori tuntee usein syyllisyyttä ja häpeää sekä pelaaminen vaikuttaa joillakin myös vuorokausirytyksiin. Liiallisen pelaamisen seuraukset vaikuttavat niin perheeseen, ystäviin kuin myös koulunkäyntiin. Varhain aloitettu rahapelaaminen saattaa johtaa myöhemmin elämässä taloudellisiin ongelmiin, vaikka siitä ei nykyhetkessä aiheutuisikaan merkittäviä taloudellisia haittoja. Vaikka koulujen opettajilla ja oppilashuollolla onkin kiinnostusta nuorten pelaamisesta, ei sen käsittelyn tueksi ole tarjolla riittävästi työvälineitä tai selkeää toimintamallia. Nuorten rahapelaaminen yhdistyy kouluissa

selkeimmin terveystietoon ja päihdeteemoihin, mutta useimmissa valtakunnallisesti käytössä olevissa oppikirjoissa aihetta ei käsitellä ollenkaan. (Raisamo & Lintonen, 2013)

4.1.5 Rahapelaamisen opettaminen matematiikassa

Australialainen Robert Peard (2008) kehitti Australian hallituksen konsultoimana Queenslandin 11- ja 12-vuotiaiden oppilaiden matematiikan tunneille oppimateriaalin vastuullisesta rahapelaamisesta, joka voidaan integroida sellaisenaan tai osina matematiikan opetukseen. Perusteluita oppimateriaalin tekemiselle oli aikaisempien tutkimusten perusteella useita. Oppilaiden ja yleisön tietämys todennäköisyydestä on yleisesti huono (Shaughnessy, 1992; Truran, 1997). Todennäköisyyden opettamisen vaikeudesta on myös runsaasti tutkimustietoa (Garfield & Ahlgren, 1998; Peard, 1996). Oppimateriaali koostuu todennäköisyyteen liittyvien väärinymmärryksien läpikäynnistä sekä osa-alueista kuten todennäköisyyslaskennan perusteet, odotusarvo, vedonlyönti, panostus, todennäköisyysjakaumat ja hypoteesien testaaminen (Peard, 2008). Peard suosittelee käytettäväksi välineitä kuten kynä ja paperi, mittaustyökalut, graafiset laskimet ja erilaiset tietokoneohjelmat kuten Excel. Oppimateriaalin sisällyttäminen matematiikan opetukseen Queenslandin osavaltiossa onnistui, joten se voisi onnistua myös muissa Australian osavaltioissa ja ehkä myös muissa valtioissa (Peard, 2008).

Rahapelaamisen matematiikasta on tarjottu monia kursseja Yhdysvaltojen lukioissa ja yliopistoissa. Tällaisen kurssin tarjoamiselle on monia syitä: kouluttaa uusia kasinoiden managereita, tarjota ei-teknistä kurssia havainnollistamaan matematiikan soveltuvuutta, tarjota diskreetin todennäköisyyden kurssia viihdyttävällä ja helpommin ymmärrettävällä tavalla, tarjota kurssia rahapelaamisen matematiikasta itsessään ja mahdollistaa muodostamaan selkeän idean sattumasta. Tärkeitä sisältöjä tällaisella kurssilla ovat todennäköisyyden sisältö ja uhkapelaamisen sisältö. Todennäköisyyden sisältöön kuuluu todennäköisyyslaskennan perusteet, ehdollinen todennäköisyys, satunnaismuuttujat ja raja-arvot. Uhkapelaamisen sisältöön kuuluu Ruletti, Craps, Keno, Lotto, Baccarat, Blackjack, videopokeri, Pokeri, peliteoria, talon etu ja vedonlyöntijärjestelmät. Työvälineinä kannattaa käyttää oppikirjaa, muita materiaaleja, ulkopuolisia luennoitsijoita, ohjelmointia ja hyviä esimerkkejä. (Ethier & Hoppe, 2019)

Williams ja Connolly tutkivat vuonna 2006 rahapelaamisen matematiikan opettamisen vaikutuksista yliopisto-opiskelijoiden rahapelaamiseen. Intervention saaneet opiskelijat saivat ohjeita todennäköisyyden teoriaan rahapeliesimerkkien avulla. Kuusi kuukautta intervention jälkeen intervention saaneet opiskelijat osoittivat parempia kykyjä laskea rahapelaamiseen liittyviä todennäköisyyksiä ja he olivat tietoisempia yleisistä rahapelaamisen harhaluuloista. Paremmat tiedot eivät kuitenkaan vähentäneet opiskelijoiden rahapelaamista. Tutkimuksen johtopäätöksenä matemaattinen tieto ei yksinään riitä rahapelaamisen käyttäytymisen muuttamiseen. (Williams & Connolly, 2006)

4.2 Parrandon periaate

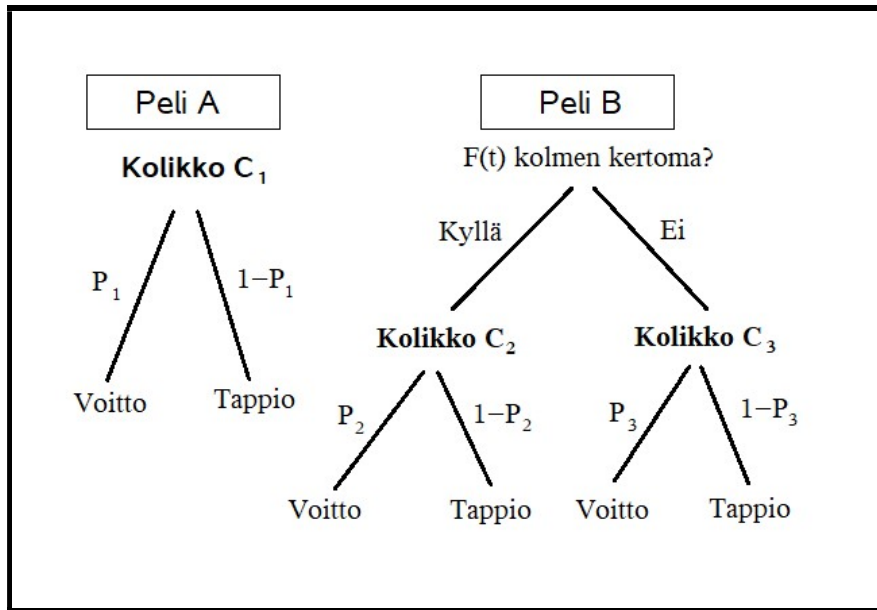
Parrandon paradoksi on laajasti ylistetty merkittävimmäksi kehitykseksi peliteoriassa minimax-prosessin jälkeen. Sen mukaan kaksi peliä, joilla on negatiivinen odotusarvo, voidaan yhdistää sekoittamalla tuottamaan positiivisen odotusarvon. **Parrandon periaatteen** mukaan pelaaja voi säännöllisesti tai satunnaisesti vuorottelemalla vaihtaa kahden häviävän pelin lopullisen yhteisen tuloksen voitoksi. (Epstein, 2009)

Parrandon periaate voidaan havainnollistaa seuraavilla peleillä A, B ja C. Jokaisessa pelissä heitetään kolikkoa, jonka tulos kruuna on voitto ja klaava on tappio. Oletetaan, että peli aloitetaan pääomalla 0 euroa ja jokaisen pelin voitto tai tappio on 1 euro (satunnaiskulku). **Pelissä A** heitetään puolueellista kolikkoa C_1 , joka tarjoaa voittoa todennäköisyydellä $P_1 = 1/2 - \alpha$ ja tappiota todennäköisyydellä $1 - P_1 = 1/2 + \alpha$, missä $0 \leq \alpha \leq 1/2$ edustaa puolueellisuutta pelaajaa vastaan. Peli A olisi reilu ehdolla $P_1 = 1/2$. Pelin A odotusarvo on

$$E(A) = \frac{P_1 - (1 - P_1)}{P_1 + (1 - P_1)} = (1/2 - \alpha) - (1/2 + \alpha) = -2\alpha.$$

Pelin A odotusarvo on siis selvästi pitkällä aikavälillä negatiivinen.

Pelissä B käytetään kahta puolueellista kolikkoa C_2 ja C_3 ja se on riippuvainen pelaajan nykyisestä pääomasta. Kolikko C_2 tarjoaa voittoa todennäköisyydellä $P_2 = 1/10 - \alpha$ ja tappiota todennäköisyydellä $1 - P_2 = 9/10 + \alpha$. Sitä käytetään silloin, kun pelaajan pääoma $F(t)$ on luvun 3 monikerta eli $F(t) = 0 \pmod{3}$. Kun pääoma $F(t)$ ei ole luvun 3 monikerta, pelaaja käyttää kolikkoa C_3 , joka tarjoaa voittoa (kruuna) todennäköisyydellä $P_3 = 3/4 - \alpha$ ja tappiota (klaava) todennäköisyydellä $1 - P_3 = 1/4 + \alpha$. Pelejä A ja B on havainnollistettu Kuvassa 4.



Kuva 4. Parrandon periaate peleille A ja B.

Peli C on pelien A ja B satunnainen tai säännöllinen yhdistelmä. Jos esimerkiksi pelejä A ja B vuorotellaan, kuten seuraavassa esimerkissä tehdään, peli C on ABABAB...

Tässä esimerkissä jokaista peliä pelataan kuusi kierrosta. Jokainen kierros voi päättyä voittoon tai tappioon, joten mahdollisia lopputuloksia jokaiselle pelille on $2^6 = 64$. Olkoon $\alpha = 0,005$. Näin ollen pelin A voiton ja tappion todennäköisyydet ovat $P(\text{voitto}) = 0,495$ ja $P(\text{tappio}) = 0,505$. Jos peliin B kertyneen pääoman määrä on luvun kolme monikerta, heitetään kolikkoa C_2 , jolla $P(\text{voitto}) = 0,095$ ja $P(\text{tappio}) = 0,905$. Jos kertynyt pääoma ei ole luvun kolmen monikerta, heitetään kolikkoa C_3 , jolla $P(\text{voitto}) = 0,745$ ja $P(\text{tappio}) = 0,255$. Pelin A kuuden kierroksen odotusarvoksi saadaan

$$6 \cdot 0,495^6 + 4 \cdot \binom{6}{5} \cdot 0,495^5 \cdot 0,505^1 + 2 \cdot \binom{6}{4} \cdot 0,495^4 \cdot 0,505^2 + 0 \cdot \binom{6}{3} \cdot 0,495^3 \cdot 0,505^3 - 2 \cdot \binom{6}{2} \cdot 0,495^2 \cdot 0,505^4 - 4 \cdot \binom{6}{1} \cdot 0,495^1 \cdot 0,505^5 - 6 \cdot 0,505^6 = -0,06.$$

Pelin B odotusarvon laskemiseksi täytyy laskea jokaisen 64 vaihtoehdon summa, mikä on melko työläs prosessi. Esimerkiksi jokaisen kierroksen voittamisen (6 euroa) todennäköisyys on

$$P(VVVVVV) = 0,095 \cdot 0,745 \cdot 0,745 \cdot 0,095 \cdot 0,745 \cdot 0,745 = 0,0028.$$

Neljä euroa voi voittaa kuudella eri tavalla, joiden todennäköisyydet vaihtelevat voittojen järjestyksen mukaan, jne. Jokaisen 64 laskun jälkeen pelin B odotusarvoksi saadaan

$$6(0,0028) + 4(0,0089) + 2(0,1407) + 0(0,5575) - 2(0,1921) - 4(0,0946) - 6(0,0035) = -0,4499.$$

Pelin C kuuden kierroksen analyysissä, jossa vuorotellaan pelien A ja B välillä, täytyy myös laskea jokaisen 64 eri vaihtoehdon odotusarvojen summa. Pelin C odotusarvoksi saadaan lopulta

$$6(0,0064) + 4(0,0260) + 2(0,5393) + 0(0,2697) - 2(0,0627) - 4(0,0883) - 6(0,0076) = +0,6969.$$

Näin ollen kahden häviävän pelin vuorottelemisen tuottaa voittavan pelin. (Minor, 2003)

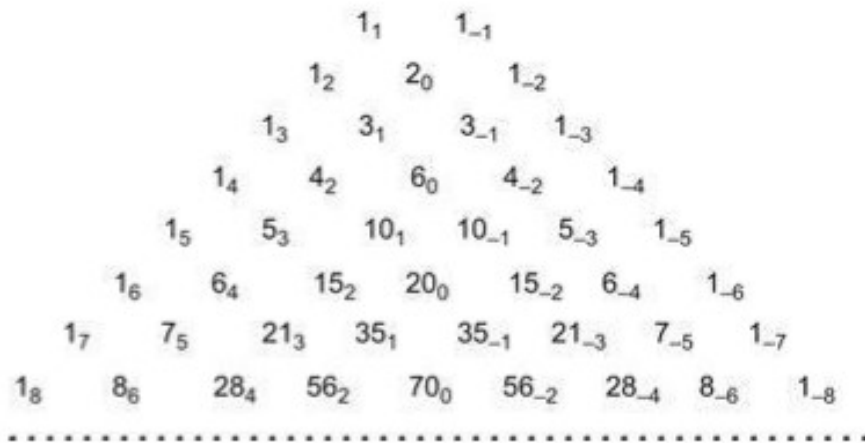
4.3 Kolikkopelit

Kolikkopelit olivat historian ensimmäisten pelattujen rahapelien joukossa. **Kolikko** koostuu kahdesta toisistaan erottuvasta puolesta, eli kruunasta ja klaavasta. Vaikka kolikonheittoa pidetäänkin yleisesti reiluuden ruumiillistumana (molemmat puolet ovat yhtä todennäköisiä), kolikoissa voi silti olla pieniä tekijöitä, jotka tekevät niistä puolueellisia. Kolikon mahdollista puolueellisuutta voidaan tutkia Tšebyšovin epäyhtälöllä

$$P[|p' - p| > \varepsilon] \leq \frac{pq}{\varepsilon^2 n}.$$

Yhtälö ilmaisee todennäköisyyden P , jolla n yrityksen onnistumistodennäköisyys p' eroaa yhden toiston onnistumisen todennäköisyydestä p enemmän kuin pienen määrän $\varepsilon > 0$. Tämä voidaan saada mielivaltaisen pieneksi säätämällä muuttujien ε ja n arvoja. J. B. Keller (1986) on analysoinut kolikonheiton mekaniikkoja fysiikan lakien näkökulmasta ja on päätenyt johtopäätökseen, että satunnaisilla alkuolosuhteilla kolikonheiton tulos (kruuna vai klaava) on satunnainen.

