

Opettajien näkökulma oppilaiden matematiikan osaamisesta nivelvaiheessa ala-yläkoulu

Maija Vehmanen

Helsingin yliopisto

Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Maaliskuu 2020

Ohjaajat: Sirkka-Liisa Eriksson ja Mika Koskenoja

Tiedekunta - Fakultet - Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Laitos - Institution - Department Matematiikan ja tilastotieteen laitos, aineenopettaja	
Tekijä - Författare - Author Maija Vehmanen			
Työn nimi - Arbetets titel Opettajien näkökulma oppilaiden matematiikan osaamisesta nivelvaiheessa ala-yläkoulu			
Oppiaine - Läroämne - Subject Matematiikka			
Työn laji/ Ohjaaja - Arbetets art/Handledare - Level/Instructor Pro gradu -tutkielma / Koskenoja ja Eriksson		Aika - Datum - Month and year Maaliskuu 2020	Sivumäärä - Sidoantal - Number of pages 75s. + 9 liites.
Tiivistelmä - Referat - Abstract <p><i>Tavoitteet.</i> Tutkimuksen tavoitteena oli selvittää suomalaisten oppilaiden matematiikan osaamista eri matematiikan aihealueissa opettajien näkökulmasta. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, onko oppilaiden osaamisessa eroja pääkaupunkiseudun kaupunkien, Helsinki, Espoo ja Vantaa, välillä. Tarkoituksena oli tutkia ala- ja yläkoulun välisiä eroja matematiikan osaamisessa eri aihealueissa. Tutkimuksen yksi tavoite oli selvittää opettajien näkökulmasta matematiikan opetuksen ilmeneviä ongelmia ja löytää näihin mahdollisia ratkaisuja. Matematiikan aihealueet (14kpl), joiden osaamista tässä tutkimuksessa tutkittiin, valikoituivat Perusopetuksen opetussuunnitelman (2014) ja ala- sekä yläkoulun oppikirjojen perusteella. Aihealueiden osaamista verrattiin muun muassa kansainvälisten PISA- ja TIMSS-tutkimuksien tuloksiin.</p> <p><i>Menetelmät.</i> Tutkimus toteutettiin kyselytutkimuksena, jossa opettajat (N=137) vastasivat anonyymisti tätä tutkimusta varten luotua Microsoft Forms kyselyyn. Kysely koostui taustatietokysymyksistä (7kpl), määrällisistä kysymyksistä (2kpl) ja laadullisesta kysymyksestä (1kpl). Määrällisen aineiston avulla selvitettiin opettajien mielestä oppilaiden matematiikan osaamista eri aihealueissa. Taustatietokysymysten perusteella pystyttiin vertaamaan esimerkiksi ala- ja yläkoulun opettajien vastauksia keskenään tai eri kaupunkien välisiä vastauksia keskenään. Laadullisen aineiston avulla opettajat ilmaisivat matematiikan eri aihealueiden opetuksessa ilmeneviä ongelmia ja näihin ongelmakohtiin kehitysehdotuksia.</p> <p><i>Tulokset ja johtopäätökset.</i> Määrällisen aineiston tuloksissa selviää, että eri matematiikan aiheiden osaamisessa oli eroa. Heikoiten osattiin yksikkömuunnokset ja parhaiten peruslaskutoimitukset. Viisi heikoiten osattua aihealuetta olivat yksikkömuunnokset, murtoluvut, sanalliset tehtävät, ongelmanratkaisu ja matemaattinen ilmaiseminen. Ala- ja yläkoulun opettajien vastauksissa oli eroa heikoiten osatun aihealueen osalta. Alakoulun opettajat kokivat, että heikoiten osattiin yksikkömuunnokset, kun taas yläkoulun opettajat kokivat, että matemaattinen ilmaiseminen osattiin heikoiten. Kaupunkien välillä ei ollut merkittäviä eroja, paitsi Helsingin ja muiden kaupunkien välillä.</p> <p>Laadullisen aineiston tulokset osoittivat, että opetukseen on liian vähään aikaa. Ratkaisuehdotus tähän oli esimerkiksi lisää oppitunteja matematiikkaan, lisää toistoa tai vähemmän aiheita. Heikko kielitaito ja esimerkiksi lukivaikeudet aiheuttavat sanallisissa tehtävissä ongelmia. Murtoluvuissa ongelmana nähdään muistisäännöt ja jakomerkin ja jakoviivan ristiin käyttö. Opettajat ehdottivat jopa siirtymistä pelkän jakoviivan käyttöön. Matemaattisessa ilmaisemisessa näyttää tuottavan ongelmia välivaiheet ja yhtäsuuruusmerkin väärinkäyttö. Opettajien mielestä oppilaiden matemaattisiin merkintöihin, kuten välivaiheisiin ja yhtäsuuruusmerkin käyttöön, tulisi puuttua jo alakoulussa. Yksikkömuunnoksia tulisi opettajien mielestä opettaa konkreettiaman kautta, esimerkiksi mittaamalla. Ongelmanratkaisutehtäviä opetettavan monipuolisesti, yksin ja yhdessä. Opettajien mielestä ongelmanratkaisu tehtäviä tulisi olla enemmän tarjolla esimerkiksi oppikirjoissa.</p>			
Avainsanat - Nyckelord matematiikan osaaminen, PISA, TIMSS, alakoulu, yläkoulu, peruskoulu,			
Säilytyspaikka - Förvaringsställe - Where deposited E-Thesis			

Sisällysluettelo

1. Johdanto	1
2. Tutkimuksen tausta	3
2.1 Erilaiset opetussuunnitelmat	3
2.2 Matematiikan opetuksen kehityslinjat	5
2.3 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014	7
2.4 Oppikirjat opetuksen apuna	12
2.5 Suomen matematiikan osaaminen kansainvälisissä tutkimuksissa	15
2.5.1 PISA -tutkimukset.....	16
2.5.2 TIMSS -tutkimukset.....	23
2.6 Suomalaisten matematiikan osaaminen kansallisissa tutkimuksissa	25
2.7 Alakoulun ja yläkoulun erot	29
3. Tutkimuskysymykset	32
4. Tutkimuksen toteutus	33
4.1 Aineiston kuvaus ja keruu	33
4.2 Aineiston analyysimenetelmät	35
5. Tulokset	36
5.1 Taustatiedot	36
5.2 Matematiikan aihealueiden osaamisen erot	41
5.3 Opetettavan luokan vaikutus tulokseen	46
5.4 Opetuskaupungin vaikutus tulokseen	48
5.5 Opetuskokemuksen vaikutus tulokseen	50
5.6 Matematiikan aihealueiden ongelmat ja ratkaisuja niihin	51
5.6.1 Yleiset ongelmat ja ratkaisut.....	51
5.6.2 Sanalliset tehtävät ja niiden haasteet opettajien näkökulmasta.....	55
5.6.3 Ongelmanratkaisu ja sen haasteet opettajien näkökulmasta	56
5.6.4 Murtoluvut ja niiden haasteet opettajien näkökulmasta.....	57
5.6.5 Yksikkömuunnokset ja sen haasteet opettajien näkökulmasta	58
5.6.6 Matemaattinen ilmaiseminen ja sen haasteet opettajien näkökulmasta	60
6. Luotettavuus	62
7. Johtopäätökset ja pohdinta	66
Lähteet	72
Litteet	78

1. Johdanto

Suomi menestyi ensimmäisissä PISA-tutkimuksissa erittäin hyvin ja näin ollen kiinnostus peruskouluamme ja opettajien koulutusta kohtaan kasvoi. 2000-luvun alussa Suomessa vieraili useita ulkomaalaisia opetusalan edustajia tutustumassa suomalaiseen koulutusjärjestelmään. (Välijärvi ym., 2015, s. 11.) Viimeisten vuosien aikana suomalaisten nuorten matematiikan osaaminen on kuitenkin heikentynyt PISA- ja TIMSS-tutkimusten valossa (Kupari & Hiltunen, 2018). Mistä tämä voisi johtua? Yksiselitteistä syytä on varmasti hankala löytää. Sen ainakin tiedämme PISA- ja TIMSS- tutkimuksien tuloksista, että matematiikan aihealueiden osaamisessa on eroa (Kupari & Hiltunen, 2018). Oppilaille vaikeisiin ja heikosti osattuihin aihealueisiin on järkevää paneutua ja ongelmakohtiin puuttua. Ongelmakohtia voidaan tutkia esimerkiksi opettajien näkökulmasta, sillä opettajat liikuttavat suuria massoja nuoria vuodesta toiseen ja luokalta toiselle. Matematiikkaa opitaan usein vain koulussa, näin ollen opettajilla on suuri merkitys oppilaiden matematiikan osaamiseen (Metsämuuronen, 2013, s. 66). Tämän tutkimuksen tutkimusosiossa selvitetäänkin opettajien näkökulma oppilaiden matematiikan osaamiseen. Minkälaisia ongelmia opettajat näkevät eri matematiikan aihealueissa ja niiden opetuksessa? Ongelmien havainnoinnin jälkeen on loogista lähteä kehittämään opetusta oikeaan suuntaan. Opettajat ovat usein innokkaita kehittämään opetustaan, joten uusien opetustapojen hyödyntäminen vaikeiden aihealueiden opetuksessa olisi varmasti hyödyllistä.

Suomessa esikoulu aloitetaan kuusivuotiaana. Vuoden esikoulun jälkeen siirrytään peruskouluun, joka kestää yhdeksän vuotta. Peruskouluun kuuluu alakoulu, luokat 1-6, joka kestää kuusi vuotta. Tämän jälkeen siirrytään yläkouluun, luokat 7-9, joka kestää kolme vuotta. Oppilaat ovat alakoulussa 7-13 vuoden ikäisiä ja yläkoulussa 13-16 vuoden ikäisiä. Näin ollen 5.-6. luokalla oppilaat ovat 11-12-vuotiaita ja 7. luokalla he ovat 13-14-vuotiaita. Alakoulussa luokanopettaja opettaa yleensä kaikkia oppiaineita, kun taas yläkoulussa aineenopettajalla on vain tietyn oppiaineen opetus. (Lampiselkä, Ahtee, Pehkonen, Meri, Eloranta, 2007, s. 35-48.)

Matematiikka on kumulatiivista, joka johtaa siihen, että opetuksen tulee edetä systemaattisesti (POPS, 2014, s. 128). Esimerkiksi, jotta pystytään laskemaan

murtoluvuilla, tulee ensin osata peruslaskutoimitukset. Systemaattinen eteneminen tarkoittaa myös sitä, että alakoulun matematiikka tulee hallita, jotta yläkoulussa voidaan syventää oppimista. Opetuksen sisältö perustuu opetussuunnitelmaan (Hellström, 2008). Opetuksen sisältöön vaikuttavat myös oppikirjat, jotka seuraavat usein opetussuunnitelmaa. Oppikirjat helpottavat niin opettajaa kuin oppilaita (Englund, 1999). Eri oppikirjat painottavat eri asioista, mutta kaikista ala- ja yläkoulun oppikirjoista näyttää löytyvän tietyt tärkeät aihealueet, jotka tässä tutkimuksessa esitellään. Matematiikan opetus on muuttunut ajan saatossa. Opetussuunnitelman, oppikirjojen lisäksi erilaiset ajan trendit näyttävät muuttavan opetusta ja sen sisältöä. Esimerkiksi matematiikassa tällä hetkellä peruslaskutoimitukset ja ongelmanratkaisu koetaan tärkeäksi sisällöksi opetuksessa (Haapasalo, 2011, s. 148). Tulevaisuus ja uudet teknologian sovellukset voivat muuttaa matematiikan opetusta uuteen suuntaan. Väheneekö esimerkiksi mekaaninen laskeminen teknologian myötä? Elämme hektisessä maailmassa ja koko ajan tuntuu olevan kiire jonnekin. Tämä kiire näyttää heijastuvan opetukseen. Oppilaille on tärkeää antaa tarpeeksi aikaa oppia asioita (POPS, 2014, s. 236-237). Ainainen kiire ja opittavien asioiden paljous tulisi unohtaa ja keskittyä oppimisen polkuun eikä pelkästään määränpäähän (Minkel, 2018). Mikä sitten vie aikaamme? Ainakin aikaa näyttää vievän kännykät, jotka tuntuvat olevan koko ajan läsnä arjessa.

