Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnollinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Timo Vesanen

Todennäköisyyslaskenta lukiossa ja ylioppilaskirjoituksissa

Pro Gradu
Kerava 21.1.2016

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty	Laitos/Institution – Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä/Författare – Author		
Timo Vesanen		
Työn nimi / Arbetets titel – Title		
Todennäköisyyslaskenta lukiossa ja ylioppilaskirjoituksissa		
Oppiaine /Läroämne – Subject		
Matematiikka		
Työn laji/Arbetets art – Level	Aika/Datum – Month and year	Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages
Pro Gradu	21.1.2016	70

Tiivistelmä/Referat – Abstract

Ylioppilaskirjoitukset ohjaavat voimakkaasti matematiikan opetusta lukiossa. Oppilaita ja opettajia kiinnostaa, millaisia tehtäviä ja mitä matematiikan osa-alueita kirjoituksissa tulisi erityisesti hallita. Opetussuunnitelman perusteissa näitä osa-alueita kurssikohtaisesti määritellään, mutta vain yleisellä tasolla.

Tässä tutkielmassa tutkitaan Opetussuunnitelman perusteiden toteutumista lukion oppikirjoissa ja ylioppilaskirjoitustehtävissä matematiikan pitkän oppimäärän todennäköisyyslaskennan kurssin osalta. Tutkielmassa on esitetty todennäköisyyslaskennan perusteita ja tutkittu, mitä näistä Opetussuunnitelman perusteiden mukaan tulisi lukiossa opettaa ja opiskella. Muutamia lukion todennäköisyyslaskennan kurssilla käytettyjen kirjojen sisältöjä on myös verrattu Opetussuunnitelman perusteisiin ja tutkittu, mitä todennäköisyyslaskennan osa-alueita kirjoissa käsitellään, kuinka syvällisesti kutakin osa-aluetta käsitellään ja onko oppikirjoissa muitakin todennäköisyyslaskennan osa-alueita kuin mitä Opetussuunnitelman perusteissa on määritetty.

Lisäksi tutkielmassa on tutkittu vuosien 2008–2015 matematiikan ylioppilaskirjoituksia todennäköisyyslaskennan tehtävien osalta. Tutkielmassa on määritetty, mitä todennäköisyyslaskennan menetelmiä tehtävien ratkaisemiseksi on tarvittu ja kuinka usein mitäkin menetelmää on tutkimusajanjaksolla tarvittu. Lisäksi on vertailtu klassisen ja tilastollisen todennäköisyyslaskennan tehtävätyyppien esiintymistiheyttä.

Lopputuloksena tutkielmassa on päädytty siihen, että todennäköisyyslaskennan perusmenetelmiä, Opetussuunnitelman perusteissa määritettyjä sisältöalueita ja oppikirjoihin päätyneitä sisältöjä esiintyy monipuolisesti ylioppilaskirjoitustehtävissä. Klassisen todennäköisyyslaskennan alueelta tehtäviä on ollut huomattavasti enemmän, mutta aivan viime vuosina tilastolliset menetelmät, etenkin normaalijakauma, ovat yleistyneet.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

todennäköisyyslaskenta, lukio, ylioppilaskirjoitukset, opetussuunnitelma

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

1. Johdanto ... 5
2. Tutkimuskysymykset ... 6
   2.1. Rajaukset ... 6
3. Todennäköisyyslaskennan perusteita ... 7
   3.1. Klassinen todennäköisyys ... 7
   3.2. Tilastollinen todennäköisyys ... 8
   3.3. Kombinatoriikka ... 10
      3.3.1. Permutaatiot ... 10
      3.3.2. Variaatiot ... 11
      3.3.3. Kombinaatiot ... 11
   3.4. Tuloperiaate ... 12
   3.5. Multinomikertoimet ... 13
   3.6. Jakaumat ... 13
   3.7. Diskreetti jakauma ... 13
      3.7.1. Binomijakauma ... 15
      3.7.2. Geometrinen jakauma ... 16
      3.7.3. Poissonin jakauma ... 16
   3.8. Jatkuva todennäköisyysjakauma ... 16
      3.8.1. Normaalijakauma ... 18
   3.9. Jakaumien tunnusluvut ... 22
      3.9.1. Odotusarvo ... 22
      3.9.2. Varianssi ja keskihajonta ... 22
4. Lukion opetussuunnitelman perusteet ... 24
   4.1. Lukiolaki ja lukioasetus ... 24
   4.2. Opetussuunnitelman perusteet ... 24
   4.3. Matematiikka OPS:ssa ... 24
   4.4. Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittäminen ... 26
   4.5. Sähköiset ylioppilaskirjoitukset ... 27
5. Yläkoulun pohjustus ... 29
   5.1. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet ... 29

5.2. Opetussuunnitelman perusteet 2014 29
5.3. Omat kokemukset todennäköisyyslaskennasta yläkoulussa 30
6. Lukion oppikirjat 31
6.1. Laudatur 6 – Todennäköisyys ja tilastot 31
6.1.1. Ajankäyttöehdotus 32
6.2. Matematiikan taito 6 – Todennäköisyys ja tilastot 32
6.2.1. Ajankäyttöehdotus 33
6.3. Pitkä matematiikka 6 – Todennäköisyys ja tilastot 33
6.3.1. Ajankäyttöehdotus 34
6.4. Kirjojen rakenteen vertailu 34
6.5. Kirjojen sisältöjen vertailu 36
6.5.1. Tilastollinen todennäköisyys oppikirjoissa 36
6.5.2. Kombinatoriikka oppikirjoissa 36
6.5.3. Kertolaskusääntö ja yhteenlaskusääntö oppikirjoissa 37
6.5.4. Todennäköisyysjakaumat oppikirjoissa 37
6.5.5. Normaalijakauma oppikirjoissa 37
6.6. Vertailu Opetussuunnitelman perusteisiin 38
6.6.1. Aiheita oppikirjoissa Opetussuunnitelman perusteiden ulkopuolelta 39
6.7. Aihealueen kattavuus oppikirjoissa 40
7. Todennäköisyyslaskennan tehtävät ylioppilaskirjoituksissa 41
7.1. Todennäköisyyslaskennan ylioppilaskirjoitustehtävät ratkaisuineen 41
7.1.1. Kevät 2008 41
7.1.2. Syys 2008 42
7.1.3. Kevät 2009 43
7.1.4. Syys 2009 43
7.1.5. Kevät 2010 44
7.1.6. Syys 2010 45
7.1.7. Kevät 2011 46
7.1.8. Syys 2011 47
7.1.9. Kevät 2012 48
7.1.10. Syys 2012 50
7.1.11. Kevät 2013 51
7.1.12. Syys 2013 52

7.1.13. Kevät 2014 ... 53
7.1.14. Syys 2014 ... 55
7.1.15. Kevät 2015 ... 56
7.1.16. Kevät 2015: Jokeritehtävä ... 57
7.1.17. Syys 2015 ... 59
7.2. Yhteenveto tehtävistä ... 60
7.3. Tehtävien ratkaisemisesta ... 61
7.3.1. Tehtävät tilastollisesta todennäköisyydestä ... 61
7.3.2. Tehtävät satunnaismuuttujan odotusarvosta ... 62
7.3.3. Tehtävät komplementtisäännöllä ... 63
7.3.4. Tehtävät kertolaskusäännöistä ... 63
7.3.5. Tehtävät yhteenlaskusäännöstä ... 64
7.3.6. Tehtävät binomitodennäköisyydestä ... 64
7.3.7. Tehtävät kombinatoriikasta ... 64
7.4. Vertailu opetussuunnitelmiin ... 65
8. Tutkimuksen luotettavuus ... 67
9. Yhteenveto ... 68
I. Lähdeluettelo ... 69

Luettelo taulukoista

Taulukko 1: Esimerkki Galtonin laudan frekvensseistä ja suhteellisista frekvensseistä 9
Taulukko 2: Esimerkki Galtonin laudan tilastollisesta jakaumasta 9
Taulukko 3: Kahden nopan lukuparit luokiteltuna 10
Taulukko 4: Kahden nopan mahdolliset lukuparit.. 13
Taulukko 5: Kahden nopan summien todennäköisyydet 14
Taulukko 6: Matematiikan lyhyen oppimäärän kurssit 25
Taulukko 7: Matematiikan pitkän oppimäärän kurssit 25
Taulukko 8: Matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän tavoitteet ja keskeiset sisällöt.. 26
Taulukko 9: Opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden toteutuminen oppikirjoissa .. 38
Taulukko 10: Opetussuunnitelman perusteiden sisältöjen toteutuminen oppikirjoissa.... 39
Taulukko 11: Menetelmien käyttö ylioppilaskirjoitustehtävissä 60
Taulukko 12: Menetelmien lukumäärä ylioppilaskirjoitustehtävissä 61
Taulukko 13: Opetussuunnitelman perusteiden sisältöjen toteutuminen ylioppilaskirjoitustehtävissä.. 65

Luettelo kuvista

Kuva 1: Galtonin lauta 8
Kuva 2: Kaksi samaa viiden kortin kombinaatiota 12
Kuva 3: Kahden nopan summan pylväsdiagrammi 14
Kuva 4: Kahden nopan summan kertymä pylväsdiagrammina 15
Kuva 5: Jatkuvan jakauman tiheysfunktio 17
Kuva 6: Jatkuvan jakauman kertymäfunktio 18
Kuva 7: Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla 20
Kuva 8: Normaalijakaumien kuvaajia 21
Kuva 9: Oppikirjojen sisältörakenteet 35

1. JOHDANTO

Kuvittele tilanne, jossa opetat kulttuurisilta, etnisiltä ja uskonnollisilta taustoiltaan kirjavaa luokkaa, jota ei kiinnosta opiskella matematiikkaa. Etenkin, kun ainut mittari osaamisesta on jokin testi, jonka vaatimukset ja niiden perusteella laaditut tehtävät tulisi suorittaa hyväksytysti, mitä taas valvotaan kunta-, maakunta ja jopa valtion tasolla. Tilanne voisi olla totta monessakin suomalaisessa koulussa, etenkin peruskoulun puolella, mutta miksei myös lukiossa.

Tällainen tilanne on kuvattu myös populääriviihteessä TV-sarjassa nimeltä Langalla (The Wire, HBO, 2002–2008) ja sen neljännellä tuotantokaudella. Entinen poliisi opettaa Yhdysvaltojen Baltimoressa lähiönuorille muun muassa todennäköisyyslaskentaa. Vanhentuneiden oppikirjojen tekstit ja tehtävät eivät heitä kiinnosta, sillä monet ovat tulleet tutuiksi poliisille jo nuorella iällä, useat heistä ovat perheensä vanhimpia lapsia ja joutuvat huolehtimaan koulunkäynnin ohella nuoremmista sisaruksistaan ja elämässä on muutenkin paljon mielenkiintoisempia ja enemmän huomiota vaativia asioita kuin todennäköisyyslaskenta.

Näille nuorille rahanhankinta on perustarve numero yksi. Ja jos rahaa ei ole saatavilla laillisin keinoin, on turvauduttava muihin konsteihin, kuten rikoksiin tai uhkapeliin. Ja tähän tarttuu entinen poliisi, nykyinen luokanopettaja. Hän alkaa opettaa todennäköisyyksiä noppapelien (craps) avulla, sillä ymmärtämällä niiden lainalaisuuksia, nuoret voivat voittaa peleistä enemmän rahaa.

Esimerkki ei ehkä kuvasta aivan jokapäiväistä koulunkäyntiä Suomessa, mutta kuvastaa sitä, että todennäköisyyslaskennalla on hyvinkin konkreettisia siteitä arkielämään, muutenkin kuin uhkapelien kautta, vaikka useat ajattelevatkin esimerkiksi lottoamista: millä todennäköisyydellä voinkaan saada seitsemän oikein? Moni on lukenut esimerkiksi Lotto-tuotteen esittelystä, että mahdollisuus saada yhdellä rivillä seitsemän oikein on noin yksi 15 miljoonasta. Mutta kuinka moni osaa laskea, että miksi näin on?

Tai sitten he miettivät vedonlyöntiä, kuten vakioveikkaamista tai pitkävetoa. Jotkut ajattelevat todennäköisyyttä myöhemmin hakiessaan esimerkiksi yliopistoon opiskelemaan. Jaossa voi olla 24 aloituspaikkaa ja pääsykokeissa 500 hakijaa. Mikä on siis todennäköisyys sille, että juuri minä pääsen sisään? Kannattaako miettiä myös vaihtoehtoja? Todennäköisyyksiin törmää myös vakuutusasioissa, kun mietitään, kannattaako ottaa jokin vapaaehtoinen vakuutus vai ottaa riski ja ajatella, että mitään ei tapahdu kuitenkaan tai jos tapahtuukin, vakuutusmaksuihin on mennyt enemmän rahaa kuin mitä kertavahingon kustannuksiin menee.

Yhdysvalloissa opetusta ohjaa kenties vielä vahvemmin kuin meillä Suomessa opetussuunnitelma ja sen pohjalta laaditut testit, mutta myös Suomessa kuulee usein kommentin, että lukio-opetus tähtää vain ylioppilaskirjoituksiin. Lukionhan tulisi olla yleissivistävä laitos, joka antaa opiskelijalle valmiudet jatko-opinnoille esimerkiksi yliopistossa tai ammattikorkeakoulussa.

Tässä tutkielmassa tutkitaan, mikä suhde Opetussuunnitelman perusteilla, lukion oppikirjoilla ja ylioppilaskirjoitusten tehtävillä on todennäköisyyslaskennan osalta ja toisaalta, antavatko oppikirjat eväitä yleisesti todennäköisyyslaskennan hallitsemiseen ja testaako ylioppilastutkinnon matematiikan koe vain teoreettisia laskentataitoja.

2. TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tässä tutkielmassa pyritään löytämään vastaukset seuraaviin todennäköisyyslaskennan lukio-opetukseen liittyviin kysymyksiin:

- Mitä todennäköisyyslaskennan osa-alueita lukiossa opetetaan?
- Mitä todennäköisyyslaskennan osa-alueita kysytään ylioppilaskirjoituksissa?
- Onko näillä kahdella näkökulmalla yhteyttä, eli painotetaanko opetusta ylioppilaskirjoitusten tehtävätyyppeihin?

2.1. Rajaukset

Tässä tutkielmassa tutkitaan lukio-opetusta vain matematiikan pitkän oppimäärän osalta. Lyhyeen oppimäärään viitataan ainoastaan Opetussuunnitelmien perusteiden osalta.

Tutkielmassa on tutkittu kolmea matematiikan pitkän oppimäärän oppikirjaa kolmelta eri kustantajalta.

Ylioppilaskirjoitusten tehtäviä on tutkittu aikavälillä 2008–2015, sillä Opetussuunnitelmien perusteet otettiin lukioissa käyttöön syksyllä 2005, joten ensimmäiset niiden mukaiset ylioppilaskirjoitukset ovat olleet kolmessa vuodessa lukion käyville keväällä 2008.

3. TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN PERUSTEITA

Ihmisen epäonnistuessa jossakin häntä saatetaan lohduttaa sanoilla ”Älä huoli, aurinko nousee huomennakin.” Vaikka onkin kyseenalaista, lohduttaako tämä yhtään, voidaan ainakin vielä pitkän ajan tämän tutkielman puitteissa olettaa, että näin tapahtuu varmasti: aurinko nousee huomennakin.

Toisaalta, epäluotettava tai huikentelevainen henkilö voisi kehua saaneensa Kimble-pelin nopalla arvon seitsemän. Näin ei varmasti ole tapahtunut, sillä Kimblessä on perinteinen kuusitahoinen arpakuutio, jonka ainoat mahdolliset arvot ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. On siis mahdotonta, että kyseisessä pelissä voisi saada nopalla arvon seitsemän.

Muunlaisia tapahtumia voisivat olla esimerkiksi toteamukset, että ”Sain kolikonheitossa kruunan.” tai ”Nostin korttipakasta hertan.” Nämä tapahtumat eivät ole varmoja eivätkä toisaalta mahdottomiakaan. Kolikonheiton tulos olisi voinut olla myös klaava, ja korttipakasta olisi voinut nousta pata, risti tai ruutu.

Jotta jonkin tapahtuman todennäköisyys voidaan laskea, on ensin määritettävä tapahtuman kaikki mahdolliset tulokset eli *alkeistapaukset*. Edellä kuvatuissa tilanteissa alkeistapaukset olisivat seuraavat:

- ”Aurinko nousee.” tai ”Aurinko ei nouse.”
- Nopanheiton tulos on 1, 2, 3, 4, 5 tai 6.
- Korttipakan kortti on maaltaan joko pata, risti, hertta tai ruutu, ja numeroarvoltaan jokin kokonaisluvuista väliltä 1-13.

Nämä alkeistapaukset muodostavat kunkin ylläkuvatun *satunnaiskokeen äärellisen perusjoukon*.

Yhteistä kaikille tällaisille satunnaiskokeille on (Tuominen, 1990):

- Jokaisen tapahtuman A todennäköisyys P on $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Todennäköisyys sille, että jokin alkeistapauksista tapahtuu, on $\mathrm{P}(\text{”Jokin alkeistapaus tapahtuu.”}) = 1$.
- Jos alkeistapaukset ovat erilliset, niin todennäköisyys sille, että jokin tapahtuman suotuisista alkeistapauksista tapahtuu, on alkeistapausten todennäköisyyksien summa.
- Todennäköisyys sille, että tapahtuma A ei tapahdu eli todennäköisyys sille, että A:n komplementti tapahtuu, on $P(A^C) = 1 - P(A)$.
- Mikäli jonkin tapahtuman A todennäköisyys $P(A) = 1$, tapahtuma on *varma*.
- Mikäli jonkin tapahtuman A todennäköisyys $P(A) = 0$, tapahtuma on mahdoton.

3.1. Klassinen todennäköisyys

Arpakuutio eli noppa on perinteinen esimerkki *klassisesta todennäköisyydestä*. On yhtä todennäköistä saada jokainen nopan silmäluvuista. Jokainen näistä silmäluvuista on yksi nopanheiton alkeistapaus ja koska jokaisella silmäluvulla on sama todennäköisyys, on kyse *symmetrisestä alkeistapauksesta*.

Tutkittaessa nopanheittoa, voitaisiin haluta tietää, millä todennäköisyydellä saadaan parillinen luku tulokseksi. Tällaista vaatimusta voidaan kutsua *tapahtumaksi*. Määritelmän mukaan tapahtuman *todennäköisyys* on *suotuisten alkeistapahtumien* (nyt luvut 2, 4 ja 6) lukumäärä (3) jaettuna *kaikkien alkeistapahtumien* lukumäärällä (6):

$$P(\text{"Saadaan nopalla parillinen luku"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%.$$

Todennäköisyydellä on myös ominaisuus nimeltään *täysadditiivisuus*. Se tarkoittaa sitä, että jos suotuisat alkeistapahtumat ovat erilliset, on niiden yhdistelmän todennäköisyys niiden alkeistapahtumien yksittäisten todennäköisyyksien summa. Eli esimerkiksi parillisen nopanheiton tuloksen todennäköisyys voitaisiin laskea myös:

$$P(\text{Saadaan nopalla parillinen luku})$$

$$= P(\text{Saadaan 2}) + \text{P}(\text{Saadaan 4}) + \text{P}(\text{Saadaan 6})$$

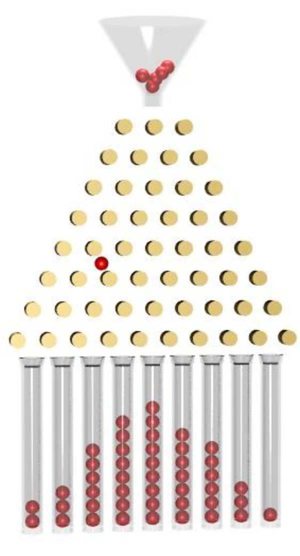
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}50 = 50\%$$

eli lopputulos on sama kuin yllä, kuten pitääkin. (Tuominen, 1990)

3.2. Tilastollinen todennäköisyys

Tilastojen avulla voidaan tutkia jotakin ilmiötä tekemällä ensin hypoteesi, sen jälkeen miettimällä sitä kuvaava (matemaattinen) malli ja suorittamalla *toistokoetta*, jonka tulokset sitten tilastoidaan. Toistokokeessa kyse on siis saman satunnaiskokeen toistamisesta siten, että edellisen kokeen tulos tai suorittaminen ei vaikuta seuraavaan, eli kokeessa tehtävät toistot ovat toisistaan riippumattomia. Toistokokeen tilastosta voidaan sitten laskea alkeistapausten esiintymien lukumäärät (*frekvenssit*) ja niiden suhteelliset osuudet eli *suhteelliset frekvenssit* jakamalla frekvenssit frekvenssien summalla. Näitä suhteellisia frekvenssejä voidaan sitten käyttää ilmiön ennustamiseen. (Laininen, 1998)

Esimerkki tällaisesta tutkimuksesta voisi olla Galtonin lauta (Wikipedia, 2015):



Kuva 1: Galtonin lauta

Lauta itse asiassa demonstroi erään tärkeän *tilastollisen jakauman*, *normaalijakauman*, syntymistä, mutta tutkitaan sitä nyt yleisesti tilastollisen todennäköisyyden kannalta. Perusperiaate on, että laudalle on asetettu tasavälein tappeja alaspäin levenevässä muodostelmassa, ja laudalle pudotetaan ylhäältä palloja, jotka sitten poukkoilevat alaspäin päätyen lopulta yhteen alhaalla olevista lokeroista. Kuten kuvasta huomataan, päätyy yleensä suurin osa palloista keskikohdan lähettyvillä oleviin lokeroihin. (Strogatz, 2014)

Kuvan tilanteesta voitaisiin muodostaa seuraava tilasto, jos lokerot numeroidaan alkaen vasemmalta, frekvenssiä merkitään kirjaimella *f* ja suhteellista frekvenssiä merkinnällä *f %*:

Taulukko 1: Esimerkki Galtonin laudan frekvensseistä ja suhteellisista frekvensseistä

Lokero	**f**	**f%**
1	2	4,5 %
2	3	6,8 %
3	6	13,6 %
4	8	18,2 %
5	9	20,5 %
6	7	15,9 %
7	5	11,4 %
8	3	6,8 %
9	1	2,3 %
Yhteensä	**44**	**100,0 %**

Tilastollisen todennäköisyyden keinoin voitaisiin nyt ennustaa, miten pallot jakaantuisivat, jos laudalle pudotettaisiin esimerkiksi 10 000 palloa kertomalla suhteellisilla frekvensseillä pallojen kokonaismäärä:

Taulukko 2: Esimerkki Galtonin laudan tilastollisesta jakaumasta

Lokero	**f%**	**Palloja**
1	4,5 %	455
2	6,8 %	682
3	13,6 %	1364
4	18,2 %	1818
5	20,5 %	2045
6	15,9 %	1591
7	11,4 %	1136
8	6,8 %	682
9	2,3 %	227
Yhteensä	**100,0 %**	**10000**

Samalla tavalla olisi voinut tutkia auringon nousemista ja todeta, että sen nousemisen suhteellinen frekvenssi on 100 %, joten se nousee huomennakin. Korttipakasta olisi voitu nostaa yksi kortti, merkitä muistiin mikä se oli, laittaa se takaisin pakkaan, sekoittaa pakka uudestaan ja nostaa taas kortti. Riittävästi toistoja tehdessä kunkin kortin esiintymiskerran suhteellinen frekvenssi nostaessa olisi todennäköisesti lähestynyt lukua 0,0192 eli $\frac{1}{52}$. Nopanheitossa vastaava tulos olisi ollut, että kunkin nopanheiton mahdollisen tuloksen suhteellinen frekvenssi olisi lähestynyt lukua 0,166... eli $\frac{1}{6}$.