Kruunien ja klaavojen lukumäärien todennäköisyysjakaumaa n kolikonheitolla kuvataan binomijakaumalla. Pascalin kolmio havainnollistaa binomikertoimia taulukkomuodossa (Kuva 5).



Kuva 5. Pascalin kolmio.

Pascalin kolmiossa jokainen termi a_b ilmaisee, että reilun kolikon n heitolla peluri, joka panostaa yhden yksikön kruunalle, voi voittaa b yksikköä a kertaa mahdollisista 2^n vaihtoehdoista. (Epstein, 2009)

Kun sarjassa kolikonheittoja saadaan tuloksena sama kolikon puoli monta kertaa peräkkäin, puhutaan kolikonheiton putkesta. **Putki** (*run*) m koostuu m peräkkäisestä kruunasta (klaavasta), joita välittömästi edeltää ja seuraa klaavojen (kruunien) esiintyminen. Todennäköisyys havaita tietty määrä k putkia, joiden pituus on m , on $P_n^m(k)$. Putkien k odotusarvo on

$$\bar{k} = E(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_n^m(k).$$

Todennäköisyys sille, että sarja kolikonheittoja alkaa putkella m kruunia tai klaavoja on $q^2 p^m + p^2 q^m$, missä p on todennäköisyys heittää kruuna ja $q = 1 - p$ on todennäköisyys heittää klaava. Voidaan myös laskea tiettyjen putkien tapahtumisen todennäköisyys ennen toista putkea. Olkoon A todennäköisyys, että onnistumisten (kruunujen) putki s tapahtuu ennen epäonnistumisten (klaavojen) putkea f , p on onnistumisen (kruuna) todennäköisyys, q on epäonnistumisen (klaava) todennäköisyys, α on todennäköisyys sille, että ensimmäinen yritys onnistuu ja β on todennäköisyys, että ensimmäinen yritys epäonnistuu. Saadaan

$$P[A] = p^{s-1} \frac{1 - q^f}{p^{s-1} + q^{f-1} - p^{s-1} \cdot q^{s-1}}.$$

Tapahtuman A käänteistapahtuman todennäköisyys $P[\bar{A}]$ (epäonnistumisten putki f tapahtuu ennen onnistumisten putkea s) on

$$P[\bar{A}] = q^{f-1} \frac{1 - p^s}{p^{s-1} + q^{f-1} - p^{s-1} \cdot q^{f-1}}.$$

(Epstein, 2009)

Kolikonheitosta voidaan laskea paljon erilaisia todennäköisyyksiä ja tässä esitellään muutamia esimerkkejä. Olkoon p kruunan todennäköisyys ja q klaavan todennäköisyys n heitossa. Todennäköisyys parilliselle määrälle kruunia n heitossa on

$$P_n = \sum_i \binom{n}{2i} p^{2i} q^{n-2i} = \frac{1}{2} [(p+q)^n + (q-p)^n] = \frac{1}{2} [1 + (q-p)^n].$$

(Epstein, 2009)

Olkoon f_n kaikki tavat heittää kolikkoa n kertaa ilman peräkkäisiä kruunia, f_{n-1} tavat, jolloin heitto n on kruuna ja aikaisemmissa $n-1$ heitossa ei ollut peräkkäisiä kruunia, ja f_{n-2} tavat, jolloin heitto n on kruuna, heitto $n-1$ on klaava ja aikaisemmillä heitoilla $n-2$ ei tullut peräkkäisiä kruunia. Siis $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Todennäköisyys P_n että kahta tai enempää peräkkäistä kruunaa ei ilmaannu n peräkkäisessä heitossa on

$$P_n = \frac{f_{n+2}}{2^n} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-(i+1)} f_i,$$

missä f_i on i :s termi Fibonaccin lukujonossa $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 3$, jne.

(Epstein, 2009)

Olkoon E_{nH} odotettu määrä kolikonheittoja, kunnes esiintyy n peräkkäistä kruunaa. Odotettu heittojen määrä saada n peräkkäistä kruunaa on

$$E_{nH} = \sum_1^n \frac{i + E_{nH}}{2^i} + \frac{n}{2^n}.$$

(Epstein, 2009)

Erilaisia kolikkopelejä ja kolikko-ongelmia on paljon ja niiden hyödyntäminen matematiikan oppitunnilla on varmasti järkevää kolikkopelien todennäköisyyksistä puhuttaessa. Epstein (2009) on esitellyt kirjassaan kolikkopelit Pietarin paradoksi (*The St. Petersburg Paradox*), *Odd Man Out* ja kolikko-ongelman Kaksikäinen rosvo (*The Two-Armed Bandit*), joista jokaista voitaisiin mielestäni käyttää matematiikan oppitunnilla jossain muodossa.

4.4 Noppapelit

Noppa on esine, joka koostuu tietyistä määrästä tasaisia pintoja, joiden varaan noppa asettuu sitä heitettäessä. Pintoja merkitään yleensä numeroilla. Yleisin käytetty noppa on kuusitahkoinen kuution muotoinen noppa eli **arpakuutio**, jonka tahkoja (yleiskielellä sivuja) merkitään numeroilla 1-6. Sana noppa (*die*) tulee mahdollisesti ilmaisusta *juis de dé = judicium dei (judgement of God* eli Jumalan tuomio) (Epstein, 2009).

Todennäköisyys sille, että mikä tahansa yksi nopan sivu osoittaa ylöspäin, on $1/6$. Tätä on tutkittu historiassa paljon. Sveitsiläinen astronomi Rudolph Wolf etsi 1800-luvun toisella puoliskolla nopan todennäköisyysjakaumaa heittämällä noppaa 100 000 kertaa (Epstein, 2009). Koe tuotti 16632 numeroa 1, 17700 numeroa 2, 16183 numeroa 3, 14393 numeroa 4, 17707 numeroa 5 ja 18 385 numeroa 6. Hypoteesia että jokaisen sivun todennäköisyys on $1/6$ voidaan testata χ^2 -testillä

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(r_i - s_i)^2}{s_i},$$

missä r_i on sivun i esiintymisen määrä, s_i arvattu sivun esiintymismäärä (hypoteesi) ja k mahdollisten vaihtoehtojen lukumäärä. Jos $\chi^2 = 0$, on hypoteesi todistettu. Wolfin dataan sovellettuna saadaan $\chi^2 = \frac{12474769}{16667} = 748,5$. Tämän arvon merkittävyyden ymmärtämiseksi voidaan laskea, että teoreettisesti reilua noppaa 100000 kertaa heittämällä päädytään arvoa 15,1 suurempaan arvoon 1 % todennäköisyydellä (Epstein, 2009). Koska $\chi^2 = 748,5$, voidaan suoraan todeta, että Wolfin noppa oli hyvin todennäköisesti virheellinen.

Jos halutaan varmistaa, että noppa on virheellinen, niin siihen tarvittavien heittojen määrälle antaa hyvän arvion **De Moivre-Laplacen teoreema** (binomijakaumaa voidaan approksimoida normaalijakauman avulla). Todennäköisyys sille, että tulos 6 esiintyy välillä np_1 ja np_2 kertaa n nopanheitolla, missä p on arvioitu yhden toiston todennäköisyys saada 6, approksimoidaan kaavalla

$$P(np_1 \leq np \leq np_2) = \Phi \left[\frac{n(p_2 - p)}{\sqrt{npq}} \right] - \Phi \left[\frac{n(p_1 - p)}{\sqrt{npq}} \right],$$

missä $\Phi(x)$ on kertymäfunktio. Näin ollen todennäköisyys sille, että täydellisen nopan todennäköisyys p ei eroa arvosta $1/6$ enempää kuin 0,01 luottamuksella 0,95, ilmaistaan kaavalla

$$P(-0,01 \leq p - 1/6 \leq 0,01) \geq 0,095 = 2\Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) - 1,$$

koska $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Näin ollen tarvittavien heittojen määrän n määrittää suhde

$$\Phi\left(0,06\sqrt{\frac{n}{5}}\right) \geq \frac{0,95 + 1}{2} = 0,975.$$

Kertymäfunktion taulukosta saadaan, että $n = 5335$ nopanheittoa riittää saamaan suhteellinen esiintyvyys $1/6 \pm 0,01$ luottamuksella 0,95. (Epstein, 2009)

Noppien erilaisia todennäköisyyksiä on pohdittu historiassa paljon. Ranskalainen matemaatikko Chevalier de Méré esitti 1600-luvulla kysymyksen todennäköisyydestä saada ainakin yksi kuutonen yhdellä neljän nopan heitolla verrattuna todennäköisyyteen saada kaksi kuutosta ainakin kerran 24:llä kahden nopan heitolla (Epstein, 2009). Hänen mielestään näiden kahden todennäköisyyden pitäisi olla identtisiä, mutta hänen kokemuksensa perusteella ensimmäinen noppapeli tarjoaisi positiivisen ja jälkimmäinen negatiivisen odotetun voiton. Tämä voidaan tarkistaa laskemalla. Oletetaan että tapahtumalla on vakiona pysyvä todennäköisyys p ja sen tapahtumiseen tarvitaan n yritystä. Muuttujan n jakauma on geometrinen jakauma

$$f(n) = q^{n-1}p$$

ja sen kertymäfunktio $F(n)$ on

$$F(n) = \sum_{i=1}^n f(i) = 1 - q^n.$$

Tällöin todennäköisyys P_n että tapahtuma tapahtuu n yrityksellä, ilmaistaan kaavalla

$$P_n = F(n) = 1 - (1 - p)^n.$$

Näin ollen todennäköisyys P_4 saada ainakin yksi kuutonen yhdellä neljän nopan heitolla (tai neljällä yhden nopan heitolla) on

$$P_4 = 1 - (1 - 1/6)^4 = 0,5177$$

ja todennäköisyys P_{24} saada ainakin kaksi kuutosta samaan aikaan heittämällä kahta noppaa 24 kertaa on

$$P_{24} = 1 - (1 - 1/36)^{24} = 0,4914.$$

Dé Méré'n kokempuspohjainen intuitio oli siis oikeassa.

Samuel Pepys kysyi 1600-luvulla kirjeellä Isaac Newtonilta, että mikä seuraavista on todennäköisin:

P_{1+} = todennäköisyys saada yksi kuutonen heittämällä kuutta noppaa,

P_{2+} = todennäköisyys saada ainakin kaksi kuutosta heittämällä 12 noppaa, vai

P_{3+} = todennäköisyys saada ainakin kolme kuutosta heittämällä 18 noppaa.

Newton vastasi, että ensimmäinen näistä on todennäköisin. Tätä ongelmaa kutsutaan Newtonin-Pepysin ongelmaksi (Epstein, 2009) ja sekin voidaan ratkaista laskemalla. Todennäköisyys saada n tai enemmän kuutosta heittämällä $6n$ noppaa voidaan ilmaista kaavalla

$$P_{n+} = \sum_{j=n}^{6n} \binom{6n}{j} (1/6)^j (5/6)^{6n-j}.$$

Tästä saadaan $P_{1+} = 0,665$, $P_{2+} = 0,619$ ja $P_{3+} = 0,597$ eli P_{1+} on tapahtumista todennäköisin. Newton itse laski näistä ainoastaan kaksi ensimmäistä ja totesi että kolmannen todennäköisyys on vieläkin pienempi.

Näiden ongelmien lisäksi hyviä noppiin liittyviä laskutehtäviä voisi olla laskea todennäköisyys saada tietty tulos tasan m kertaa n heitolla, laskea kaikkien tulosten odotettu summa ennen ensimmäistä tulosta 6, laskea todennäköisyys saada annettu summa s noppien n tuloksista (tai yhden nopan n heitosta), laskea todennäköisyys sille että yhdellä n nopan heitolla ($n \geq 6$) saadaan kaikki mahdolliset tulokset 1, 2, ..., 6 ainakin kerran ja laskea odotettu määrä heittoa sille että kaikki noppien tulokset esiintyy ainakin kerran. Myös noppapelejä on kehitetty paljon ja niistä tunnetuimpia ovat ehkä Yahtzee (Yatzy), Backgammon ja Craps. Matematiikan oppitunnille hyvä opiskelijoiden kanssa analysoitava noppapeli voisi olla Maksimointipeli (*A Maximization Game*) (Liite 1).