2. Tutkimuksen tausta

Tutkimuksen taustan muodostavat opetussuunnitelma, oppikirjat, oppilaiden osaaminen kansallisten ja kansainvälisten tutkimusten valossa sekä alakoulun ja yläkoulun välinen eroavaisuus. Luvussa 2.1 perehdytään erilaisiin opetussuunnitelmiin, *kirjoitettu, toimeenpantu, toteutunut ja mahdollinen* opetussuunnitelma. Luvussa 2.2 perehdytään matematiikan historian kehityslinjoihin ja luvussa 2.3 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin vuodelta 2014. Luvussa 2.4 käsitellään oppikirjoja ja niiden tärkeyttä matematiikan opetuksessa sekä esitellään eri oppikirjasarjojen sisältöjä niin ala- kuin yläkoulussa. Luvussa 2.5 perehdytään oppilaiden matematiikan osaamiseen kansainvälisten tutkimusten PISA ja TIMSS avulla. Luvussa 2.6 taas perehdytään Kansallisen koulutuksen arviointikeskuksen (KARVI) sekä Opetushallituksen (OPH) teettämiin tutkimuksiin ja niiden tuloksiin oppilaiden matematiikan osaamisesta. Viimeisessä luvussa 2.7 käsitellään ala- ja yläkoulun välisiä eroja.

2.1 Erilaiset opetussuunnitelmat

Opetussuunnitelma on kokonaisuus, joka käsittelee koululle asetettuja tavoitteita. Se antaa didaktisen pohjan opetukselle. Opetus tulee järjestää opetussuunnitelman mukaan. (Hellström, 2008, s. 222.) Opetushallitus (OPH) laatii opetussuunnitelman ja tämän jälkeen koulut ja opettajat voivat päättää, miten tätä todellisuudessa toteuttavat. Suomessa opettajilla on autonomia päättää, mitä kirjaa ja opetusmenetelmää he käyttävät, sekä miten he mittaavat ja arvioivat oppilaidensa menestystä. (Aho, Pitkänen & Sahlberg, 2006, s. 110.)

Opetussuunnitelmalla ajatellaan olevan kolme tai neljä tasoa (Robitaille ym., 1993). Kolmitasoisien opetussuunnitelma mallin tasot ovat *kirjoitettu, toimeenpantu, toteutunut* opetussuunnitelma (Hellström, 2008, s. 222; Robitaille ym., 1993; Kupari ym., 2001). Kolmitasoisessa mallissa kiinnostuksen kohteena on se, miten ylin taso eli kirjoitettu opetussuunnitelma vaikuttaa alempiin yksityisempiin tasoihin eli *toimeenpantuun* ja *toteutuneeseen* opetussuunnitelmaan (Robitaille ym., 1993; Kupari ym., 2001). Tätä opetussuunnitelman kolmitasoistamallia on käytetty pohjana TIMSS-tutkimuksien arvioinneissa (Robitaille & Garden 1989; Robitaille ym., 1993). Opetussuunnitelmalle on esitetty myös laajempaa nelitasoistamallia, johon kuuluu

edellisten lisäksi *mahdollinen* opetussuunnitelma (Robitaille ym., 1993; Schmidt ym., 1997; Kupari ym., 2001). Nelitasoisessa mallissa kiinnostuksen kohteena, miten yksittäinen oppilas vaikuttaa luokkahuoneen toimintaan sekä se, miten arvioidut oppimistulokset vaikuttavat kirjoitettuun opetussuunnitelmaan (Robitaille & Garden 1989; Robitaille ym., 1993).

Kirjoitetulla opetussuunnitelmalla tarkoitetaan koulutusjärjestelmän tavoitteita. Kirjoitettuun opetussuunnitelmaan kuuluvat myös kunta- ja koulukohtaiset opetussuunnitelmat. (Robitaille ym., 1993; Kupari ym., 2001.) Esimerkiksi Suomen peruskoulun tavoitteet on luettavissa Perusopetuksen Opetussuunnitelman perusteista (2014). *Mahdollisella* opetussuunnitelmalla tarkoitetaan oppimateriaaleja, kuten oppikirjoja, joita opettajat käyttävät opetuksessa (Schmidt ym., 1997). Oppikirjat vastaavat usein kirjoitettua opetussuunnitelmaa, sillä opettajat haluavat käyttää opetussuunnitelman mukaisia oppikirjoja. Mikäli näin ei olisi, oppikirjojen kustantaminen olisi kannattamatonta. *Toimeenpantu* opetussuunnitelma tarkoittaa koulussa tapahtuvaa toimintaa, eli opettajien ohjaamaa toimintaa, esimerkiksi oppitunteja. *Toimeenpantu* opetussuunnitelma liittyy niin kirjoitettuun kuin mahdolliseen opetussuunnitelmaan. (Pepin & Haggarty, 2001.) Opetussuunnitelma ja oppikirjat ohjaavat opettajia tuntien suunnittelussa. Näin ollen mukana ovat opetussuunnitelman tasot kirjoitettu ja mahdollinen opetussuunnitelma. *Toteutunut* opetussuunnitelma tarkoittaa opetuksen tuloksia, oppilaiden tietoja, taitoja, arvoja ja asenteita, mitkä he ovat oppineet koulussa (Robitaille ym., 1993; Kupari ym., 2001).

Eri maiden opetussuunnitelmat poikkeavat toisistaan niin sisällöllisesti kuin menetelmällisesti (Schmidt ym., 1997). Tässä tutkimuksessa olemme kiinnostuneet Suomen opetussuunnitelmasta ja erityisesti perusopetuksen opetussuunnitelman perusteista (2014). Tämä *kirjoitettu* opetussuunnitelma sisältää tavoitteet, jotka on asetettu opetukselle ja tässä tutkimuksessa erityisesti matematiikan opetukselle. *Mahdollisen* opetussuunnitelman kannalta tutkimuksessa kiinnostaa, miten matematiikan oppimateriaaleissa, oppikirjoissa, *kirjoitettu* opetussuunnitelma näkyy. Opettajat suunnittelevat ja toteuttavat oppitunnit. Tämä viittaa *toimeenpantuun* opetussuunnitelmaan. Tutkimuksessa olemme kiinnostuneita opettajien toiminnasta oppitunneilla ja sen kehittämisestä, jotta oppilaat oppisivat paremmin. *Toteutuneessa*

opetussuunnitelmassa kiinnostaa oppilaiden oppimistulokset ja osaaminen matematiikassa.

2.2 Matematiikan opetuksen kehityslinjat

Matematiikan opetus eri maissa ei perustu pelkkään opetussuunnitelmiin vaan pidempiaikaisiin kehityslinjoihin. Matematiikan opetuksen erilaiset kehityslinjat ovat jättäneet jälkensä opetussuunnitelmiin ja yleisesti matematiikan opetukseen. (Malaty, 1998.) Kehitys on lähtöisin yleensä joko idästä, jolla tarkoitetaan Itä-Eurooppaa ja Venäjää tai lännestä, jolla tarkoitetaan Länsi-Eurooppaa ja Yhdysvaltoja. Suomi seuraa Yhdysvaltojen jalanjälkiä noin kymmenen vuoden viiveellä matematiikan opetuksen ideologioissa. (Haapasalo, 2011, s. 148; Malaty, 1998; Kupari, 1999.)

Haapasalo (2011, s. 143-149) käsittelee kirjassaan matematiikan opetuksen muutoksia ja kehityslinjoja. 1800-luvulla matematiikalla oli tärkeä asema länsimaisissa kouluissa. Erityisesti aritmetiikka oli tärkeää, sillä sitä tarvittiin esimerkiksi kaupankäynnissä. Tällöin geometria oli klassista euklidista tasogeometriaa. Euklidisella tasogeometrialla tarkoitetaan rajoittumista kaksiulotteiseen avaruuteen. Tasogeometrisiä kuvioita ovat yksiulotteiset jana ja viiva sekä kaksiulotteiset monikulmiot ja ympyrä (Eukleides, 2011, s. 7-13). Yhteiskunnan kehitys ja erityisesti uudet ammatit aiheuttivat painetta myös muokata matematiikan opetusta. Aluksi matematiikan opetuksesta saivat nauttia vain huippumatemaatikot, mutta 1900-luvun alussa matematiikkaa opetusta alettiin järjestämään suuremmalle joukolle (Malaty, 1998; Kupari, 2001).

Uuden matematiikan (New Math) aikakausi nähdään saaneen alkunsa 1950-luvulla Neuvostoliiton (itä) ja Yhdysvaltojen (länsi) kilpailusta taloudessa ja asevarustelussa. Yhdysvallat kokivat olevansa teknologiassa jäljessä Neuvostoliittoa, erityisesti matematiikan ja luonnontieteiden koulutuksen saralla. Tämän seurauksena Yhdysvallat päätti uudistaa matematiikan opetustaan sekä oppikirjoja, hallituksen ja säätiöiden rahoituksella. Länsimaat seurasivat Yhdysvaltojen perässä ja uudistivat opetustaan. Uudistus johti siihen, että peruslaskutoimituksien opetus kouluissa väheni ja tasogeometria sai väistyä kuvausgeometrian tieltä. (Haapasalo, 2011, s. 144-146.)

Kuvausgeometriassa tasogeometrinen kuvioiden sijaan tarkastellaan funktioita, kuvauksia ja vektoreita. Uuden matematiikan suuntauksessa nähtiin tärkeänä myös ajattelun kehittäminen ja erilaiset ratkaisustrategiat. Tällöin päättelytehtävät tulivat lapsille yhä nuorempaan ikään mukaan opetukseen. Opetus abstrakteilla käsitteillä ja lapsen kehitysvaiheita huomioimatta tuntui mahdottomalta toteuttaa ja näin syntyi vastaliikkeitä. Vastaliikkeen ideana oli yksinkertaistaa opetusta ja pyrkiä takaamaan kaikille perustietojen oppiminen. Takaisin perusteisiin (Back to Basics) sai alkunsa, sillä Uusi matematiikka nähtiin sopivan huonosti koulumatematiikkaan ja peruslaskutoimitukset koettiin tärkeiksi. Tuntui turvalliselta palata takaisin jo mahdollisesti toimiviin perusteisiin. Tässä suuntauksessa nähtiin tärkeänä mekaaninen laskeminen. Ongelmaksi muodostui ongelmanratkaisu ja erilaiset ratkaisustrategiat ja takaisin perusteisiin liikkeen lopputulos oli huono. 1980-luvulla Yhdysvallat halusi nostaa ongelmanratkaisun roolia koulumatematiikassa. Tämän seurauksena ovat syntyneet myös IEA:n (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) kansainväliset matematiikka tutkimukset, kuten PISA- ja TIMSS-tutkimukset. Suomessa noudatetaan edelleen Back to Basics – liikkeen tuomia ideoita. Tämän lisäksi opetuksessa on tärkeää myös ongelmanratkaisu. (Haapasalo, 2011, s. 146-148.) Erityisesti matematiikan yhdistäminen arkielämään erilaisten ongelmien kautta koetaan tärkeäksi nykypäivän matematiikan opetuksessa (Lampiselkä ym., 2007, s. 35-48). Olli Martio (2004) kirjoittaa ongelmanratkaisusta, että opetuksen tulee perustua käytännön ongelmiin. Matematiikassa ongelmanratkaisu ja ongelmanratkaisutaidot kuuluvat koulussa opetettaviin asioihin, mutta niiden ei tule olla pääasia opetuksessa. Martion mukaan matematiikassa tulisi keskittyä käsitteiden määrittelyyn sekä teoriaan ja ongelmanratkaisun tehtävä on konkretisoida näitä.

2.3 Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014

Tässä luvussa esitellään perusopetuksen kaikille aineille yhteisiä tavoitteita, opetussuunnitelman laaja-alaisen osaamisen tavoitteita, matematiikan yleisiä tavoitteita, matematiikan opetuksen tavoitteita ja matematiikan opetuksen sisältötavoitteita. Matematiikan opetuksen ja sen sisällön tavoitteita tarkastellaan vuosiluokkien 3-6 ja 7-9 näkökulmasta.