Tilastollisiin jakaumiin palataan tässä tutkielmassa vielä myöhemmin.

3.3. Kombinatoriikka

Pienillä kokonaisuuksilla voidaan haluttuja tapahtumia tutkia esimerkiksi luettelemalla kaikki vaihtoehdot ja laskemalla sitten suotuisten alkeistapausten määrä luettelosta. Näin voitaisiin toimia esimerkiksi nopanheiton osalta. Oletetaan, että halutaan heittää kahta noppaa ja tutkia, millä todennäköisyydellä molemmat saadut luvut ovat parillisia, voitaisiin luetella kaikki mahdolliset yhdistelmät ja laskea niistä ehdon täyttävät lukuparit (taulukossa harmaalla):

Taulukko 3: Kahden nopan lukuparit luokiteltuna

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Nyt saadaan $P(\text{Molemmat luvut ovat parillisia}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\ \%$.

Kuitenkin jos halutaan tutkia monimutkaisempia yhdistelmiä tai tutkia vaikka Yatzy-pelin, jossa heitetään viittä noppaa, todennäköisyyksiä, tulee laskemisesta hyvinkin työlästä, jos se halutaan tehdä luettelemalla kaikki noppayhdistelmät. Sen vuoksi tarvitaan matematiikan osa-aluetta nimeltä *kombinatoriikka*, jonka osa-alueita ovat muun muassa permutaatiot, variaatiot ja kombinaatiot.

3.3.1. Permutaatiot

Oletetaan, että haluamme järjestää jonoon kaikki korttipakan 52 korttia. Jonossa korttien järjestyksellä on merkitystä, joten jono, joka alkaa ristiässällä ja pataässällä on eri jono kuin olisi jono, joka alkaisi pataässällä ja jatkuisi ristiässällä, vaikka loput kortit olisivat molemmissa eri järjestyksessä.

Permutaatio on yksi tällainen *järjestetty jono* kortteja. Jos halutaan laskea, kuinka monta erilaista permutaatiota korteista voidaan muodostaa, voidaan se tehdä seuraavasti:

1. Valitaan ensimmäiseksi jonon alkioksi mikä tahansa 52 kortista.

2. Seuraavaksi valittavissa on 51 korttia.
3. Seuraavaksi 50 korttia jne.
4. Lopulta valittavissa on enää yksi, viimeinen kortti.

Erilaisten jonojen määrä voidaan laskea edellisten vaiheiden avulla *tuloperiaatteella*, jossa kunkin vaiheen vaihtoehtojen lukumäärä kerrotaan seuraavan vaiheen vaihtoehtojen lukumäärällä. Nyt siis korttipakan permutaatioita olisi:

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdots 1 \approx 8 \cdot 10^{67}.$$

Käytännössä siis erilaisten jonojen luetteleminen käsin olisi mahdotonta ilman tietokoneavusteista ohjelmointia.

Kyseinen tulo $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 1$ voidaan lyhentää *52-kertomaksi:*

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot 1 = 52!.$$

Yleisesti *n-kertoma* on n:n ensimmäisen positiivisen kokonaisluvun tulo, eli:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n, kun\ n \in N_+.$$

Lisäksi on sovittu, että:

$$0! = 1.$$

3.3.2. Variaatiot

Aina emme välttämättä halua järjestää jonoon koko perusjoukkoa kuten kokonaista korttipakkaa. Voimme haluta järjestää vain osan siitä, esimerkiksi viisi korttia. Tällaista jonoa kutsuttaisiin *5-variaatioksi*. Voimme nyt hyödyntää tuloperiaatetta uudemman kerran. Nyt vaiheet olisivat:

1. Valitaan ensimmäiseksi jonon alkioksi mikä tahansa 52 kortista.
2. Seuraavaksi valittavissa on 51 korttia.
3. Seuraavaksi valittavissa on 50 korttia.
4. Seuraavaksi valittavissa on 49 korttia.
5. Lopuksi valittavissa on 48 korttia.

Nyt siis korttipakan viiden kortin jonoja olisi:

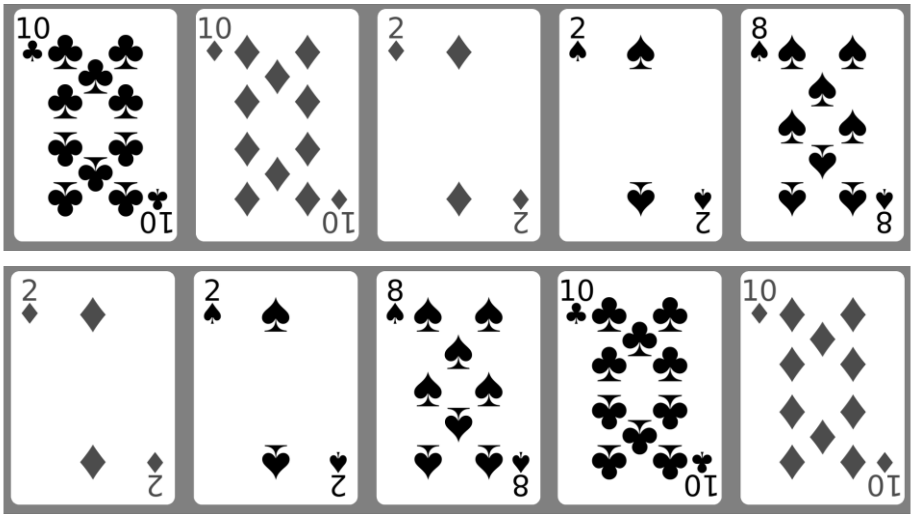
$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311\,875\,200.$$

Yleisesti ottaen n-alkioisella joukolla on k-variaatioita (Tuominen, 1990):

$$(n)_k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

3.3.3. Kombinaatiot

Pokerissa korttien järjestyksellä ei ole väliä, vaan merkityksellistä on ainoastaan se, mitkä viisi korttia pelaajalla on kädessä. Viiden kortin variaatioita oli 311 875 200 kappaletta, kuten edellä laskettiin. Kuitenkin näissä on toisteisia jonoja, sillä nämä kaksi seuraava ”kättä” ovat samanarvoiset:



Kuva 2: Kaksi samaa viiden kortin kombinaatiota

Kun tiedetään, mitkä viisi korttia käteen kuuluvat, voidaan nämä järjestää $5! = 120$ permutaatioon. Joten viiden kortin variaatioista on poistettava toisteiset permutaatiot, ts. viiden kortin yhdistelmiä voidaan muodostaa korttipakasta

$$\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5!} = 2\,598\,960$$

kombinaatiota.

Yleisesti n-kokoisesta joukosta voidaan muodostaa k-kombinaatioita:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Merkintää $\binom{n}{k}$- kutsutaan myös *binomikertoimiksi*. (Tuominen, 1990)

3.4. Tuloperiaate

Edellisissä kombinatoriikan laskuissa on sovellettu *tuloperiaatetta*. Tällaisessa laskussa suoritetaan koetta, joka tehdään vaiheittain. Esimerkiksi korttipakan 5-variaatiossa valittiin ensin yksi kortti, seuraavaksi toinen, sitten kolmas, neljäs ja viides. Jokaisessa vaiheessa piti laskun kannalta miettiä, montako vaihtoehtoa kortteja oli. Lopputulos saatiin sitten kertomalla vaiheiden vaihtoehtojen lukumäärä keskenään. (Tuominen, 1990)

Edellä olevassa esimerkissä eri vaiheissa olevat vaihtoehtojen lukumäärät ovat aiemmista valinnoista *riippumattomia*. Sen sijaan jos kysyttäisiin esimerkiksi todennäköisyyttä saada viidellä kortilla ässä ja neljä ruutua, tämä ei enää pätisi. Nyt toisen kortinnoston suotuisten alkeistapahtumien lukumäärä ei olekaan enää sama ensimmäisen kortin noston jälkeen, sillä mikäli ensimmäinen kortti oli ruutuässä, jäljellä on enää 12 ruutukorttia, mutta jos ässä olikin jotain muuta maata, suotuisia alkeistapahtumia saada ruutu on yhä 13. (Otavan opisto, 2015a)

3.5. Multinomikertoimet

Jos $n \geq k$, niin binomikerroin $\binom{n}{k}$ ilmaisee, kuinka monta k-alkioista osajoukkoa n-alkioisella joukolla on. Joskus haluamme jakaa n alkiota siten, että alkiot jaetaan lukumäärältään k:hon eri joukkoon. Tällöin eivät binomikertoimet riitä, vaan tarvitaan *multinomikertoimia*.

Oletetaan siis, että jaamme n alkiota k:hon luokkaan siten, että jokaiseen luokkaan $i = 1, \dots, k$ tulee n_i alkiota. Tällöin jako voidaan suorittaa:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

tavalla. (Tuominen, 1990)

3.6. Jakaumat

Edellä tutkituissa esimerkeissä tapahtumilla on ollut äärellinen määrä mahdollisia alkeistapauksia, ja kaikki alkeistapaukset ovat olleet erillisiä eli *diskreettejä*. Nopan silmäluvut ja korttipakan kortit ovat olleet tapahtumia, joissa saadun arvon todennäköisyys on ollut toistokokeessa sama: ts. on ollut yhtä todennäköistä saada nopalla mikä tahansa kokonaisluvuista 1 – 6, tai korttipakasta jokin tietty kortti kaikista 52:sta.

Jotta matemaattisesti voitaisiin tutkia tehokkaasti diskreettejä todennäköisyysjakaumia, on joskus tarpeen muuttaa satunnaiskokeen mahdolliset tulokset reaaliluvuiksi. Tällaista funktiolla tehtävää kuvausta sanotaan *satunnaismuuttujaksi*. Funktiolla voidaan liittää esimerkiksi jokin reaaliluku kuhunkin satunnaiskokeen otosavaruuden alkioon. (Laininen, 1998)

3.7. Diskreetti jakauma

Diskreetin satunnaismuuttujan jakauma kuvataan ilmoittamalla pistetodennäköisyydet tapahtuman arvojoukon alkioille. Esimerkiksi heitettäessä kahdesti noppaa, voidaan aiemman esimerkin mukaisesti saada seuraavat lukuparit:

Taulukko 4: Kahden nopan mahdolliset lukuparit

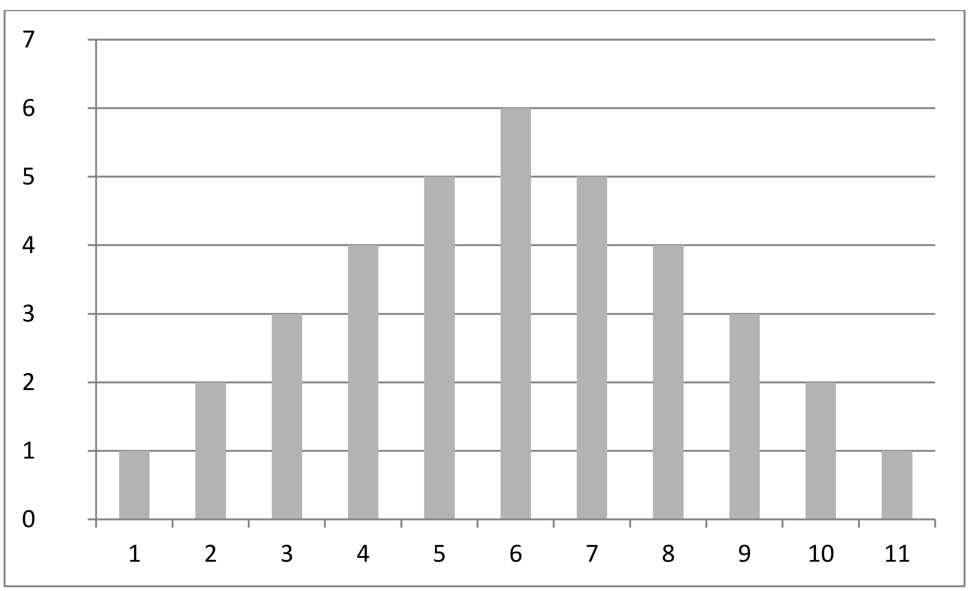
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Jos halutaan tutkia esimerkiksi kahden nopanheiton summaa, voitaisiin muodostaa seuraavat pistetodennäköisyydet mahdollisille summille:

Taulukko 5: Kahden nopan summien todennäköisyydet

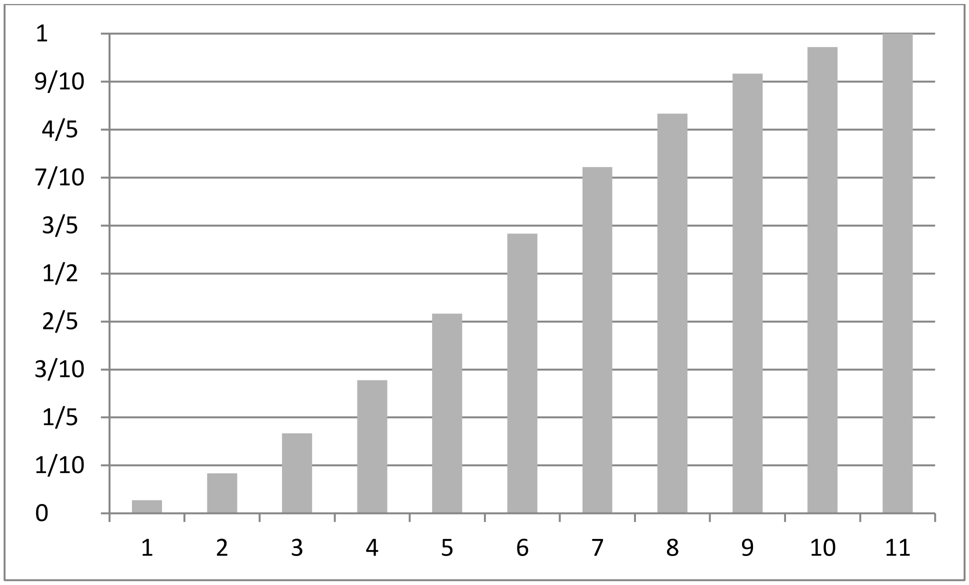
Summa	**Pistetodennäköisyys**	**Summa**	**Pistetodennäköisyys**
2	$\frac{1}{36}$	8	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	9	$\frac{4}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	10	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	11	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	12	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	**YHTEENSÄ**	$\frac{36}{36} = 1$

Tätä voidaan kuvata esim. pylväsdiagrammina, jossa pylvään korkeus esittää kunkin alkeistapahtuman todennäköisyyttä:



Kuva 3: Kahden nopan summan pylväsdiagrammi

Tai vaihtoehtoisesti *kertymäfunktiona*, jossa lasketaan todennäköisyyden summaa ensimmäisestä tapauksesta aina kuhunkin tapahtumaan asti päätyen lopulta summaan yksi (Tuominen, 1990):



Kuva 4: Kahden nopan summan kertymä pylväsdiagrammina

3.7.1. Binomijakauma

Binomijakauma kuvaa toistokoetta, jossa jollakin tapahtumalla on tietty todennäköisyys *p* tapahtua (ja siis todennäköisyys *1-p* olla tapahtumatta). Binomijakauma vastaa kysymykseen, kuinka monta kertaa tuo kyseinen tapahtuma tapahtuu, kun koetta suoritetaan *n* kertaa:

$$P(\text{Tapahtuma esiintyy k kertaa n:stä.}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Tällä tavalla voidaan tutkia todennäköisyyttä esimerkiksi koripalloilijan vapaaheittojen onnistumisesta, kun tiedetään hänen heittoprosenttinsa, tai kruunien määrästä kolikonheitossa, tai tietyn nopanheiton tuloksen esiintymismäärästä, kun tiedetään heittojen määrä. (Laininen, 1998)

Esimerkiksi, jos tiedetään, että koripalloilija heittää kahden pisteen heitot 60 % tarkkuudella koriin, voidaan laskea, että millä todennäköisyydellä hän heittää seuraavassa ottelussa kymmenen koria 15 yrityksellä:

$$P(10\ koria\ 15\ heitolla) = \binom{15}{10} 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^5 \approx 0{,}186.$$

3.7.2. Geometrinen jakauma

Geometrisellä jakaumalla voidaan tutkia todennäköisyyttä, milloin jokin haluttu tapahtuma tapahtuu ensimmäisen kerran toistokoetta suorittaessa, kun tapahtuman todennäköisyys tapahtua on p ja kysytty ilmenemiskerta on k:

$$P(Haluttu\ tapahtuma\ tapahtuu\ k.lla\ toistolla) = p(1-p)^{k-1}.$$

Tällä tavalla voidaan tutkia esimerkiksi, millä todennäköisyydellä koripalloilijan vapaaheitto epäonnistuu vasta tietyllä heittokerralla, kun tiedetään hänen heittoprosenttinsa, tai ensimmäisen kruunun ilmestyminen kolikonheitossa tietyllä heitolla. (Laininen, 1998)

Esimerkiksi, jos tiedetään, että koripalloilija heittää vapaaheitot 78 % tarkkuudella koriin, voidaan laskea, että millä todennäköisyydellä hän heittää seuraavassa ottelussa vasta viidennen vapaaheittonsa ohi:

$$P(Vasta\ 5.heitto\ menee\ ohi) = 0{,}22 \cdot 0{,}78^4 \approx 0{,}081.$$

3.7.3. Poissonin jakauma

Poissonin jakaumalla voidaan tutkia todennäköisyyttä, montako kertaa tapahtuma tapahtuu, jos tiedetään sen tapahtuvan keskimäärin θ kertaa halutussa aikayksikössä, mutta tapahtumien määrä ja todennäköisyys eivät ole tiedossa. Tällöin esiintymiskertojen k todennäköisyys kyseisessä aikayksikössä voidaan laskea:

$$P(Tapahtuma\ tapahtuu\ k\ kertaa) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}.$$

Poissonin jakaumaa käytetään useimmiten tilanteissa, joissa toistokoesarjat ovat pitkiä ja varsinaiset tapahtumat harvinaisia. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi liikenneonnettomuudet tietyllä tievälillä tai esimerkiksi fysiikassa pienelle alueelle jollain aikavälillä saapuvien fotonien lukumäärä.