4.5 Korttipelit

Korttipelit ovat pelikorteilla pelattavia pelejä. Tavallinen länsimainen **korttipakka** koostuu viidestäkymmenestäkahdesta erilaisesta kortista, jotka eroavat toisistaan maan, arvon tai molempien perusteella. Jokaista maata eli herttaa, ruutua, pataa ja ristiä on 13 korttia, joiden arvot ovat 1-13. Kortti numero yksi on ässä (A), 11 on jätkä (J), 12 on kuningatar (Q), 13 on kuningas (K) ja kortteja 2-10 merkitään niiden numeroarvoilla (korttia 10 merkitään joskus kirjaimella T).

Korttipakan "reiluus" on hieman erilainen termi kuin kolikoiden ja noppien virheellisyys. Intuitiivisesti korttipakka on reilu, jos korttipakan sisältö tiedetään ja jokainen tulos esiintyy yhtä suurella todennäköisyydellä muiden tulosten kanssa eli jokaista erilaista korttia on muiden korttien kanssa yhtä monta. Korttipakan virheellisyydestä

puhuttaessa oikea termi on **satunnaisuus**. Seuraavat viisi prosessia muuttavat korttipakan järjestystä.

1. **Yksinkertainen leikkaus** (*A simple cut*) c siirtää kortteja pakan päältä pakan pohjalle. Operaatio c_i jakaa pakan kortin i jälkeen ja muuttaa järjestyksen $1, 2, 3, \dots, i, j, k, \dots, 2n$ järjestykseen $j, k, \dots, 2n, 1, 2, 3, \dots, i$.

2. **Täydellinen sekoitus** (*The perfect shuffle operation*) s jakaa $2n$ korttisesta pakasta päällimmäiset n korttia ja alimmaiseta n korttia ja limittää ne tarkasti muuttamatta päällimmäisen ja alimmaisen kortin paikkaa, eli

$$s(1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots, 2n-1, 2n) = (1, n+1, 2, n+2, \dots, n, 2n).$$

Tästä seuraa, että jos kortti paikassa a_0 siirtyy paikkaan a_1 täydellisen sekoituksen s johdosta, niin

$$a_1 \equiv 2a_0 - 1 \pmod{2n-1}.$$

Kortti, joka oli alkuperäisesti paikassa a_0 , siirtyy paikkaan a_k sekoituksen s k iteraation jälkeen. Näin ollen

$$a_k \equiv 2^k a_0 - (2^k - 1).$$

3. **Modifioitu täydellinen sekoitus** (*The modified perfect shuffle operation*) s' on muuten sama operaatio kuin operaatio s , mutta se siirtää kortin $n+1$ pakan päälle ja kortin n pohjalle. Se määritellään kaavalla

$$s'(1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots, 2n-1, 2n) = (n+1, 1, n+2, 2, \dots, 2n, n).$$

Jos kortti paikalla b_0 siirtyy paikkaan b_1 modifioidulla täydellisellä sekoituksella s' , niin

$$b_1 \equiv 2b_0 \pmod{2n+1}.$$

Yleisesti k iteraation jälkeen

$$b_k \equiv 2^k b_0 \pmod{2n+1}.$$

4. **Amatöörin sekoitus** (*The amateur shuffle operation*) s_a jakaa pakan noin kahteen n ryhmään kortteja ja limittää ne yksittäin tai kahden, kolmen tai neljän kortin ryppäissä.

5. **Satunnainen sekoitus** (*The random shuffle*) s_r on ekvivalentti sen kanssa, että jokainen kortti valitaan sokkona.

Voidaan osoittaa, että amatöörin sekoitus pitää toistaa vähintään viisi kertaa tehdäkseen pakasta satunnaisen. Jos täydellistä sekoitusta s iteroidaan f kertaa $2n$ kortin pakkaan, missä f on luvun 2 eksponentti $\pmod{2n-1}$, pakka palautuu alkuperäiseen järjestykseen. Esimerkiksi kahdeksan täydellistä sekoitusta kierrättää

52-korttisen pakan sen alkuperäiseen järjestykseen, koska $2^8 \equiv 1 \pmod{51}$. (Epstein, 2009)

Korttien kombinaatioita ja permutaatioita laskettaessa käytetään yleensä hypergeometrista jakaumaa verrattuna kolikoiden ja noppien binomijakaumaan. Olennaista laskuissa on, että palautetaanko nostetut kortit takaisin pakkaan, koska se muuttaa seuraavien korttien nostojen todennäköisyyksiä. Pelikortteihin liittyviä hyviä todennäköisyysslaskuja voisi olla laskea odotettu määrä nostoja tietyn kortin tai korttityypin nostamiseen, laskea todennäköisyys sille, että satunnainen otos sisältää tietyn määrän tietyn tyyppisiä kortteja, ja laskea todennäköisyys sille, että kun n erilaisesta kortista koostuva korttipakka sekoitetaan ja jaetaan, kortin arvo vastaa sen paikkaa jaossa.

Tunnetuimpia virallisia korttipelejä ovat Blackjack, pokeri ja sen eri muodot sekä Baccarat. Pokerikäsi koostuu viidestä pelikortista ja erilaisia mahdollisia pokerikäsiä on 2598960. Kädet voidaan jakaa kymmeneen kategoriaan, joista jokaisessa voittava käsi koostuu korkeimmasta arvosta tai väristä. Nousevassa arvojärjestyksessä (Epstein, 2009):

$$P(\text{hai eli korkein kortti}) = \left[\left(\binom{13}{5} - 10 \right) \cdot (4^5 - 4) \right] D^{-1} \approx 0,5051$$

missä $D = \binom{52}{5} = 2598960$.

$$P(\text{pari}) = \binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} \binom{4}{1}^3 D^{-1} \approx 0,4226.$$

$$P(\text{kaksi paria}) = \binom{13}{2} \binom{4}{2}^2 \binom{11}{1} \binom{4}{1}^3 D^{-1} \approx 0,0475.$$

$$P(\text{kolme samaa}) = \binom{13}{1} \binom{4}{3}^2 \binom{12}{2} \binom{4}{2}^2 D^{-1} \approx 0,0211.$$

$$P(\text{suora}) = \left[10 \binom{4}{1}^5 - 10 \binom{4}{1} \right] D^{-1} \approx 0,00392.$$

$$P(\text{väri}) = \left[\binom{4}{1} \binom{13}{5} - 10 \binom{4}{1} \right] D^{-1} \approx 0,00199.$$

$$P(\text{täyskäsi}) = \binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{1} \binom{4}{2} D^{-1} \approx 0,00144.$$

$$P(\text{neljä samaa}) = \binom{13}{1} \binom{4}{4} \binom{12}{1} \binom{4}{1} D^{-1} \approx 2,40 \cdot 10^{-4}.$$

$$P(\text{värisuora}) = \left[9 \binom{4}{1} \right] D^{-1} \approx 1,385 \cdot 10^{-5}.$$

$$P(\text{kuningasvärisuora}) = \binom{4}{1} D^{-1} \approx 1,539 \cdot 10^{-6}.$$

Monissa pokerin muodoissa pelaaja saa vaihtaa yhden, kaksi tai kolme korttiaan vastaavaan määrään kortteja pakasta.

Texas Hold'em on suosituin ja strategisesti monimutkaisin pokerin muoto (Epstein, 2009). Jokaiselle pelaajalle jaetaan kaksi korttia kuvapuoli alaspäin ja niitä ei näytetä muille pelaajille. Lisäksi pöydälle jaetaan kaikille pelaajille yhteiset viisi korttia, joista ensin jaetaan kolme, sitten neljäs ja lopuksi viides kortti. Jokaisen jaon välissä on panostuskierros. Viimeisen panostuskierroksen jälkeen mukana olevat pelaajat paljastavat korttinsa ja paras pelaajien omista korteista ja/tai pöydällä olevasta viidestä yhteisestä kortista koostuva viiden kortin pokerikäsi voittaa potin.

Kahden kortin kombinaatioiden määrä on $\binom{52}{2} = 1326$. Ne voidaan jakaa kolmeen erilliseen aloituskäsien joukkoon: $\binom{13}{1}\binom{4}{2} = 78$ paria, $\binom{13}{2}\binom{4}{1} = 312$ samaa maata olevaa korttia ja $\binom{13}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 936$ eri maata olevaa korttia. Aloituskäsien arvoon vaikuttaa moni tekijä: pelaajan positio (jakajan nappiin nähden), yhteisten korttien koostumus, jokaisen kierroksen panostuksen rakenne, potin koko, vastustajien määrä ja heidän toimintansa. Tämän takia on vaikeaa arvioida tietyn käden todennäköisyyttä voittaa lopussa. (Epstein, 2009)

4.6 Blackjack

Blackjack eroaa muista rahapeleistä siinä, että se on ainoa julkinen rahapelaamisen muoto missä asiantunteva pelaaja voi saada positiivisen odotusarvon (Epstein, 2009). Blackjackin säännöissä on paljon paikallisia eroja. Tähän tutkimukseen on valittu yksi pelatuimmista varianteista, jota käytetään esimerkiksi Las Vegasin kasinoilla (Epstein, 2009). Perussäännöt ovat kaikissa varianteissa samat: pelaajan tavoitteena on saada kahdella tai useammalla kortilla voittava käsi. Jos pelaajan käsi on lähempänä kahtakymmentäyhtä kuin jakajan tai jos jakaja menee yli kahdenkymmenenyhden, pelaaja voittaa. Kuvakorttien arvo on kymmenen, ässän yksi tai yksitoista ja muut kortit ovat oman numeronsa arvoisia.

Las Vegasin kasinoiden sääntöjen mukaan jakaja ei ota enempää, jos hänen kätensä arvo on 17 (**S17** eli *soft 17*). Pelaaja saa tuplata, jos hän on jakanut kaksi samanarvoista korttia eli parin (**DAS** eli *Double after splitting*). Pelaaja voi jakaa parit

kolme kertaa (**SPL3**) ja ässäparin vain kerran (**SPL1**). Pelaajalla on mahdollisuus aikaiseen antautumiseen (**ES** eli *early surrender*) ja myöhäiseen antautumiseen (**LS** eli *late surrender*). Aikaisemmin Blackjackissa käytettiin yhtä pakkaa, mutta korttien laskennan leviämisen jälkeen kasinot kehittivät vastatoimenpiteitä. Nykyään käytetään neljää, kuutta tai kahdeksaa pakkaa, jotka jaetaan kengästä (*shoe*). (Epstein, 2009) Jokaisesta 550 tilanteesta (pelaajan käsi koostuu 55 erilaisesta kahden kortin kombinaatiosta, ja jakajan kortti on yksi kymmenestä kortista) on laskettu odotusarvot, jos pelaaja jää tai nostaa uuden kortin. Suurempi odotusarvo jokaisessa tilanteessa kertoo optimaalisen strategian. Samaa prosessia sovelletaan vaihtoehtoihin tuplaus, jakaminen, vakuutus ja luovutus. (Epstein, 2009)

Luovuttaminen tarkoittaa kädestä luopumista puoleen hintaan alkuperäisestä panoksesta. Perusstrategian mukaan **aikainen luovuttaminen (ES)** (ennen kuin jakaja on katsonut korttinsa, joka on kuvapuoli alaspäin) kannattaa tilanteissa 16 vs. 9; 14, 15, 16, 7-7, 8-8 vs. T; ja 5, 6, 7, 12-17, 3-3, 6-6, 7-7, 8-8 vs. A. Tämä strategia lisää 0,007 pelaajan odotusarvoon. **Myöhäinen luovuttaminen (LS)** (luovuttaminen sen jälkeen, kun jakaja on katsonut toisen korttinsa) tuo lisäksi odotusarvon 0,00023. Optimaalinen strategia: luovuta 16 vs. 9; T-5, 9-6, 9-7 ja T-6 vs. T; 9-7 ja T-6 vs. A; ja 8-7 vs. T seitsemällä tai useammalla pakalla. Jotkut kasinot antavat tietyistä käsistä bonuksia. Charliet ovat viiden, kuuden tai seitsemän kortin kombinaatioita, jotka ovat 21 tai alle. **Vakuutuksella** tarkoitetaan panostaa yksikkö voittaakseen kaksi yksikköä sillä ehdolla, että jakajan toinen kortti on T, kun ensimmäinen on A. Näitä havainnollistetaan Kuvassa 6 (Schlesinger, 2005). (Epstein, 2009)

Pelaajan käsi	Jakajan kuvapuoli ylöspäin oleva kortti									
	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A
5-7	x	x	x	x	x	x	x	x	x	X ^a
8	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	x	D	D	D	D	x	x	x	x	x
10	D	D	D	D	D	D	D	D	x	x
11	D	D	D	D	D	D	D	D	D	x
12	x	x				x	x	x	x	X ^a
13						x	x	x	x	X ^a
14						x	x	x	X ^a	X ^a
15						x	x	x	X ^{a,b,c}	X ^a
16						x	x	X ^{a,b}	X ^{a,b}	X ^{a,b}
17										a
18-21										X ^a
A-2	x	x	x	D	D	x	x	x	x	x
A-3	x	x	x	D	D	x	x	x	x	x
A-4	x	x	D	D	D	x	x	x	x	x
A-5	x	x	D	D	D	x	x	x	x	x
A-6	x	D	D	D	D	x	x	x	x	x
A-7		D	D	D	D			x	x	x
A-8,9,T										
A-A	S	S	S	S	S	S	S	S	S	S
2-2	S	S	S	S	S	S	x	x	x	x
3-3	S	S	S	S	S	S	x	x	x	X ^a
4-4	x	x	x	S	S	x	x	x	x	x
5-5	D	D	D	D	D	D	D	D	x	x
6-6	S	S	S	S	S	S	x	x	x	X ^a
7-7	S	S	S	S	S	S	x	x	X ^a	X ^a
8-8	S	S	S	S	S	S	S	S	S ^a	S ^a
9-9	S	S	S	S	S		S	S		
T-T										

x = ota kortti
D = tuplaus
S = jako
^a = aikainen antautuminen (jos mahdollinen)
^b = myöhäinen antautuminen (jos mahdollinen)
^c = myöhäinen antautuminen 8-7 vain seitsemällä tai enemmällä pakalla
Jää jos ei ole muita ohjeita

Kuva 6. Blackjackin perusstrategia (monta pakkaa, S17, DAS). Odotusarvo -0,00419.