Perusopetuksen opetussuunnitelman kaikille aineille yleisiä tavoitteita ovat esimerkiksi vuorovaikutteinen opetus, oppilaan ja opettajan välillä, jossa oppilaan tulee olla aktiivinen toimija. Opettaja rooli on luoda oppilaille myönteiset tunnekokemuksia, iloiten ja innostaen. Opetuksessa tärkeää on oppilaan oma ajattelu ja tutkivaoppiminen sekä asioiden arvioiminen. Ongelmien ratkaiseminen on tärkeää niin yksin kuin ryhmissä. Peruskoulussa on tärkeää luoda laaja yleissivistys ja taito oppia uusia asioita. Oppimisen taito johtaa elinikäiseen oppimiseen. (POPS, 2014, s. 17-18.) Peruskoulun opetukseen heijastuu laaja-alaisen osaamisen tavoitteet (POPS, 2014, s. 20-24), jotka ovat seuraavat

- ajattelu ja oppimaan oppiminen
- kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutustaidot ja ilmaisu
- itsestä huolehtiminen ja arjen taidot
- monilukutaito
- tietoja- ja viestintäteknologinen osaaminen
- työelämätaidot ja yrittäjyys
- osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen

Nämä laaja-alaisen osaamisen tavoitteet näkyvät myös perusopetuksen matematiikan opetuksessa. Esimerkiksi ajattelun ja oppimaan oppimisen tavoitteessa on tärkeää havaintojen tekeminen sekä arviointi ja tiedon tuottaminen. Matematiikan tavoite 3-6-vuosiluokilla on ”Ohjata oppilasta havaitsemaan yhteyksiä oppimiensa asioiden välillä.” Monilukutaito tarkoittaa erilaisten tekstien tulkitsemista, tuottamista ja arvioimista. Tähän liittyy esimerkiksi matematiikan tavoite ”Ohjata oppilasta käyttämään ja ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja merkintöjä.” Tieto- ja viestintäteknologian osaaminen näkyy esimerkiksi matematiikan tavoitteessa ”Ohjata oppilasta laatimaan ja tulkitsemaan taulukoita...” (POPS, 2014, s. 20-24 ja s. 235.)

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa (2014, s. 234, 374) on mainittu matematiikan yleiset tavoitteet. Yleiset tavoitteet ovat samat vuosiluokilla 3-6 ja 7-9. Yleisenä tavoitteena on edistää oppilaiden loogista ajattelua, opettaa matemaattisia käsitteitä ja täsmällistä sekä luovaa matematiikkaa. Näissä tulisi hyödyntää tieto- ja viestintäteknologiaa. Ne kehittävät myös viestintä-, vuorovaikutus- ja yhteistyötaitoja. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia. Tavoitteena on myös opettaa pitkäjänteisyyttä niin matematiikassa kuin arkielämässä. Opetus ohjaa oppilaita ymmärtämään matematiikan hyödyllisyyden omassa elämässään ja laajemmin yhteiskunnassa. Matematiikan kumulatiivisesta luonteesta johtuen opetus etenee systemaattisesti. Konkretia ja toiminnallisuus ovat keskeinen osa matematiikan opetusta ja opiskelua. Matematiikan opetus tukee oppilaiden myönteistä asennetta matematiikkaa kohtaan ja positiivista minäkuvaa matematiikan oppijoina.

Yleisten matematiikan tavoitteiden lisäksi matematiikan opetukselle on asetettu omat tavoitteet. Matematiikan opetuksen tavoitteet on jaettu vuosiluokilla 3-6 14 kategoriaan (T1-T14, liite 1) ja vuosiluokilla 7-9 20 kategoriaan (T1-T20, liite 2). Vuosiluokkien 3-6 ja 7-9 tavoitteet sisältävät samoja teemoja. Näitä ovat

- motivaatio ja innostus (T1 / T1)
- asioiden yhteydet (T2 / T3 ja T6)
- lukukäsite (T8-10 / T9-12)
- ongelman ratkaiseminen (T5 / T5)
- ratkaisun arviointi (T7 / T5)
- matemaattinen ilmaiseminen (T4 ja T6 / T4)
- geometria (T11-T12 / T15-18)
- tilastot (T13 / T7, ja T19)
- ohjelmointi (T14 / T20)
- tieto- ja viestintäteknologia (T4 / T8).

Vuosiluokilla 3-6 tärkeänä nähdään lukukäsitteen laajentaminen ja laskutaidon sujumisen varmistaminen sekä erilaisten ongelmien ratkaiseminen (POPS, 2014 s. 260). Vuosiluokilla 3-6 opetuksessa korostetaan matematiikan ilmaisemista erilaisin tavoin, kuten välineillä, piirtämällä, suullisesti sekä kirjallisesti (T4). Lukukäsite (T8-10

/ T9-12) pitää sisällään niin ala- kuin yläkoulussa peruslaskutoimitukset ja päässälaskutaidon. Vuosiluokilla 3-6 lukukäsité pitää sisällään edellisten lisäksi kymmenjärjestelmän ja mittayksiköt (T8). Vuosiluokilla 7-9 tavoitteena on laajentaa lukukäsitetä ja oppia laskemaan erilaisilla luvuilla, kuten rationaaliluvuilla ja reaaliuvuilla. Tämän lisäksi vuosiluokilla 7-9 tulisi käsitellä muuttujia ja funktioita sekä yhtälön ratkaisemista (T13-T14).

Perusopetuksen opetussuunnitelmassa 3-6 vuosiluokan matematiikkaan on määritelty myös sisältötavoitteet (liite 3), jotka on jaettu 5 osaan (S1-S5) ja ovat

- ajattelun taidot (S1)
- luvut ja laskutoimitukset (S2)
- algebra (S3)
- geometria ja mittaaminen (S4)
- tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys (S5)

Sisältöalueet käsittelevät erilaisia matemaattisia taitoja ja aihealueita sekä niiden tavoitteita. Sisältöalueen ajattelun taidot (S1) tavoitteena on löytää erilaisia yhtäläisyyksiä matematiikassa. Oppilaiden on oppia vertailemaan erilaisia asioita esimerkiksi löytämällä yhtäläisyyksiä sekä eroja asioista. Ohjelmoinnin alkeet ovat osa ajattelun taidot sisältöaluetta. Sisältöalueen luvut ja laskutoimitukset (S2) tavoitteena on laajentaa lukukäsitetä murtolukuihin, desimaalilukuihin, prosenttilukuihin sekä negatiivisiin lukuihin. Lukujen yhteyttä toisiinsa, kuten murtoluvut, desimaaliluvut ja prosenttiluvut, harjoitellaan tutkimalla ja luokittelemalla lukuja. Oppilaiden on tärkeä oppia kymmenjärjestelmä ja sen soveltaminen esimerkiksi desimaalilukuihin. Erilaisia laskutoimituksia, kuten päässälaskua, kertolaskua ja jakolaskua harjoitellaan ja varmistetaan jo opitut kuten yhteen- ja vähennyslasku sekä kertotaulut 1-10. Oppilaat oppivat lukujen pyöristämisen ja tuloksen arvioinnin. Sisältöalueen algebra (S3) tavoitteena on tutustua tuntemattoman ja yhtälön käsitteeseen ja oppia ratkaisemaan yhtälöitä päättelämällä tai kokeilemalla. Sisältöalueen geometria ja mittaaminen (S4) tavoitteena on tutkia kappaleita piirtämällä ja luokittelemalla. Kappaleet luokitellaan esimerkiksi lieriöihin, kartioihin ja muihin kappaleisiin. Tasokuviot luokitellaan monikulmioihin ja muihin kuvioihin. 3-6-luokalla tulisi erityisesti tarkastellaan kolmion, neliön ja ympyrän ominaisuuksia sekä tutustua pisteen, janan ja suoran käsitteeseen. Kappaleita tarkastellessa opitaan laskemaan kappaleiden piirit, pinta-alat ja tilavuudet.

Oppitunneilla tulisi käsitellä kulmaa ja sen piirtämistä sekä mittaamista. Oppitunneilla tulisi tarkastella symmetrisyyttä ja sen havainnointia arkielämässä. Koordinaatisto ja mittakaava ovat tärkeitä käsitteitä, jotka oppilaan tulee hallita. Oppilaiden tulisi peruskoulussa hahmottaa mittayksiköt ja niistä johdetut yksikkömuunnokset. Tärkeänä peruskoulussa on oppia, mitä tarkoittaa mittaaminen ja osata arvioida mittaustulosta ja sen tarkkuutta. Tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys (S5) sisältöalueen tavoitteena on, että oppilaat oppivat keräämään ja käsittelemään tietoa sekä tallentamaan ja esittämään tietoa joko taulukoiden tai diagrammien avulla. Vuosiluokilla 3-6 käsitellään tilastollista tunnusluvuista pienin ja suurin arvo sekä keskiarvo ja tyyppi-arvo. Todennäköisyyttä käsitellään arkielämän avulla esimerkiksi mahdollittoman ja varman tilanteen avulla.

Vuosiluokilla 7-9 sisältötavoitteet (liite 4) on jaettu 6 osaan (S1-S6) ja ne ovat

- ajattelun taidot ja menetelmät (S1)
- luvut ja laskutoimitukset (S2)
- algebra (S3)
- funktiot (S4)
- geometria (S5)
- tietojenkäsittely, tilastot sekä todennäköisyys (S6)

Sisältöalue funktiot (S4) on lisänä vuosiluokkien 3-6 sisältötavoitteisiin. Sisältöalue ajattelun taidot ja menetelmät (S1) sisältää muun muassa päättelyn ja todistamisen harjoittelua. Opetuksessa tulisi kiinnittää huomiota perusteluihin ja matemaattisen tekstin tulkitsemiseen ja tuottamiseen. Tavoitteena on syventää oppilaiden algoritmista ajattelua esimerkiksi ohjelmoinnin sekä erilaisten teknisten apuvälineiden, kuten tietokoneen tai laskimen avulla. Sisältöalueen luvut ja laskutoimitukset (S2) tavoitteena vuosiluokilla 7-9 on oppia peruslaskutoimitukset negatiivisilla luvuilla sekä murtolukujen kerto- ja jakolasku. Lukukäsitettä myös laajennetaan reaalityyppisiin ja opetuksessa käydään käänneisluvun, vastaluvun ja itseisarvon käsitteet. Desimaalilukujen ja prosenttilukujen käsitteitä ja laskutaitoja syvennetään. Prosenttiluvuissa opitaan laskemaan muutos- ja vertailuprosentti. Yläkoulussa perehdytään neliöjuuren ja potenssin käsitteeseen ja opitaan laskemaan näillä. Korostetaan tarkkanarvon käyttämistä laskuissa, mikäli vain mahdollista. Sisältöalueessa algebra (S3) oppilaat tutustuvat muuttujan käsitteeseen ja lausekkeen

arvoon. Oppilaat ymmärtävä, mitä tarkoittaa polynomi ja osaavat laskea polynomeja yhteen, vähentää niitä toisistaan sekä kertoa niitä keskenään. Lauseke ja sen sieventäminen kuuluvat vuosiluokkien 7-9 matematiikkaan. Lausekkeesta päästään 1. ja 2. asteen yhtälöihin ja yhtälöpareihin. Myös epäyhtälöt, lukujonot ja verranto kuuluvat 7-9 vuosiluokkien matematiikan sisältöihin. Sisältöalueen funktiot (S4) tavoitteena on, että oppilaat tutustuvat riippuvuuden käsitteeseen niin graafiseen kuin algebralliseen sekä verrannollisuuteen niin suoraan kuin kääntäen. Vuosiluokilla 7-9 käsitellään funktioita ja tutkitaan suoraa sekä graafisesti että algebrallisesti. Tavoitteena on, että oppilaat osaavat määritellä suoran yhtälöstä kulmakertoimen ja vakiotermin sekä tutkia kulmakertoimen avulla, onko suora kasvava vai vähenevä. Tärkeää on, että oppilaat oppisivat määrittelemään suoran nollakohdan niin kuvaajan avulla kuin algebrallisesti. Oppilaat tutkivat paraabelia ja sen ominaisuuksia. Sisältöalueessa geometria (S5) tärkeitä käsitteitä ovat muun muassa piste, jana, suora ja kulma. Tässä sisältöalueessa trigonometriset funktiot ja Pythagoraan lause ovat keskeisiä aiheita. Oppitunneilla monikumioista ja ympyrästä tutkitaan piiriä ja pinta-alaa. Tämän lisäksi oppivat laskemaan ympyrän kehän ja kaaren pituuden sekä sektorin pinta-alan. Kolmiulotteisista kappaleista perehdytään esimerkiksi palloon, lieriöön ja kartioon. Tietojenkäsittely ja tilastot sekä todennäköisyys (S6) sisältöalueessa tärkeää on tiedon kerääminen ja analysointi. Tunnuslukuista opetellaan keskiarvo ja tyyppiarvo, frekvenssi, mediaani ja hajontaluvut. Oppilaat oppivat tekemään diagrammeja ja laskemaan todennäköisyyksiä.