Esimerkiksi, jos tiedetään, että sähkömoottoreita tekevä yritys tekee viallisen moottorin todennäköisyydellä $p = 0{,}01$, niin voidaan laskea todennäköisyys sille, että 300 moottorin erässä on viisi viallista seuraavasti. Lasketaan ensin keskiarvo sille, kuinka monta moottoria 300 moottorista on viallisia:

$$\mu = 0{,}01 \cdot 300 = 3.$$

Joten todennäköisyys sille, että 300 moottorin erästä viisi on viallisia, on

$$P(Viisi\ viallista\ moottoria\ 300{:}sta) = \frac{3^5}{5!}e^{-3} \approx 0{,}101.$$

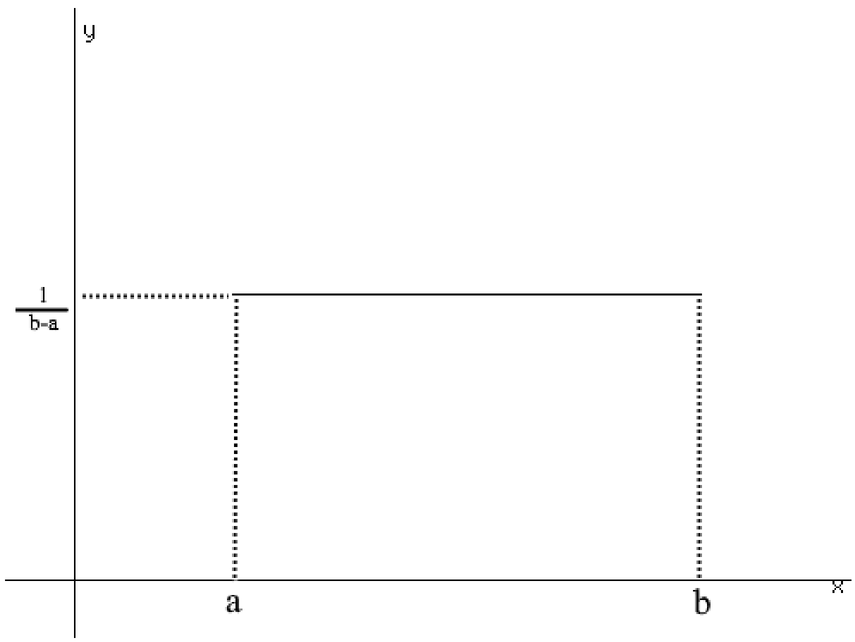
3.8. Jatkuva todennäköisyysjakauma

Edellä kuvatussa diskreetissä jakaumassa alkeistapahtumat olivat rajattu joukko erilaisia mahdollisia tapahtumia.

Aivan toisenlainen jakauma voisi olla esimerkiksi sellainen, missä voidaan saada mikä tahansa reaaliluku väliltä $[a, b]$ yhtä todennäköisesti ja on mahdotonta saada reaaliluku kyseisen välin ulkopuolelta. Jatkuva jakauma määritellään yleensä *tiheysfunktion* avulla. Nyt tutkittavan jakauman tiheysfunktio esitettäisiin seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, kun\ x \in [a, b]. \\ 0 \quad muulloin \end{cases}$$

Kyseisen tiheysfunktion kuvaaja näyttäisi tältä:



Kuva 5: Jatkuvan jakauman tiheysfunktio

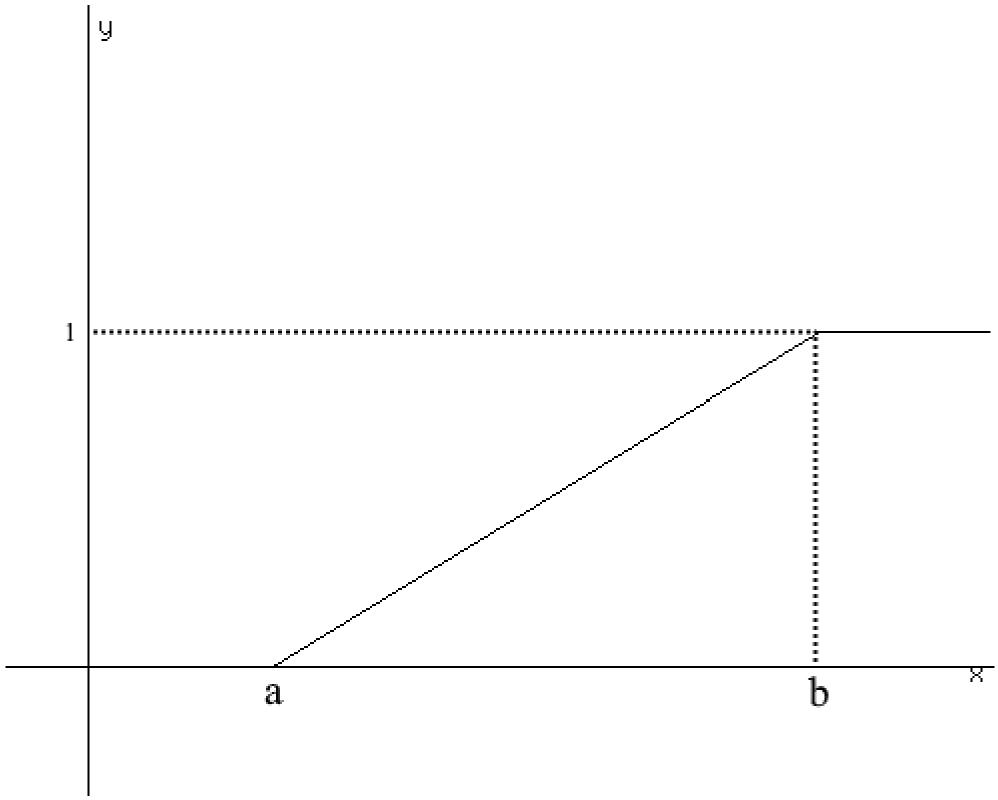
Diskreetillä jakaumalla kertymäfunktio oli porrasmuotoinen, kuten aiemmin nähtiin. Jatkuvalla jakaumalla usein tutkitaankin kertymäfunktiota, jolloin on kiinnostuttu todennäköisyydestä saada luku joltain tietyltä lukuväliltä. Kertymäfunktio saadaan *määrätyllä intergraalilla* tiheysfunktiosta tuon halutun välin yli, jolloin kertymäfunktiolle $F(x)$ ja tiheysfunktiolla $f(x)$ pätee, kun tutkitaan todennäköisyyttä, että luku X on korkeintaan luvun x verran:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Näin ollen esimerkiksi tapauksessa, jossa oli yhtä todennäköistä saada jokin reaaliluku väliltä$[a, b]$, kertymäfunktio olisi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, kun\ x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, kun\ a \leq x \leq b. \\ 1, kun\ x \geq b \end{cases}$$

Kyseisen kertymäfunktion kuvaaja näyttäisi tältä (Kivelä, 1998):



Kuva 6: Jatkuvan jakauman kertymäfunktio

3.8.1. Normaalijakauma

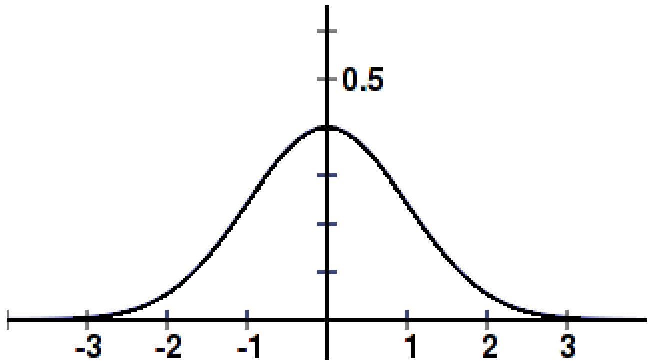
Normaalijakaumaa pidetään tärkeimpänä jakaumana todennäköisyyslaskennassa, sillä se esiintyy monien luonnonilmiöiden yhteydessä ja monet teollisuuden ilmiöt noudattavat normaalijakaumaa. Matemaattisesti tämä perustellaan keskeisen raja-arvolauseen avulla, jota ei tässä tutkielmassa käsitellä. Samoin edellä esitellyt binomijakauma ja Poissonin jakauma lähentyvät normaalijakaumaa odotusarvon kasvaessa. (Laininen, 1998)

Koulumaailmassa tutuin ilmentymä ovat ylioppilaskirjoitusten arvostelujakaumat (ns. Gaussin käyrä), joissa arvosanarajat määritellään normaalijakauman avulla. (Yleisradio, 2013)

Standardinormaalijakauman tiheysfunktio on

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in R.$$

Tämän kuvaaja on Gaussin kellokäyräksi kutsuttu kuvaaja:



Jakauman kertymäfunktio on

$$\Phi(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Tätä funktiota ei voi laskea alkeisfunktioiden avulla, vaan ainoastaan numeerisesti. Kuitenkin integrointi voidaan tehdä välillä $[-\infty, \infty]$. Integraalifunktio on nyt siis:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

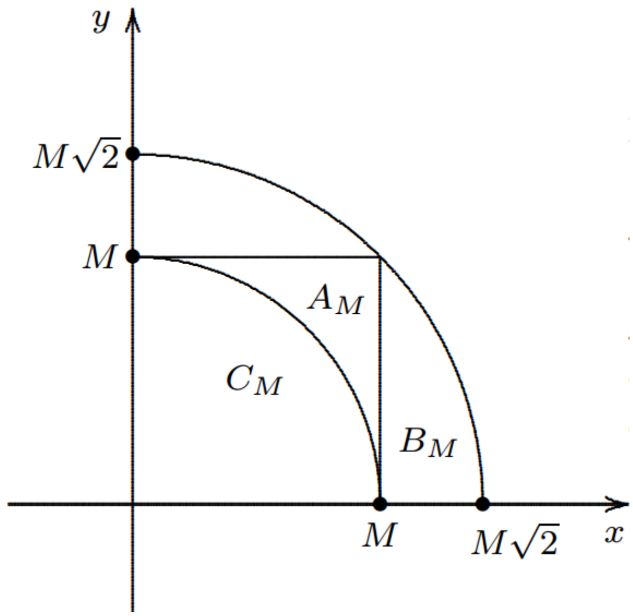
Neliöidään funktio, jolloin saadaan:

$$\frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy.$$

Yhdistetään integraalit yhdeksi:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy.$$

Sitten siirrytään napakoordinaatteihin. Idea napakoordinaateissa on se, että napakoordinaatteihin siirtyessä integroidaan tasointegraalissa neliönmuotoisten alueiden sijaan ympyränmuotoisia alueita:



Kuva 7: Tasointegraalin laskeminen napakoordinaateilla

Kuvassa aluetta A_M integroidaan napakoordinaateissa aluetta pienemmällä ympyräsektorilla C_M ja suuremmalla sektorilla B_M. Koska $f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} > 0$ kaikilla M, niin pätee, että $\int_{C_M} f \leq \int_{A_M} f \leq \int_{B_M} f$. Kun $M \to \infty$, niin integraalien arvot alueissa B_M ja C_M lähestyvät samaa arvoa. Kuristusperiaatteen nojalla tällöin myös integraalin arvo yli alueen A_M lähestyy tuota kyseistä arvoa. Näin ollen napakoordinaatteihin siirtyminen on perusteltua. Tarkempi todistus menetelmästä on esitetty esimerkiksi Juha Partasen Matemaattisen analyysin jatkokurssin luentomateriaaleissa. (Partanen, 2010)

Siirryttäessä napakoordinaatteihin saadaan nyt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr d\theta = \frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$

$$\Big/_{0}^{\infty} -e^{-\frac{r^2}{2}} = 0 - (-1) = 1.$$

Joten saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\right)^2 = 1.$$

Kun otetaan neliöjuuri yhtälön molemmilta puolilta, saadaan

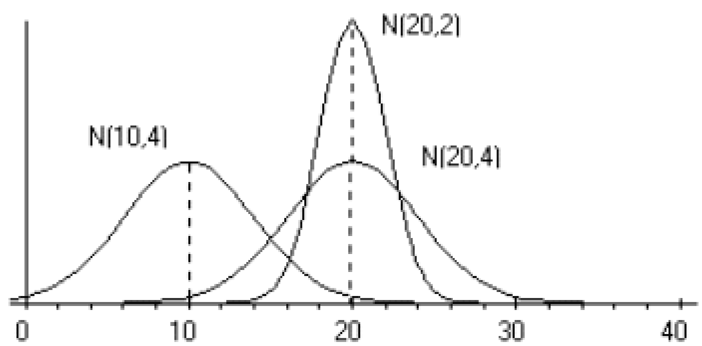
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{1} = 1.$$

Johtuen todennäköisyyden määritelmistä, näin pitääkin olla ja samasta syystä myöskään negatiivinen ratkaisu $-\sqrt{1} = -1$ ei kelpaa. Tästä voidaan siis päätellä, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{2\pi}.$$

Integroinnin ollessa suljetulla välillä mahdotonta, on jouduttu kehittämään tietokoneohjelmia, jotka laskevat kertymäfunktiolle numeerisia arvoja. Nykyaikaiset laskimet osaavatkin antaa normaalijakauman arvoja ja usein käytetään apuna myös taulukoita, joihin näitä arvoja on listattu. (Kivelä, 1998)

Normaalijakauman kuvaajan sijainti ja muoto riippuu jakauman odotusarvosta ja keskihajonnasta. Alla olevassa kuvassa on kolmen erilaisen jakauman kuvaajat:



Kuva 8: Normaalijakaumien kuvaajia

Kuvasta havaitaan, että jakauman keskiarvo (merkinnässä N(10,4) ensimmäinen luku) määrää käyrän korkeuden eli huippuarvon ja keskihajonta käyrän muodon.

Koska normaalijakauman kertymäfunktiota tulkitaan tilastollisesti ja tilastot on tehty standardille normaalijakaumalle, tulee laskentaa varten muut normaalijakaumat normittaa standardiin vähentämällä satunnaismuuttujan arvosta jakauman odotusarvo ja jakamalla erotus vielä keskihajonnalla. Toisin sanoen kaavalla

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

missä Z on normitettu satunnaismuuttuja, X satunnaismuuttuja, μ jakauman odotusarvo ja σ jakauman keskihajonta. (Otavan opisto, 2015b)

3.9. Jakaumien tunnusluvut

Edellä on mainittu muutamia todennäköisyysjakaumiin liittyviä tunnuslukuja. Näistä oleellisimmat ovat jakauman odotusarvo, varianssi ja keskihajonta. Niitä käytetään luonnehtimaan jakaumia.

3.9.1. Odotusarvo

Todennäköisyysjakauman odotusarvo $E(X) = \mu$ lasketaan diskreetin satunnaismuuttujan arvojen todennäköisyyksillä painotettuna keskiarvona:

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k,$$

missä x_k on tapahtuman k arvo ja p_k kyseisen tapahtuman todennäköisyys.

Olettaen, että jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio suppenee, voidaan jatkuvan satunnaismuuttujan tapauksessa odotusarvo laskea jakauman tiheysfunktion avulla:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Esimerkiksi nopanheitto on diskreetti jakauma, jossa kunkin silmäluvun todennäköisyys on $\frac{1}{6}$. Joten nopanheiton odotusarvo on:

$$\mu = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$$

Vastaavasti aiemmin tutkimamme jatkuvan jakauman

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, kun\ x \in [a, b], \\ 0 \quad muulloin \end{cases}$$

odotusarvo olisi:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \Big/_a^b \frac{x^2}{2(b-a)} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

3.9.2. Varianssi ja keskihajonta

Jakauman laajuutta tutkitaan jakauman hajonnalla, eli laskemalla satunnaismuuttujan arvojen etäisyyttä odotusarvosta. Tämän neliö on sitten varianssi σ^2.

Varianssi lasketaan diskreetille satunnaismuuttujalle laskemalla todennäköisyyksillä painotettu summa satunnaismuuttujan arvojen ja odotusarvon erotuksen neliöistä. Diskreetille jakaumalle varianssi on siis:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 \cdot p_k,$$

missä x_k ja p_k kuten yllä.

Jos tutkitaan diskreetissä jakaumassa vain tiettyä n-suuruista otosta koko tapahtumajoukosta, käytetään hajontalukuna usein ns. otoskeskihajontaa s_n, missä:

$$s_n{}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2.$$

Jatkuvalle jakaumalle varianssi lasketaan jälleen tiheysfunktion avulla:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Esimerkiksi nopanheitto, jossa kunkin silmäluvun todennäköisyys on $\frac{1}{6}$ ja $\mu = 3{,}5$. Joten nopanheiton varianssi on:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} (3{,}5 - k)^2 = 2{,}92.$$

Vastaavasti funktiolle

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & kun\ x \in [a, b], \\ 0 & muulloin \end{cases}$$

varianssi olisi (Kivelä, 1998):

$$\sigma^2 = \int_{a}^{b} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx.$$

Satunnaismuuttujan standardipoikkeama eli keskihajonta kuvaa keskimääräistä poikkeamaa odotusarvosta. (Kivelä, 1998)

Diskreetille jakaumalle keskihajonta lasketaan varianssin neliöjuurella eli:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 \cdot p_k}.$$

Jatkuvalle jakaumalle keskihajonta lasketaan ottamalla neliöjuuri jakauman varianssista:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx}.$$

4. LUKION OPETUSSUUNNITELMAN PERUSTEET

Suomessa lukiolaki ja lukioasetus säätävät perusopetuksen oppimäärään perustuvasta yleissivistävästä lukiokoulutuksesta.

4.1. Lukiolaki ja lukioasetus

Lukiolaissa todetaan, että lukiokoulutuksen tulisi antaa opiskelijalle valmiudet aloittaa opiskelu yliopistossa, ammattikorkeakoulussa ja lukion oppimäärään perustuvassa ammatillisessa koulutuksessa. Laissa säädetään muun muassa lukiokoulutuksen tavoitteet, tuntijako, arviointiperusteet sekä opetuksen laajuus ja sisällöt. Laki myös antaa opetushallitukselle päätäntävallan eri aineiden, aineryhmien ja aihekokonaisuuksien sekä muun lukiolaissa tarkoitetun opetuksen tavoitteista ja keskeisistä sisällöistä.

Lukiolaki määrää myös, että lukiokoulutuksen päätteeksi pannaan toimeen ylioppilastutkinto, joka sisältää vähintään neljä koetta, joista yksi on aina äidinkielen ja kirjallisuuden koe. Loput kolme koetta on valittava vieraista kielistä, matematiikasta ja reaaliaineista. (Oikeusministeriö, 1998a)

Lukioasetus taas määrittelee tarkemmin lukiokoulutuksen opetuksen määrän (vähintään 75 kurssia, yksi kurssi keskimäärin 38 oppituntia, yksi oppitunti kestoltaan 45 min). Tarkemmin lukiokoulutuksen sisältö määritellään aina opetussuunnitelmassa, johon perustuvan suunnitelman koulutuksen järjestäjä laatii vuosittain. (Oikeusministeriö, 1998b)

4.2. Opetussuunnitelman perusteet

Nykyisin voimassa olevat nuorten lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet (myöhemmin OPS) ovat vuodelta 2003, ja ne otettiin käyttöön lukioissa viimeistään syksyllä 2005, jolloin opetussuunnitelman perusteiden mukaiset paikalliset opetussuunnitelmat otettiin käyttöön viimeistään 1.8.2005 lukion aloittavilla opiskelijoilla. (Opetushallitus, 2003a)

Opetussuunnitelmassa päätetään lukion opetus- ja kasvatustyöstä. Lukiokoulutuksen järjestäjän tulee laatia oma opetussuunnitelmansa OPS:n mukaan. Opetussuunnitelmaan on sisällytettävä muun muassa seuraavat oppiaineita koskevat ja ohjaavat seikat:

- Eheyttäminen ja aihekokonaisuudet
- Tuntijako
- Tavoitteet ja keskeiset sisällöt oppiaineittain ja kursseittain
- Opiskelijan oppimisen arviointi

OPS:ssa määrätään myös, että lukion opetussuunnitelman tulee sisältää kaikkien kurssien kuvaukset, ja että myös soveltavien kurssien tavoitteet ja sisällöt pitää määritellä opetussuunnitelmassa. (Opetushallitus, 2003b)

4.3. Matematiikka OPS:ssa

Suomalaisissa lukioissa on mahdollista opiskella ja suorittaa ylioppilastutkinto matematiikassa joko pitkänä tai lyhyenä oppimääränä.

Lyhyessä oppimäärässä on suoritettava kuusi pakollista ja valinnaisena lisäksi kaksi syventävää kurssia.

Taulukko 6: Matematiikan lyhyen oppimäärän kurssit

Pakolliset kurssit	Valinnaiset kurssit
▪ Lausekkeet ja yhtälöt (MAB1) ▪ Geometria (MAB2) ▪ Matemaattisia malleja I (MAB3) ▪ Matemaattinen analyysi (MAB4) ▪ Tilastot ja todennäköisyys (MAB5) ▪ Matemaattisia malleja II (MAB6)	▪ Talousmatematiikka (MAB7) ▪ Matemaattisia malleja III (MAB8)

Pitkässä oppimäärässä on suoritettava kymmenen pakollista ja valinnaisena lisäksi kolme syventävää kurssia.

Taulukko 7: Matematiikan pitkän oppimäärän kurssit

Pakolliset kurssit	**Valinnaiset kurssit**
▪ Funktiot ja yhtälöt (MAA1) ▪ Polynomifunktiot (MAA2) ▪ Geometria (MAA3) ▪ Analyyttinen geometria (MAA4) ▪ Vektorit (MAA5) ▪ Todennäköisyys ja tilastot (MAA6) ▪ Derivaatta (MAA7) ▪ Juuri- ja logaritmifunktiot (MAA8) ▪ Trigonometriset funktiot ja lukujonot (MAA9) ▪ Integraalilaskenta (MAA10)	▪ Lukuteoria ja logiikka (MAA11) ▪ Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä (MAA12) ▪ Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi (MAA13)

Kuten huomataan, todennäköisyyslaskenta sisältyy sekä lyhyeen että pitkään oppimäärään. Sisältöeroja niillä on, kuten alla olevan taulukon perusteella on nähtävissä.