Nämä strategiat eivät yksin riitä positiivisen odotusarvon saamiseksi. Näiden lisäksi pelaajan täytyy osata laskea kortteja. Jokaisen kierroksen alkaessa on olemassa todennäköisyysjakauma F_c , joka kuvaa pelaajan odotusarvoa, jos tiedetään c korttia. Kun c kasvaa, F_c leviää, eli kasvattamalla panosta positiivisilla odotusarvoilla ja pienentämällä panosta negatiivisilla odotusarvoilla parantaa pelaajan kokonaisodotusarvoa $E(F_c)$ (Thorp & Walden, 1973). Korttien laskenta perustuu yksittäisten korttien pakasta poistamisesta aiheutuvaan pelaajan odotusarvon muutokseen (EOR).

Arvo	2	3	4	5	6	7	8	9	T	A	Neliöiden summa
EOR	0.381	0.434	0.568	0.727	0.412	0.282	-0.003	-0.173	-0.512	-0.579	2.842

Kuva 7. Panostuksen EOR-arvot prosenteissa.

Pistelaskusysteemit antavat jokaiselle kortille arvon, joka approksimoi vastaavaa EOR:ää. Kun kortteja jaetaan lisää, jokainen arvo lisätään päässä olevaan juoksevaan laskuun (*running count*). Kun saatu arvo jaetaan jäljellä olevien pakkojen määrällä, saadaan todellinen lasku (TC) (*true count*). (Epstein, 2009)

Erilaisia pistelaskusysteemejä on monia. Pistelaskusysteemin arvoa sovelletaan kahdella mitalla: **panostuskorrelaatio** (BC) (*betting correlation*) ja **pelaamisen tehokkuus** (*playing efficiency*). Kuva 8 havainnollistaa erilaisia pistelaskusysteemejä.

Systeemi	Kortille annettu arvo										Strateginen tehokkuus	Panostuskorrelaatio	SCORE
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
Hi-Lo	-1	1	1	1	1	1	0	0	0	-1	0.511	0.966	49.91
K-O	-1	1	1	1	1	1	1	0	0	-1	0.553	0.976	47.86
Einstein Hi-Opt	0	0	1	1	1	1	0	0	0	-1	0.609	0.879	43.97
Uston +/-	-1	0	1	1	1	1	1	0	0	-1	0.551	0.948	46.45
Second-level Zen	-1	1	1	2	2	2	1	0	0	-2	0.627	0.962	47.71
Revere Point Count	-2	1	2	2	2	2	1	0	0	-2	0.554	0.981	52.11
Zen	-1	1	2	2	2	2	1	0	0	-2	0.616	0.964	49.83
Third-level Wong Halves	-1	1/2	1	1	1/2	1	1/2	0	-1/2	-1	0.565	0.992	53.80

Kuva 8. Erilaisia pistelaskusysteemejä.

Näiden systeemien suhteellista vahvuutta kuvaa taulukon viimeinen sarake "SCORE", joka antaa odotetun voiton tunnissa. Tämä riippuu alkuperäisestä pankkitilistä (10000 €), tietyistä perikadon riskistä, panostusten eroista (1–12), pakkojen määrästä (6), tyypillisestä pakkojen läpikäynnistä (5 pakkaa kuudesta) ja kierrosten lukumäärästä tunnissa (100), sekä pelaajien määrästä pöydässä (4). Hi-Lo-systeemiä käytetään näistä eniten sen tehokkuuden ja yksinkertaisuuden ansiosta. (Epstein, 2009)

4.7 Tilastollinen logiikka ja tilastolliset pelit

Tilastollisten päätelmien avulla voidaan tehdä päätös kahden tai useamman vaihtoehdon todennäköisesti parhaasta valinnasta **strategisen valinnan** prosessilla. Lopulliseen päätökseen johtaa neljä perusvaihetta:

1. Tunnistetaan ja arvioidaan olennaiset lopulliseen päätökseen vaikuttavat yksittäiset tekijät.
2. Ilmaistaan erilaiset vaihtoehdot niiden yksittäisille tekijöille annettujen painoarvojen perusteella.
3. Tehdään jokaisen vaihtoehdon suhteellista ansiota havainnollistava lista.
4. Tunnistetaan ja nimetään listan korkein vaihtoehto optimaaliseksi vaihtoehdoksi.

Tilastolliset pelit pohjautuvat tilastojen perusteella tehtyihin strategisiin valintoihin. Tilastollisia pelejä ovat esimerkiksi kilparatsastus, kaksintaistelu (*Duel*) ja kolmintaistelu (*True!*). Seuraavaksi analysoidaan tarkemmin osakemarkkinoita, joka on myös eräänlainen tilastollinen peli. (Epstein, 2009)

Peliteorian termein kuvattuna **osakemarkkinat** on ei-nollasummapeli, eli se antaa mahdollisuuden pelaajien väliseen yhteistyöhön, neuvotteluun ja muunlaiseen vuorovaikutukseen ennen ja kesken pelin. Pitkällä aikavälillä voittojen arvioiminen on vaikeaa, koska niihin vaikuttaa rahan arvo, verotus, kauppatavaran saatavuus, keksinnöt, sodat, hallitusten vaihdokset, poliittiset uudistukset ja massojen psykologiset muutokset. Osakemarkkinat on mahdollisesti monimutkaisin ihmisen keksimä peli, koska siihen vaikuttaa niin taloudelliset, rahapoliittiset kuin psykologisetkin tekijät. (Epstein, 2009)

Osakemarkkinoita paljon tutkineet tutkijat ovat käytännössä kaikki sitä mieltä, että spekuloivilla markkinoilla vaihtelevia hintoja voidaan approksimoida pienellä aikavälillä

normaalijakaumalla. Tilastotieteilijät näkevät osakemarkkinat satunnaiskulkuna ja fyysikot Brownin liikkeenä. Satunnaiskulkumalli on johdonmukainen sillä oletuksella, että pörssit ovat "täydellisiä" markkinoita. Jos huomattava määrä sijoittajia uskoo hintojen olevan matalia, he aloittavat tarjouskilpailun ja siten pakottavat hinnat korkeammalle, ja myös toisinpäin. (Epstein, 2009)

Osakemarkkinat voidaan määritellä vahvasti tai heikosti tehokkaiksi. **Vahvasti tehokkailla markkinoilla** (*strongly efficient market*) kaikille osallistujille tarjotaan yhtäläiset mahdollisuudet mutta keskimääräiset odotukset. Osallistuja voi ylittää keskimääräisen sijoitetun pääoman tuoton vain silloin kun markkinat poikkeavat vahvasta tehokkuudesta. **Heikosti tehokkailla markkinoilla** (*weakly efficient market*) olennainen informaatio on saatavilla julkisille sijoittajille aikaviiveen eli rentoutumisajan (*relaxation time*) jälkeen. Pohjimmiltaan kaikki suuret osakemarkkinat ovat heikosti tehokkaita. (Epstein, 2009)

Burton P. Fabricand (1979) on osoittanut, että osakkeiden strateginen valinta heikosti tehokkailla markkinoilla voi tuottaa positiivisen odotusarvon. Tämä perustuu siihen, että noin 15 % listautuneista yhtiöistä ilmoittaa vuosineljännesten tulot (RE - *quarterly earnings*) jotka ylittävät aikaisemmat ennustukset (PE - *prior projections*) kymmenellä prosentilla tai enemmän. Fabricandin strategian mukaan kannattaa ostaa sellaisia osakkeita, joiden RE/PE-suhde on suurempi kuin 1,1, mutta ne kannattaa pitää vain niin pitkään kuin tämä suhde ylittää arvon 1,1.

Parrandon periaatteen tapaisia prosesseja voidaan soveltaa osakemarkkinoilla (Maslov & Zhang, 1998). Myymällä vakaan osakkeen A ja erittäin epävakaa osakkeen B osakkeet päivittäin ja ostamalla niitä yhtä suurilla rahamäärillä kutsutaan **epävakauden pumppaamiseksi** (*volatility pumping*). Tämä prosessi tuottaa eksponentiaalisen kasvun näiden osakkeiden yhteisessä tuotossa (Epstein, 2009).

Takuun suojaamisella tarkoitetaan samanaikaista arvopaperin ostamista ja sitä vastaavan takuun shorttaamista eli lyhyeksi myyntiä. **Takuu** (*warrant*) on vaihtoehto ostaa osa kantaosakkeista määrättyllä hinnalla. Niillä on arvopapereihin verrattuna yleensä viimeinen käyttöpäivä, jonka jälkeen niillä ei ole enää arvoa. Takuun suojaamiseen kuuluu m takuun shorttaamista myyntihinnalla w ja toteutushinnalla e jokaista sellaista osakkeen osuutta kohden, joka on ostettu hinnalla s . Jos osakkeen

myyntihinta on S sen viimeisenä käyttöpäivänä tai ennen sitä ja takuun hinta on W , kaupan tekemisestä saatu tuoton prosenttiosuus R on

$$R = \frac{S - s + m(w - W)}{mw + s\mu}$$

missä μ on osakkeiden ostamiseen tarvittava marginaali ja $mw + s\mu \equiv I$ on alkuperäinen pääoma sijoittamiseen. Viimeisen käyttöpäivän lähestyessä

$$\begin{cases} W \sim S - e, & \text{kun } S > e \\ W \sim 0, & \text{kun } S \leq e \end{cases}$$

(Epstein, 2009)

4.8 Muut pelit

Tähän kappaleeseen on koottu muutamia edellisiin kappaleisiin kuulumattomia erilaisia rahapelejä. Näitä pelejä ovat Morra, Kolmen sormen Morra, Monty Hallin "Paradoksi", Seitsemän oven Monty, Ruletti, Keno ja Lotto.

Morrassa pelaajat A ja B ensin valitsevat ja sitten paljastavat samanaikaisesti yhden tai kaksi sormeaa. Jos kumpikin pelaaja näyttää saman määrän sormia, pelaaja A voittaa 2 panosyksikköä. Jos pelaaja A näyttää kahta sormeaa ja pelaaja B yhtä sormeaa, pelaaja B voittaa yhden yksikön. Jos pelaaja A näyttää yhtä sormeaa ja pelaaja B kahta sormeaa, pelaaja B voittaa kolme yksikköä. Morran voittomatriisi pelaajan A näkökulmasta näyttää tältä:

		A	
		1	2
B	1	+2	-1
	2	-3	+2

Kuva 9. Morran voittomatriisi.

Pelaajan A optimaalinen strategia on näyttää yhtä sormeaa todennäköisyydellä $p = 3/8$ ja kahta sormeaa todennäköisyydellä $1 - p = 5/8$. Tämän strategian odotusarvo on $2p - (1 - p) = 1/8$ jos pelaaja B näyttää yhden sormen ja $-3p + 2(1 - p) = 1/8$ jos pelaaja B näyttää kaksi sormeaa. Pelin arvo pelaajalle A on siis $+1/8$. Pelaajan B minimax-strategia on valita yksi sormi todennäköisyydellä $5/8$ ja kaksi sormeaa todennäköisyydellä $3/8$, jolloin hän turvaa pelin arvoksi $-1/8$. (Epstein, 2009)

Kolmen sormen Morrassa (*Three-fingered Morra*) kumpikin pelaaja näyttää yhden, kaksi tai kolme sormea ja samalla yrittävät arvata montako sormea vastustaja tulee näyttämään. Jos vain toinen pelaajista arvaa oikein, hän voittaa molempien pelaajien näyttämien sormien summan panosyksiköinä. Muuten päädytään tasapeliin. Olkoon (i, j) strategia, jossa näytetään i sormea ja arvataan j sormea, missä $i, j \in 1, 2, 3$. Pelin voittomatriisi näyttää seuraavalta:

Pelaaja A	Pelaaja B								
	B ₁ (1,1)	B ₂ (1,2)	B ₃ (1,3)	B ₄ (2,1)	B ₅ (2,2)	B ₆ (2,3)	B ₇ (3,1)	B ₈ (3,2)	B ₉ (3,3)
A ₁ (1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
A ₂ (1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
A ₃ (1,3)	-3	0	0	-3	0	0	0	4	4
A ₄ (2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
A ₅ (2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
A ₆ (2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
A ₇ (3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
A ₈ (3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
A ₉ (3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

Kuva 10. Kolmen sormen Morrassa voittomatriisi.