Yhteenvetona Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (2014, s. 234-239 ja s. 374-379) määritellään alakoulun matematiikan keskeisiksi sisällöiksi peruslaskutoimitukset, prosenttilaskenta, desimaaliluvut, murtoluvut, kymmenjärjestelmä, ongelmaratkaisutaito, sanallisten tehtävien ratkaiseminen, muuttuja ja yhtälö, geometria, mittaaminen, mittayksikkömuunnokset, oppilaiden innostus matematiikkaa kohtaan, matemaattinen ilmaiseminen. Samoja sisältöalueita käsitellään yläkoulussa ja tuodaan niihin uutta näkökulmaa ja syvyyttä. Näiden aihealueiden osaaminen on tärkeää, sillä opitun tiedon päälle luodaan uutta tietoa ja käsitteitä sitten yläkoulussa ja jatko-opinnoissa. Esimerkiksi syvennetään desimaaliluvun laskutoimituksia sekä prosenttilaskennassa uusia käsitteitä prosenttiosuus ja prosenttiluvun laskeminen kokonaisuudesta. Yläkoulussa lisätään murtolukujen laskutoimituksiin kerto- ja jakolasku. Yhtälöä käsitellään jo alakoulussa

ja tämän käsitteen laajentamista jatketaan koko yläkoulun ajan. Ylipäättänsä ongelmanratkaisutaito nähdään tärkeänä, sillä sitä tarvitaan kaikissa matematiikan osa-alueissa. Geometriassa käsitteet piiri, pinta-ala ja tilavuus ovat tärkeitä omaksua jo alakoulussa, sillä näitä käsitteitä käytetään myös yläkoulun geometriassa. Ylipäättänsä mittaaminen ja yksikkömuunnokset osoittautuvat tärkeiksi taidoiksi jo alakoulussa. Matemaattisten käsitteiden ilmaiseminen niin suullisesti kuin kirjallisesti jo alakoulussa auttaa osaamista yläkoulussa. Ohjelmointi ja algoritmien ajattelu on tullut uutena vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelmaan. Näitä taitoja harjoitellaan jo alakoulussa ja sitten syvennetään yläkoulussa. Peruslaskutoimitusten osaamisen lisäksi oppilaiden tulee osata käyttää laskinta sekä erilaisia muita teknisiä apuvälineitä laskemisen apuna. Erityisesti alakoulussa konkretisointi ja erilaiset toiminnalliset työskentelymuodot nähdään tärkeinä. Erilaiset työskentelymuodot ja motivoiva ilmapiiri auttavat oppilaita oppimaan ja oivaltamaan. Oppilaita myös kannustetaan yhdessä työskentelyyn. Oppilaan ohjaukselle on myös asetettu tavoitteet ja opettajan antama palaute koetaan tärkeäksi. Oppilaille tulee olla mahdollisuus saada opetusta myös aiempien vuosiluokkien matematiikan aihealueista. Opetuksessa tulee ottaa huomioon jokaisen oppilaan osaaminen ja tarjota vaihtoehtoisia työskentelymuotoja taitaville. Oppilaille on annettava riittävästi aikaa. Oppilaita tulee kannustaa yrittämään ja pyrkiä luomaan mahdollisimman paljon onnistumisen kokemuksia.

2.4 Oppikirjat opetuksen apuna

Oppikirjat nähdään tärkeänä opetuksen apuvälineenä. Ne ovat teoksia, jotka on tehty juuri oppilaan avuksi. Oppikirjoja kirjoittavat usein opettajat ja ne saattavat määrätä opetusta jopa enemmän kuin opetussuunnitelma. (Hellström, 2008, s. 252.) Oppimateriaali on keskeisessä asemassa opetuksessa. Oppimateriaalit vaikuttavat jopa koulukohtaisiin opetussuunnitelmiin. Aineenopettajien opetus perustuu usein oppikirjoihin ja erityisesti matematiikan oppikirjat muodostavat opetuksen rungon. (Heinonen, 2005, s. 233, 244.) Tutkimuksissa on havaittu, että oppimateriaalien vaikutus opetuksen toteutumiseen erityisesti matematiikassa on erittäin suuri (Pepin ja Haggerty, 2001). Opettaja määrää opetussuunnitelma. Opettajat saavat valita itse kirjan, jota käyttävät opetuksessa. Alakoulun opettajat jopa kokevat, että oppikirjat määrittelevät heidän opetuksen sisällön, eivätkä koulukohtaiset opetussuunnitelmat.

Opettajat myös kokevat suomalaiset oppikirjat erittäin laadukkaiksi. Oppikirjoista löytyvät perustiedot, jotka ovat loogisessa järjestyksessä ja ne innostavat oppilaita. (Pehkonen & Krzywacki-Vainio, 2007, s. 155-165.)

Englundin (1999, s. 339-340) mukaan oppikirjoilla on viisi selkeää tavoitetta. Oppikirjat takaavat opetussuunnitelmassa asetetun *tietotavoitteen täyttymisen*. Oppikirjat *kokoavat* tietoaineksen yhteen ja luovat *turvallisuutta*. Oppikirjoissa on tieto, joka opettajan tulisi opettaa ja oppilaiden omaksua. Oppikirjat luovat näin ollen yhteisen tavoitteen oppilaille ja opettajalle. Oppikirjat helpottavat oppilaiden *arviointia*. Opettajan on helppo asettaa oppilaille tavoitteita oppikirjan sisältöjen perusteella ja arvioida tavoitteiden täyttymistä. Oppikirjat on luotu opetussuunnitelmien mukaan, joten ne sisältävät tiedon, jonka oppilaiden tulisi osata. Esimerkiksi kokeissa oppilaat tietävät, että on tietty kirja, johon opettaja viittaa kysymyksissä. Oppikirjat ovat näin ollen suurelta osin arvioinnin perusta. Oppikirjat *helpottavat* niin opettajan kuin oppilaiden *työtä*. Esimerkiksi oppilaiden ollessa poissa, on opettajan helppo kertoa oppilaalle, mitä aihetta ja sivuja oppikirjasta käsiteltiin. Oppikirjan avulla oppilaiden on myös helppo palata oppitunneilla käsiteltävään aiheeseen esimerkiksi kotona. Opettajien on helppo seurata oppikirjan avulla mitä aiheita tulisi opettaa. Opettajan ei myöskään tarvitse itse koota oppimateriaalia, sillä se on jo koottuna kirjassa. Viimeisimpänä Englund toteaa, että oppikirjat auttavat *järjestyksen ylläpidossa* luokassa. Oppikirjojen avulla oppilailla on tekemistä oppitunneilla, esimerkiksi matematiikan tunneilla tehtävien tekeminen. Opettaja voi antaa oppikirjoista oppilaille kotitehtäviä. (Englund, 1999, s. 339-340.)

Perusopetuksen opetussuunnitelman (2014) mukaisia oppikirjoja 5.-6. luokalla ovat Otavan Tuhattaituri 5a, Tuhattaituri 5b (Kiviluoma, ym., 2018), Tuhattaituri 6a (Kiviluoma & Manninen, 2018), Tuhattaituri 6b (Kiviluoma & Manninen, 2015), Sanoma Pro Kymppi 5 (Rinne & Sintonen, 2016) ja Kymppi 6 syksy sekä kevät (Rinne, ym., 2019). Seuraava vertailu (taulukko 1) on tehty edellä mainittujen oppikirjojen sisällyluetteloista sekä oppikirjojen sisällöistä. Ongelmanratkaisulla tarkoitetaan tässä ongelmanratkaisun vaiheiden opettamista ja sanallisilla tehtävillä sanallisen tehtävän vaiheiden opettamista. Tuhattaituri-oppikirjasarjassa murtoluvut, desimaaliluvut, prosenttilaskenta ja peruslaskutoimitukset eli yhteen-, vähennys- kerto- ja jakolasku esiintyvät sekä viidennen että kuudennen luokan oppikirjoissa.

Myös geometria, tilastolliset tehtävät, ongelmanratkaiseminen ja sanalliset tehtävät löytyivät kummankin luokan oppikirjoista. Kulmaa ja yhtälöitä käsitellään vain viidennen luokan oppikirjassa ja aikaa vain kuudennen luokan oppikirjassa. Yhtälöä käsitellään vain viidennellä luokalla Tuhattaituri-kirjasarjassa.

Aihealue	Tuhattaituri 6a	Tuhattaituri 6b	Tuhattaituri 5a	Tuhattaituri 5b	Kymppi 6 syksy	Kymppi 6 kevät	Kymppi 5
murtoluvut	x	x	x	x		x	
desimaaliluvut	x	x	x		x	x	x
prosenttilaskenta		x		x		x	
peruslaskutoimitukset	x	x		x	x	x	x
pinta-alat / tilavuus	x	x				x	x
geometria (esim. kolmio, neliö, suunnikas, ympyrä)	x	x	x	x	x	x	
kulma			x		x		x
aika		x			x		
tilastot ja todennäköisyys	x	x	x	x	x		x
ongelmanratkaiseminen	x		x			x	
sanalliset tehtävät	x	x	x	x	x	x	x
yhtälö (esim. muuttuja, yhtälön ratkaiseminen)			x				

Taulukko 1: Alakoulun vuosiluokkien 5 ja 6 oppikirjat ja niiden sisällön vertailu. Merkintä x tarkoittaa, että kyseinen aihealue löytyy oppikirjasta.

Perusopetuksen opetussuunnitelman (2014) mukaisia oppikirjoja 7. luokalla ovat Editan Säde 1 (Etelämäki, 2015), Sanoma Pro:n Kuutio 7 (Hassinen, 2016) sekä Otavan Pii (Heinonen, ym., 2012). Seuraava vertailu (taulukko 2) on tehty edellä mainittujen oppikirjojen sisällysluetteloista sekä oppikirjojen sisällöistä. Kaikissa kirjasarjoissa esiintyviä aihealueita ovat murtoluvut, peruslaskutoimitukset, geometria, kulma sekä yhtälö. Desimaaliluvut, pinta-ala ja tilavuus sekä sanalliset tehtävät

löytyvät vain Säde- ja Kuutio-kirjasarjoista. Tämä ei tarkoita sitä, etteikö esimerkiksi Pii-kirjasarjasta löytyisi desimaalilukuihin tai pinta-aloihin liittyviä tehtäviä. Näitä tehtäviä ei vain ole vielä 7. luokan kirjassa. Tilastot ja todennäköisyys sisältö puuttui 7. luokan kirjoista. Tämä aihe löytyy esimerkiksi 9. luokan Pii-kirjasta (Heinonen, ym., 2014).

Aihealue	Säde	Kuutio	Pii
murtoluvut	X	X	X
desimaaliluvut	X	X	
prosenttilaskenta	X		
peruslaskutoimitukset (jako, kerto, yhteen, vähennys)	X	X	X
pinta-alat / tilavuus	X	X	
geometria (esim. kolmio, nelikulmio, suunnikas, ympyrä)	X	X	X
kulma	X	X	X
aika			
ongelmanratkaiseminen	X		X
tilastot ja todennäköisyys			
sanalliset tehtävät	X	X	
yhtälö (esim. muuttuja, yhtälön ratkaiseminen)	X	X	X

Taulukko 2: Yläkoulun oppikirjat ja niiden sisällön vertailu. Merkintä x tarkoittaa, että kyseinen aihealue esiintyy kirjassa.

2.5 Suomen matematiikan osaaminen kansainvälisissä tutkimuksissa

Pekka Kupari ja Jenna Hiltunen (2018, s. 16-53) *Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa* käsittelevät artikkelissa koulutuksen arviointia ja erityisesti PISA- sekä TIMMS-tutkimuksia. Heidän mukaansa viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana koulutuksen arviointi ja vertailu ovat lisääntyneet. Tähän ovat vaikuttaneet esimerkiksi huima teknologian kehitys sekä erilaiset uudet pedagogiset ratkaisut. Kansainvälisten arviointien, kuten PISA- ja TIMMS-tutkimusten avulla voidaan kehittää kansallista koulutusjärjestelmää. Niin TIMSS- kuin PISA-tutkimusten perusteella suomalaisten matematiikan osaaminen on laskenut, vaikka suomalaiset osaavatkin kansainvälisesti verraten matematiikkaa erittäin hyvin. Sukupuolten välinen tasa-arvo näkyy tuloksissa, sillä tyttöjen ja poikien suoritusten väliset erot ovat pienet. Parhaiten osattuja sisältöalueita ovat olleet luvut ja laskutoimitukset sekä tilastot, kun taas heikoiten osattuja geometria ja algebra. Heikosti osaavien määrä on kasvussa ja

huippuosaajien määrä laskussa päin. Myös asenne matematiikkaa kohtaan on laskussa, oppilaat pitävät matematiikasta yhä vähemmän ja oppilaat luottavat omaan matematiikan osaamiseensa yhä vähemmän. TIMSS- ja PISA-tutkimus täydentävät toisiaan, TIMSS-tutkimus tutkii oppilaiden matematiikan perustaitoja ja PISA-tutkimus taas, kuinka hyvin oppilaat osaavat soveltaa tietoa erilaisissa arkielämän tilanteissa. Suomessa PISA tulosten tutkimuksesta vastaa Koulutuksen tutkimuslaitos (KLT). OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) eli Taloudellisen yhteistyön ja kehityksen järjestö vastaa PISA-tulosten kansainvälisestä tutkimuksesta. OECD:hen kuuluu 36 jäsenvaltiota, joihin myös Suomi kuuluu (OECD, 2020).