Taulukko 8: Matematiikan lyhyen ja pitkän oppimäärän tavoitteet ja keskeiset sisällöt

Lyhyt oppimäärä	Pitkä oppimäärä
Tavoitteet Kurssin tavoitteena on, että opiskelija ▪ harjaantuu käsittelemään ja tulkitsemaan tilastollisia aineistoja ▪ tutustuu laskinten ja tietokoneiden käyttöön tilastotehtävissä ▪ perehtyy todennäköisyyslaskennan perusteisiin.	**Tavoitteet** Kurssin tavoitteena on, että opiskelija ▪ oppii havainnollistamaan diskreettejä ja jatkuvia tilastollisia jakaumia sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakaumien tunnuslukuja ▪ perehtyy kombinatorisiin menetelmiin ▪ perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja todennäköisyyksien laskusääntöihin ▪ ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja soveltamaan sitä ▪ perehtyy jatkuvan todennäköisyysjakauman käsitteeseen ja oppii soveltamaan normaalijakaumaa.
Keskeiset sisällöt ▪ jatkuvien ja diskreettien tilastollisten jakaumien tunnuslukujen määrittäminen ▪ normaalijakauma ja jakauman normittaminen ▪ kombinatoriikkaa ▪ todennäköisyyden käsite ▪ todennäköisyyden laskulakien ja niitä havainnollistavien mallien käyttöä	**Keskeiset sisällöt** ▪ diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma ▪ jakauman tunnusluvut ▪ klassinen ja tilastollinen todennäköisyys ▪ kombinatoriikka ▪ todennäköisyyksien laskusäännöt ▪ diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma ▪ diskreetin jakauman odotusarvo ▪ normaalijakauma

Lyhyessä oppimäärässä tavoitteiden painotus on tilastomatematiikassa, kun taas pitkässä oppimäärässä syvennytään enemmän myös klassiseen todennäköisyyslaskentaan ja sen menetelmiin. (Opetushallitus, 2003b)

4.4. Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittäminen

Opetushallitus käynnisti lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteiden päivittämisen valtioneuvoston päätettyä 13.11.2014 lukiolaissa tarkoitetun koulutuksen yleisistä valtakunnallisista tavoitteista ja tuntijaosta. Opetushallitus valmisteli opetussuunnitelman perusteet niin, että niiden mukaan laaditut opetussuunnitelmat otettaisiin käyttöön viimeistään 1.8.2016. Tavoitteena oli, että nuorille annettava lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet olisivat valmiit syyskuun 2015 lopussa. (Opetushallitus, 2015a)

Suurimmat uudistukset liittyvät tieto- ja viestintätekniikan (myöhemmin TVT) käyttöön. Lukion opetussuunnitelman tulisi vastaisuudessa sisältää suunnitelman myös TVT:n opetuskäytöstä. Lisäksi opiskeluympäristöjen ja – menetelmien osalta määrätään näin:

”Opiskelijoita ohjataan hyödyntämään digitaalisia opiskeluympäristöjä ja työvälineitä eri muodossa esitetyn informaation hankintaan ja arviointiin sekä uuden tiedon tuottamiseen ja jakamiseen. Opiskelijoiden omia tietoteknisiä laitteita voidaan käyttää oppimisen tukena opiskelijoiden ja huoltajien kanssa sovittavilla tavoilla. Samanaikaisesti huolehditaan siitä, että kaikilla opiskelijoilla on mahdollisuus tietoja viestintäteknologian käyttöön.”

Matematiikan osalta suurin uudistus on sekä pitkälle että lyhyelle oppimäärälle yhteinen kurssi Luvut ja lukujonot (MAY1). Tämän yhteisen opintokokonaisuuden tehtävänä on “*herättää opiskelijan kiinnostus matematiikkaa kohtaan mm. tutustuttamalla hänet matematiikan moninaiseen merkitykseen ihmiselle ja yhteiskunnalle. Tässä opintokokonaisuudessa opiskelijalla on tilaisuus vahvistaa pohjaa matematiikan opinnoilleen ja nähdä matematiikka hyödyllisenä ja käyttökelpoisena selitettäessä ja hallittaessa muun muassa yhteiskunnan, talouden ja luonnon tapahtumia ja tilanteita*”.

Muuten uudistukset liittyvät pitkän oppimäärän osalta kurssien järjestyksen muuttumiseen. Esimerkiksi Todennäköisyys ja tilastot-kurssi siirtyy kuudennesta kurssista kymmenenneksi.

Tavoitteiden osalta Todennäköisyys ja tilastot-kurssin ainut uudistus liittyy TVT:n käyttöön, sillä nyt opiskelijan tulisi kurssin jälkeen osata käyttää teknisiä apuvälineitä digitaalisessa muodossa olevan datan hakemisessa, käsittelyssä ja tutkimisessa sekä jakaumien tunnuslukujen määrittämisessä ja todennäköisyyksien laskemisessa annetun jakauman ja parametrien avulla.

Keskeisissä sisällöissä ei Todennäköisyys ja tilastot-kurssin osalta ole muutoksia. (Opetushallitus, 2015b)

4.5. Sähköiset ylioppilaskirjoitukset

Ylioppilaskokeen sähköistäminen tapahtuu vaiheittain vuosina 2016–2019. Matematiikan osalta ylioppilaskirjoitukset muuttuvat sähköisiksi viimeisenä, keväällä 2019. Käytettävän tekniikan osalta on määritetty, että vastaukset kirjoitetaan tekstinkäsittelyohjelmalla tai ne annetaan suoraan tehtävän yhteydessä olevilla välineillä, vastauksiin on mahdollista liittää esimerkiksi kuvia tai kaavioita, ja vastauksia voi luonnostella suttupaperille, jota ei kuitenkaan huomioida arvostelussa. Esimerkiksi MAOL-taulukot tarjotaan digitaalisina. Käytettävät ohjelmistot sisältävät tekstinkäsittelyohjelman lisäksi mm. kuvankäsittelyyn, vektorigrafiikkaan, symboliseen laskentaan ja kuvaajien työstämiseen käytettäviä tietokoneohjelmia.

Matematiikan sähköinen ylioppilaskoe sisältää myös tehtäviä, joita ei ratkaista teknisten apuvälineiden avulla. Teknisten apuvälineiden avulla tehtävien vaatimat kaavat kirjoitetaan kaavaeditorien avulla. (Ylioppilastutkintolautakunta, 2015)

Miten tämä sitten vaikuttaa varsinaisiin ylioppilaskirjoituksiin ja lukio-opetukseen, jää vielä tämän tutkielman osalta käsittelemättä.

5. YLÄKOULUN POHJUSTUS

Lukio-opinnot aloitetaan yleensä peruskoulun jälkeen. Peruskoulussa todennäköisyyslaskentaan ei määrällisesti juuri panosteta, vaan painotus on enemmänkin tilastoissa ja niiden tulkinnassa.

5.1. Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet

Alakoulun aikana todennäköisyyslaskennasta käydään lähinnä todennäköisyyden käsite ja erilaisiin ilmiöihin liittyvä sattuman mahdollisuus. Hyvän osaamisen kriteereissä viidennen luokan lopulla todennäköisyyslaskennasta vaaditaan, että oppilas ”*osaa selvittää erilaisten tapausten ja vaihtoehtojen lukumäärän sekä osaa päätellä mahdottoman ja varman tapauksen*”.

Yläkoulussa todennäköisyyslaskentaa voidaan hieman syventää tutustumalla erilaisiin klassisen todennäköisyyden laskentaperiaatteisiin ja tilastollisen todennäköisyyden tutkintaan. Edelleen painotus on enemmänkin tilastojen tulkinnassa, mutta myös mm. tuloperiaatetta voidaan soveltaa rajoitetusti.

Päättöarvosanan kahdeksan, joka vastaa nykyisin hyvää suoritusta, vaatimuksissa todetaan todennäköisyyslaskennan osalta, että ”*oppilaan tulisi osata määrittää mahdollisten tapausten lukumäärä ja järjestää yksinkertainen empiirinen tutkimus todennäköisyydestä*” ja ”*ymmärtää todennäköisyyden ja satunnaisuuden merkitys arkielämän tilanteissa*”. (Opetushallitus, 2004)

5.2. Opetussuunnitelman perusteet 2014

Myös peruskoulun osalta on ollut Opetussuunnitelman perusteiden uudistustyö käynnissä ja uusi versio perusteista on hyväksytty 22.12.2014. Vuoden 2014 versio otetaan käyttöön syyslukukaudella 2016 luokilla 1-6 ja porrastetusti yläkoulussa vuosien 2017–2019 aikana. (Opetushallitus, 2014a)

Kuten lukio-opetusta koskevassa uusissa Opetussuunnitelman perusteissa, myös perusopetukseen tulee mukaan yhä vahvemmin tieto- ja viestintätekniikan käyttö oppimisprosessin työvälineenä.

Todennäköisyyslaskennan osalta sisältömuutoksia ei näyttäisi tulevan, vaan tavoitteena on edelleen tarjota oppilaille kokemuksia todennäköisyyksistä arkielämässä ja pohtia tapahtumien osalta, ovatko ne luonteeltaan mahdottomia, mahdollisia vai varmoja. Alakoulun kuudennen luokan arviointikriteereissä ei enää todennäköisyyttä edes mainita.

Yläkoulun tavoitteissa todennäköisyyslaskennan osalta vain todetaan, että ”l*asketaan todennäköisyyksiä*”. Jää siis yhä enemmän opettajan päätettäväksi, mitä ja miten hän haluaa aihepiiristä opettaa. Kuitenkin arvosanakriteereissä hyvän arvosanan (8) vaatimuksissa todetaan, että ”*oppilas osaa määrittää sekä klassisia että tilastollisia todennäköisyyksiä*”, eli jonkin verran on osaamista siltä osin täsmennetty. (Opetushallitus, 2014b)

5.3. Omat kokemukset todennäköisyyslaskennasta yläkoulussa

Toimiessani itse kahden lukuvuoden ajan yläkoulun matematiikan opettajana olen saanut todeta, että yläkoulussa todennäköisyyslaskentaa vain raapaistaan erilaisten laskutekniikoiden osalta. Käytännössä todennäköisyyslaskentaa on ollut viimeisessä yhdeksännen luokan matematiikan kurssissa vain viikon verran eli 4-5 oppituntia. Tässä ajassa on käyty läpi lähinnä käsitteitä ja klassisen todennäköisyyden perustapauksia (nopanheiton, korttipakan ja kolikonheiton kaltaiset tapahtumat) ja tuloperiaatetta (asetetaan ihmisiä erilaisiin jonoihin). Lisäksi tilastojen suhteellisen frekvenssin avulla on ennustettu tilastollista todennäköisyyttä.

Valmiuksia haastavampaan todennäköisyyslaskentaan ei siis vielä yläkoulun jälkeen ole, mutta toisaalta se ei ole tavoitteenakaan, kuten yllä peruskoulun päättöarvosanan vaatimuksissa on todettu.

6. LUKION OPPIKIRJAT

Tässä tutkielmassa tutkitaan kolmea lukion matematiikan pitkän oppimäärän oppikirjaa kurssilta:

- Laudatur 6 – Todennäköisyys ja tilastot (Otava)
- Matematiikan taito 6 – Todennäköisyys ja tilastot (WSOY)
- Pitkä matematiikka 6 – Todennäköisyys ja tilastot (SanomaPro)

6.1. Laudatur 6 – Todennäköisyys ja tilastot

Laudatur 6 kirja aloittaa tilastotieteen osiolla, jossa esitellään tilastojen esittämiseen liittyvät asiat, kuten erilaiset mitta-asteikot ja diagrammit, sekä niiden piirtämistä varten tarvittavat tiedot, kuten frekvenssi, suhteellinen frekvenssi ja summafrekvenssi. Erilaiset mittaus- ja laskentamenetelmät tilaston muodostamiseksi käydään lävitse, mm. otos, aineiston luokittelu ja vaihteluväli. Todennäköisyyslaskentaankin liittyvät termit perusjoukko ja muuttuja esitellään. Tämän jälkeen opetetaan tilastojen keskiluvut sekä niiden laskeminen: tyyppiarvo, aritmeettinen keskiarvo ja mediaani. Tilastotieteen osuus lopetetaan hajontalukuihin eli vaihteluväliin ja keskihajontaan, joiden lisäksi kerrotaan, kuinka edellä mainittuja tietoja voisi hyödyntää aineiston normittamiseen.

Todennäköisyyslaskenta alkaa luontevasti tilastojen jälkeen tilastollisella todennäköisyydellä, jossa todetaan, että tilastollinen todennäköisyys saadaan jakamalla kysytyn tapahtuman frekvenssi kaikkien tapahtumien lukumäärällä. Tämän avulla esitellään myös termit varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma, sekä todennäköisyyden erilaiset esitystavat desimaaliluku, prosenttiluku ja murtoluku (tarkka arvo). Käytännön laskuesimerkkeinä mietitään lääketieteellisten testien tarkkuutta, vedonlyöntikertoimien muodostamista ja todennäköisyyksien käyttämistä verrannoissa.

Tämän jälkeen käsittelyyn saadaan permutaatiot ja kombinaatiot, joiden kanssa tutuksi tulevat myös kertoma ja tuloperiaate. Kirja aloittaa tämän tuloperiaatteesta, jota sitten hyödynnetään ensin kertoman muodostamisessa ja sitten permutaatioiden ja variaatioiden laskemisessa erilaisten ihmisjonojen avulla. Osio päätetään kombinaatioiden laskemiseen, joissa lasketaan mm. oikeiden lottorivien lukumääriä.

Seuraavaksi Laudatur 6 esittelee klassisen todennäköisyyden, eli käytännössä suotuisten alkeistapausten suhteen kaikkiin mahdollisiin alkeistapauksiin. Nopanheiton avulla vertaillaan klassisen ja tilastollisen todennäköisyyksien eroavaisuuksia. Lisäksi esitellään klassisen todennäköisyyslaskennan sovelluksena geometrinen, eli erilaisiin mitattaviin suureisiin perustuva, todennäköisyys.

Perusteiden jälkeen siirrytään erilaisiin menetelmiin. Toisistaan riippumattomille tapauksille muodostetaan kertolaskusääntö, minkä jälkeen mietitään ehdollista todennäköisyyttä tilanteessa, jossa tapahtuman todennäköisyys muuttuukin riippuen edellisen tapahtuman lopputuloksesta. Tämän jälkeen muodostetaan yhteenlaskusääntö, jota mietitään sekä toisistaan erillisten että ei-erillisten tapausten kohdalla. Osio päätetään komplementtisääntöön.

Laskusääntöjen jälkeen kirja esittelee erilaisia diskreettejä todennäköisyysjakaumia ja näistä laskettavia, jo tilastotieteen kohdalla esiteltyjä, tilastollisia tunnuslukuja, kuten odotusarvo ja keskihajonta. Lisäksi esitellään kertymäfunktio. Ainoana erityistyyppinä diskreetistä jakaumasta esitellään binomijakauma ja kerrotaan, miten sille kyseiset tunnusluvut voidaan laskea.

Jatkuva jakauma on vuorossa seuraavaksi. Siitä käsitellään tiheysfunktio ja kertymäfunktio, ja ainoana erityistapauksena käsitellään tasainen jakauma. Esimerkit ja tehtävät ovat hyvin yksinkertaisia johtuen kirjan tekijöidenkin kommentista, että todennäköisyyslaskenta on nykymallisessa Opetussuunnitelman perusteissa kurssina jo ennen integraalilaskentaa, jonka tietoja vaativampien kertymäfunktioiden laskentaan tarvittaisiin. Tästä johtuen kertymäfunktiot ovat helposti muodostettavia lähinnä tavallisten geometristen alueiden, kuten kolmioiden ja suorakulmioiden, pinta-aloja laskemalla.

Laudatur 6 päättyy normaalijakaumaan, josta käsitellään todennäköisyyksien laskeminen taulukoiden avulla sekä jakauman normittaminen. Erityistapauksena käsitellään vielä binomijakauman korvaaminen normaalijakaumalla.

Kirjan lopussa on vielä kertausosio, jossa käydään läpi teoriat ja menetelmät, ja tarjotaan opiskelijalle lisää tehtäviä laskettavaksi kertaamista varten.

6.1.1. Ajankäyttöehdotus

Kirjan tekijät ehdottavat, että kuhunkin todennäköisyyslaskennan osioon käytettäisiin kolme 45-minuuttista oppituntia, pois lukien jakaumat, joihin normaalijakaumaa lukuun ottamatta riittäisi kaksi oppituntia. Käytännössä siis esimerkiksi kuhunkin laskusääntöön käytettäisiin yksi oppitunti, ja jakaumien kohdalla esimerkiksi yksi oppitunti käytettäisiin teoriaan perehtymiseen ja toinen laskuihin. Permutaatioiden ja kombinaatioiden kohdalla lukumäärä tuntuu vähän pieneltä, sillä etenkin kombinaatioissa voidaan tehdä jo hyvinkin monimutkaisia laskuja, joten lisäaika ei olisi pahitteeksi. Toki opettaja voi itse muuttaa painotuksia haluamallaan tavalla, jos kokemuksesta tietää jonkin osa-alueen olevan toista helpompi ja näin kokee mahdolliseksi siirtää ehdotuksen tunteja kokonaisuudelta toiselle.

Mikäli lukiossa on käytössä 75-minuuttiset oppitunnit, niin kirjantekijän suositukset muuttuvat suhteessa enemmän eri osioiden välillä. Tilastotieteen osuus putoaa 270 minuutista 225 minuuttiin, eli kokonainen 45-minuuttinen oppitunti vähemmän. Vastaavasti tilastollinen todennäköisyys puristetaan yhteen oppituntiin ja diskreettien jakaumien osuus menettää myös yhden kokonaisen oppitunnin. Jatkuvaan jakaumaan panostetaan suhteellisesti enemmän kuin muihin kokonaisuuksiin, jotka noudattavat kutakuinkin ”kaksi oppituntia kolmen sijaan”-periaatetta. (Hautajärvi et al, 2006)

Ajankäyttöehdotuksen summa on tilastotiede mukaan lukien 27 oppituntia 45-minuuttisia tai 16 oppituntia 75-minuuttisia. Lukiokurssien tulisi olla keskimäärin 38 tuntia, joten jonkin verran liikkumavaraa tentteineen jää. (Opetushallitus, 2003b)

6.2. Matematiikan taito 6 – Todennäköisyys ja tilastot

Matematiikan taito 6-kirja aloittaa kurssin johdattelemalla joukko-oppiin. Tämän jälkeen aloitetaan todennäköisyyslaskenta tuloperiaatteella, jossa tuloksia perustellaan joukko-opin tuloksilla. Permutaatiot ja kertoma esitellään hyvin lyhyesti, minkä jälkeen otetaan käsittelyyn k-permutaatiot (variaatiot) ja kombinaatiot. Esitys on hyvin tiivis verrattuna esimerkiksi Laudatur 6-kirjan vastaaviin.

Näiden jälkeen esitellään vasta todennäköisyyden käsite, satunnaisilmiö ja satunnaiskoe. Todennäköisyyksistä esitellään peräkkäin tilastollinen ja klassinen todennäköisyys saman osion sisällä. Myös geometrinen todennäköisyys käydään tikkataulun avulla läpi.

Seuraavaksi esitellään komplementtisääntö ja yhteenlaskusääntö, joita seuraavat riippumattomuus ja ehdollinen todennäköisyys, joiden yhteydessä taas käsitellään kertolaskusääntö. Kokonaan oman kappaleensa saa monivaiheisen kokeen kertolaskusääntö, joka esimerkiksi Laudatur 6:ssa oli sisällytetty edellisten kanssa samaan kappaleeseen.

Binomitodennäköisyys käsitellään vielä ennen tilastotieteen osuutta. Tilastotieteen sisältö on samankaltainen kuin Laudaturissa, eli esitellään tilastojen esittämiseen liittyvät asiat, niiden piirtämistä varten tarvittavat tiedot, kuten frekvenssi, suhteellinen frekvenssi ja summafrekvenssi, ja tilastojen keskiluvut sekä niiden laskeminen Tilastotieteen osuus lopetetaan tässäkin kirjassa hajontalukuihin eli vaihteluväliin ja keskihajontaan, sekä näiden hyödyntämiseen muuttujan normittamisessa.

Kirjan loppuosa perehdyttää jakaumiin ja rakenne on hyvin Laudatur 6-kirjan kaltainen:

1. Diskreetit jakaumat ja näiden tunnusluvut (binomijakauma merkitty ylikurssiaineistoksi).
2. Jatkuva jakauma, tiheysfunktio ja kertymäfunktio, ja kuten Laudaturissakin, esimerkit ja tehtävät ovat hyvin yksinkertaisia.
3. Normaalijakauma ja sen normittaminen.

Aivan lopuksi kirjassa on kertaussivu, jossa kaikki kaavat ja tulokset on lueteltu ilman suurempia kuvauksia tai selityksiä.