Kolmen sormen Morrassa on ääretön määrä optimaalisia strategioita. (Epstein, 2009)

Monty Hallin "Paradoksiksi" (*The Monty Hall "Paradox"*) kutsutaan TV-ohjelmassa "Let's Make a Deal" nähtyä kilpailua. Kilpailija voittaa, jos hän arvaa minkä oven takana kolmesta ovesta on palkinto. Kilpailija valitsee yhden oven, jonka jälkeen hänelle paljastetaan toinen kahdesta jäljellä olevasta ovesta, joka on väärä ovi. Sen jälkeen kilpailija saa vielä vaihtaa valintaansa. Vaihtamalla ovea kilpailija kasvattaa alkuperäisen valintansa voittotodennäköisyyden $1/3$ uuteen voittotodennäköisyyteen $2/3$. (Epstein, 2009)

Seitsemän oven Montyssa (*Seven-Door Monty*) kilpailija valitsee kolme ovea seitsemästä ja voittaa, jos palkinto on jonkin näistä kolmesta ovesta takana. Valinnan jälkeen Monty avaa kolme jäljellä olevista ovista ja antaa mahdollisuuden vaihtaa viimeiseen avaamattomaan oveen. Vaihto kannattaa, koska voiton todennäköisyys nousee todennäköisyydestä $3/7$ todennäköisyyteen $4/7$. (Epstein, 2009)

Ruletti on maailman suosituin pöytäpeli. Amerikkalainen ruletti koostuu kolmestakymmenestä kahdeksasta numeroidusta lokeroista 1–36 (punaiset ja mustat) sekä 0 ja 00 (vihreät). Keskellä olevaa roottoria ympäröi staattori ja vaakasuora rata. Ruletti pyöräytetään liikkeelle ja pallo laukaistaan sen vastakkaiseen pyörimissuuntaan pyörimään rataa pitkin. Pallo lipuu kohti keskellä olevaa roottoria ja lopulta pysähtyy yhteen lokeroista, joka ilmaisee voittavan numeron. Rulettipöytä tarjoaa kolmeatoista erilaista panostusmahdollisuutta. Amerikkalaisen Ruletin yhden toiston voiton todennäköisyys on 0,4737 (talo vetää välistä 5,263 %) kaikilla panostuksilla, paitsi viiden numeron panoksella, josta talo vetää välistä 7,895 %. Eurooppalaisessa ruletissa talo vetää välistä 2,703 % numerovedoista ja tasaisen voiton vedoista 1,388 %. Kaikilla vedoilla peli on epäsuotuisa pelaajalle. (Epstein, 2009)

Kenossa talo (pelin vetäjä) valitsee kaksikymmentä numeroa satunnaisesti numeroista 1-80. Pelaaja voi valita samoista numeroista yhdestä viiteentoista numeroa ja hän voittaa silloin, kun jokin osa hänen numeroistaan vastaa talon kahtakymmentä numeroa. Jos pelaaja valitsee n numeroa, todennäköisyys $P(k)$ että $k \leq n$ numeroa on talon kahdenkymmenen numeron joukossa, on

$$P(k) = \frac{\binom{20}{k} \binom{80-20}{n-k}}{\binom{80}{n}}.$$

Jos pelaaja valitsee yhden numeron, $n = k = 1$ ja $P(k) = 0,25$. Reilut kertoimet olisivat siis 3:1, mutta talo maksaa 2,2:1, jolloin odotusarvo on 0,8. Arvolla $n = 2$ molempien numeroiden täytyy olla valittujen 20 numeron joukossa, joten kun $n = k = 2$, $P(k) = 0,06$. Talon kertoimet ovat 12:1, joten odotusarvo tälle on 0,782. Tyypillinen panostus on valita kymmenen numeroa, jolloin talo tarjoaa voiton, jos viisi tai useampi valituista numeroista osuu. Todennäköisyys valita 20 numeroa, joista kaikki osuu, on $\binom{80}{20}^{-1} = 2,83 \cdot 10^{-19}$. Tämän tapahtumisesta ei ole todisteita. (Epstein, 2009)

Tyypillinen **lotto** koostuu $m < n$ numeron nostamisesta joukosta $\{1, 2, \dots, n\}$. Osallistumismaksu oikeuttaa pelaajan valitsemaan m numeroa, joiden toivotaan vastaavan nostettuja numeroita. Tyypillisessä (amerikkalaisessa) pelissä $m = 6$ ja $n = 49$ (Epstein, 2009). Suomen lotossa $m = 7$ ja $n = 40$ (Veikkaus). Todennäköisyys P_k saada $k \leq m$ osumaa saadaan hypergeometrisesta jakaumasta

$$P_k = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

4.9 Harhaluuloja

Lopuksi luetellaan muutamia rahapelaamisessa yleisiä psykologisista vaikutteista seuraavia harhaluuloja. Oppimaton peluri on usein tunteikas ja hänen päätöksentekoaan ohjaavat virheelliset uskomukset. Peluri lisää henkilökohtaisen elementin tilanteeseen, jolla ei ole mitään tekemistä henkilökohtaisuuksien kanssa. Seuraavat kaksitoista harhaluuloa ovat yleisimpiä ja vahingollisimpia pelurille.

1. Taipumus yliarvioida vetoja, joissa on pieni todennäköisyys voittaa paljon ja aliarvioida vetoja, joissa on suhteellisen iso todennäköisyys voittaa vähän.
2. Taipumus tulkita onnistuneiden peräkkäisten riippumattomien tapahtumien todennäköisyyttä yhteenlaskuna kertolaskun sijaan. Todennäköisyyttä heittää tietty nopan numero pidetään kaksi kertaa todennäköisempänä kahdella heitolla verrattuna yhteen heittoon.
3. Voittoputken jälkeen tappio on väistämätön, ja toisinpäin.
4. Tapahtuman psykologinen todennäköisyys ylittää sen matemaattisen todennäköisyyden, jos tapahtuma on positiivinen, ja päinvastoin. Esimerkiksi jos todennäköisyys saada voittava lottokuponki ja todennäköisyys kuolla seuraavan vuoden aikana auto-onnettomuudessa olisivat molemmat yksi kymmenestä tuhannesta, niin ensimmäistä näistä pidetään todennäköisempänä.
5. Tapahtuman ennustetta ei voida irrottaa samanlaisista aikaisemmista tapahtumista niiden matemaattisesta riippumattomuudesta huolimatta.
6. Usean yhteenlasketun valinnan todennäköisyyden arvoa aliarvioidaan, ja kertolaskun todennäköisyyden arvoa yliarvioidaan.
7. Kun henkilö tarkkailee sarjaa erilaisia satunnaisesti tuotettuja tapahtumia kiinnostuneena taajuudesta, jolla jokainen tapahtuma esiintyy, hän yleensä yliarvioi harvinaisten tapahtumien esiintymistaajuutta ja aliarvioi yleisten tapahtumien esiintymistaajuutta. Näin ollen hän muistaa pidemmät voitto- ja tappioputket ja vähättelee lyhyen aikavälin putkien määrää.
8. Taipumus yliarvioida tarvittavan taidon määrää rahapelitilanteessa, joka vaatii sekä taitoa että tuuria.

9. Vahva taipumus yliarvioida suhteellisen suuresta populaatiosta valitun pienen otoskoon merkittävyyttä.
10. Lyhyen aikavälin tulokset osoittavat samaa taajuutta kuin pidemmän aikavälin tulokset.
11. "Onnen" konseptia pidetään suurena, jota säilytetään varastossa, ja se joko säilyy tai ehtyy.
12. "Epätavalliset" tapahtumat sekoitetaan pienen todennäköisyyden tapahtumiin. Esimerkiksi jos pelurilla on lähellä loton voittonumeroa oleva numero, hän saattaisi tuntea, että hänellä on käynyt erittäin huono tuuri menettää palkinto ja olla *niin lähellä voittoa*.

Edellisten lisäksi on olemassa muita harhaluuloja, jotka liittyvät läheisemmin taikauskoon kuin intuitiiviseen logiikkaan. Esimerkiksi se, että pelurin "asenne" vaikuttaa sattumanvaraisen tapahtuman lopputulokseen tai uskomus, että "nopat ovat kuumia." Pelurilla voi olla myös onnenumeroita, onnenvaatteita, onnenpäiviä ja onnenkavereita. (Epstein, 2009)

5 Empiirinen ongelma-analyysi

Empiirisen ongelma-analyysin eli tarveanalyysin kuuluisi vastata teoreettisesta ongelma-analyysistä nousseisiin tarpeisiin, mahdollisuuksiin ja haasteisiin (Pernaa & Aksela, 2013). Teoreettisesta ongelma-analyysistä tuli huomattava määrä erilaista teoriaa, joten sen karsimiselle on ehdottomasti tarvetta kurssin suunnittelua ajatellen. Niinpä tässä vaiheessa tutkimusta tutustuttiin lukion opetussuunnitelman perusteisiin 2019, koska kurssin suunnittelu sen pohjalta on järkevää ja siihen tutustuminen auttaa rajaamaan kurssin sisältöä. Kurssista on tarkoitus tehdä mahdollisimman mielekäs opiskelijoille, joten opetussuunnitelmasta etsittiin myös siihen liittyvää tietoa. Lisäksi tällaisen kurssin kehittämiseksi etsittiin lisää perusteluita.

5.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019: Yleinen osa

Uudessa lukion opetussuunnitelmassa kurssien laajuus mitataan tuntien sijaan opintopisteissä. Kahden opintopisteen laajuinen kurssi vastaa $22,8 \times 75$ minuutin oppituntia. Laaja-alaisia osaamisen tavoitteita ovat hyvinvointiosaaminen, vuorovaikutusosaaminen, monitieteinen ja luova osaaminen, yhteiskunnallinen osaaminen, eettisyys ja ympäristöosaaminen sekä globaali- ja kulttuuriosaaminen. Eheyttäminen on huomioitu jäsentelemällä kursseja 1–3 opintopisteen moduuleiksi, jotka voivat koostua yhdestä tai useammasta oppiaineesta. Opiskelijoiden osallisuutta ja yhteistyötä korostetaan. (Opetushallitus, 2019)

Opetussuunnitelman yleisestä osasta poimittiin muutamia lukiokoulutuksen tehtäviä, jotka liittyvät tutkielman aiheeseen. Yksilöt pystyvät kriittiseen ja itsenäiseen ajatteluun ja osaavat toimia vastuullisesti. Lukio-opetus valmistaa opiskelijaa ymmärtämään maailmassa vallitsevia keskinäisriippuvuuksia ja jäsentämään ilmiöitä. Opiskelija rakentaa maailmankuvaansa ja -katsomustaan. Lukiokoulutus kehittää valmiuksia elämänhallintaan. (Opetushallitus, 2019)

Opetussuunnitelman arvoperustasta poimittiin myös muutamia arvoja. Opetussuunnitelman mukaan sivistys on yksilöiden taitoa tehdä ratkaisuja tietoon perustuvan harkinnan avulla ja siihen kuuluu taito käsitellä inhimillisten pyrkimysten ja todellisuuden välisiä ristiriitoja ratkaisuja etsien. Sivistys ilmenee mm. todellisuuden hahmottamisena. (Opetushallitus, 2019)

Oppimisprosessin aikana opiskelija tulkitsee ja analysoi eri muodoissa esitettyä dataa, informaatiota ja tietoa aikaisempien tietojensa pohjalta. Oppiminen tapahtuu vuorovaikutuksessa muiden opiskelijoiden ja opettajan kanssa. Opiskelijaa ohjataan soveltamaan aikaisemmin oppimaansa tietoa muuttuvissa tilanteissa. Opiskelija osaa arvioida ja kehittää ajattelutaitojaan. Digitaalisia opiskeluympäristöjä ja oppimateriaaleja käytetään opiskeluiden apuna. Oppiainerajat ylittävää osaamista rakennetaan erilaisilla ratkaisuilla. Oppimaan oppimista kehittävät tutkimiseen, kokeilemiseen ja ongelmanratkaisuun perustuvat opiskelumenetelmät. Opiskelijoiden kriittistä ja luovaa ajattelua pyritään kehittämään. Opiskelijoiden tiedot ja taidot kytketään todellisiin ilmiöihin. Riittävän haastaviin avoimiin ja ongelmiin tarttumiseen rohkaistaan. (Opetushallitus, 2019)

5.2 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019: Matematiikan osa

Opiskelija saa matematiikan opiskelusta valmiudet ymmärtää, soveltaa ja arvioida matemaattista tietoa. Matematiikan merkitystä nykyajan kulttuureissa ohjataan ymmärtämään opetuksella. Opetus kehittää laskemisen lisäksi mm. luovan ajattelun ja ilmiöiden mallintamisen ja ennustamisen taitoja sekä ongelmanratkaisutaitoja. Opetuksessa tutkitaan matematiikan ja arkielämän välisiä yhteyksiä. Aiheet valitaan niin, että ne ovat opiskelijoille kiinnostavia. Opiskelijaa ohjataan ymmärtämään matematiikan merkitystä historiassa ja eri kulttuureissa. Yleisiä matematiikan opetuksen tavoitteita on mm. antaa opiskelijoille myönteisiä kokemuksia, totuttaa opiskelijaa tekemään otaksumia ja tutkimaan niiden oikeellisuutta sekä harjaannuttaa opiskelijaa käyttämään erilaisia ongelmanratkaisutapoja ja matemaattisia menetelmiä. (Opetushallitus, 2019)

Muilla matematiikan kursseilla opittuja hyödyllisiä taitoja tätä tulevaa kurssia ajatellen on esimerkiksi MAA5-kurssilta eksponenttifunktiot ja -yhtälöt, MAA6-kurssilta funktion raja-arvo, jatkuvuus ja derivaatta, MAA8-kurssilta keskihajonta, klassinen ja tilastollinen todennäköisyys, permutaatiot ja kombinaatiot, todennäköisyyden laskusäännöt, binomijakauma, diskreetti todennäköisyysjakauma ja sen odotusarvo, MAA11-kurssilta konnektiivit sekä MAA12-kurssilta jatkuvat jakaumat ja normaalijakauma.