2.5.1 PISA -tutkimukset

PISA (Programme for International Student Assessment) 2015-tutkimuksessa matematiikan osaaminen määriteltiin seuraavasti: *”Matematiikan osaaminen tarkoittaa yksilön kykyä muotoilla, käyttää ja tulkita matematiikkaa erilaisissa tilanteissa. Se pitää sisällään matemaattisen päättelyn sekä matemaattisten käsitteiden, menetelmien, tietojen ja välineiden käyttämisen ilmiöiden kuvaamisessa, selittämisessä ja ennustamisessa. Se auttaa yksilöitä tunnistamaan matematiikan merkityksen ympäröivässä maailmassa ja tekemään tarvittavia perusteltuja päätöksiä osallistuvina, rakentavina ja ajattelevina kansalaisina.”* (Vettenranta, 2016, s. 16.)

Matemaattisen tiedon soveltaminen erilaisissa yhteyksissä vaatii asioiden pohtimista, ymmärtämistä sekä perustelemista. Tähän oppilaat tarvitsevat perustiedot ja -taidot matematiikasta, näihin kuuluvat niin faktatieto, matematiikan terminologia, käsitteet sekä erilaiset ratkaisumenetelmät. Myös erilaisten teknisten apuvälineiden, kuten tietokoneohjelmien ja laskinten hyödyntäminen ja käytön osaaminen ovat tärkeitä. Oppilaan aktiivinen rooli oppimisessa on tärkeää. PISA-tutkimuksissa erityisen tärkeänä nähdään kyky tunnistaa matematiikan yhteys ympäröivään maailmaan. Tämän lisäksi on tärkeää osata käyttää tietoja ja taitoja hyödyksi omissa päätöksissään. (Vettenranta, 2016, s. 16.)

Kansainvälinen arviointiohjelma PISA käynnistyi vuonna 2000 ja se arvioi 15-vuotiaiden nuorten tietoja, taitoja sekä valmiuksia (Kupari, Reinikainen & Törnroos, 2007, s. 9-34). PISA-tutkimukseen osallistuessaan oppilaiden tulee olla vähintään 7. luokalla ja iältään 15 v 3kk – 16 v 2kk välillä (OECD, 2016, s. 61). PISA-tutkimus

toteutetaan joka kolmas vuosi ja siinä tutkitaan nuorten osaamista lukutaidossa, matematiikassa sekä luonnontieteessä, painottaen eri vuosina eri aiheita (Kupari, Reinikainen & Törnroos, 2007, s. 9-34). Matematiikka on ollut pääaihealueena vuosina 2003 ja 2012. PISA-tutkimuksessa matematiikan osaamisessa korostetaan matematiikan käyttö- ja soveltamistaitoa, unohtamatta perustietoja ja -taitoja, käsitteitä ja ratkaisumenetelmiä. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 22, 35.) PISA-tutkimuksissa arvioidaan peruskoululaisten matematiikan osaamista eri sisältöalueissa, joita ovat määrällinen ajattelu, tila ja muoto, muutos, yhteydet sekä epävarmuus (Kupari, Reinikainen & Törnroos, 2007, s. 9-34). Määrällinen ajattelu pitää sisällään lukumäärän ja mitan ymmärtämisen. Tähän sisältöalueeseen kuuluvat lukujen suuruusluokan hahmottamien ja ilmaiseminen eri tavoin sekä eri laskutoimitukset ja päässäälaskutaito. Sisältöalueen tila ja muoto sisällössä tärkeää on hahmottaa muotoja ja rakenteita niin kaksi- kuin kolmiulotteisesti. Tärkeää on muotojen ja rakenteiden hahmottaminen ympärillä olevasta maailmasta. Tämän sisältöalueen tehtävät liittyvät erityisesti geometriaan. Sisältöalueessa muutos ja yhteydet tärkeitä aiheita ovat erilaisten yhteyksien löytäminen ja asioiden ilmaiseminen eri tavoin, kuten symbolein, algebrallisesti, kuvin tai taulukoin. Myös näiden eri esitystapojen välillä liikkuminen on tärkeää. Tärkeää on osata analysoida matemaattista tietoa. Yhteydet voidaan mallintaa matemaattisina funktioina. Sisältöalue epävarmuus sisältää matematiikan aiheista tilastotieteen ja todennäköisyyden. Tärkeänä tilastotieteestä nähdään tiedon kerääminen, analysointi ja esittäminen. Todennäköisyydestä tärkeänä nähdään eri tapahtumien todennäköisyydet ja päätelmien tekeminen. (Kupari & Välijärvi, 2005, s. 9-10.)

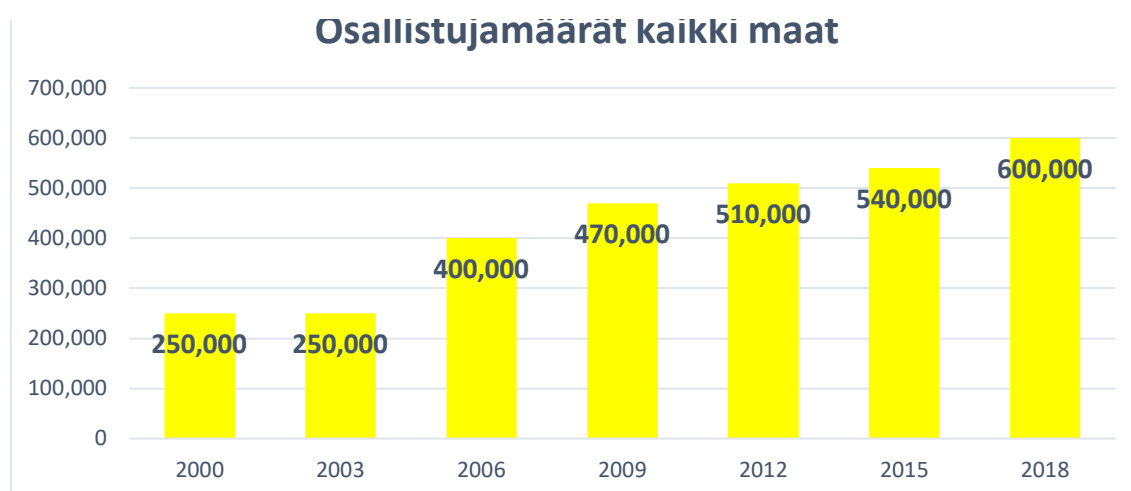
Vuonna 2003, jolloin matematiikka oli pääaihealueena, tutkimukseen osallistui Suomesta 5 796 oppilasta. Tutkimuksessa oli 85 tehtävää. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 36.) Vuonna 2003 suomalaiset nuoret olivat OECD-maiden parhaita ja kaikista maista toiseksi parhaita sekä suomalaisten nuorten keskihajonta oli pientä. Vuonna 2003 parhaiten osattu sisältöalue oli määrällinen ajattelu, kun taas tila ja muoto - sisältöalue osattiin heikoiten (taulukko 1). (Kupari, Reinikainen & Törnroos, 2007, s. 9-34.) Vuonna 2012, jolloin matematiikka oli myös pääaihealueena, tutkimukseen osallistui Suomesta 10 157 oppilasta ja tehtäviä oli tällä kertaa 110 kappaletta. Vuonna 2012 tehdyssä tutkimuksessa suomalaisnuoret pärjäsivät edelleen hyvin ja olivat OECD-maiden parhaimmista. Sijoituksemme kuitenkin tippuivat ja tällöin

kahdeksaluokkalaiset olivat OECD-maiden joukossa sijalla kuusi. Edelleen parhaiten suoriuduttiin sisältöalueesta määrällinen ajattelu ja heikoiten sisältöalueesta tila ja muoto (taulukko 1). Vuonna 2012 osaamista tutkittiin myös eri prosessialueissa, näitä olivat matemaattinen muotoileminen, käyttötaidot ja tehtävienratkaisujen tulkinta. Parhaiten osattu prosessiluokka oli tehtävienratkaisujen tulkinta ja heikoiten osattu matematiikan käyttötaidot. Vaikka sijoituimme vuonna 2012 OECD-maiden vertailuissa edelleen korkealle, tulokset laskivat 25 pistettä verrattaessa vuosien 2003 ja 2012 pisteitä. Vuonna 2003 suomalaisten keskiarvo pisteet olivat 544 kun taas vuonna 2012 ne olivat 519 pistettä. PISA-tutkimuksen maksimipistemäärä on 1000 pistettä. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 36, 39-41.) PISA-tutkimuksen tuloksissa oppilaat sijoitetaan 6 eri tasoon (tasot 1-6) pisteiden perusteella. Verrattaessa vuosien 2003 ja 2012 tuloksia käy ilmi, että heikkojen matematiikan osaajien (taso 2 tai huonompi) määrä on kasvanut seitsemästä prosentista 12 prosenttiin ja taas erinomaisten matematiikan osaajien (taso 5 tai parempi) määrä laskenut 23 prosentista 15 prosenttiin. (OECD, 2015, s. 70; Kupari & Hiltunen, 2018, s. 45-47.) Osaamisen taso on laskenut kaikilla sisältöalueilla, mutta suurin pudotus on tapahtunut tila- ja muotosisältöalueella (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 46). Vuonna 2012 PISA-tutkimuksessa ongelmanratkaisu tehtävät toteutettiin tietokoneympäristössä. Vuoden 2015 PISA-tutkimus toteutettiin jo kokonaan tietokoneympäristössä. Tietokoneympäristö tulee muuttamaan PISA-tutkimuksen sisältöä, esimerkiksi tiedon hankinta, sen analysointi ja tulosten esittäminen korostuvat luultavasti jatkossa enemmän. Myös lähdekriittisyys saattaa korostua jatkossa enemmän. Tehtävät tehdään yhä enenevässä määrin tietokoneympäristössä ja näin ollen oppilaiden ratkaisusta ja ratkaisutavoista tallentuu paljon erilaista tietoa, joita opettajat voivat käyttää hyödyksi opetuksessa. (Vettenranta ym., 2016, s. 12-13.)

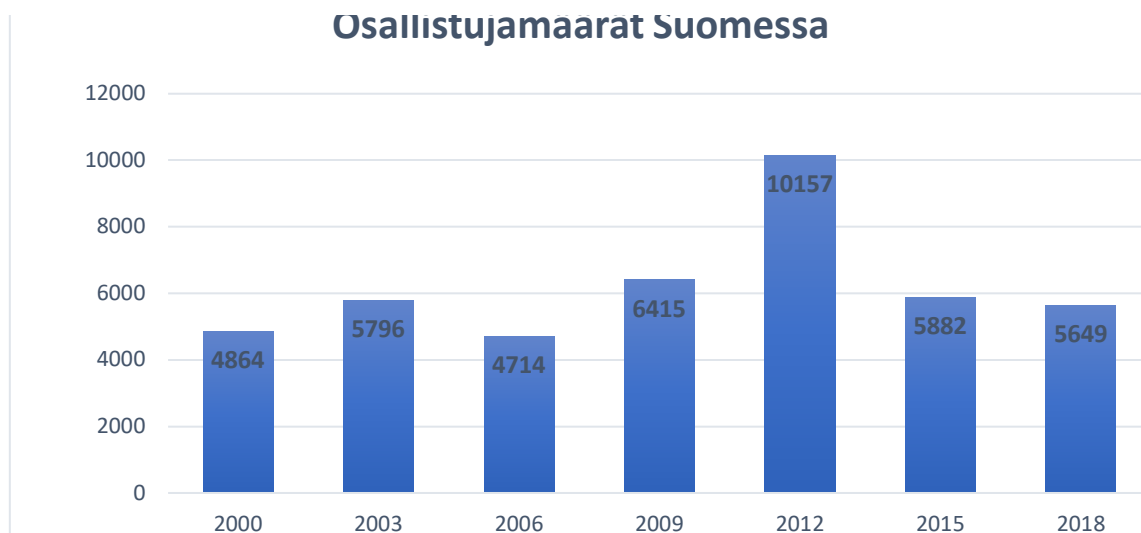
Aihealue	2003 (ka)	2012 (ka)
Määrällinen ajattelu	549	527
Tila ja muoto	539	507
Muutos ja yhteydet	543	520
Epävarmuus	545	519
Kansallinen keskiarvo	544	519

Taulukko 1: PISA-tutkimuksen pisteet sisältöalueittain Suomessa, punaisella merkitty heikoiten osattu aihealue ja vihreällä parhaiten osattu aihealue. (Kupari, ym., 2005, s. 18-21; Kupari, ym., 2013, s. 19)

PISA-tutkimuksia on toteutettu vuodesta 2000 lähtien ja osallistujamäärät ovat kasvaneet vuosi vuodelta (Kuva 1), vuoden 2000 250 000 osallistujasta vuoden 2018 yli 600 000 osallistujaan (OECD, 2001, s. 16; OECD, 2019, s. 19). Suomessa osallistujamäärät ovat pysyneet melko tasaisina, vajaan 5 000 osallistujasta reiluun 6 000 osallistujaan, lukuun ottamatta vuotta 2012, jolloin Suomesta osallistui yli 10 000 oppilasta (Kuva 2). Vuoden 2003 PISA-tutkimukseen osallistui 250 000 oppilasta 41 eri maasta ja näistä 30 maata kuului tällöin OECD-maihin (OECD, 2004, s. 22, 24). Vuoden 2012 PISA-tutkimukseen osallistui 510 000 oppilasta 65 eri maasta, näistä 34 maata kuuluu tällöin OECD-maihin (OECD, 2014, s. 21).