6.2.1. Ajankäyttöehdotus

Kirjan tekijät ovat antaneet ajankäyttöehdotuksen vain 45-minuuttisia oppitunteja ajatellen. Tilastotieteelle on ehdotettu vain neljää tuntia, toisaalta monivaiheisen kokeen kertolaskusäännön opiskelulle on ehdotettu jopa kolmea oppituntia, mikä poikkeaa voimakkaasti Laudaturin linjasta. Muuten ehdotus myötäilee Laudaturin linjaa siitä, että kukin osa-alue käsitellään 2-3 oppitunnin aikana. (Halmetoja et al, 2006)

6.3. Pitkä matematiikka 6 – Todennäköisyys ja tilastot

Pitkä matematiikka 6-kirja aloittaa kurssin todennäköisyyteen liittyvien termien esittelyllä ja siirtyy niiden avulla klassisen todennäköisyyden laskentaan, jonka käsitteistä esitellään myös termit varma tapahtuma ja mahdoton tapahtuma. Käsitteet esitellään monipuolisemmin (ja monimutkaisemmilla kaavoilla) kuin muissa kirjoissa, mikä varmasti miellyttää matemaattisesta ilmaisusta kiinnostuneita. Ennen ensimmäistä tehtäväsarjaa esitellään myös tilastollinen todennäköisyys.

Klassisen todennäköisyyden laskentaa jatketaan esittelemällä menetelmä, jossa todennäköisyys selvitetään laskemalla alkeistapauksia. Menetelmässä esitellään sekä luettelo, taulukointi että graafinen kuvaajan avulla tehtävä ratkaisumalli. Tästä jatketaan geometriseen todennäköisyyteen, jonka jälkeen esitellään, miten lasketaan satunnaismuuttujan odotusarvo.

Seuraavaksi kirjassa syvennytään tuloperiaatteeseen ja kombinatoriikan menetelmiin, minkä jälkeen esitellään kertolaskusääntö ja ehdollinen todennäköisyys. Tästä edetään yhteenlaskusääntöön.

Todennäköisyyslaskennan osio päätetään toistokokeen todennäköisyyksien laskemiseen binomijakauman avulla.

Kirjan loppuosa perehdyttää jakaumiin ja rakenne on samanlainen kuin kahdessa muussa vertailtavassa kirjassa:

1. Diskreetit jakaumat ja näiden tunnusluvut
2. Jatkuva jakauma, tiheysfunktio ja kertymäfunktio
3. Normaalijakauma ja sen normittaminen.

Kuten Laudatur 6-kirjassakin, on Pitkän matematiikan lopussa vielä kertaukseen tarkoitettu osio, jossa teoriat on koottu tiiviiksi paketiksi selityksineen ja täydennetty vielä kertaustehtävillä.

6.3.1. Ajankäyttöehdotus

Ajankäyttöehdotus on samankaltainen muiden kirjojen kanssa, eli 2-3 oppituntia kokonaisuutta kohti. Ainoastaan kombinatoriikan läpikäymiseen on varattu selvästi enemmän: erilaisten permutaatioiden ja kombinaatioiden yksittäisten oppituntien lisäksi lasketaan vielä useampi oppitunti näiden sovellusten parissa. (Kangasaho et al, 2013)

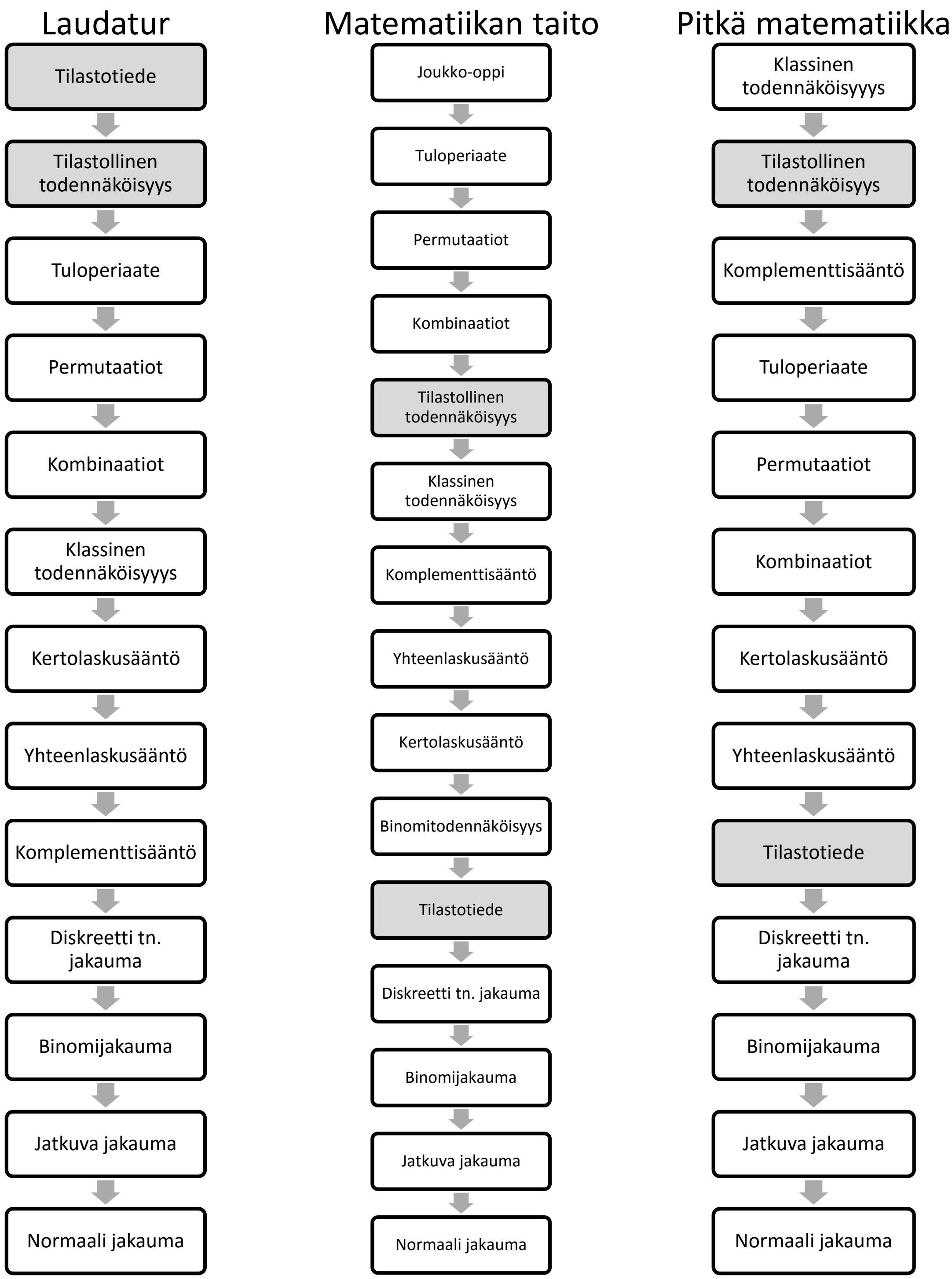
6.4. Kirjojen rakenteen vertailu

Pitkän oppimäärän matematiikan kurssi MAA6 sisältää siis sekä tilastotieteen että todennäköisyyslaskennan alueet. Jokaisessa tämän tutkielman oppikirjassa painotus on todennäköisyyslaskennassa, sillä yhden matematiikan kurssin ollessa noin 28–30 45-minuuttista oppituntia, tilastomatematiikan osuus kirjojen aikataulusuunnitelmissa on vain 4-7 oppituntia, eli maksimissaan neljännes koko kurssista.

Tilastotiedematematiikan sijoittuminen on kaikissa kirjoissa erilainen. Laudatur-kirjassa tilastot käsitellään heti kurssin aluksi. Matematiikan taito esittelee tilastot todennäköisyyslaskennan jälkeen mutta kuitenkin ennen jakaumien opiskelua. Pitkä matematiikka taas jättää tilastojen käsittelyn kurssin loppuun.

Todennäköisyyslaskennan osalta suurin eroavaisuus on siinä, että Laudatur ja Matematiikan taito esittelevät kombinatoriikkaa jo ennen kuin klassisen todennäköisyyslaskennan perusteita on kirjassa käsitelty. Tämän jälkeen tulevat kaikissa kirjossa kertolasku-, yhteenlasku- ja komplementtisäännöt vaihtelevassa järjestyksessä.

Kaikissa kirjoissa diskreetteihin ja jatkuviin todennäköisyysjakaumiin liittyvät asiat käsitellään viimeisenä. Alla olevassa kuvassa on esitetty kirjojen rakenne siinä järjestyksessä, missä aihepiirit kirjassa tulevat:



Kuva 9: Oppikirjojen sisältörakenteet

6.5. Kirjojen sisältöjen vertailu

Opetussuunnitelman perusteiden vaatimukset näkyvät kirjojen sisällöissä selvästi. Käytännössä kirjojen sisältö on lähes identtinen aihepiirien ja valittujen todennäköisyyslaskentaan liittyvien asioiden osalta.

Kaikissa kirjoissa käydään läpi klassiseen todennäköisyyteen liittyvät osa-alueet:

- Kertolasku- ja yhteenlaskusäännöt
- Komplementtisääntö
- Kombinatoriikan kombinaatiot, variaatiot ja permutaatiot

Jakaumien osalta diskreetin todennäköisyysjakaumien osalta käsiteltävät asiat ovat:

- Diskreetin jakauman perusteet
- Tunnusluvut eli odotusarvo, varianssi ja keskihajonta
- Geometrinen todennäköisyys

Jatkuvista jakaumista käsitellään normaalijakauman lisäksi binomijakauma kahdessa muussa kirjassa mutta ei Matematiikan taidossa.

Kuten aiemmin tässä tutkielmassa on todettu, kirjoissa sisällön järjestys ja rakenne poikkeaa toisistaan jonkin verran. Seuraavassa verrataan aiheiden käsittelyä näissä oppikirjoissa.

6.5.1. Tilastollinen todennäköisyys oppikirjoissa

Tilastolliseen todennäköisyyteen johdatellaan kaikissa kirjoissa yksinkertaisen toistokokeen avulla. Näistä laskettuja tilastollisia todennäköisyyksiä verrataan vastaavan tapahtuman klassiseen todennäköisyyteen ja pohditaan, mistä tulosten eroavaisuudet johtuvat. Asia käsitellään lyhyesti ja ainoastaan Laudatur-kirjassa asiasta annetaan useita erilaisia esimerkkejä tilastollisen todennäköisyyden hyödyntämisestä.

6.5.2. Kombinatoriikka oppikirjoissa

Kombinatoriikan osa-alueisiin tullaan kaikissa kirjoissa tuloperiaatteen kautta. Tuloperiaatteen avulla mietitään, kuinka monta erilaista yhdistelmää voidaan valituista osajoukoista muodostaa, kun jokaisesta osajoukosta voidaan valita yksi alkio. Matematiikan taito on kirjoista ainut, joka käyttää asiassa joukko-opillisia merkintöjä algebrallisten lisäksi. Toisaalta Matematiikan taito on myös ainoa kirja, jossa joukko-oppia edes laajemmin esitellään.

Tuloperiaatteen avulla kaikki kirjat määrittelevät sitten kertoman, permutaatiot, variaatiot ja kombinaatiot kaavoineen. Tästä alueesta soveltavana osana Pitkä matematiikka esittelee vielä binomijakauman ja binomikertoimet. Myös Laudatur esittelee binomijakauman, mutta vasta myöhemmin osana normaalijakauman sovellusta. Matematiikan taidossa esitellään tässä yhteydessä ainoastaan termi binomikerroin, mutta binomijakauma itsenäisenä osana tulee vasta myöhemmin, kun ensin on kertolasku- ja yhteenlasku-sääntöjä sovellettu kombinatoriikan kanssa.

6.5.3. Kertolaskusääntö ja yhteenlaskusääntö oppikirjoissa

Kuten aiemmasta kirjojen rakenteiden esittelystä voitiin huomata, kertolaskusäännön, yhteenlaskusäännön ja komplementtisäännön järjestys vaihtelee. Laudatur käsittelee ensin kertolaskusäännön, sekä riippumattomien että ehdollisten tapausten osalta. Tämä jälkeen esitellään yhteenlaskusääntö joukko-opillisten merkintöjen avulla ja lopuksi komplementtisääntö. Sama lähestymistapa on Pitkässä matematiikassa, jossa tosin komplementtisääntö on käyty läpi jo kurssin alussa. Tässäkin hyödynnetään joukko-opillisia merkintöjä, ja molemmat kirjat kokoavat säännöt myös matemaattisiksi kaavoiksi.

Pitkä matematiikka esittelee ensin yhteenlaskusäännön ja sitten kertolaskusäännön eri tapauksissa. Varsinaisesti merkitystä järjestyksellä ei ole, sillä säännöt eivät varsinaisesti vaikuta toisiinsa näissä sovellustapauksissa.

6.5.4. Todennäköisyysjakaumat oppikirjoissa

Kaikissa oppikirjoissa todennäköisyysjakaumat käsitellään samassa järjestyksessä.

Käsittely aloitetaan diskreeteillä todennäköisyysjakaumilla, joissa esitellään erilaiset graafiset esitystavat, odotusarvot ja niiden laskeminen kaavoineen, sekä vaatimus siitä, että jakauman todennäköisyyksien summan on oltava yksi.

Jatkuvien jakaumien osalta lähestymistapa on samankaltainen kuin diskreeteillä jakaumilla. Graafiset esitystavat ja niiden muodostaminen käsitellään kaikissa kirjoissa, sekä kertymäfunktion muodostaminen.

Vain Matematiikan taito käsittelee tilastollisten tunnuslukujen laskemisen jatkuville jakaumille yleisessä tapauksessa. Tosin kovin monimutkaisiin kertymäfunktioihin ei kirjassa voida mennä, sillä kertymäfunktioiden muodostamisessa oleellisia integraalifunktioita ei vielä tässä vaiheessa ole lukiomatematiikassa käsitelty.

6.5.5. Normaalijakauma oppikirjoissa

Normaalijakaumien käsittely oppikirjoissa on samanlainen kaikissa. Normaalijakauman käsite esitellään kellokäyräkuvaajan avulla. Normaalijakauman tiheysfunktiokin mainitaan, mutta koska sen käsittely tarkemmin lukiomatematiikalla on turhan haastavaa, eikä tässä vaiheessa lukiomatematiikassa ole käsitelty integrointia, minkä kertymäfunktion muodostamiseen tässä tarvitsisi, saatikka Neperin lukua, joka normaalijakauman tiheysfunktion kaavassa esiintyy.

Sen sijaan käsitellään normitetun normaalijakauman tunnuspiirteet odotusarvon ja keskihajonnan osalta ja niiden vaikutuksista normaalijakauman kuvaajaan. Pääpaino on kuitenkin normaalijakauman kertymäfunktiossa erilaisten todennäköisyyksien laskemiseksi kysytyille muuttujan arvoväleille käyttäen apuna normaalijakauman kertymäfunktion taulukoituja arvoja. Lisäksi nykyaikaiset laskimet osaavat laskea arvot suoraan.

Normaalijakauman osuus kirjoissa päättyy jakauman normittamiseen ja tällaisten jakaumien todennäköisyyksien laskemiseen. Pitkä matematiikka ja Laudatur esittelevät vielä erikoistapauksena binomijakauman normittamisen.

6.6. Vertailu Opetussuunnitelman perusteisiin

Opetussuunnitelman perusteiden tavoitteet näyttäisivät täyttyvän seuraavasti.

Taulukko 9: Opetussuunnitelman perusteiden tavoitteiden toteutuminen oppikirjoissa

Tavoite	Toteutuminen
Oppii havainnollistamaan diskreettejä ja jatkuvia tilastollisia jakaumia sekä määrittämään ja tulkitsemaan jakaumien tunnuslukuja	Toteutuu kaikissa kirjoissa havainnollistamisen osalta niin diskreettien kuin tilastollisten jakaumienkin osalta. Tunnuslukuja ei yhtä oppikirjaa lukuun ottamatta (Matematiikan taito) määritetä jatkuville jakaumille.
Perehtyy kombinatorisiin menetelmiin	Kaikissa kirjoissa perehdytään monipuolisesti kombinatorisiin menetelmiin niin permutaatioiden, variaatioiden kuin kombinaatioidenkin osalta.
Perehtyy todennäköisyyden käsitteeseen ja todennäköisyyksien laskusääntöihin	Kaikissa kirjoissa perehdytään keskeisiin käsitteisiin niin klassisen kuin tilastollisenkin todennäköisyyslaskennan osalta. Samoin laskusäännöt, kuten kertolaskusääntö, yhteenlaskusääntö, komplementtisääntö kuin erilaisten yksittäisten tapahtumien todennäköisyyksien laskeminen käsitellään kattavasti.
Ymmärtää diskreetin todennäköisyysjakauman käsitteen ja oppii määrittämään jakauman odotusarvon ja soveltamaan sitä	Kaikissa kirjoissa diskreetin todennäköisyysjakauman käsite ja esitystavat esitellään kattavasti, samoin tilastollisten tunnuslukujen laskeminen. Tilastollisten tunnuslukujen tulkinta taas jää usein opettajan ja opiskelijan selvitettäväksi, sillä näistä ei käytännön esimerkkejä ole.
Perehtyy jatkuvan todennäköisyysjakauman käsitteeseen ja oppii soveltamaan normaalijakaumaa.	Kaikissa kirjoissa perehdytään alkeellisella tasolla jatkuvaan todennäköisyysjakaumaan ja opitaan soveltamaan normaalijakaumaa ja sen tilastoituja arvoja todennäköisyyksien laskemiseen normaalisti jakautuneessa aineistossa.

Opetussuunnitelman perusteiden keskeiset sisällöt näyttäisivät tulevan käsitellyiksi seuraavasti.

Taulukko 10: Opetussuunnitelman perusteiden sisältöjen toteutuminen oppikirjoissa

Keskeinen sisältö	Toteutuminen
Diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, esitystapojen ja oleellisten matemaattisten menetelmien osalta.
Jakauman tunnusluvut	Diskreetin todennäköisyysjakauman osalta käsitellään kaikissa kirjoissa niin odotusarvon, varianssin kuin keskihajonnankin osalta. Jatkuvan todennäköisyysjakauman osalta ei toteudu kuin Matematiikan taito-kirjassa.
Klassinen ja tilastollinen todennäköisyys	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, esitystapojen ja oleellisten matemaattisten menetelmien osalta.
Kombinatoriikka	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, oleellisten matemaattisten menetelmien ja niiden soveltamisen osalta.
Todennäköisyyksien laskusäännöt	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, oleellisten matemaattisten menetelmien ja niiden soveltamisen osalta.
Diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, esitystapojen ja oleellisten matemaattisten menetelmien osalta.
Diskreetin jakauman odotusarvo	Käsitellään kaikissa kirjoissa.
Normaalijakauma	Käsitellään kaikissa kirjoissa käsitteiden, esitystapojen ja oleellisten matemaattisten menetelmien osalta.

6.6.1. Aiheita oppikirjoissa Opetussuunnitelman perusteiden ulkopuolelta

Aiemmin tässä tutkielmassa mainittiin, että Matematiikan taito sisältää erillisen osion, jossa on tutkimus- ja harrastetehtäviä edistyneemmille ja niille, jotka haluavat syventää todennäköisyyslaskennan osaamista.

Muilta osin oppikirjoissa ei ole syventävää osaamista palvelevia osioita. Ainoastaan pieniä historiaknoppeja ja termien nimien selityksiä esiintyy siellä täällä osa-alueita käsiteltäessä.

Toki nytkin todennäköisyyslaskennan kurssi on ”täynnä” erilaisia aihealueita, joten välttämättä syventävää tietoa ei tässä kohdassa tarvitakaan. Todennäköisyyslaskenta ainakin omasta kokemuksestani on jo itsenään vaativaa, etenkin yhtään soveltavimpien laskujen ja tehtävien osalta.

6.7. Aihealueen kattavuus oppikirjoissa

Todennäköisyyslaskennan perusosa-alueet käydään siis kattavasti läpi lukion oppikirjoissa ajatellen mahdollisia ”tavallisessa elämässä” tarvittavaa todennäköisyyksien laskemista ja ymmärtämistä. Toki tämä tavoite varmasti on Opetussuunnitelman perusteiden laatijoillakin ja kuten aiemmin huomattiin, perusteita noudatetaan varsin täsmällisesti tässäkin lukion matematiikan kurssissa.

Jos verrataan sisältöalueita tässä tutkielmassa aiemmin esiteltyihin todennäköisyyslaskennan alueisiin, niin huomattavin puutos on havaittavissa siinä, että kertymäfunktioiden käsittely ja muodostaminen jatkuvien jakaumien kohdalla jää pintaraapaisuksi siitä syystä, että yhtään monimutkaisempien kertymäfunktioiden muodostaminen vaatisi integraalilaskennan tietoja ja taitoja, jotka Opetussuunnitelman perusteissa ovat vasta viimeisessä pakollisessa pitkän matematiikan kurssissa (MAA10).

Lisäksi diskreettien jakaumien kohdalla esimerkiksi geometristä tai Poissonin jakaumaa ei esitellä, vaan diskreettien jakaumien kuvaajat ovat käytännössä yksinkertaisia pylväsdiagrammeja vailla vaativampia kaavoja. Binomijakaumankin normittamisessa apuna käytetyt kuvaajat ovat tällaisia. Matematiikan taito-kirjassa kirjan lopussa on erillinen osio nimeltään Tutkimus- ja harrastustehtäviä, jossa esitellään ns. ylikurssin asioita, joista yksi on Poissonin jakauma ja siihen liittyen muutama soveltava tehtävä.

7. TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN TEHTÄVÄT YLIOPPILASKIRJOITUKSISSA

Tässä tutkielmassa tutkitaan ylioppilaskirjoitusten pitkän matematiikan todennäköisyyslaskennan tehtäviä vuosilta 2008–2015.

Seuraavassa tutkitaan ylioppilaskirjoituksittain, onko tehtävissä ollut todennäköisyyslaskennan tehtävää ja jos on, esitellään tehtävä ratkaisuineen ja analysoidaan, mitä todennäköisyyslaskennan menetelmiä tehtävän ratkaisuissa on tarvittu.

Käytetyt menetelmät on alleviivattu tehtävän ratkaisusta.

7.1. Todennäköisyyslaskennan ylioppilaskirjoitustehtävät ratkaisuineen

Ylioppilaskirjoitustehtävät ratkaisuineen alkaen keväästä 2008 ja päättyen syksyyn 2015 on esitelty aikajärjestyksessä.

Tehtävänannot on otettu suoraan ylioppilaskirjoitustehtävistä eikä niitä ole muokattu. (Kivelä, 2015)

Tehtävien ratkaisemisessa oleelliset todennäköisyyslaskennan tekniikat ja laskusäännöt on alleviivattu.

7.1.1. Kevät 2008

Tehtävänanto:

”Cd-levyllä on viisi kappaletta, ja henkilö kuuntelee levyn päivittäin yhden viikon aikana siten, että hän asettaa soittimen toistamaan kappaleet satunnaisessa järjestyksessä. Millä todennäköisyydellä kappaleet tulevat ainakin kerran kuunnelluiksi siinä järjestyksessä, jossa ne ovat levyllä?”

Tehtävän ratkaisu:

Tehtävä lasketaan <u>komplementtisäännön</u> avulla eli

$$P(\text{Tulee kerran levyn järjestyksessä}) = 1 - P(\text{Ei tule kertaakaan levyn järjestyksessä})$$

Kappaleet voidaan asettaa satunnaiseen järjestykseen viiden kertoman $5! = 120$ eri tavalla (<u>5-permutaatio</u>). Todennäköisyys sille, että kappaleet eivät ole levyn omassa järjestyksessä on $\frac{119}{120}$. Koska viikon aikana satunnainen järjestys valitaan kerran päivässä eli seitsemän kertaa, ja järjestyksen valinta ei riipu edellispäivän järjestyksestä, todennäköisyys sille, että koko viikon aikana kappaleet eivät ole levyn järjestyksessä voidaan laskea <u>riippumattomien tapausten kertolaskusäännöllä</u> eli

$$P(\text{Ei tule kertaakaan levyn järjestyksessä}) = \left(\frac{119}{120}\right)^7.$$

Joten todennäköisyys sille, että kappaleet tulevat vähintään kerran levyn järjestyksessä on

$$P(\text{Tulee kerran levyn järjestyksessä}) = 1 - \left(\frac{119}{120}\right)^7 \approx 0{,}0569 = 5{,}69\ \%.$$

7.1.2. Syys 2008

Tehtävänanto:

"Laatikossa on kaksi valkoista ja kolme mustaa palloa. Laatikosta otetaan umpimähkään kaksi palloa. Olkoon satunnaismuuttuja X nostossa saatujen mustien pallojen lukumäärä. Laske todennäköisyydet P(X = k), k = 0, 1, 2. Määritä odotusarvo E(X)."

Tehtävän ratkaisu:

Lasketaan erikseen tapaukset $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ ja $P(X = 2)$.

Lasketaan ensin $P(X = 0)$ eli että ei saada yhtään mustaa palloa. Tällöin voidaan käytännössä laskea todennäköisyys sille, että saadaan molemmille nostoilla valkoinen pallo. Nyt on kyseessä ehdollinen todennäköisyys, sillä peräkkäisille nostoille pallojen lukumäärä muuttuu ensimmäisen noston jälkeen ja todennäköisyys toisen noston pallon värille riippuu ensimmäisestä nostosta. Joten kunkin tapauksen todennäköisyys saadaan kertolaskusäännön avulla:

$$P(X = 0) = P(\text{Saadaan kaksi valkoista palloa.}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Sitten lasketaan $P(X = 1)$. Tällöin voidaan saada musta pallo joko ensimmäiselle nostolla tai toisella nostolla, mutta ei molemmilla. Joten nyt käytetään yhteenlaskusääntöä:

$$P(X = 1) = P(\text{Saadaan musta ensimmäisellä nostolla}) + P(\text{Saadaan musta toisella nostolla})$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}.$$

Lopuksi lasketaan $P(X = 2)$ eli saadaan musta pallo molemmilla nostoilla. Joten

$$P(X = 2) = P(\text{Saadaan kaksi mustaa palloa.}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}.$$

Satunnaismuuttujan odotusarvo saadaan laskemalla kaavalla

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Eli tässä tapauksessa pallojen lukumäärän odotusarvo on

$$E(X) = \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{6}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 2 = \frac{12}{10} = 1{,}2.$$

7.1.3. Kevät 2009

Tehtävänanto:

”Tehdas valmistaa hehkulamppuja siten, että kone A valmistaa 60 prosenttia, kone B 30 prosenttia ja kone C 10 prosenttia hehkulampuista. Koneen A viallisten hehkulamppujen määrä on 2 prosenttia, koneen B 3 prosenttia ja koneen C 4 prosenttia.

a) Mikä on todennäköisyys, että tehtaan valmistama lamppu on viallinen?

b) Tehtaan valmistama viallinen lamppu valitaan umpimähkään. Millä todennäköisyydellä se on koneen C valmistama?”

Tehtävän ratkaisu:

a) Todennäköisyys sille, että lamppu on viallinen, on todennäköisyyksien summa sille, että viallinen lamppu on saatu joko koneesta A, B tai C. Lasketaan siis ensin todennäköisyydet sille, että tietystä koneesta saatu lamppu on viallinen. Tapahtumat ovat toisistaan riippumattomia, joten lasketaan kertolaskusäännöllä kertomalla todennäköisyys, millä lamppu on saatu tietystä koneesta (eli valmistusprosentti), todennäköisyydellä, millä tietystä koneesta saatu lamppu on viallinen. Joten konekohtaiset vikatodennäköisyydet ovat

$$P(Koneesta\ A\ saatu\ lamppu\ on\ viallinen) = 0{,}60 \cdot 0{,}02 = 0{,}012$$

$$P(Koneesta\ B\ saatu\ lamppu\ on\ viallinen) = 0{,}30 \cdot 0{,}03 = 0{,}009$$

$$P(Koneesta\ C\ saatu\ lamppu\ on\ viallinen) = 0{,}10 \cdot 0{,}04 = 0{,}004.$$

Nyt siis todennäköisyys sille, että saadaan viallinen lamppu, saadaan yhteenlaskusäännöllä:

$$P(Saatu\ lamppu\ on\ viallinen) = 0{,}012 + 0{,}009 + 0{,}004 = 0{,}025 = 2{,}5\ \%.$$

b) Todennäköisyys sille, että viallinen lamppu on saatu tietystä koneesta, saadaan jakamalla todennäköisyys sille, millä koneesta saatu lamppu on viallinen, todennäköisyydellä sille, että lamppu ylipäänsä on viallinen. Nyt kyseessä on siis ehdollinen todennäköisyys, sillä aluksi on oletettava, että lamppu on viallinen. Käytetään siis a-kohdassa laskettuja arvoja:

$$P(Viallinen\ lamppu\ on\ koneesta\ C) = \frac{0{,}004}{0{,}025} = 0{,}16 = 16\ \%.$$

7.1.4. Syys 2009

Tehtävänanto:

"A, B, C ja D aikovat jakaa keskenään korillisen omenoita siten, että kukin vuorollaan ottaa aina yhden omenan. Korissa olevien omenoiden lukumäärää ei tiedetä. A ehdottaa

vedonlyöntiä: jos jokaiselle tulee yhtä monta omenaa, A maksaa kolmelle muulle kullekin 50 euroa. Muussa tapauksessa kukin kolmesta maksaa A:lle 25 euroa. Laske A:n saaman rahamäärän odotusarvo."

Tehtävän ratkaisu:

Koska omenoiden lukumäärää ei tiedetä, voidaan miettiä lukumäärän jakojäännöstä jaettaessa määrä neljälle. On yhtä todennäköistä, että jakojäännös on 0, 1, 2, tai 3. Käytännössä tilanne vastaa sitä, että mikäli jakojäännös on nolla, kaikki saavat saman verran omenia. Jakojäännöksen ollessa jotain muuta, kaikki eivät saa saman verran omenia. Joten

$$P(\text{Jako menee tasan}) = P(\text{Jää yksi yli}) = P(\text{Jää kaksi yli}) = P(\text{Jää kolme yli}) = \frac{1}{4}.$$

<u>Odotusarvo</u> A:n rahamäärälle lasketaan kaavalla

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i.$$

Eli tässä tapauksessa odotusarvo on A:n näkökulmasta

$$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot 25\text{ €}) + \frac{1}{4} \cdot \big(3 \cdot (-50\text{ €})\big) = 18{,}75\text{ €}.$$

7.1.5. Kevät 2010

Tehtävänanto:

"a) Laatikossa on kaksi eriväristä palloa. Laatikosta nostetaan umpimähkään yksi pallo, pannaan se takaisin ja nostetaan taas umpimähkään pallo. Mikä on todennäköisyys, että nostetut pallot ovat eriväriset?

b) Mikä on vastaava todennäköisyys, jos laatikossa onkin kolme keskenään eriväristä palloa ja samalla tavalla nostetaan kaksi palloa?"

Tehtävän ratkaisu:

a) Oletetaan, että laatikossa ovat värit A ja B. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen pallo on A ja toinen pallo on B, on <u>riippumattomien tapahtumien kertolaskusäännön</u> perusteella:

$$P(\text{A, B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Toisaalta, myös järjestys ”ensin B ja sitten A” kelpaa:

$$P(\mathrm{B,A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Tapaukset ovat erillisiä, joten yhteenlaskusäännön avulla saadaan:

$$P(\text{Saadaan eriväriset pallot}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

b) Oletetaan, että laatikossa ovat värit A, B ja C. Todennäköisyys sille, että ensimmäinen pallo on A ja toinen pallo on B tai C, on:

$$P(\mathrm{A}, \mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Todennäköisyys on sama myös tapauksille $\boldsymbol{P}(\mathrm{B}, \mathrm{A} \cup \mathrm{C})$ ja $\boldsymbol{P}(\mathrm{C}, \mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Joten taas yhteenlaskusäännöllä:

$$P(\text{Saadaan eriväriset pallot}) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

7.1.6. Syys 2010

Tehtävänanto:

"Monivalintatestissä on 25 väitettä ja kussakin kaksi vastausvaihtoehtoa. Opiskelija tietää oikean vastauksen 10 väitteeseen, mutta joutuu arvaamaan loput. Millä todennäköisyydellä hän läpäisee testin, kun läpipääsyyn vaaditaan 15 oikeaa vastausta?"

Tehtävän ratkaisu:

Tehtävä voidaan ratkaista <u>binomitodennäköisyyden</u> avulla eli kaavalla

$$P(\text{Tapahtuma esiintyy k kertaa n:stä.}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nyt $\boldsymbol{n = 15}$, sillä niin moneen kysymykseen opiskelija joutuu arvaamaan. Hän pääsee läpi, jos saa lopuista tehtävistä vähintään viisi oikein, eli hän ei pääse läpi, mikäli lopuista kysymyksistä hän saa oikein $\boldsymbol{0 - 4}$ vaihtoehtoa, eli $\boldsymbol{k = [0, 1, 2, 3, 4]}$. Arvattaessa todennäköisyys oikealle vastaukselle on $\boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$ ja väärälle $\boldsymbol{1 - p = \frac{1}{2}}$. Sijoittamalla kaavaan saadaan todennäköisyydet oikeiden vastausten määrälle tapauksilla $\boldsymbol{k = [0, 1, 2, 3, 4]}$:

$$P(k=0)=\binom{15}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\approx 0{,}000031$$

$$P(k=1)=\binom{15}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{14}\approx 0{,}000458$$

$$P(k=2)=\binom{15}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{13}\approx 0{,}003204$$

$$P(k=3)=\binom{15}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}\approx 0{,}013885$$

$$P(k=4)=\binom{15}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}\approx 0{,}041656.$$

Joten <u>komplementtisäännön</u> avulla saadaan vastaus kysymykseen:

$$P(\text{Opiskelija saa vähintään viisi oikein.})=1-\sum_{k=0}^{4}\binom{15}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{15-k}=0{,}940765\approx 94\ \%.$$

7.1.7. Kevät 2011

Tehtävänanto:

"Lasten Lotossa rastitaan alle kuvatusta ruudukosta kolme ruutua ja arvonnassa muodostetaan kolmen numeron oikea rivi. Laske todennäköisyydet saada nolla, yksi, kaksi tai kolme oikein. Mikä on näiden todennäköisyyksien summa?"

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***

Tehtävän ratkaisu:

Tehtävä ratkaistaan kombinatoriikan avulla muodostamalla vaihtoehdoista kaikki mahdolliset <u>3-kombinaatiot</u> ja vertaamalla siihen mahdollisten oikeiden rivien lukumäärää.

Kaikkiaan kolmen numeron rivejä on $\binom{10}{3}=120$.

Ratkaistaan ensin todennäköisyys, että yksikään numeroista ei ole oikea. Tällöin $\binom{3}{0} = 1$ tavalla voidaan valita oikea numero pelatuista numeroista (eli ei voida), ja $\binom{7}{3} = 35$ tavalla valita kaksi numeroa, jotka eivät ole pelatuissa numeroissa. Yhteensä siis ehdon täyttäviä rivejä on $\binom{3}{0} \cdot \binom{7}{3} = 1 \cdot 35 = 35$. Todennäköisyys sille, että yksi numero on oikein, on siis

$$P(\text{Ei yhtään numeroa oikein}) = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

Ratkaistaan sitten todennäköisyys, että yksi numero on oikein. Tällöin $\binom{3}{1} = 3$ tavalla voidaan valita oikea numero pelatuista numeroista, ja $\binom{7}{2} = 21$ tavalla valita kaksi numeroa, jotka eivät ole pelatuissa numeroissa. Yhteensä siis ehdon täyttäviä rivejä on $\binom{3}{1} \cdot \binom{7}{2} = 3 \cdot 21 = 63$. Todennäköisyys sille, että yksi numero on oikein, on siis

$$P(\text{Yksi numero oikein}) = \frac{63}{120}.$$

Vastaavasti todennäköisyys sille, että kaksi numeroa on oikein, on

$$P(\text{Kaksi numeroa oikein}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{7}{1}}{120} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$$

ja todennäköisyys sille, että kolme numeroa on oikein, on

$$P(\text{Kolme numeroa oikein}) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{7}{0}}{120} = \frac{1}{120}.$$

Todennäköisyyksien summa on

$$P(\text{0–3 numeroa oikein}) = \frac{7}{24} + \frac{63}{120} + \frac{7}{40} + \frac{1}{120} = 1.$$

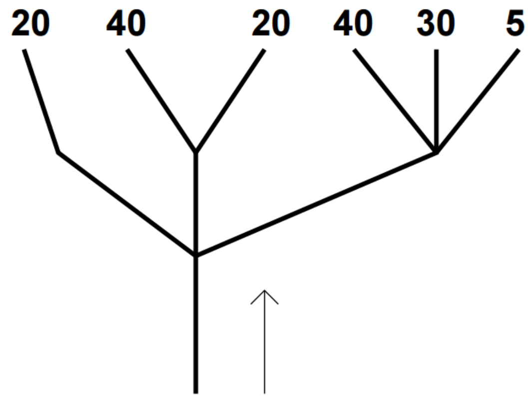
7.1.8. Syys 2011

Tehtävänanto:

"Eräässä tietokonepelissä pelaaja etenee ylimmälle tasolle oheisen kaavion mukaisesti ja saa kaavioon merkityn pistemäärän. Jokaisessa risteyksessä hän valitsee satunnaisesti yhden tasavertaisista vaihtoehdoista ja etenee seuraavalle tasolle ylöspäin.

a) Millä todennäköisyydellä pelaaja saavuttaa suurimman pistemäärän 40?

b) Määritä pistemäärän odotusarvo."



Tehtävän ratkaisu:

a) Todennäköisyys valita risteyksessä jokin haaroista on $\frac{1}{n}$, missä n on risteyksessä olevien haarojen lukumäärä. Kunkin risteyksen haarojen määrä ei riipu edellisestä risteyksessä tehdystä valinnasta, joten sovelletaan riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntöä kutakin vaihtoehtoa varten ja lasketaan lopuksi suotuisten tapahtumien todennäköisyydet yhteenlaskusäännön avulla yhteen. Pelaajalla on kaksi vaihtoehtoa saavuttaa 40 pistettä, joten todennäköisyys tälle on

$$P(\text{Saadaan 40 pistettä}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.$$

b) Odotusarvo lasketaan kaavalla $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, joten nyt

$$E(X) = \frac{1}{3} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 40 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 = 25.$$

7.1.9. Kevät 2012

Tehtävänanto:

"Ringettejoukkueen kolmen hyökkääjän todennäköisyydet tehdä maali rangaistuslaukauksella ovat 65 %, 75 % ja 54 %. Kukin kolmesta hyökkääjästä saa yhden yrityksen.

a) Millä todennäköisyydellä ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin?

b) Laske rangaistuslaukausmaalien lukumäärän odotusarvo."

Tehtävän ratkaisu:

a) Todennäköisyys sille, että ainakin yksi maali syntyy, on komplementtitapahtuma sille, että ei synny yhtään maalia. Todennäköisyys voidaan siis laskea komplementtisäännön avulla. Koska hyökkääjien maalintekotodennäköisyydet ovat toisistaan riippumattomat, käytetään riippumattomien tapausten kertolaskusääntöä, jolla lasketaan todennäköisyys sille, että kukaan ei saa maalia. Yksittäisen hyökkääjän todennäköisyys sille, että hyökkääjä ei tee maalia, saadaan myös komplementtisäännön avulla, joten

$$P(\text{Ei maalia}) = (1 - 0{,}65) \cdot (1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}54) = 0{,}04025.$$

Siis todennäköisyys sille, että tulee ainakin yksi maali, on

$$P(\text{Ainakin yksi maali}) = 1 - 0{,}04025 = 0{,}95975 \approx 96\ \%.$$

b) Odotusarvo lasketaan kaavalla $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, mutta sitä varten on ensin laskettava todennäköisyydet eri maalimäärille.

Todennäköisyys sille, että ei tule yhtään maalia, laskettiin jo a-kohdassa, joten $P(\text{Nolla maalia}) = 0{,}04025$.

Muille maalimäärille vastaavasti lasketaan siten, että muodostetaan erilaiset yhdistelmät maalintekijöistä:

$P(\text{Yksi maali})$
$= 0{,}65 \cdot (1 - 0{,}75) \cdot (1 - 0{,}54) + (1 - 0{,}65) \cdot 0{,}75 \cdot (1 - 0{,}54) + (1 - 0{,}65) \cdot (1 - 0{,}75) \cdot 0{,}54$

$= 0{,}24275$

$P(\text{Kaksi maalia})$

$= 0{,}65 \cdot 0{,}75 \cdot (1 - 0{,}54) + 0{,}65 \cdot (1 - 0{,}75) \cdot 0{,}54 + (1 - 0{,}65) \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}54$

$= 0{,}45375$

$P(\text{Kolme maalia}) = 0{,}65 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}54 = 0{,}26325.$

Maalimäärän odotusarvo on siis

$$E(X) = 0{,}04025 \cdot 0 + 0{,}24275 \cdot 1 + 0{,}45375 \cdot 2 + 0{,}26325 \cdot 3 = 1{,}94.$$

Huomioitava on myös, että laskun voisi ratkaista myös binomitodennäköisyyden odotusarvon kaavalla

$$E(X) = np.$$

Sillä nyt olisi odotusarvon kaavassa pelaajan numero $i = [1,2,3]$ ja vastaavat todennäköisyydet $p_i = [0{,}65; 0{,}75; 0{,}54]$ ja maalimäärä kullakin yksi. Joten

$$E(X) = \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot 1 = 0{,}65 + 0{,}75 + 0{,}54 = 1{,}94.$$

7.1.10. Syys 2012

Tehtävänanto:

"Kiireisellä professorilla on yksi luento jokaisena viitenä arkipäivänä, mutta hän ehtii pitää päivittäisen luentonsa vain 80 prosentin todennäköisyydellä.

a) Millä todennäköisyydellä hän ehtii pitää viikon kaikki luennot?

b) Millä todennäköisyydellä vain yksi viidestä luennosta jää pitämättä?

c) Määritä viikossa pidettyjen luentojen lukumäärän odotusarvo."