6 Kehittämispöessi

Tässä luvussa kuvataan tutkimuksen kehittämispöessi teorian hankinnasta tuotoksen valmistumiseen yksityiskohtaisesti. Luvut 3 ja 4 sisältävät matematiikan ja rahapelaamisen teoreettiset ongelma-analyysit, jonka pohjalta kurssi rakennetaan. Luvussa 5 täydennettiin teoreettisten ongelma-analyysien teoriaa lukion opetussuunnitelman perusteiden 2019 empiirisellä ongelma-analyysillä, joka tehtiin teoreettisesta ongelma-analyysistä nousseiden tarpeiden, haasteiden ja mahdollisuuksien mukaan. Näiden pohjalta tuotettiin kurssisuunnitelma lukion pitkän matematiikan valinnaiseen kurssiin, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka, sekä esimerkki yhdestä kurssin oppitunnista.

Kurssin kehittämisen idea lähti liikkeelle Robert Peardin (2008) artikkelista, jossa hän oli tehnyt oppimateriaalin Australian Queenslandin osavaltioon rahapelaamisen matematiikasta. Artikkelin lopussa kerrottiin, että kokeilu oli onnistunut ja että sen sisällyttäminen myös muiden maiden matematiikan tunneille voisi olla mahdollista. Muihin vastaaviin tutkimuksiin tutustumisen jälkeen oli ilmeistä, että tällaisen kurssin toteuttaminen ei ainoastaan olisi mahdollista Suomessa, mutta siitä saattaisi olla oikeasti hyötyä opiskelijoille monella tapaa. Niinpä teoreettiseen ongelma-analyysiin koottiin lähteitä, joissa oli tutkittu rahapelaamisen kulttuuria Suomessa ja muita Peardin tekemän kurssin kaltaisia rahapelaamisen matematiikan kursseja. Näiden lisäksi kurssille tarvittiin myös matemaattista sisältöä, josta suurin osan saatiin Epsteinin (2009) kattavasta kirjasta. Kootuista lähteistä kirjoitettiin kattavat muistiinpanot, joiden avulla kirjoitettiin molemmat teoreettiset ongelma-analyysit.

Jo teoreettisia ongelma-analyysejä kirjoittaessa jouduttiin karsimaan paljon teoriaa pois kurssin aihealueen rajaamiseksi, mutta siitä huolimatta teoriaosuutta tuli paljon. Lukion opetussuunnitelman perusteisiin 2019 oli joka tapauksessa tarkoitus tutustua ennen kurssin kehittämistä, joten siitä päätettiin tässä vaiheessa kirjoittaa oma luku empiirisenä ongelma-analyysinä. Sen avulla saatiin rajattua teoriaosuutta vieläkin tarkemmaksi ja siitä saatiin lisää perusteita kurssin kehittämislle.

Lukion opetussuunnitelman (Opetushallitus, 2019) perusteella päädyttiin kurssiin, joka koostuu kahdestakymmenestä kahdesta 75 minuutin oppitunnista. Kurssin suunnittelu aloitettiin sen rakenteen kirjoittamisella ja oppituntien sijoittamisella taulukkoon.

Ensimmäiselle tunnille sijoitettiin kurssin tavoitteet, sisältö, toimintamallit ja arviointi sekä harhaluulot, koska niiden käyminen heti kurssin alussa auttaa opiskelijoiden motivoinnissa ja kurssin aiheisiin johdattelussa. Rahapelaaminen on opetettavana aiheena varovaisuutta vaativa, koska väärin opetettuna se saattaa jopa rohkaista opiskelijaa holtittomaan raha-/uhkapelaamiseen, vaikka tarkoituksena on ennaltaehkäistä sitä. Myös sen takia kurssin tavoitteiden, sisällön ja toimintamallien sekä yleisten harhaluulojen sijoittaminen ensimmäiselle oppitunnille on järkevää. Peliteoria sijoitettiin myös kurssin alkupäähän, koska sen opiskeleminen ennen rahapeleihin siirtymistä on ilmeistä. Lisäksi kurssin alkupäähän sijoitettiin muutama kertausoppitunti, joissa kerrataan jo opittuja asioita todennäköisyydestä ja tilastoista, koska niiden osaaminen auttaa kurssin edetessä. Kolikkopelit sijoitettiin ennen Parrandon periaatetta, koska sitä on helpointa havainnollistaa kolikkopelien avulla. Kolikot sijoitettiin ennen noppia ja nopat ennen kortteja niiden ominaisuuksien perusteella (kolikolla on kaksi puolta, nopalla on kuusi sivua ja pelikortteja on 52 kappaletta). Tilastolliset pelit ja muut pelit sijoitettiin kurssin loppupäähän. Kurssin viimeiset oppitunnit käytetään ryhmä-/paritöiden esittelylle, koska silloin opiskelijoilla on enemmän aikaa niiden valmisteluun. Arvioinnissa päädyttiin ryhmätyöhön kurssikokeen sijaan, koska tutkijan mielestä se sopii paremmin tämän tapaiselle soveltavalle kurssille, johon ei ole vielä tehty kunnollista oppimateriaalia kuten oppikirjaa. Esimerkkioppitunnin valinta on perusteltu tarkemmin Kappaleessa 7.2.

7 Kehittämistuotos

Tässä luvussa esitellään kehittämistuotos eli kurssisuunnitelma lukion pitkän matematiikan valinnaiselle kurssille, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka, sekä yksi yksityiskohtaisemmin suunniteltu esimerkkioppitunti.

7.1 Kurssisuunnitelma

h	Tunnin aihe
1	Kurssin tavoitteet, sisältö, toimintamallit ja arviointi. Harhaluulot.
2	Peliteoria. -Peli, strategia, toimijat, voitto, nollasummapeli, voittomatriisi.
3	Hyötyfunktio. Prospektiteoria.
4	Todennäköisyyslaskennan kertausta. -Klassinen ja ehdollinen todennäköisyys. Satunnaiskulku.
5	Erilaiset todennäköisyysjakaumat. -binomijakauma, geometrinen jakauma, hypergeometrinen jakauma ja Poissonin jakauma.
6	Tilastolaskennan kertausta. -Odotusarvo, varianssi, keskihajonta, suurten lukujen laki, tilastolliset jakaumat.
7	Kolikkopelit. -Kolikon puolueellisuus, binomijakauma.
8	Kolikkopelit. -Putket, erilaiset kolikko-ongelmat.
9	Kolikkopelien analysointia. -Pietarin paradoksi, Odd Man Out, Kaksikäinen rosvo.
10	Parrandon periaate.
11	Noppapelit. -Noppien virheellisyys, χ -testi, luottamusväli.
12	Noppapelit. -Dé Mérén ongelma, Newtonin-Pepysin ongelma, geometrinen jakauma.
13	Noppapelin analysointi. -Maksimointipeli (Liite 1).
14	Korttipelit. -Satunnaisuus, sekoittaminen, modulo.
15	Korttipelit. -Kombinaatiot ja permutaatiot.
16	Korttipelien analysointia. -Pokeri, Texas Hold'em.
17	Blackjack. -Optimaalisen strategian analysointi.
18	Tilastolliset pelit.

	-Strateginen valinta -Osakemarkkinat.
19	Muut rahapelit. -Keno ja Lotto, kombinaatiot ja permutaatiot.
20	Muiden rahapelien analysointia. -Morra ja Kolmen sormen Morra. -Monty Hallin paradoksi ja Seitsemän oven Monty.
21	Ryhmä-/paritöitä.
22	Ryhmä-/paritöitä.

Kuva 11. Rahapelaamisen matematiikan kurssisuunnitelma.

Kurssi koostuu kahdestakymmenestä kahdesta 75 minuutin mittaisesta oppitunnista. Osa oppitunneista on ”perinteisempiä” matematiikan oppitunteja, joissa alkutunnista opitaan uutta teoriaa ja lopputunnista lasketaan teoriaan liittyviä laskuja, sekä pelien analysointitunneista, jossa opiskelijat pääsevät analysoimaan rahapelejä pienissä ryhmissä. Kurssin arviointi perustuu opetuksen aikaiseen formatiiviseen arviointiin sekä summatiiviseen arviointiin, joka pohjautuu tehtyjen kotitehtävien arvioimiseen ja ryhmä-/parityöhön, jota arvioi niin opettaja kuin opiskelijoiden vertaiset. Tämän tyyppistä kurssia voisi arvioida myös kokeella, mutta sitä varten tarvittaisiin kunnollinen kurssimateriaali. Kurssin materiaaliksi voisi tämän tutkimuksen teoriaosuuden pohjalta kehittää esimerkiksi kurssimonisteen tai vaikka PowerPoint -diaesityksen jokaiselle oppitunnille.

Tuntien sisältöön voi ja kannattaa lisätä aiheeseen sopivaa oheismateriaalia, kuten oikeasti tapahtuneita esimerkkejä, elokuvakohtauksia, kaunokirjallisuuden lukuja, uutisia ja muuta vastaavaa materiaalia. Tunti- ja kotitehtäviä suunnitellessa kannattaa käyttää oikeita esimerkkejä keksittyjen sijaan. Rahapeleihin liittyviä välineitä, kuten kolikoita, noppia ja pelikortteja kannattaa varata riittävä määrä. Ryhmä-/paritöiden ideana on tutustua johonkin kurssin teemaan liittyvään aihealueeseen, kuten rahapeliin, paradoksiin, ongelmaan tai strategiaan, ja tehdä siitä pienessä ryhmässä tai parin kanssa esitys, joka kertoo/opettaa/havainnollistaa/tutustuttaa muut opiskelijat kyseiseen aiheeseen. Aiheen voi valita ehdottamalla sitä itse (opettajan hyväksymänä) tai valitsemalla sen opettajan tekemästä listasta erilaisia rahapelejä, ongelmia, paradokseja ja strategioita, ja työn tekemiseen on aikaa kurssin viimeisille tunneille asti, jolloin ne esitetään muulle ryhmälle. Muut opiskelijat arvioivat muiden ryhmien/parien tekemät työt vertaisarviointilomakkeilla.

7.2 Esimerkkioppitunti

Esimerkkioppitunniksi valittiin tunti numero 13, jonka aiheena on noppapelin (Maksimointipeli) analysointi. Se valittiin siitä syystä, että kurssilla on tarkoitus toteuttaa muitakin pelin analysointiin perustuvia oppitunteja ja sellaisen tunnin toteutuksen ideasta haluttiin antaa esimerkki.

Oppitunnin alussa käydään edellisen tunnin kotitehtävät läpi, jos niitä annettiin. Sen jälkeen opettaja selittää Maksimointipelin säännöt ja esittää pelin analysointiin liittyvät kysymykset, joihin olisi tarkoitus löytää vastaukset ryhmässä. Kysymykset ovat 1) Onko peli voittava, tasapuolinen vai häviävä heittovuorossa olevalle pelaajalle, 2) Mikä on yhden nopan heiton odotusarvo, 3) Mikä on kahden/kolmen/neljän/viiden nopan summan odotusarvo, 4) Mikä voisi olla optimaalinen strategia pelille, ja 5) Mikä on pelin odotettu voitto? Kysymysten esittämisen jälkeen opiskelijat jakautuvat sopivan kokoiisiin ryhmiin (2–4 opiskelijaa per ryhmä on varmaan optimaalinen). Ryhmille jaetaan nopat, joiden avulla peliä voidaan testata. Opiskelijat voivat aluksi miettiä hypoteeseja kysymyksiin ja sen jälkeen testata niitä pelaamalla ja laskemalla. Hypoteesit, laskut ja vastaukset kysymyksiin voi kirjoittaa ylös esimerkiksi käsin vihkoon tai läppäriin. Lopputunnista keskustellaan saaduista vastauksista ja käydään lopuksi oikeat vastaukset yhdessä läpi. Maksimointipelin säännöt ja sen analyysi löytyy liitteistä (Liite 1).