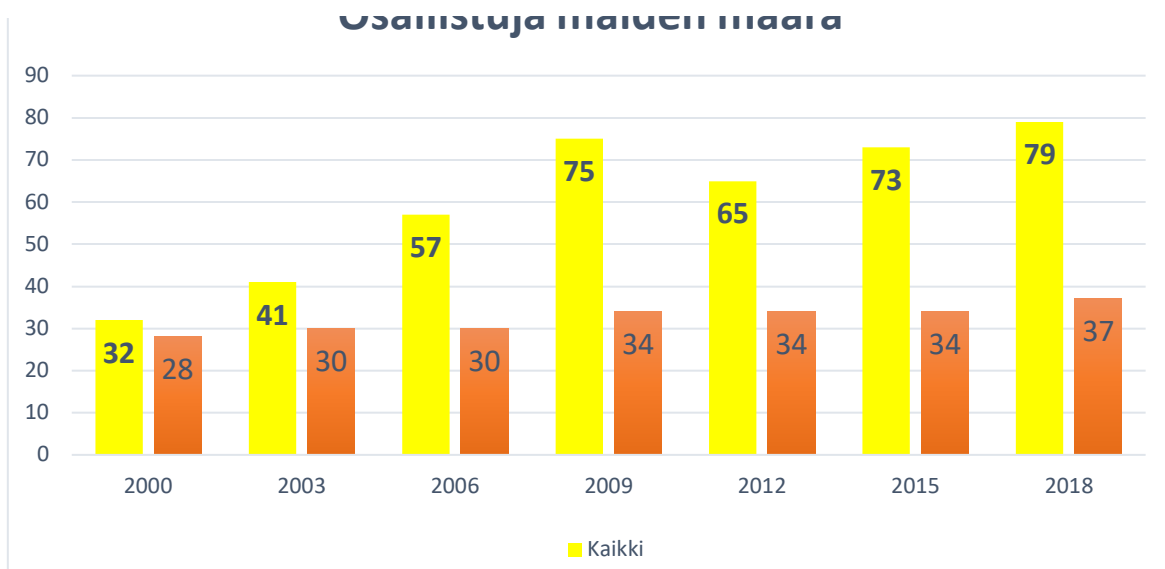


Kuva 1: Osallistujamäärät PISA-tutkimuksessa eri vuosina (OECD, 2001, s. 16; OECD, 2004, s. 24; OECD, 2007, s. 19; OECD, 2010, s. 3; OECD, 2014, s. 21; OECD, 2016, s. 3; OECD, 2019, s. 19).



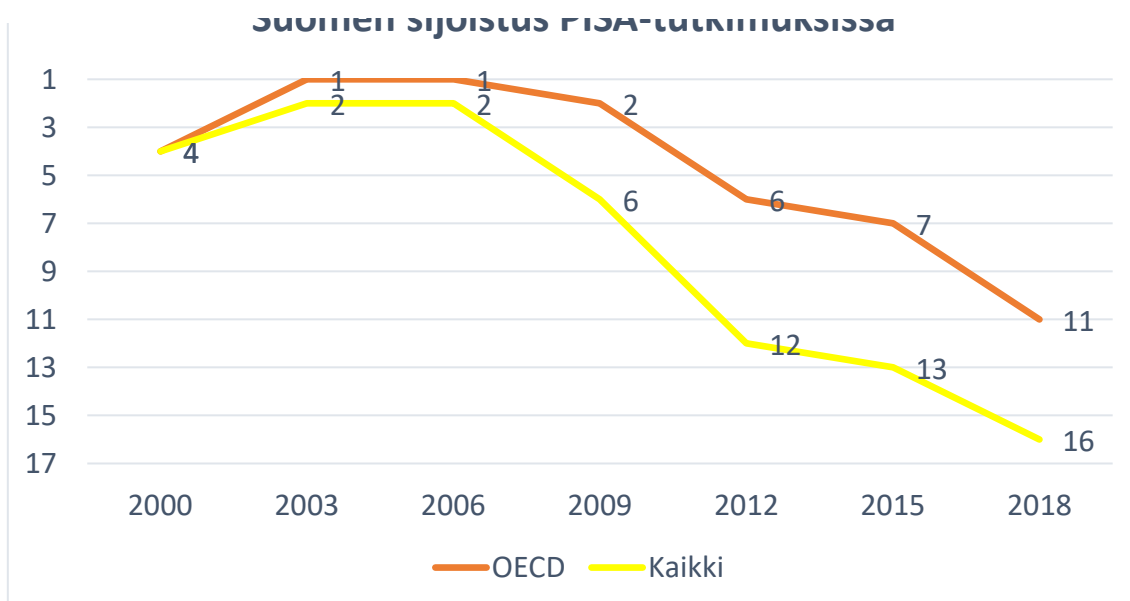
Kuva 2: PISA-tutkimuksen osallistujamäärät Suomessa eri vuosina (Sulkunen ym., 2002, s. 7; Kupari & Hiltunen, 2018, s. 36; Arinen & Karjalainen, 2007, s. 16; OECD, 2012, s. 10; Vettenranta ym., 2016, s. 17; Leino ym., 2019, s. 17).

Osallistujamaiden määrä on kasvanut PISA-tutkimusten ensimmäisistä vuosista tähän päivään (kuva 3). Esimerkiksi vuonna 2000 osallistujamaita oli 32, kun vuonna 2018 niitä oli 79. Tämä tarkoittaa, että osallistujamäärä ovat yli kaksinkertaistuneet 18 vuoden aikana. OECD-maiden määrä ei ole noussut 18 vuoden aikana kuin 9 maalla, 28 maasta 37 maahan. (OECD, 2001, s. 2; Leino, ym., 2019, s. 9.) Myös Aasian maiden määrä PISA-tutkimuksessa on kasvanut. Vuonna 2003 Aasian maita oli neljä 15 parhaan joukossa, kun taas vuonna 2012 ja 2015 niitä oli seitsemän 15 parhaan maan joukossa. (Vettenranta ym., 2016, s. 28; OECD, 2004, s. 92; OECD, 2014, s. 48.)



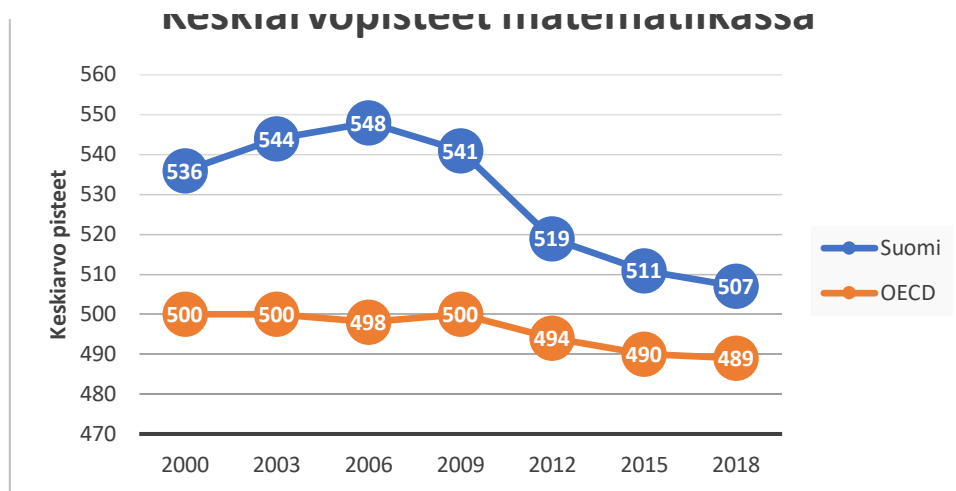
Kuva 3: PISA-tutkimuksen osallistujamaiden määrä vuosittain (OECD, 2001, s. 2; OECD, 2004, s. 22; OECD, 2007, s. 17; OECD, 2010, s. 18; OECD, 2014, s. 21; OECD, 2016, s. 19; Leino ym., 2019, s. 9)

Suomen sijoitus matematiikan PISA-tutkimuksissa on laskenut sekä kaikki maat huomioiden että vain OECD-maat huomioiden. Vuosina 2003 ja 2006 Suomi oli maailman toiseksi parhain ja OECD-maiden paras. Vuonna 2018 Suomi sijoittui kaikkien maiden joukossa 16. sijalle ja OECD-maiden joukossa 11. sijalle (kuva 4).



Kuva 4: Suomen sijoitus PISA-tutkimuksissa (Opetus- ja kulttuuriministeriö, 2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015; OECD, 2019, s. 17-18).

Suomalaisten oppilaiden pisteet PISA-tutkimuksissa ovat laskeneet vuosien 2003-2018 välillä 544 pisteestä 507 pisteeseen eli 37 pistettä. Myös OECD-maiden keskiarvopisteet ovat laskeneet hieman vuodesta 2000 vuoteen 2018, 500 pisteestä 489 pisteeseen. Suomalaisten oppilaiden keskiarvopisteet ovat kuitenkin olleet selkeästi OECD-maiden keskiarvoa korkeammat (kuva 5).



Kuva 5: PISA-tutkimuksien keskiarvopisteet matematiikassa Suomi ja OECD-maat (OECD, 2001, s. 2; OECD, 2004, s. 262; OECD, 2007, s. 315-316; OECD, 2010, s. 133-134; OECD, 2014, s. 46; OECD, 2016, s. 176, 179; Leino ym., 2019, s. 29).

Matematiikka oli pääaiheena PISA-tutkimuksissa vuonna 2003 ja 2012. Osallistujamäärät ovat kasvaneet vuosi vuodelta ja Suomen sijoitus sekä keskimääräiset pisteet ovat pudonneet. Suomalaiset nuoret osaavat parhaiten sisältöalueen määrällinen ajattelu, jonka tehtävät käsittelevät lukuja ja peruslaskutoimituksia sekä niiden soveltamista (Kupari, ym., 2013, s. 19). Huonoiten osataan sisältöalue tila ja muoto. Tähän sisältöalueeseen sisältyy esimerkiksi mittaaminen ja geometriset kappaleet. (Kupari, ym., 2013, s. 20; Kupari, ym., 2005, s. 17.) PISA-tutkimuksessa korostetaan ymmärtämistä, pohtimista, perustelua ja soveltamista erilaisissa tilanteissa. Tärkeää on hallita matematiikan perustiedot ja -taidot, kuten käsitteet, laskutoimitukset ja ratkaisumenetelmät. (Kupari, ym., 2013, s. 20; Kupari, ym., 2005, s. 17.) PISA-tutkimuksen tehtävät sisältävät arkielämän ongelmia ja niiden ratkaisemiseen tarvitaan monipuolista tietoa eri matematiikan osa-alueista (Kupari, ym., 2005, s. 9).