Tehtävän ratkaisu:

a) Yksittäisen luennon pitämisen todennäköisyys on riippumaton muiden päivien luentojen pitämisestä, joten riippumattomien tapausten kertolaskusäännön perusteella

$$P(\text{Kaikki luennot pidetään}) = 0{,}8^5 = 0{,}32768 \approx 33\ \%.$$

b) Komplementtisäännön avulla voidaan laskea, että todennäköisyys sille, että luento jää pitämättä, on $1 - 0{,}8 = 0{,}2 = 20\ \%$. Todennäköisyys sille, että yksi luento jää pitämättä ja muut pidetään, on $\mathbf{(1-0,8)\cdot 0,8^4 = 0,08192}$. Mutta koska luento voi olla mikä tahansa viidestä arkipäivästä, on

$$P(\text{Yksi luento jää pitämättä}) = 5 \cdot (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096 \approx 41\ \%.$$

c) Odotusarvo lasketaan kaavalla $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$, mutta sitä varten on ensin laskettava todennäköisyydet eri määrille päiviä, jolloin luento pidetään. Binomitodennäköisyyden kaavalla

$$P(\text{Tapahtuma esiintyy k kertaa n:stä.}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

voidaan laskea todennäköisyydet sille, että viidestä luennosta *k* luentoa pidetään:

$$P(\text{k luentoa pidetään}) = \binom{5}{k} \cdot 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{5-k}.$$

Joten odotusarvo pidettyjen luentojen lukumäärälle voidaan laskea seuraavasti:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{5-k} \cdot k = 4.$$

Tai koska kyseessä on binomijakauma, taulukkokirjasta saadaan suoraan kaava

$$E(X) = n \cdot p$$

$$E(X) = 5 \cdot 0{,}8 = 4.$$

7.1.11. Kevät 2013

Tehtävänanto:

"Veriryhmien B ja O esiintymistodennäköisyydet ovat P(B) = 0,17 ja P(O) = 0,33. Vampyyri puree kahtatoista ihmistä. Laske todennäköisyys sille, että

a) joukossa on enintään yhdeksän ihmistä, joiden veriryhmä on O.

b) joukossa on kolme tai neljä ihmistä, joiden veriryhmä on B."

Tehtävän ratkaisu:

a) Enintään yhdeksän ihmistä on komplementtitapahtuma sille, että joukossa olisi 10, 11 tai 12 ihmistä, joilla on veriryhmä O.

Lasketaan ensin todennäköisyys sille, että joukossa on kymmenen ihmistä, joilla on veriryhmä O. Todennäköisyys sille, että ihmisellä ei ole tiettyä veriryhmää, on komplementtisäännön mukaan $(1 - veriryhmän\ tn.)$ Joten binomitodennäköisyyden kaavalla

$$P(\text{Tapahtuma esiintyy k kertaa n:stä.}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

voidaan laskea todennäköisyys sille, että kymmenen ihmistä kahdestatoista on O-veriryhmää:

$$P(10 \text{ O-ihmistä}) = \binom{12}{10} \cdot 0{,}33^{10} \cdot (1-0{,}33)^2 = 0{,}0000083.$$

Vastaavasti lasketaan

$$P(11 \text{ O-ihmistä}) = \binom{12}{11} \cdot 0{,}33^{11} \cdot (1-0{,}33)^1 = 0{,}0000406$$

$$P(12 \text{ O-ihmistä}) = \binom{12}{12} \cdot 0{,}33^{12} \cdot (1-0{,}33)^0 = 0{,}00000167.$$

Joten komplementtisäännön perusteella

$$P(\text{Enintään 9 O-ihmistä}) = 1 - 0{,}0000083 - 0{,}0000406 - 0{,}00000167 \approx 0{,}99995.$$

b) Vastaavalla tavalla lasketaan

$$P(3 \text{ B-ihmistä}) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}17^3 \cdot (1-0{,}17)^9 = 0{,}202056$$

$$P(4 \text{ B-ihmistä}) = \binom{12}{4} \cdot 0{,}17^4 \cdot (1-0{,}17)^8 = 0{,}093116.$$

Yhteenlaskusääntöä hyödyntäen saadaan

$$P(3 \text{ tai } 4 \text{ B-ihmistä}) = 0{,}202056 + 0{,}093166 = 0{,}295172 \approx 30\ \%.$$

7.1.12. Syys 2013

Tehtävänanto:

”Kaksipäiväisiin turnajaisiin osallistui kaikkiaan 329 ritaria. Heistä oli ensimmäisenä päivänä paikalla 302 ja toisena 285. Millä todennäköisyydellä turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla molempina päivinä?"

Tehtävän ratkaisu:

Oletetaan, että n ritaria osallistui molempina päivinä. Silloin 302-n ritaria osallistui vain ensimmäisenä päivänä ja 285-n ritaria toisena päivänä:

Osallistuminen	**Ritareita**
Molempina päivinä	n
1. päivänä	$302 - \mathrm{n}$
2. päivänä	$285 - n$
YHTEENSÄ	329

Tästä saadaan yhtälö

$$n + (302 - n) + (285 - n) = 329$$

$$-n + 587 = 329$$

$$n = 258.$$

Eli ritareista 258 osallistui molempina päivinä. Klassisen todennäköisyyden perusteella

$$P(\text{Osallistui molempina päivinä}) = \frac{258}{329} = 0{,}78410 \approx 78{,}4\%.$$

7.1.13. Kevät 2014

Tehtävänanto:

"Säännöllisen tetraedrin muotoista noppaa heittämällä voi saada silmäluvuksi 1, 2, 3 tai 4. Nämä ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Pelaaja heittää yhtä aikaa tetraedrin muotoista ja tavallista noppaa ja laskee silmälukujen summan.

a) Määritä kaikkien mahdollisten silmälukujen summien todennäköisyydet.

b) Määritä silmälukujen summan odotusarvo."

Tehtävän ratkaisu:

a) Taulukoidaan summat taulukkoon, jossa pystyakselilla tetraedri-nopan ja vaaka-akselilla tavallisen arpakuution mahdolliset arvot:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Lasketaan sen jälkeen summien <u>frekvenssit</u> ja <u>suhteelliset frekvenssit</u>, jotka kertovat suoraan kysytyn summan todennäköisyyden:

Summa	**Frekvenssi f**	**Suhteellinen frekvenssi f%**
2	1	$\frac{1}{24}$
3	2	$\frac{2}{24}$
4	3	$\frac{3}{24}$

Summa	Frekvenssi f	Suhteellinen frekvenssi f%
5	4	$\frac{4}{24}$
6	4	$\frac{4}{24}$
7	4	$\frac{4}{24}$
8	3	$\frac{3}{24}$
9	2	$\frac{2}{24}$
10	1	$\frac{1}{24}$
YHTEENSÄ	**24**	**1**

b) Odotusarvo lasketaan kaavalla $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Nyt todennäköisyydet ovat siis summien suhteelliset frekvenssit, joten

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{i}=2}^{10} (\mathrm{f\%})_{\mathrm{i}} \cdot i = 6.$$

7.1.14. Syys 2014

Tehtävänanto:

"Pakkausautomaatti täyttää kahvipaketteja. Kahvin määrä on normaalijakautunut, keskihajonta on 10 grammaa, mutta odotusarvoa voidaan säätää. Mikä pitäisi säätää

odotusarvoksi, kun tavoitteena on valmistaa paketteja, joista enintään 2,0 % sisältää alle 500 grammaa kahvia? Anna vastaus gramman tarkkuudella."

Tehtävän ratkaisu:

Normaalijakauman normittaminen tapahtuu yhtälön

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

avulla, missä Z on normitettu satunnaismuuttuja, X satunnaismuuttuja, μ jakauman odotusarvo ja σ jakauman keskihajonta.

Nyt siis $\mathrm{X} = 500$ g, $\sigma = 10$ g ja odotusarvo $\boldsymbol{\mu}$ pitäisi selvittää. Saadaan yhtälö

$$P(X < 500) = P\left(Z < \frac{500 - \mu}{10}\right) = 2\% = 0{,}02.$$

Taulukkokirjasta saadaan vastine $\Phi(-2{,}05) = 0.0202 \approx 0{,}02$, joten

$$\frac{500 - \mu}{10} = -2{,}05$$

$$\mu = 520{,}5.$$

Eli odotusarvo on asetettava 520,5 grammaan.

7.1.15. Kevät 2015

Tehtävänanto:

"Oletetaan, että väestön älykkyysosamäärä noudattaa normaalijakaumaa N(100, 15). Määritä odotusarvon 100 ympäriltä symmetrinen väli, johon kuuluu täsmälleen puolet väestöstä."

Tehtävän ratkaisu:

Normaalijakauman normittaminen tapahtuu yhtälön

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

avulla, missä Z on normitettu satunnaismuuttuja, X satunnaismuuttuja, μ jakauman odotusarvo ja σ jakauman keskihajonta.

Nyt siis, $\sigma = 15$ ja odotusarvo $\mu = 100$. Tehtävä voidaan laskea siten, että lasketaan jakauman hännät pois, eli $0 - 25\ \%$ ja $75 - 100\ \%$, koska symmetrian perusteella molemmat hännät ovat 25 %.

Vastaavat kertymäfunktion arvot ovat

$$P(X \leq x) = \Phi(z) = 0{,}25$$

$$z = 0{,}5987.$$

Joten

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$X = \sigma \cdot Z + \mu$$

$$x = 15 \cdot (-0{,}67) + 100 = 89{,}95 \approx 90.$$

Toinen pää symmetrian perusteella vastaavasti

$$x = 15 \cdot 0{,}67 + 100 = 110{,}05 \approx 110.$$

Älykkyysosamäärän väliksi on siis valittava $[90, 110]$, kun halutaan, että puolet väestöstä kuuluu kyseiselle välille.

7.1.16. Kevät 2015: Jokeritehtävä

Tehtävänanto:

"Koirien kaksipäiväiseen HeinäHaukku-tapahtumaan ilmoittaudutaan joko lauantainäyttelyyn, sunnuntainäyttelyyn tai molempiin. Eräänä vuonna HeinäHaukkuun ilmoitettiin 1 372 koiraa, joista 31 ilmoitettiin vain lauantainäyttelyyn ja 43 vain sunnuntainäyttelyyn. Olkoon L tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin lauantainäyttelyyn" ja S tapahtuma "HeinäHaukkuun ilmoitettu koira ilmoitettiin sunnuntainäyttelyyn".

a) Laske todennäköisyys P(L ja S) kyseisenä vuonna.

b) Miten todennäköisyyslaskennassa määritellään kahden tapahtuman riippumattomuus?

c) Ovatko L ja S riippumattomia kyseisenä vuonna?

d) Olkoot yleisesti a vain lauantaille ilmoitettujen koirien lukumäärä, b kummallekin päivälle ilmoitettujen lukumäärä ja c vain sunnuntaille ilmoitettujen lukumäärä. Millä lukuja a, b ja c koskevalla ehdolla tapahtumat L ja S ovat riippumattomia?"

Tehtävän ratkaisu:

a) Koska koira on voitu ilmoittaa vain joko lauantaiksi, sunnuntaiksi tai molemmiksi, on molempiin päiviin ilmoitettuja koiria $1372 - 31 - 43 = 1298$. Joten klassinen todennäköisyys, että koira osallistuu molempina päivinä, on

$$P(\text{L ja S}) = \frac{1298}{1372} = 0{,}94606 \approx 95\ \%.$$

b) Mikäli yhden tapahtuman (A) todennäköisyys ei riipu toisen tapahtuman (B) tapahtumisesta tai tapahtumatta jäämisestä, ovat tapahtumat riippumattomat. Laskennallisesti se tarkoittaa, että riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö toteutuu:

$$P(\text{Tapahtuu sekä A että B}) = P(A) \cdot P(B).$$

c) Tapahtumat eivät ole riippumattomat, sillä vaikka koiraa olisi ilmoitettu lauantaiksi, se on voitu ilmoittaa myös sunnuntaiksi. Laskennallisesti sama voidaan ilmaista

$$P(L) \cdot P(S) = \frac{1298 + 31}{1372} \cdot \frac{1298 + 43}{1372} = 0{,}94677 \neq 0{,}94606.$$

d) Jotta L ja S olisivat riippumattomat, on b-kohdassa todetun säännön toteuduttava. Joten on oltava

$$\frac{b}{a+b+c} = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}$$

$$(a+b+c) \cdot b = (a+b) \cdot (b+c)$$

$$ab + b^2 + bc = ab + ac + b^2 + bc$$

$$ac = 0$$

$$a = 0 \; tai \; c = 0.$$

7.1.17. Syys 2015

Tehtävänanto:

"Annin pelaamassa tietokonepelissä on 90 %:n todennäköisyys onnistua.

a) Kuinka suurella todennäköisyydellä neljän pelin sarjassa tulee tarkalleen yksi epäonnistuminen?

b) Mikä on neljän pelin sarjassa onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo?

c) Kuinka monta kertaa Annin täytyy pelata, jotta onnistuneiden pelien lukumäärän odotusarvo olisi vähintään 10?"

Tehtävän ratkaisu:

a) Tehtävä voidaan ratkaista binomitodennäköisyyden avulla eli kaavalla

$$P(\text{Tapahtuma esiintyy k kertaa n:stä.}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Nyt siis epäonnistumisen todennäköisyys on komplementtisäännön avulla $1 - 0{,}90 = 0{,}10$. Ja todennäköisyys, että neljästä pelistä yksi epäonnistuu, on

$$P(\text{Yksi epäonnistuminen}) = \binom{4}{1} 0{,}10^1 (1 - 0{,}10)^{4-1} = 0{,}2916 \approx 29\ \%.$$

b) Hyödynnetään edelleen binomitodennäköisyyttä ja lisäksi odotusarvon laskemisen kaavaa binomijakaumalle eli $E(X) = np$ Nyt siis

$$E(X) = 4 \cdot 0{,}9 = 3{,}6.$$

c) Odotusarvon on siis oltava yli 10, joten on muodostettava ja ratkaistava epäyhtälö

$$n \cdot 0{,}9 > 10$$

$$n > \frac{10}{0{,}9} \approx 11{,}111.$$

Eli Annin on pelattava vähintään 12 peliä.

7.2. Yhteenveto tehtävistä

Tarkasteluvälillä jokaisella kerralla on ollut todennäköisyyslaskennan tehtävä ylioppilaskirjoituksissa. Lisäksi keväällä 2015 toinen jokeritehtävistä oli todennäköisyyslaskennan alueelta.

Yhteensä 17 tehtävästä 13 oli klassisen todennäköisyyslaskennan alueelta ja neljä tilastollisen todennäköisyyden alueelta. Tilastollisista tehtävistä kaksi käsittelivät normaalijakaumaa. Huomattavaa on, että yksittäistä tilastollisen todennäköisyyden tehtävää vuoden 2009 keväällä lukuun ottamatta tilastolliset tehtävät olivat peräkkäisillä kerroilla välillä kevät 2014 – kevät 2015. Näistä normaalijakaumaa käsitelleet tehtävät olivat peräkkäisillä kerroilla syksyllä 2014 ja keväällä 2015.

Yleisimmät menetelmät, joita tehtävien ratkaisussa tarvittiin, olivat kertolaskusääntö (yhdeksän tapausta), odotusarvon laskeminen (8), binomitodennäköisyys (5), yhteenlaskusääntö (5) ja komplementtisääntö (5). Lisäksi tehtävissä tarvittiin kombinatoriikan laskuja ja normaalijakaumaa. Muiden lukion pitkän matematiikan kurssien menetelmistä ei tarvittu juuri muuta kuin yhtälönratkaisua.

Tehtäväkohtaiset menetelmät lukukausittain on listattu alla olevassa taulukossa.

Taulukko 11: Menetelmien käyttö ylioppilaskirjoitustehtävissä

Menetelmä/Vuosi	**K2008**	**S2008**	**K2009**	**S2009**	**K2010**	**S2010**	**K2011**	**S2011**	**K2012**	**S2012**	**K2013**	**S2013**	**K2014**	**S2014**	**K2015**	**K2015***	**S2015**
Permutaatio	x																
Kombinaatio							x										
Komplementtisääntö	x					x			x	x	x						
Riippumattomien tapausten kertolasku-sääntö	x		x		x			x	x	x						x	
Ehdollinen todennäköisyys		x	x														
Yhteenlaskusääntö		x	x		x			x			x						
Satunnaismuuttujan odotusarvo		x		x				x	x	x			x	x			x
Binomitodennäköisyys						x			x	x	x						x
Yhtälönratkaisu												x				x	x
Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi													x				
Normaalijakauma														x	x		

Menetelmä/Vuosi	K2008	S2008	K2009	S2009	K2010	S2010	K2011	S2011	K2012	S2012	K2013	S2013	K2014	S2014	K2015	K2015*	S2015
KLASSINEN	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x				x	x
TILASTOLLINEN			x										x	x	x		

Tehtävissä tarvittavat todennäköisyyslaskennan menetelmien lukumäärät on taulukoitu alla.

Taulukko 12: Menetelmien lukumäärä ylioppilaskirjoitustehtävissä

Menetelmä	**Lukumäärä**
Binomitodennäköisyys	5
Ehdollinen todennäköisyys	2
Frekvenssi ja suhteellinen frekvenssi	1
Kombinaatio	1
Komplementtisääntö	5
Normaalijakauma	2
Permutaatio	1
Riippumattomien tapausten kertolaskusääntö	7
Satunnaismuuttujan odotusarvo	8
Yhteenlaskusääntö	5

7.3. Tehtävien ratkaisemisesta

Seuraavassa tutkitaan, millaisia asioita tehtävien ratkaisuissa on pitänyt ottaa huomioon todennäköisyyslaskennan näkökulmasta eri tehtäväalueilla.

7.3.1. Tehtävät tilastollisesta todennäköisyydestä

Tilastollisen todennäköisyyslaskennan tehtävät jakautuvat kahtia sen suhteen, onko kyseessä normaalijakaumaan liittyviä tehtäviä vai ei.

Kevään 2009 tehtävässä on ymmärrettävä laskea tehtävä annettujen tilastollisten todennäköisyyksien avulla tietämättä varsinaisesti, kuinka suurista tavaramääristä puhutaan. Lisäksi on ymmärrettävä, että a-kohdassa kolmen eri koneen välillä ei ole riippuvuutta, joten ne eivät vaikuta toistensa vikaprosentteihin ja näin ollen on ymmärrettävä laskea tehtävä riippumattomien todennäköisyyksien avulla. B-kohdassa taas tilanne on erilainen, sillä nyt tilanteessa on ehdollinen riippuvuus. Tehtävässä siis punnitaan ylioppilaskokelaan kykyä erottaa toisistaan riippumattomat ja riippuvat tapaukset.

Kevään 2014 tapauksessa taas on kyseessä hyvin suoraviivainen taulukoinnin avulla laskettava tehtävä, jossa on ymmärrettävä frekvenssien ja suhteellisten frekvenssien laskeminen ja hyödyntäminen odotusarvon laskemisessa.

Toinen tilastollisen todennäköisyyden tyyppitehtävä on normaalijakaumaan liittyvät tehtävät. Peräkkäisillä kerroilla syksyllä 2014 ja keväällä 2015 testattiin kokelaan kykyä soveltaa normaalijakauman normittamista ja sen avulla kysytyn arvon laskemista. Syksyn tehtävässä tarvitsee käytännössä ymmärtää normittamisen lisäksi odotusarvon vaikutus jakaumaan ja sen laskeminen halutun raja-arvon avulla. Kevään tehtävässä tehtävän luonne on hyvin samankaltainen ainoana erona, että raja-arvoja periaatteessa annetaan kaksi, mutta symmetriaan nojaten oikeastaan tarvitsee laskea vain yksi. Tehtävät eivät ole vaativia, jos normaalijakauman käsittely on hyvin hallussa, mutta ilman sitä tehtävien ratkaiseminen on käytännössä mahdotonta.

Erillisenä huomiona on tehtävä lisäksi tilastollisen todennäköisyyden tehtävissä aiemminkin mainittu tosiseikka, että viimeisestä kuudesta kirjoituskerrasta puolet ovat olleet tilastollisen todennäköisyyden tehtäviä, kun tätä ennen vertailujaksolla 12 kirjoituskerrasta yksi oli käsitellyt tilastollista todennäköisyyttä.

7.3.2. Tehtävät satunnaismuuttujan odotusarvosta

Satunnaismuuttujan odotusarvoa laskettiin vertailujaksolla tasan puolessa todennäköisyyslaskentaan liittyvistä tavallisista (ei-jokeri) ylioppilaskirjoitustehtävistä.

Käytännössä siis testattiin kokelaiden kykyä laskea todennäköisyydet tehtävässä kysytyn tapahtuman eri lopputulosten vaihtoehdoille, sillä tämä on oleellisin osa odotusarvon laskemiselle kaavalla $\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i}$.

Kirjoituskerroilla syys 2008, syys 2011 ja kevät 2014 tehtävät ovat olleet perustehtäviä, joissa ei varsinaisesti tarvita suuria oivalluksia vaan odotusarvon laskemiseksi on riittänyt mekaaninen eri vaihtoehtojen todennäköisyyksien laskeminen. Syksyllä 2009 tehtävän ratkaiseminen on edellyttänyt, että oivaltaa jakojäännöksen käyttämisen. Kyseessä on diskreetti jakauma, mutta tapahtumalukumäärä on voinut olla ääretön, joten kokelaan on pitänyt miettiä, kuinka monta oleellisesti erilaista tapahtumaa tehtävässä on voinut olla. Muuten matemaattisesti tehtävän ratkaisu on ollut samankaltainen edellä mainittujen kanssa.

Syksyinä 2012 ja 2014 on riittänyt, että tunnistaa tapahtuman noudattavan binomijakaumaa, jolloin todennäköisyyden laskeminen on ollut tapahtumakertojen kertomista suotuisan tapahtuman todennäköisyydellä.