Muut vastaavanlaiset pelin analysointitunnit voisi toteuttaa samalla kaavalla, eli pelin sääntöjen läpikäynnillä, kysymysten esittämisellä, hypoteesien tekemisellä, testauksella, laskemisella ja yhteisellä yhteenvedolla (analyysillä).

8 Jatkokehittäminen

Rahapelaamisen matematiikka -kurssia voidaan potentiaalisesti kehittää ainakin kolmella tavalla. Ensimmäinen ja ehkä ilmeisin tapa kehittää kurssia on luoda sille suomenkielinen oppimateriaali, kuten luentomoniste tai oppikirja. Oppimateriaali voisi koostua rahapelaamisen matematiikan teoriasta ja teoriaan liittyvistä laskutehtävistä, joista joitakin voitaisiin laskea oppitunnin aikana ja joista osa jäisi kotitehtäviksi. Oppimateriaalissa voisi olla myös osuus, jossa selitetään joidenkin rahapelien sääntöjä.

Toinen tapa kehittää kurssia on muuttaa sen kohderyhmää, eli tehdä siitä lyhyen matematiikan kurssi. Lyhyen matematiikan kurssit ovat jo nyt pitkän matematiikan kursseihin verrattuna enemmän arkielämän konteksteihin taipuvaisia, joten tämän tyylinen kurssi voisi sopia hyvin niiden joukkoon. Joidenkin rahapelien matemaattiset teoriat saattavat olla liian haastavia lyhyttä matematiikkaa lukeville opiskelijoille, mutta pienillä muutoksilla kurssi saataisiin varmasti soveltumaan myös heille.

Kolmas tapa kehittää kurssia on yhdistää se jonkun toisen oppiaineen kanssa ja tehdä siitä lukion moduulikurssi. Yksi mahdollisuus tähän olisi yhdistää se terveystiedon kanssa. Terveystiedon päihdeteemat on yksi ilmeinen yhdistävä tekijä rahapelaamisen kanssa, mutta myös rahapelaamisen henkinen puoli, kuten tappioihin suhtautuminen, voisi olla yksi hyvä teema tällaisella kurssilla. Tutkija on itse lukenut joitakin rahapelaamisen henkisestä puolesta kertovia kirjoja, ja niistä löytyisi varmasti paljon keskusteltavaa tällaisen kurssin oppitunneille. Nuorten rahapelaamisesta aiheutuvat ongelmat ja riippuvuus olisivat tietenkin toinen selvä aihealue kurssin terveystiedon osuuksille.

9 Johtopäätökset, luotettavuus ja pohdinta

Tämän tutkimuksen tavoitteena oli kehittää lukion pitkän matematiikan valinnainen kurssi, jonka aiheena on rahapelaamisen matematiikka. Kurssin tarkoituksena on ennaltaehkäistä nuorten rahapeli/uhkapeliongelmaa ja samalla tarjota mielekäs vaihtoehto matematiikan opiskelulle. Tutkimusta ohjasi kolme kysymystä, jotka linkittyvät tutkimuksen kolmeen osa-alueeseen eli teoriaan, kehittämisprosessiin ja tuotokseen. Ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä kysyttiin, että miksi juuri tällainen kurssi on tarpeellinen, toisessa kysymyksessä kysyttiin, että mitä tällaisen kurssin suunnittelussa pitää ottaa huomioon, ja kolmannessa kysymyksessä kysyttiin, että soveltuuko tällainen kurssi lukion pitkän matematiikan opetukseen. Tutkimuskysymysten ohjaamana kurssia varten kerättiin vankka teoriapohja, minkä pohjalta kehitettiin kurssin kurssisuunnitelma ja yksi kurssin esimerkkioppitunti.

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen löydettiin monia perusteita. Rahapelaamisen määrä on kasvanut jatkuvasti Suomessa 1990-luvun alusta lähtien, mutta peliongelmiin ehkäisyyn ei ole panostettu Suomessa tarpeeksi (Kuuluvainen ym., 2012; Jaakkola, 2009). Nuorten osuus suomalaisten rahapelaamisesta on varsinkin 16-vuotiaiden poikien kohdalla merkittävä (Kinnunen ym., 2019). Nuoret ovat muita ikäryhmiä alttiimpia rahapeliongelmiille (Raisamo & Lintonen, 2013). Rahapelaamisen teorian opettamista matematiikassa on tutkittu maailmalla positiivisin tuloksin. Australiassa on otettu Queenslandin osavaltioissa käyttöön oppimateriaali peruskoululaisten matematiikan tunneilla, jonka tarkoituksena oli ehkäistä nuorten rahapelaamista (Peard, 2008). Yhdysvalloissa on jo tarjottu lukiolaisille kursseja rahapelaamisen matematiikasta jo vuosia (Ethier & Hoppe, 2019). Yleisiä matematiikan opetuksen tavoitteita on antaa opiskelijalle myönteisiä kokemuksia ja totuttaa opiskelijaa tekemään ja tutkimaan otaksumia (Opetushallitus, 2019).

Toiseen tutkimuskysymykseen on vastattu kehittämisprosessin avulla. Kurssin suunnittelun alkuvaiheessa on varmistettu teoreettisella ongelma-analyysillä, että opetettavaa materiaalia löytyy tarpeeksi ja että aiheen opettamisesta on aikaisempaa tutkimustietoa, joka puoltaa kehittämisprosessin jatkamisen puolesta. Rahapelaamisen matematiikkaan löytyi runsaasti materiaalia, joten sitä täytyi karsia moneen otteeseen: ensin muistiinpanoja kirjoittaessa, sitten teoreettista ongelma-analyysiä kirjoittaessa, empiiristä ongelma-analyysiä kirjoittaessa ja lopulta

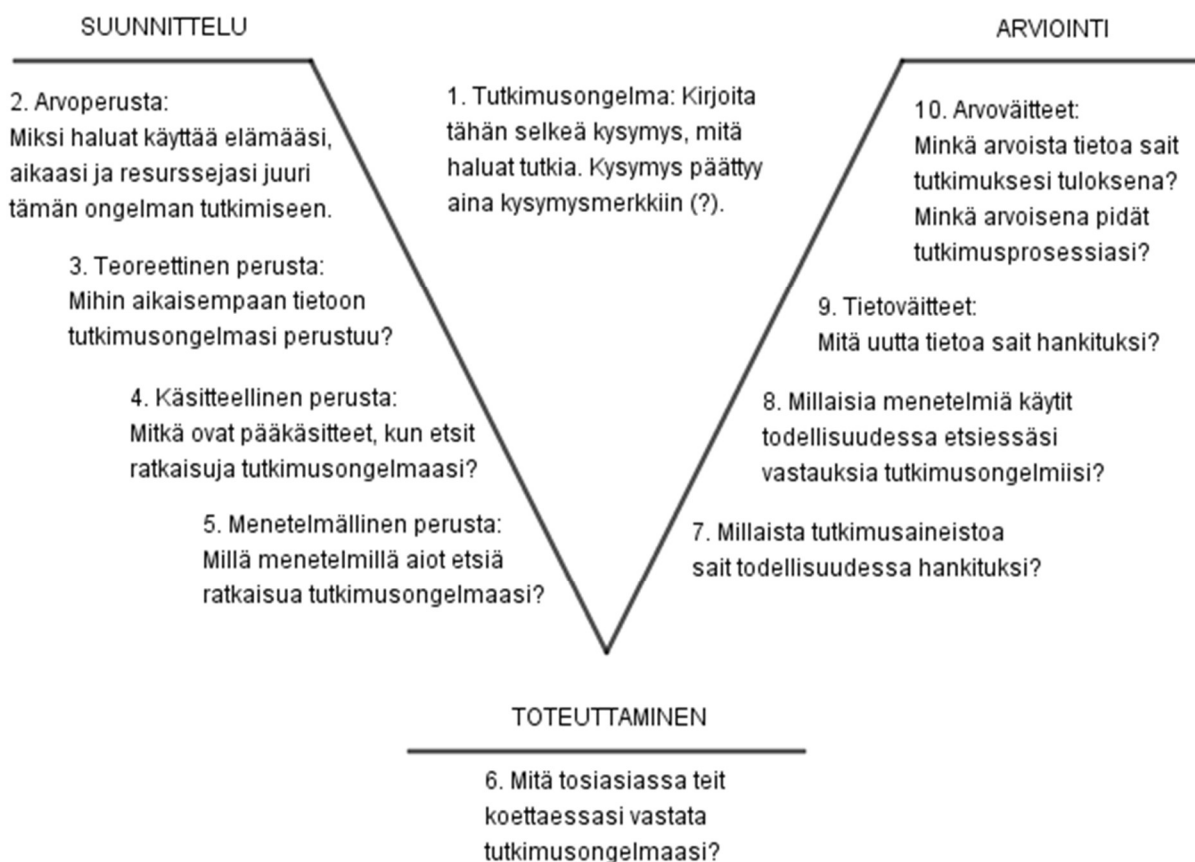
kurssisuunnitelmaa kirjoittaessa. Lopulta jäljelle jäi mielestäni oleellisimmat tällaiselle kurssille kuuluvat asiat. Tällaista kurssia suunnitellessa täytyy tietenkin ottaa huomioon myös yleisiä kurssin rakenteellisia seikkoja: kuinka monta oppituntia on käytössä, mitä sisältöjä mihinkin oppituntiin kuuluu, mitä oppimateriaalia ja välineitä tunneilla tarvitaan ja miten kurssi arvioidaan. Oppituntien sisällöt jaetaan niin, että niistä muodostuu järkevä johdonmukainen kokonaisuus.

Kolmanteen tutkimuskysymykseen vastattiin kehittämistuotoksen avulla. Kehittämistuotoksesta selvästi näkee, että jokainen oppitunti sisältää kurssin aiheeseen liittyvää ja lukion matematiikan oppitunnille sopivaa teoriaa, josta osa on opiskelijoille tuttua entuudestaan ja osa on täysin uutta. Minkään uusista valituista matematiikan konsepteista ei pitäisi olla lukiolaisen kapasiteettia ylittävää. Kurssia suunnitellessa on pyritty ottamaan huomioon se, että kurssi olisi mielekäs oppimiskokemus opiskelijoille. Aiheen formaali matemaattinen esitys ja oppijan kokemusmaailma kohtaavat pelien merkeissä, aiheen käsittely on todentuntuista ja mielenkiintoa herättävää ja opiskelijat pääsevät itse kokeilemaan ja analysoimaan pelejä. Kaiken tämä perusteella kurssi sopisi ehdottomasti lukion pitkän matematiikan valinnaisten kurssien tarjontaan. Yhteenvetona kolmesta tutkimuskysymyksestä voidaan sanoa, että nuorten rahapelaamisen ehkäisy on tärkeä mutta vähän tutkittu aihe, johon koulumaailmassa voitaisiin vaikuttaa tällaisella rahapelaamisen matematiikan kurssilla, joka samalla tarjoaisi mielekästä tapaa opiskella matematiikkaa.

Kehittämistutkimuksen luotettavuuden tarkastelussa käytetään yleensä (ja myös tässä tutkimuksessa) Lincolnin ja Guban (1985) kehittämää neljän luokan sisältävää luokittelua. Nämä neljä luokkaa ovat uskottavuus, siirrettävyys, luotettavuus ja varmuus sekä vahvistettavuus (Tuomi & Sarajärvi, 2009, 136–139). Tutkimus on uskottava, koska tutkimus on toteutettu kolmen tutkimuskysymyksen pohjalta ja tutkimus vastaa jokaiseen niistä. Uskottavuutta tuo myös tutkimusprosessin tarkka kuvaus teorian keräämisestä tuotoksen valmistumiseen asti. Tutkimuksen siirrettävyys toteutuu, koska tutkimuksen tuotoksena on selkeästi rakennettu kurssisuunnitelma ja esimerkkioppitunti, joiden avulla kuka tahansa tutkimuksen lukenut matematiikan opettaja voisi opettaa kurssin. Vaikka tutkimus onkin vain yhden kehittämissyklin mittainen, sen eri osia on luettu, tarkastettu ja korjattu tutkijan toimesta useampaan otteeseen sekä sen tulee tarkastamaan kaksi maisterintutkielmaa ohjaavaa opettajaa,

mikä tekee tutkimuksesta luotettavan ja vahvistettavan. Tutkimuksessa esiintyvät teorit ja johtopäätökset on esitetty niin, että lukija pystyy seuraamaan tutkijan päättelyä, mikä luo tutkimukselle lisää vahvistettavuutta.

Lopuksi tutkimusta reflektoidaan Mauri Åhlbergin (2013) kehittämän parannetun Vee-heuristiikan avulla. Se koostuu kymmenestä korkealaatuiseen oppimiseen ja ajatteluun johdattelevasta kysymyksestä, jotka on aseteltu V-kirjaimen muotoiseen malliin (Kuva 12). Vee-heuristiikka on arvokas kehittämistyön väline, jolla saadaan tietoja kehittämistutkimuksen arvoista.



Kuva 12. Kehittämistutkimuksen kymmenen vaihetta korkealaatuiseen ajatteluun.