2.5.2 TIMSS -tutkimukset

Kansainvälinen matematiikan ja luonnontieteen tutkimus TIMSS toteutettiin ensimmäisen kerran vuonna 1995 (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 23). Suomi ei kuitenkaan osallistunut vielä tuolloin tutkimukseen. Tuloksia arvioidaan sisältöalueittain pääosin kahdeksannella luokalla, mutta Suomessa kuitenkin seitsemännellä luokalla vuonna 1999. TIMSS-tutkimuksessa tarkasteltavia sisältöalueita matematiikassa ovat luvut ja laskutoimitukset, mittaaminen, geometria, algebra ja tilastot ja todennäköisyys. Tehtävät ovat myös jaettu prosessialueittain, eli prosessit, joita oppilaiden oletetaan käyttävän tehtävää ratkaistaessa. Näitä prosessialueita ovat tiedot ja taidot, soveltaminen ja päättely. Tietojen ja taitojen prosessialue sisältää ne tiedot ja taidot, joita oppilaat tarvitsevat matemaattisen tehtävän ratkaisemiseen. Näitä ovat esimerkiksi faktatiedot, matemaattiset käsitteet sekä suoritustavat. Prosessialue soveltaminen mittaa sitä, miten oppilaat osaavat käyttää ja soveltaa faktatietoa, käsitteitä ja erilaisia suoritustapoja matematiikassa. Päättelyn prosessialue liittyy vaativampiin ongelmanratkaisutehtäviin. Näissä asia, jota käsitellään, on usein vieraampi ja monimutkaisempi sekä saattaa sisältää useita eri vaiheita. Päättelyyn liittyy johtopäätöksien ja perustelujen tekeminen. (Vetteranta, Hiltunen, Nissinen, Puhakka & Rautopuro, 2016.) TIMSS-tutkimuksien maksimipistemäärä on 1000 pistettä (Mullis, ym., 2012, s. 6).

Vuonna 1999 tutkimukseen osallistui suomalaisista seitsemäsluokkalaisista 3 060 oppilasta ja matematiikan tehtäviä oli 155 kappaletta (Kupari, Reinikainen & Törnroos, 2007, s. 9-34). Tutkimuksessa oppilailla oli 90 minuuttia vastausaikaa. Suomalaiset sijoituivat maiden vertailussa sijalle 14. Suomalaisten nuorten keskiarvo oli 520 pistettä, joka on kansainvälisen keskiarvon, 487 pistettä, yläpuolella. Sisältöalueista suomalaiset nuoret osasivat parhaiten aihealueen luvut ja laskutoimitukset (ka=531) ja toiseksi parhaiten tilastot ja todennäköisyys (ka=525). (Mullis, ym., 2001, s. 21, s. 96-98.) Osa tilastojen ja todennäköisyyksien tehtävistä käsitteli sellaisia aiheita, jotka eivät kuuluneet sen hetkiseen Suomen peruskoulun opetussuunnitelmaan (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 27). Heikoiten osattiin sisältöalueet geometria (ka=494) ja algebra (ka=498). (Mullis, ym., 2000, s. 96-98) Huono suoriutuminen näissä alueissa voi selittyä sillä, että noin puolet geometrian tehtävistä olivat sellaisista geometrian aihealueista, joita ei ole vielä opetettu seitsemännellä luokalla Suomessa.

Prosessialueissa puutteita oli soveltamisen osa-alueella. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 23-33.)

Vuonna 2011 tutkimukseen osallistui 4 638 neljännen luokan oppilasta ja 4 266 kahdeksannen luokan oppilasta eli yhteensä 8904 oppilasta. Tehtäviä neljännellä luokalla oli 175 ja kahdeksannella luokalla 217. Kahdeksasluokkalaisten keskiarvo oli 514 pistettä ja keskiarvopistemäärä oli laskenut 6 pistettä verrattaessa vuoden 1999 tulokseen. (Kupari, Vettenranta, Nissinen, 2012, s. 142-146.) Kansainvälinen keskiarvo oli 500 pistettä (Mullis ym., 2012, s. 6). Suomalaisten neljäsluokkalaisten ja kahdeksasluokkalaisten tulokset olivat Euroopan kärkipäässä. Neljännen luokan tulokset olivat melko tasaiset eri sisältöalueilla, parhaiten osattiin tilastot ja todennäköisyys (ka=551) ja heikoiten geometria (ka=543). Neljännellä luokalla algebran aihealueesta ei ollut tehtäviä. Eri prosessialueiden osaaminen oli myös erittäin tasaista neljäsluokkalaisilla. Sisältöalueista kahdeksasluokkalaiset osasivat parhaiten tilastot ja todennäköisyyden (ka=542) ja heikoiten algebran (ka=492). Prosessialueista kahdeksasluokkalaiset osasivat heikoiten tiedot ja taidot (ka=508) ja parhaiten soveltamisen (ka=520). Tämä tulos on mielenkiintoinen, sillä yleensä tietoja ja taitoja tarvitaan soveltamiseen ja päättelyyn. Mielenkiintoisen tuloksesta tekee myös se, että vuonna 1999 juuri soveltaminen osattiin heikoiten. (Kupari, Vettenranta, Nissinen 2012, s. 142-150.) Tulokset ovat nähtävissä alempana taulukoissa (taulukko 2 ja taulukko 3). Vuonna 2011 neljännen luokan TIMSS-tutkimukseen osallistui oppilaita 52 eri maasta. Kahdeksannen luokan TIMSS-tutkimukseen osallistui oppilaita 45 eri maasta. (Mullis ym., 2012, s. 36.) Suomalaiset sijoittuvat sijalle kahdeksan niin neljännen luokan kuin kahdeksannen luokan maiden välisessä vertailussa (Mullis ym., 2012, s. 40 ja s. 42).

Vuonna 2015 Suomi osallistui vain 4. luokan TIMSS-tutkimukseen. 4. luokan TIMSS-tutkimukseen osallistui oppilaita 49 eri maasta. Näiden maiden keskiarvo oli 500 pistettä. Suomi sijoittui näiden maiden joukossa sijalle 17. Vuonna 2015 TIMSS-tutkimukseen osallistui 5 015 suomalaista neljäsluokkalaista ja tehtäviä oli 169. Suomalaisten neljäsluokkalaisten keskiarvo oli 535, joka tarkoittaa, että se oli laskenut vuodesta 2011 kymmenen pistettä. Osaaminen oli tasaista eri sisältöalueissa, ja osa-alueista tilastot ja todennäköisyys osattiin parhaiten (ka=542) ja luvut ja laskutoimitukset (ka=532) heikoiten. Prosessialueista tietoa ja taitoa vaativat tehtävät

osattiin heikoiten (ka=530) ja päättelyä vaativat tehtävät (ka=540) taas parhaiten. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 23-33; Mullis, ym., 2016.)

Sisältöalue	1999 ka (7-luokka)	2011 ka (8-luokka)	2011 ka (4-luokka)	2015 ka (4-luokka)
Luvut ja laskutoimitukset	531	527	545	532
Mittaaminen	521	-	-	-
Geometria	494	502	543	539
Algebra	498	492	-	-
Tilastot ja todennäköisyys	525	542	551	542
Kansallinen keskiarvo	520	514	545	535

Taulukko 2: Suomalaisten keskiarvopisteet sisältöalueittain. Vihreällä on merkitty parhaiten osattu alue ja punaisella heikoiten. (Mullis, Martin, Gonzales, 2000, s. 96-98; Kupari, Vettenranta, Nissinen, 2012, s. 142-146; Mullis, ym., 2016).

Prosessialue	2011 ka (8-luokka)	2011 ka (4-luokka)	2015 ka (4-luokka)
Tiedot ja taidot	508	548	530
Soveltaminen	520	544	536
Päättely	512	546	540

Taulukko 3: Suomalaisten keskiarvopisteet prosessialueittain. Vihreällä on merkitty parhaiten osattu alue ja punaisella heikoiten. (Kupari, Vettenranta, Nissinen, 2012, s. 148-150; Mullis, ym., 2016).

TIMSS-tutkimukseen osallistuminen auttaa tunnistamaan Suomen matematiikan koulutuksen heikkoudet ja vahvuudet. Matematiikan koulutus on muuttunut vuoden 1999 ja 2011 TIMSS tutkimusten välillä. Uuden opetussuunnitelman astuessa voimaan yhä useampi oppilas tarvitsee tukea matematiikassa. Myös kuntien väliset erot ovat kasvaneet. Osaamisen tason vaihtelu oli suurta niin koulujen kuin luokkien välillä. Oppilaiden oma käsitys matematiikan osaamisesta ennusti hyvin matematiikassa suoriutumista. (Kupari & Nissinen, 2013.)

2.6 Suomalaisten matematiikan osaaminen kansallisissa tutkimuksissa

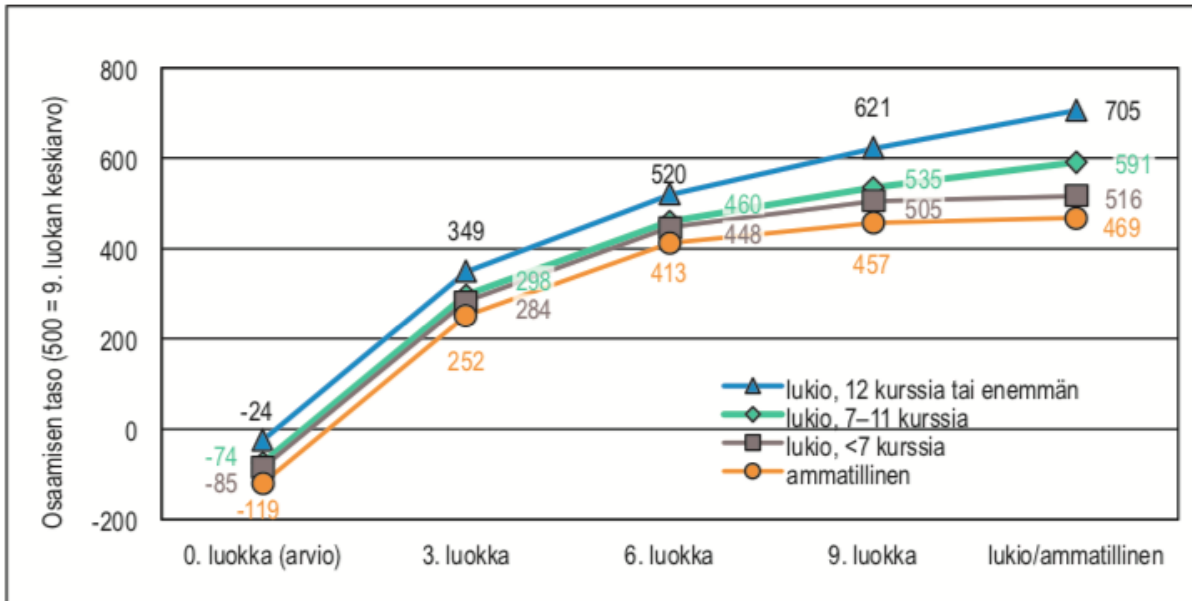
Opetushallitus ja opetusministeriö on halunnut tutkia suomalaisten kuudesluokkalaisten osaamista matematiikassa verraten sitä perusopetuksen opetussuunnitelman, tässä tapauksessa vuoden 1994 ja 2004, tavoitteisiin. Eero

Niemi (2008) selventää artikkelissaan Opetushallituksen teettämän testin tuloksia. Opetushallitus on tutkinut kuudennen luokan matematiikan oppimistuloksia ja asennetta matematiikkaa kohtaan vuosina 2000 ja 2007. Tämä on toteutettu oppilaille teetettävällä matematiikan kokeella. Tätä ennen oppilaat ovat vastanneet taustatietokyselyyn. Tutkimuksessa myös opettajat ja koulun rehtorit vastasivat heitä koskevaan kyselyyn. Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, kuinka hyvin oppilaat ovat saavuttaneet perusopetuksen opetussuunnitelmassa (1994 ja 2004) vaaditut tavoitteet. Tutkimuksessa selvitettiin myös eri matematiikan osa-alueiden osaamisen tasoa. Koe oli jaettu kolmeen osaan aihealueittain: luvut, laskutoimitukset ja algebra, geometria ja tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys. Kokeessa oli 30 tehtävää, jotka oli jaettu päässälasku-, monivalinta- ja tuottamistehtäviin. Tuloksia analysoidessa käytettiin IRT-mallitusta. Tutkimuksen tuloksena parhaiten osattiin tietojenkäsittely ja tilastot ja todennäköisyys. Huonoiten taas osattiin luvut, laskutoimitukset ja algebra. Tämän osan ratkaisuprosentti oli 55,7, kun taas geometria osassa se oli 68 prosenttia, tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys osassa 77,3 prosenttia. Oppilaat osasivat erityisesti päässälaskutehtävät ja niissä kertolaskun. Sisältöalueista parhaiten osattiin mittayksikkötehtävät. Huonoiten osattiin tuottamistehtävät, esimerkiksi geometriasta piirin laskeminen. Luvut ja laskutoimitukset -osiosta sanalliset tehtävät osattiin hyvin. Lasku- ja päättelytehtävät osattiin taas huonosti. Tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys osa-alueesta lämpötila tehtävät osattiin hyvin. Tuloksissa käy myös ilmi, että suurimmalle osalle opettajista opetussuunnitelma ohjasi heidän toimintaansa.