Keväällä 2012 suotuisten tapahtumien todennäköisyyksien laskeminen on ollut edellä mainittuja työläämpää, sillä yhdistelmiä kolmen eri hyökkääjän maalintekotodennäköisyyksistä on ollut selkeästi enemmän kuin edellä mainituissa. Muuten laskeminen on ollut odotusarvon laskukaavan soveltamista.

Syksyllä 2014 tehtävä on käsitellyt normaalijakaumaa, joten siinä odotusarvon laskeminen on ollut erilaista verrattuna muihin odotusarvotehtäviin.

Huomattavaa on, että kombinatoriikan tehtävien (permutaatiot, kombinaatiot) kanssa odotusarvoa ei ole tarvinnut laskea.

7.3.3. Tehtävät komplementtisäännöllä

Oleellista komplementtisäännön käytöllehän on oivaltaa, että tehtävässä kannattaa ensin laskea kysytyn tapahtuman sijaan sen komplementtitapahtuma johtuen useimmiten siitä, että laskettavaa tulee näin vähemmän ja/tai laskut ovat yksinkertaisempia. Vinkkisanoina tällöin tehtävänannossa ovat sanat ”enintään” tai ”ainakin”, joilla rajataan kaikista tapahtumista suotuisten lukumäärä.

Keväällä 2008 lasku voitaisiin toki laskea niinkin, että kysyttäessä todennäköisyyttä suotuisalle tapahtumalle ”ainakin kerran seitsemästä”, voitaisiin laskea erikseen todennäköisyydet sille, että suotuisa tapahtuma tapahtuu 1–7 kertaa, ja lopuksi summata yhteenlaskusäännöllä kysytty todennäköisyys. Kuitenkin huomattavasti pienemmällä työmäärällä selvitään käyttämällä komplementtisääntöä.

Sama tilanne toistuu kevään 2012 laskussa, jossa a-kohdassa kysytään jälleen ”ainakin”-lukumääräistä vastausta, jolloin kyseinen avainsana ohjaa käyttämään komplementtisääntöä. Toki b-kohdan odotusarvoa laskiessa kaikkien maalimäärävaihtoehtojen todennäköisyydet joudutaan laskemaan, joten hyödyntämällä b-kohdan laskuja olisi voinut laskea a-kohdan yhteenlaskusäännöllä.

Myös kevään 2013 laskussa työmäärä on pieni osa siitä, mihin jouduttaisiin ilman komplementtisääntöä. Toki todennäköisyydet sille, että suotuisia tapahtumia olisi 1–9, voidaan kunkin lukumäärän osalta laskea erikseen. Kuitenkin komplementtisäännön avulla tarvitsee laskea vain tapaukset 10–12. Sama toistuu myös syksyllä 2010 ja 2012, jossa voitaisiin laskea suotuisten tapahtumien todennäköisyydet ja summata nämä, mutta jälleen pienemmällä työmäärällä päästään komplementtisäännön avulla.

Huomionarvoista on, että viidestä tapauksesta, joissa komplementtisääntöä tarvitaan, on neljässä myös mahdollista käyttää binomitodennäköisyyden laskukaavoja osana ratkaisua.

7.3.4. Tehtävät kertolaskusäännöistä

Kertolaskusääntöä soveltavissa tehtävissä kuudesti kyseessä on toisistaan riippumattomat tapaukset ja kahdessa tehtävässä tuli soveltaa ehdollista todennäköisyyttä.

Riippumattomien tapausten kohdalla poikkeuksetta oleellista on ymmärtää, että tapaukset tosiaan ovat riippumattomia, jolloin voidaan hyödyntää kertolaskusääntöä ja kertoa todennäköisyyksiä keskenään. Kaikissa klassisen todennäköisyyden tehtävissä (k2008, k2010, s2011, k2012, s2012), joissa kertolaskusääntöä hyödynnetään, kyse on juurikin tästä tilanteen tunnistamisesta. Lisäksi on pitänyt osata soveltaa sitten jotain toista laskutapaa, kuten yhteenlaskusääntöä tai komplementtisääntöä.

Kevään 2015 jokeritehtävä on vaatinut käytännössä sen, että muistaa ulkoa riippumattomien tapausten kertolaskusäännön matemaattisen merkintätavan ulkoa. Sanallisesti tehtävän perustelu riittävällä tarkkuudella tuskin on mahdollista.

Taulukkokirjassa kyseistä kaavaa ei ole, joten laskukaavaa ei sieltäkään ole voinut tarkistaa.

Tilastollisen todennäköisyyden tehtävässä syksyllä 2009 on tarvittu sekä riippumattomien tapatumien että ehdollisen todennäköisyyden soveltamista. Tehtävän a-kohta on vaatinut hieman ajatustyötä riippumattomuuden osalta, eli on pitänyt oivaltaa, että kun yksittäinen lamppu on jo jollain todennäköisyydellä saatu tietystä koneesta, ei viallisuustodennäköisyyteen tämä valinta enää vaikuta. Vastaavasti b-kohdassa kaikkien tapausten todennäköisyys on ehdollinen, sillä oletuksena on ollut lampun viallisuus.

Ainoa puhtaasti ehdollisen todennäköisyyden tehtävä on ollut syksyn 2008 tehtävä, jossa erivärisiä palloja nostetaan laatikosta palauttamatta nostettua palloa takaisin laatikkoon. Lasku on siis hyvin klassinen esimerkki ehdollisuudesta ja oppikirjoissakin käytetty tyyppiesimerkki tällaisesta.

7.3.5. Tehtävät yhteenlaskusäännöstä

Yhteenlaskusääntöä käytetään yleisesti tapauksissa, joissa suotuisia tapahtumia on useita ja niiden yhteinen todennäköisyys on ratkaistava. Yhteenlaskusääntöä ei ylioppilaskirjoitustehtävissä näin ollen koskaan käytetä yksinään, vaan yhdessä esimerkiksi kertolaskusääntöjen (s2008, k2009, k2010), komplementtisäännön (k2013) tai binomitodennäköisyyden (k2013) kanssa.

7.3.6. Tehtävät binomitodennäköisyydestä

Binomitodennäköisyyden tehtävissä on oleellista ymmärtää, milloin tehtävässä on kyse binomitodennäköisyydestä, eli käytännössä siitä, että tehtävässä on käytännössä suotuisalle tapahtumalle vaihtoehdot ”tapahtuu” ja ”ei tapahdu”, ja toistuvien tapahtumien lukumäärä tiedetään. Tämän jälkeen tehtävät ovat sijoittamista binomitodennäköisyyden kaavaan ja yhdistämistä esimerkiksi komplementtisäännön (s2010, k2012, s2012, k2013) kanssa.

Huomionarvoista on myös, että useimmiten binomitodennäköisyystehtävässä tulee laskea myös tehtävään liittyvä odotusarvo, joka toki on hyvin yksinkertainen lasku. Lisäksi vuoden 2012 kirjoitustehtävissä binomitodennäköisyys on ollut työkaluna vain yhdessä alakohdista, eli täysiä pisteitä ei ole tehtävästä pelkällä binomitodennäköisyyden hallinnalla saanut.

7.3.7. Tehtävät kombinatoriikasta

Kombinatoriikan tehtävät liittyvät joko kombinaatioiden tai permutaatioiden laskemiseen. Ajatellen sitä tosiasiaa, että todennäköisyyslaskennan lähtökohta ovat olleet erilaiset kortti- ja muut pelit, ja niissä saatavien yhdistelmien ja tapahtumien todennäköisyydet, niin hämmästyttävän vähän tällaisia tehtäviä esiintyy tarkastelujaksolla ylioppilaskirjoituksissa. Käytännössä vain yksi puhtaasti permutaatioilla laskettava tehtävä (k2008) ja yksi kombinaatioilla (k2011) laskettava tehtävä osuu tarkastelujaksolla ylioppilaskirjoitustehtäväksi.

Permutaatiotehtävässäkin permutaation laskemista varten tarvitsee käyttää kertomaa kerran. Kombinaatioita tarvitaan perustavanlaatuisessa lottotehtävässä, jollaisten esimerkkejä kirjoissakin käytetään ja jossa pääsee laskemaan kombinaatioita enemmänkin.

Toki binomitodennäköisyyslaskennan tehtävät voisi laskea kombinaatioiden avulla ilman binomitodennäköisyyden kaavojakin, jotka toki perustuvat kombinaatioille, mutta työmäärä näissä tapauksissa kasvaisi jälleen, mikä ei ole itse tarkoitus. Tästä esimerkkinä tässä tutkielmassa on malliratkaisu odotusarvon laskemisesta b-kohdassa tehtävässä keväältä 2012.

7.4. Vertailu opetussuunnitelmiin

Seitsemän vuoden tarkasteluvälillä kaikkia Opetussuunnitelman perusteissa mainittuja menetelmiä on tarvittu tehtävien ratkaisuissa. Alla olevassa taulukossa on listattu tarkemmin, miten erilaiset keskeiset sisältöalueet ylioppilaskirjoituksissa tulevat esiin.

Taulukko 13: Opetussuunnitelman perusteiden sisältöjen toteutuminen ylioppilaskirjoitustehtävissä

Keskeinen sisältö	Toteutuminen
Diskreetti ja jatkuva tilastollinen jakauma	Varsinaisesti jakaumia ei tutkita muuten, kuin kevään 2014 tehtävässä, jossa arpakuutioiden summista voi taulukoida summien frekvenssit. Jatkuvaa jakaumaa ei käsitellä muuten kuin normaalijakaumaa käsittelevien tehtävien osalta.
Jakauman tunnusluvut	Tehtävissä ei tarvitse laskea muita kuin diskreettien todennäköisyysjakaumien odotusarvoja. Lisäksi kerran normaalijakauman yhteydessä normittamisen määrittämiseksi on laskettava jakauman odotusarvo.
Klassinen ja tilastollinen todennäköisyys	Molemmista todennäköisyyslaskennan osa-alueista on tehtäviä, painottuen kuitenkin klassiseen todennäköisyyslaskentaan etenkin tarkastelujaksoa kokonaan katsottaessa. Tilastollisten tehtävien osuus kasvaa toki aivan tarkastelujakson viimeisinä vuosina normaalijakaumatehtävien ansiosta.
Kombinatoriikka	Sekä permutaatioita että kombinaatioita lasketaan tarkastelujaksolla kerran kumpaakin.
Todennäköisyyksien laskusäännöt	Useimmiten laskuissa tarvitaan joko kertolasku-, yhteenlasku- tai

	komplementtisääntöä tai näiden yhdistelmiä.
Diskreetti ja jatkuva todennäköisyysjakauma	Tehtävät ovat yleensä diskreettejä jakaumia, erityistapauksena binomijakauma, sillä jatkuvia jakaumia ei normaalijakauma-tehtäviä lukuun ottamatta käsitellä.
Diskreetin jakauman odotusarvo	Lasketaan sekä klassisen että tilastollisen todennäköisyyden alueilta.
Normaalijakauma	Lasketaan kahdessa tehtävässä, joissa molemmissa vaaditaan jakauman normittamista.

8. TUTKIMUKSEN LUOTETTAVUUS

Tässä tutkielmassa analyysin kohteena ovat olleet lukion Opetussuunnitelman perusteet vuodelta 2003, sekä sen pohjalta laaditut oppikirjat ja ylioppilastehtävät vuosilta 2008–2015.

Oppikirjoja valittiin mukaan yksi kirja kolmelta eri kustantajalta. Kirjasarjoja käytettäväksi matematiikan pitkän oppimäärän opiskeluun on lukuisia muitakin, joten on mahdollista, että eri kirjasarjoja tutkimalla tässä tutkielmassa esitettävät löydökset todennäköisyyslaskennan sisällöistä lukion oppikirjoissa muuttuisi. Toisaalta, Opetussuunnitelman perusteiden käytännössä määrätessä lukiokurssien oleelliset sisällöt, kirjasarjoja vaihtamalla tuskin sisällön pääasiat juurikaan muuttuisivat, ainoastaan materiaalin esitystavat, opetuksen näkökulma ja tehtävien monipuolisuus olisivat erilaisia.

Tutkielmassa lasketut malliratkaisut todennäköisyyslaskennan ylioppilastehtäviin ovat tutkielman tekijän omia ja ainoastaan muutamassa on seurattu mallivastausten ratkaisumallia. Ratkaisut eivät välttämättä noudata ylioppilaskirjoitusten opettajille annettavia korjausohjeita tai noudata Ylioppilastutkintolautakunnan ”*Hyvän vastauksen piirteitä*”-ohjeistuksen mukaisia ratkaisuita. Oleellista tutkielman näkökulmasta on kuitenkin ratkaisuissa se, että niissä tutkitaan, mitä todennäköisyyslaskennan menetelmiä laskuissa on tarvittu, toki pyrkien tehtävien mahdollisimman hyvään ja mallikelpoiseen ratkaisemiseen. Tehtävien vastaukset on tarkistettu oikeiksi malliratkaisuista.

On siis mahdollista, että tehtävissä olisi voinut käyttää erilaisiakin ratkaisutapoja. Kuten aiemminkin on mainittu, esimerkiksi binomitodennäköisyydellä ratkaistut tehtävät olisi voinut perustella ja ratkaista ilman varsinaista binomitodennäköisyyden kaavaa kombinatoriikan avulla. Ratkaisut olisivat toki muistuttaneet toisiaan tässäkin tapauksessa, mutta menetelmien tilastoiduissa lukumäärissä tämä olisi voinut vaikuttaa ainakin näiden kahden menetelmän välisiin suhdelukuihin.

9. YHTEENVETO

Opetussuunnitelman perusteiden vahva rooli opetukset ohjaamisessa näkyy selkeästi sekä oppikirjojen että ylioppilaskirjoitustehtävien kattavuudessa.

Todennäköisyyslaskennan kurssilla ja oppikirjoissa on käsitelty niin monipuolisesti eri osa-alueita todennäköisyyslaskennan alalta, että oppikirjoissa ei juurikaan ole tilaa niin sanotulle ylikurssi-materiaalille, vaikkakin oppikirjat toki tarjoavat myös jonkin verran syventäviä tehtäviä lisätehtävinä edistyneemmille ja aihepiiristä kiinnostuneille. Jos siis verrataan esimerkiksi tässä tutkielmassa esiteltyihin todennäköisyyslaskennan aiheisiin, erilaisia jakaumia, etenkin jatkuvien jakaumien osalta, ja multinomikertoimia ei lukion todennäköisyyslaskennan kurssilla varsinaisesti käsitellä.

Ylioppilaskirjoituksissa tehtäviä on myös laajasti eri todennäköisyyslaskennan alueilta ja vielä useimmiten niin, että tehtävissä joutuu yhdistelemään laskutapoja ja tuloksia useammasta eri todennäköisyyslaskennan alueesta, kuten odotusarvoja, binomitodennäköisyyttä ja erilaisia yhteenlasku- ja kertolaskusääntöjä yhdistelevissä tehtävissä voidaan huomata. Toisaalta taas muutamat tehtävät vaativat enemmänkin oivaltamista itse todennäköisyyslaskennan laskukaavojen ja menetelmien ollessa tällöin sivuroolissa.

Ylioppilaskirjoituksissa ei myöskään voida tuudittautua ajatukseen, että ”kunhan hallitsen nämä muutamat todennäköisyyslaskennan osa-alueet, saan helposti paljon pisteitä siitä tehtävästä”, sillä mitään säännönmukaisuutta eri menetelmien ilmenemisessä tai painottamisessa ei ole havaittavissa. Ainoat havaittavat trendit tarkasteluvälillä 2008–2015 oli vuosien 2009–2013 painottuminen klassisen todennäköisyyslaskennan tehtäviin, mitä taas seurasi keväästä 2014 alkanut kolmen tilastollisen todennäköisyyslaskennan ”tehtäväputki”. Näin ollen opetuksessakaan ei ole voinut painottaa pelkästään klassista todennäköisyyslaskentaa.

Huomattavaa myös on, että jokaisella ylioppilaskirjoituskerralla tarkasteluvälillä on ollut tehtävä todennäköisyyslaskennasta, mikä toisaalta on ymmärrettävää ja ajatuksenakin kannatettavaa, että yhdestä kokonaisesta kurssista myös tehtävä kirjoituksissa on.

Mielenkiintoista olisi tutkia, onko edellisen Opetussuunnitelman perusteiden aikakaudella todennäköisyyslaskennan opetuksessa ja ylioppilaskirjoituksissa ollut vaihtelua ja onko esimerkiksi jatkuvien jakaumien käsittelyssä ollut eroja, eli onko kurssirakenne ja järjestys tukenut silloin niiden monipuolisempaa käsittelyä mm. kertymäfunktioiden osalta.

Toinen mielenkiintoinen näkökulma on uudessa Opetussuunnitelman perusteissa tieto- ja viestintätekniikan tuleminen kiinteäksi osaksi lukio-opetusta ja ylioppilaskirjoituksia. Sen vaikutukset sekä opetukseen että ylioppilaskirjoituksiin jää tämän tutkielman osalta vielä nähtäväksi. Asiaa on kuitenkin opetuksen näkökulmasta jo pohdittu esimerkiksi Topi Salmen Pro Gradu-työssä ” Sähköinen ylioppilaskirjoitus ja sen vaikutus matematiikan opetukseen matematiikan opettajien näkökulmasta” ja kuten siinäkin todetaan, ”muutos opetuksessa seuraavan viiden vuoden aikana tulee olemaan suuri, ja sekä haasteita että mahdollisuuksia löytyy useita”, mikä pätee varmastikin myös todennäköisyyslaskennan opetukseen lukiossa. (Salmi, 2015)

I. LÄHDELUETTELO

Halmetoja, M., Häkkinen, K., Merikoski, J., Pippola, L., Silfverberg, H., Tossavainen, T., Laurinolli, T., Sankilampi, T. 2006. Matematiikan taito 6. Helsinki: WSOY Oppimateriaalit Oy.

Hautajärvi, T., Ottelin, J., Wallin-Jaakkola, L. 2006. Laudatur 6. Keuruu: Otava.

Kangasaho, J., Mäkinen, J., Oikkonen, J., Paasonen, J., Salmela, M., Tahvanainen, J. 2013. Pitkä matematiikka 6. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Kivelä, S. 1998. Lukiotason matematiikan tietosanakirja. Helsinki: MFKA-Kustannus Oy.

Kivelä, S. Matematiikan ylioppilastehtävät. [Online] [Viitattu 27.12.2015] Saatavilla: http://matta.hut.fi/matta/yoteht/index.html.

Laininen, P. 1998. Todennäköisyys ja sen tilastollinen soveltaminen. Helsinki: Otatieto.

Oikeusministeriö. Lukioasetus. [online] 6.11.1998/810. [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980810.

Oikeusministeriö. Lukiolaki. [online] 21.8.1998/629. [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980629.

Opetushallitus. Lukiokoulutuksen opetussuunnitelman perusteet 2003. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus.

Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/47345_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2003.pdf.

Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteiden luonnos, [online] Päivätty 14.4.2015. [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/166556_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015_luonnos_14042015.pdf.

Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteiden päivittäminen.. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/lukiokoulutus/lops2016/103/0/lukion_opetussuunnitelman_perusteiden_luonnos_14_4_2015.

Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf.

Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/saadokset_ja_ohjeet/opetussuunnitelmien_ja_tutkintojen_perusteet/perusopetus.

Opetushallitus. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. [verkkodokumentti] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: http://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

Otavan opisto. MAA6 - Todennäköisyys ja tilastot: 8.1. Tuloperiaate. [online] [viitattu 21.9.2015] Saatavissa: http://opinnot.internetix.fi/fi/materiaalit/maa/maa06/maa6_08.1_tuloperiaate.pdf?C:D=1465655&m:selres=1465655.

Otavan opisto. MAA6 - Todennäköisyys ja tilastot: Normaalijakauma. [online] [viitattu 21.9.2015] Saatavissa: http://materiaalit.internetix.fi/fi/opintojaksot/5luonnontieteet/matematiikkal/mb3/normaalijakauma.

Partanen, J. 2010. Matemaattisen analyysin jatkokurssin luentomateriaali. [online] [viitattu 21.1.2016]. Saatavissa: https://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=164342626.

Salmi, T. 2015. Sähköinen ylioppilaskirjoitus ja sen vaikutus matematiikan opetukseen matematiikan opettajien näkökulmasta. Helsingin yliopisto. Matematiikan pro gradu-työ.

Strogatz, S. 2014. Ihana X – Matematiikan lumoa nollasta äärettömään. Suomentaja Markus Hotakainen. Tallinna: Art House.

Tuominen, P. 1990. Todennäköisyyslaskenta. Helsinki: Limes ry.

Wikipedia. Sannolikhet. [Online] Päivitetty 5.11.2015. [Viitattu 7.10.2015] Saatavissa: https://sv.wikipedia.org/wiki/Sannolikhet.

Yleisradio. Laudaturin nappaaminen helpottuu ensi keväänä. [online] 17.9.2013. Päivitetty 17.9.2013 [viitattu 23.9.2015] . Saatavissa: http://yle.fi/uutiset/laudaturin_nappaaminen_helpottuu_ensi_kevaana/6834083.

Ylioppilastutkintolautakunta. Sähköinen ylioppilastutkinto — Matematiikka. [online] [Viitattu 31.8.2015]. Saatavissa: https://www.ylioppilastutkinto.fi/fi/ylioppilastutkinto/digabi.