1. Onko rahapelaamisen matematiikasta mahdollista kehittää lukion pitkän matematiikan kurssi ja jos on, niin mitä hyötyä siitä on ja mitä sen kehittäminen vaatii?
2. Haluan käyttää aikaani tämän tutkimiseen, koska aihe on minua itseä kiinnostava ja koska nuorten rahapelaaminen on tärkeä tutkimusaihe, jota on tutkittu suhteellisen vähän.

3. Tutkimus perustuu lukemaani Robert Peardin artikkeliin, jossa Australiassa otettiin Queenslandin osavaltioiden peruskouluissa käyttöön rahapelien matematiikan oppimateriaali, jonka toteutus onnistui ja saattaisi onnistua myös muissa valtioissa.
4. Pääkäsitteet ovat rahapelaaminen, matematiikka, rahapelaamisen matematiikka, matematiikan opetus, kurssin kehittäminen.
5. Aion etsiä ratkaisua tutkimusongelmaani lukemalla aiheeseen liittyviä artikkeleita, kirjoja ja tutkimuksia.
6. Tosiasiassa tein juuri kuten edellä mainitsin. Kokosin vankan teoriapohjan erilaisista lähteistä, joissa on tutkittu rahapelaamisen matematiikan teoriaa ja opetusta.
7. Sain hankituksi artikkeleita, kirjoja, tutkimuksia ja lakitekstejä kehittämistutkimuksesta, matematiikan teoriasta, rahapelaamisen teoriasta, rahapelaamisen matematiikan teoriasta, peliteoriasta, matematiikan opetuksen teoriasta, rahapelaamisen kulttuurista ja kurssin suunnittelusta.
8. Käytin huomattavan määrän aikaa lähteiden keräämiseen ja niistä muistiinpanojen kirjoittamiseen, mutta siitä oli suunnaton hyöty tutkimuksen kirjoittamis- ja kehittämisvaiheessa.
9. Kehitin kokonaisen matematiikan kurssin suunnitelman rahapelaamisen matematiikasta, joka on suhteellisen vähän tutkittu mutta tärkeä aihe. Kehittämisprosessin yhteydessä opin itse paljon kehittämistutkimuksesta, tutkimuksen tekemisestä ylipäänsä ja matematiikan opetuksen teoriasta.
10. Sain arvokasta tietoa suomalaisten nuorten tilanteesta rahapelaamisesta koskien ja sain tuotettua kehittämistuotoksen, jonka avulla kuka tahansa muu matematiikan opettaja voisi hyödyntää matematiikan opetuksessa. Tutkimus oli kokonaisuutena sekä tuloksiltaan että prosessiltaan arvokas.

LÄHTEET

Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-Based Research: A Decade of Progress in Education Research?. *Educational Researcher*, 41(1), 16-25.

Arpajaislaki 23.11.2011/1047. Luettavissa:
<https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2001/20011047>. Luettu: 27.3.2021.

Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.

Barab, S., & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.

Bruner, J. S. (1974). *The Relevance of Education*. Bungay Suffolk: Penguin Education.

DiSessa, A. A., & Cobb, P. (2004). Ontological innovation and the role of theory in design experiments. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 77-103.

Edelson, D. C. (2002). Design Research: What we learn when we engage in design. *The Journal of the Learning Sciences*, 11, 105-121.

Epstein, R. A. (2009). *The Theory of Gambling and Statistical Logic* (2. painos). Cambridge: Academic Press.

Ethier, S. N., & Hoppe, F. M. (2019). Teaching a university course on the mathematics of gambling. *arXiv preprint arXiv:1911.03008*.

Fabricand, B. P. (1979). *The Science of Winning: A Random Walk on the Road to Riches*. Van Nostrand Reinhold.

Galperin, P. J. (1957). An experimental study in the formation of mental actions. (käänt. N. Parsons) Teoksessa B. Simon (Ed.), *Psychology in the Soviet Union* (s. 213–225). London: Routledge and Kegan Paul.

Garfield, J. B., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-59.

Jaakkola, T. (2009). Finland. Teoksessa G. Meyer, T. Hayer & M. D. Griffiths (Eds.) *Problem Gambling in Europe: Challenges, Prevention, and Interventions*. (s. 53-70). New York: Springer.

Jacobs, D. F. (2000). Juvenile gambling in North America: An analysis of long term trends and future prospects. *Journal of Gambling Studies*, 16(2), 119-152.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1999). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrika*, 47, 263-291.

Keller, J. B. (1986). The Probability of Heads. *American Mathematics Monthly*, 93, 191-197.

Kinnunen, J. M., Pere, L., Raisamo, S., Katainen, A., Myöhänen, A., Lahti, L., ... & Rimpelä, A. (2019). Nuorten terveystapatutkimus 2019: Nuorten tupakkatuotteiden ja päihteiden käyttö sekä rahapelaaminen.

Koskinen, R. (2016). Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana: Systemaattinen analyysi *Journal for Research in Mathematics Education* aikakauslehden artikkelien pohjalta.

Kuuluvainen, A., Koponen, A., Oikarinen, E., Ranki, A., Ryömä, A., Laihin, P., & Lehtonen, A. (2012). Suomen rahapelimarkkinat.

Leino, J. (1977). *Matematiikan didaktiikka 1*. Helsinki: Kirjayhtymä.

Lincoln, Y. S. & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.

Maslov, S., & Zhang, Y. C. (1998). Optimal investment strategy for risky assets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1(03), 377-387.

Minor, D. (2003). Parrando's Paradox - Hope for Losers!. *The college Mathematics Journal*, 34(1), 15-20.

Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet*. Helsinki: Opetushallitus.

Peard, R. (1996). Difficulties with teaching probability. *Teaching Mathematics*, 21(1), 20-24.

Peard, R. (2008). Teaching the mathematics of gambling to reinforce responsible attitudes towards gambling. Teoksessa *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Mexico.

Pernaa, J. (2013). Kehittämistutkimus tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa, toim. *Kehittämistutkimus opetuslalla* (s. 9-26). Jyväskylä: PS-kustannus Opetus 2000.

Pernaa, J., & Aksela, M. (2013). Kehittämistutkimus pro gradu-tutkielman tutkimusmenetelmänä. Teoksessa J. Pernaa, toim. *Kehittämistutkimus opetuslalla* (s. 181-200). Jyväskylä: PS-kustannus Opetus 2000.

Raisamo, S., & Lintonen, T. (2013). Nuorten rahapelihaitat ja pelaamiseen liittyvät harhakäsitykset.

Rogers, C. R. (1969). *Freedom to learn. A View of What Education Might Become*. Columbus, Ohio: Merrill.

Salonen, A., Hagfors, H., Lind, K., & Kontto, J. (2020). Rahapelaaminen ja peliongelmat: Suomalaisten rahapelaaminen 2019: Rahapelien pelaaminen riskitasolla on vähentynyt.

Schlesinger, D. (2005). *Blackjack Attack* (3. painos). RGE Publishing, Ltd.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. Teoksessa D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (s. 465-494). New York: MacMillan.

Suomen rikoslaki 19.12.1889/39. Luettavissa: <https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1889/18890039001>. Luettu 27.3.2021

Thorp, E. O., & Walden, W. E. (1973). The fundamental theorem of card counting with applications to trente-et-quarante and baccarat. *International Journal of Game Theory*, 2(1), 109-119.

Truran, K. (1997). Beliefs about teaching stochastics held by primary pre-service teaching students. Teoksessa F. Biddulph & K. Carr, (Eds.), *People in mathematics: Math. Education Research Group of Australasia 20th Conf. Proc.* (s. 538-545). Waikato, New Zealand: Math. Education Research Group of Australasia.

Tuomi, J. & Sarajärvi, A. (2009). *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi.

Varvio, S. (2007). *Katsaus Suomen rahapelijärjestelmään*. Stakes.

Veikkaus. Lotto lyhyesti. Luettavissa: <https://www.veikkaus.fi/fi/lotto/ohjeet>. Luettu: 27.3.2021.

Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 53(4), 5-23.

Williams, R. J., & Connolly, D. (2006). Does learning about the mathematics of gambling change gambling behavior?. *Psychology of Addictive Behaviors*, 20(1), 62-68.

Wiske, M. S. (1998). What is teaching for understanding? Teoksessa M. S. Wiske (Ed.), *Teaching for understanding: Linking research with practice* (s. 61-86). San Francisco: Jossey-Bass Publishing.

Åhlberg, M. (2013). Akateemiset ammatilaiset oman työnsä ja sen edellytysten tutkijoina ja kehittäjinä. Teoksessa J. Pernaa, toim. *Kehittämistutkimus opetuslalla* (s. 89–120). Jyväskylä: PS-kustannus Opetus 2000.

LIITTEET

Liite 1: Maksimointipeli

Maksimointipelissä pelaaja heittää viittä noppaa ja julistaa niistä yhden tai useamman jäätyneeksi, jonka jälkeen hän toistaa prosessia jäljelle jääneillä nopilla, kunnes kaikki viisi noppaa ovat jäätyneitä (viidellä tai vähemmällä heitolla). Tarkoituksena on maksimoida jäätyneiden noppien summa s , jonka perusteella pelaaja saa muilta pelaajilta $s - 24$ yksikköä ($24 - s$ yksikköä maksetaan muille pelaajille, jos $s < 24$). Tähän peliin voidaan määrittää optimaalinen strategia.

Yhden nopan heiton odotettu summa on

$$E(s_1) = (1/6)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3\frac{1}{2}.$$

Kahdella nopalla ja mahdollisuudella heittää toinen niistä uudelleen odotusarvo noppien summalle on

$$\begin{aligned} E(s_2) &= (1/36)[12 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \frac{1}{2} + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 \frac{1}{2} + 8 + 2 \cdot 9 \frac{1}{2} \\ &+ 2 \cdot 8 \frac{1}{2} + 2 \cdot 7 \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 \frac{1}{2} + 2 \cdot 7 \frac{1}{2} + 6 \frac{1}{2} + 2 \cdot 7 \frac{1}{2} + 2 \cdot 6 \frac{1}{2} + 2 \cdot 6 \frac{1}{2} + 5 \frac{1}{2} + 2 \cdot 5 \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}] \\ &\approx 8,236. \end{aligned}$$

Kolmella nopalla ja mahdollisuudella heittää kahta niistä uudelleen sekä yhtä vielä kolmannen kerran, odotusarvo noppien summalle on $E(s_3) \approx 12,425$.

Samoin **neljällä nopalla** ja mahdollisuudella heittää osaa niistä uudelleen, noppien summan odotusarvoksi saadaan $E(s_4) \approx 18,844$. **Viidellä nopalla** pelin sääntöjen mukaisesti noppien summan odotusarvoksi saadaan $E(s_5) \approx 24,442$. Näiden perusteella saadaan optimaalinen strategia. **Yhtä noppaa** tulisi heittää uudelleen, jos nopan tulos on 3, koska nopan odotusarvo on 3,5. **Kahta noppaa** heitettäessä yhdistelmät, joiden summa on 9 tai vähemmän, pitäisi ainakin osittain heittää uudelleen. Esimerkiksi tulos (4,4) heitetään uudelleen, tulos (5-4) jäädytetään ja tuloksesta (5-3) heitetään noppaa, joka antoi luvun 3. **Kolmea noppaa** heitettäessä kaikista yhdistelmistä, joiden summa on 15 tai alle, pitäisi tutkia erikseen heitetäänkö yhtä, kahta vai kolmea noppaa uudelleen. Esimerkiksi tuloksesta (5-5-3) jäädytetään (5-5) ja heitetään 3 uudelleen, ja tuloksesta (5-4-4) heitetään kaikki nopat uudelleen. Pelin ensimmäisen heiton jälkeen on mahdollisuus heittää **neljää noppaa** uudelleen.

Tällöin tutkitaan kaikista yhdistelmistä, joiden summa on 21 tai alle, että heitetäänkö niistä uudelleen yhtä, kahta, kolmea vai neljää noppaa. Esimerkiksi tuloksesta (5-5-5-3) heitetään kaikki nopat uudelleen [saadaan tulos $E(s_4)$] ja tuloksesta (6-5-4-4) heitetään (5-4-4) uudelleen [saadaan tulos $6 + E(s_3)$]. Selvästi lukua 6 ei heitetä koskaan uudelleen, 5 ja 4 ovat tapauskohtaisia ja 3, 2 ja 1 heitetään aina uudelleen, kun pelin säännöt sen sallivat.

Pelin odotettu voitto $E(G)$ on

$$E(G) = \sum_{s=5}^{30} (s - 24)P(s),$$

missä muuttuja s voi vaihdella välillä 5-30 ja arvo $P(s)$ saadaan taulukosta.

s	$P(s)$	s	$P(s)$	s	$P(s)$	s	$P(s)$
30	0.0109	25	0.1410	20	0.0397	15	0.0015
29	0.0383	24	0.1291	19	0.0250	14	0.0005
28	0.0809	23	0.1076	18	0.0145	13	0.0001
27	0.1193	22	0.0817	17	0.0076	12	-
26	0.1401	21	0.0588	16	0.0036	11	-

Maksimointipelin todennäköisyydet.

Tästä saadaan $E(G) = 0,438$. Peli on siis hyvin suotuisa optimaalisesti pelaavalle heittovuorossa olevalle pelaajalle. (Epstein, 2009)