Kansallinen koulutuksen arviointikeskus (KARVI) on tehnyt pitkäikäistutkimuksen suomalaisten matematiikan osaamisesta 3. luokasta ammatillisen- ja lukion loppuun. Samoja oppilaita on tutkittu 3. luokan alussa vuonna 2005, 6. luokalla vuonna 2008, 9. luokalla vuonna 2012 ja ammatillisen- ja lukion oppilaita vuonna 2015. 3. luokalla, 6. luokalla ja 9. luokalla. Pitkäikäistutkimukseen osallistui 3912 oppilasta. (Metsämuuronen, 2017.) 3.-9. luokan arviointiin osallistui 3502 oppilasta, joista 1800 oli poikia ja 1702 tyttöä. Tämä tutkimus keskittyy ala- ja yläkoulun matematiikkaan, joten seuraavaksi esitellään tuloksia ala- ja yläkoulun osalta. Pisteet on muutettu PISA- ja TIMSS-tutkimuksia vastaavaksi. 3. luokalla keskiarvo oli 375, 6. luokalla 463 ja 9. luokalla 502. Tutkimuksessa tutkittiin oppilaiden matematiikan osaamista eri aihealueissa sekä oppilaiden asenteita matematiikkaa kohtaan. Tutkimuksen

matematiikan aihealueet 3. luokalla olivat luvut, laskutoimitukset, algebra, geometria, tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys. 9. luokan aihealueissa oli tämän lisäksi mukana funktiot, joita ei kuitenkaan voitu ottaa mukaan pitkittäisarvioon, sillä funktioita ei ole vielä alemmilla luokilla ollut opetuksessa. Parhaiten kolmasluokkalaiset osasivat geometrian (ka=409) ja heikoiten tietojenkäsittelyn, tilastot ja todennäköisyyden (ka=344). 6. luokalla parhaiten osattiin geometria (ka=472) ja heikoiten osattiin luvut, laskutoimitukset ja algebra (ka=457). 9. luokalla eri aihealueiden osaaminen oli tasaista. Keskiarvopisteet olivat seuraavat: luvut, laskutoimitukset ja algebra 502, geometria 502 ja tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys 501. Oppilaiden osaaminen lisääntyi keskimäärin 126 pistettä vuosiluokkien 3-9 välillä. Suurin muutos on tapahtunut aihealueessa luvut ja laskutoimitukset, 153 yksikköä. Kaupungeissa (ka=502) oppilaiden keskiarvo oli suurempi kuin taajamissa (ka=500) tai maaseudulla (ka=499). Asenteita mitattiin kyselyllä, jossa oli 8 kysymystä liittyen käsitykseen itsestä matematiikan osaajana ja matematiikasta pitämiseen. Kokonaisuutena heikkeni 18 prosenttia, matematiikan osaaminen 12 prosenttia ja matematiikasta pitäminen 25 prosenttia. (Metsämuuronen, 2013, s. 9, 33-46, 75-80.)

Seuraavaksi tarkastellaan vielä Jari Metsämuurosen (2017) artikkelin, Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015, tuloksia. Mittarin perustana oli oppilaiden suorittamat kokeet 9. luokalla, tehtävistä 78 prosenttia oli samoja. Osa tehtävistä oli myös samoja kuin 3- ja 6-luokalla. (Metsämuuronen, 2017, s. 30) Matematiikan keskiarvo pisteet olivat 570 pistettä, lukio-opiskelijoilla 627 pistettä ja ammatillisessa koulutuksessa olevilla 469 pistettä. Parhaiten aihealueista osattiin algebra (ka=582). Huonoiten osattiin geometria (ka=533) sekä tilastot ja todennäköisyys (ka=536). (Metsämuuronen, 2017, s. 61-64). Osaamisen tasoerot kasvavat, mitä ylemmälle luokka-asteelle mennään. Hyvät oppilaat ovat hyviä jo alakoulussa. Esimerkiksi ylioppilaskokeessa menestyvät yleensä paremmin ne, jotka ovat menestyneet matematiikassa hyvin jo alakoulussa. Erot vain suurenavat yläkoulussa ja toisen asteen opinnoissa. (kuva 6) Oppilaiden asenteissa matematiikkaa kohtaan on eroa, sillä lukiolaiset pitävät enemmän matematiikasta verrattaessa ammatillisen koulutuksen opiskelijoihin. (Metsämuuronen, 2017, s. 66-70)



Kuva 6: Osaamisen erot eri luokka-asteilla (Metsämuuronen, 2017, s. 67).

Kati Hirvosen (2012) raportti, Matematiikan oppimistuloksista peruskoulun päättövaiheessa 2011, sisältää tutkimustuloksia Opetushallituksen tutkimuksesta vuodelta 2011. Tutkimuksen tuloksia on peilattu vuoden 2004 perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin. Tutkimukseen osallistui 4 929 oppilasta. Tutkimuksessa oli mukana yksilöllistettyjä oppilaita 188 oppilasta. Oppilaat suorittivat tehtäviä liittyen päässä laskuun, monivalintaan ja ongelmanratkaisuun. Jokaisessa alueessa oli prosenttilaskutehtäviä. Aihealueita olivat algebra funktiot, geometria, luvut ja laskutoimitukset sekä tilastot ja todennäköisyys. Oppilaiden keskimääräinen pistemäärä oli 43,5 eli ratkaisu osuus oli 54,3 prosenttia. Oppilaat suoriutuivat parhaiten monivalintatehtävistä, ratkaisuosuus oli 60,9 prosenttia, kun taas heikoiten suoriuduttiin ongelmanratkaisutehtävistä, joissa ratkaisuosuus oli 48,8 prosenttia. Aihealueista parhaiten osattiin luvut ja laskutoimitukset (ratkaisuosuus= 65,3%) ja heikoiten geometria (ratkaisuosuus=42,4%) Prosenttilaskut osattiin heikosti, sillä ratkaisuosuus oli 41,5 prosenttia. (Hirvonen, 2012, s. 24-49.)

Miksi matematiikan osaaminen sitten onkaan tärkeää? Osaamisen tason lasku aiheuttaa sen, että yhä useammalla oppilaalla ei ole riittäviä matematiikan perusvalmiuksia toisen asteen opintoihin ja näin ollen opinnoista putoaminen ja syrjäytyminen ovat mahdollisia. Heikko matematiikan osaaminen voi aiheuttaa myös yhteiskunnallisia kustannuksia, esimerkiksi erityisopetus vaatii lisää opettajia ja näin kustannuksia koulutukseen. Koulusta putoajat eivät välttämättä työllisty yhtä hyvin

kuin koulunsa loppuun asti käyneet. Korkean koulutuksen nähdään lisäävän työllistymisen mahdollisuutta. (Myrskylä, 2012.) Työttömyys taas aiheuttaa valtiolle lisäkustannuksia (Gross, Hudson & Price, 2009). Matematiikan peruslaskutaitoja tarvitaan kaikkialla arjessa, esimerkiksi kellonajoissa, ruuanlaitossa ja median tilastojen lukemisessa. Peruslaskutaitoja tarvitaan myös lähes kaikissa töissä.

2.7 Alakoulun ja yläkoulun erot

Opettajan tehtävä on opettaa. Opettaja auttaa oppilaita pääsemään opetussuunnitelman tavoitteisiin ohjaamalla heidän toimintaansa. Opetus on aina kasvattavaa ja tarkoituksena kasvattaa lasta menestymään aikuisena. Opetus on myös aina vuorovaikutteista, oppilas ja opettaja. (Hellström, 2008, s. 98 ja 202.)

Siirtymät ja niiden tuomat muutokset ovat tärkeitä ihmisille. Muutokset voivat olla sekä sisäisiä että ulkoisia. Ulkoinen muutos koulussa on, kun siirrytään alakoulusta yläkouluun. Siirtymässä kehittyvät niin sosiaaliset taidot kuin sopeutumiskyky. Siirtyessä alakoulusta yläkouluun oppilaat voivat kokea paljon erilaisia muutoksia. Näin ollen siirtyminen uuteen kouluun voi vaikeutua. Sisäinen muutos tarkoittaa oppilaiden psyykkistä ja fyysistä kehitystä. (Pietarinen & Rantala, 1998) Murrosikä on niin fyysisen kuin psyykkisen kehityksen suurien muutoksien aikaa. Keskittymisvaikeudet ja motivaation puutos johtaa koulumenestyksen heikkenemiseen. (Aalberg & Siimes 1999, s. 60; Pietarinen 1999, s. 265). Kuudennelta luokalta lähtien oppiminen ei olekaan enää niin myönteinen asia ja oppiminen saattaa tuntua vaikealta. (Pietarinen, 1999, s. 30) Nuoren persoonallisuuden kehityksen muutokset ajoittuvat myös samoihin aikoihin. Nuoret saattavat esimerkiksi pohtia minuuttiaan sekä minkälaisena muut minua pitävät. Murrosiän tuomat fyysiset muutokset omassa kehossa vaikeuttavat minäkuvan muodostumista. Minäkuvaan voi vaikuttaa ympäristön tuomat sosiaaliset paineet. (Lehtinen & Kuusinen, 2001, s. 31)

Ulkoiset muutokset liittyvät esimerkiksi sosiaalisiin suhteisiin niin opettajien kuin muiden oppilaiden kanssa, koulu ympäristöön ja koulun sääntöihin (Pietarinen, 1999, s. 117). Esimerkiksi yläkoulun 7-luokalla ei ollakaan enää koulun vanhimpia ja samat oppilaat eivät olekaan enää ympärillä uusien luokkajakojen myötä (Pietarinen & Rantala 1998, s. 235; Entwistle, 1990, Pietarinen & Rantala 1998, s. 234). Oppimisympäristö muuttuu, kun alakoulun luokanopettajan tilalle tulee lähes jokaiseen

aineeseen oma aineenopettaja. Opetusryhmät ja opettajien opetustyyli voi vaihdella. (Pietarinen, 1999, s. 274; Pietarinen & Rantala 1998, s. 235). Koulumatka ja koulupäivät saattavat pidentyä (Pietarinen, 1999, s. 155) sekä läksyjen määrä kasvaa siirryttäessä luokalta toiselle. (Pääkkönen, 2002) Yläkoulussa oppilaat pohtivat koulumenestystä ja sen vaatimaa panosta, esimerkiksi jaksavatko he laskea matematiikkaa tarpeeksi. Tällöin mieleen tulevat myös tulevaisuuden tavoitteet ja peruskoulun päätös. (Pietarinen, 1999, 127, 150, 155.)

Kognitiivinen kehitys kokee muutoksia Piaget'n teorian mukaan erityisesti kahdestatoista ikävuodesta lähtien. Oppilaat alkavat tällöin ymmärtämään formaalisia operaatioita. Oppilaat pystyvät kokemaan ja kuvittelemaan asioita, jotka eivät ole heille konkreettisia. Ongelmia pystytään myös ratkaisemaan uusista näkökulmista. (Pietarinen, 1999, s. 31) Tämä helpottaa esimerkiksi matematiikan opiskelua. (Lehtinen & Kuusinen, 2001, s. 117)

Alakoulun yläluokkien opetukseen vaikuttaa alkuopetuksessa tehdyt asiat. Vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetuksessa arkielämän tulisi olla mukana konkretian kautta, esimerkiksi askartelun ja leikkien avulla (POPS, 2014, s. 128-130). Opetusta tulisi toteuttaa ilman kirjaa ulkoisten välineiden avulla. Oppilaat ajattelevat ääneen ja kokeilevat erilaisia tapoja ratkaista laskuja ja tutkia matemaattisia käsitteitä. (Ikäheimo, 1998, s. 239-250) Ikäheimon (1998, s. 246) mukaan tulisi kiinnittää erityisesti huomiota yhteen- ja vähennyslaskuihin, kymmenjärjestelmään ja kertolaskuun niin alkuopetuksessa kuin myöhemmin alakoulussa. Näiden kohtien puutteellinen hallinta saattaa aiheuttaa ongelmia jopa yläkoulussa. Seitsemännellä luokalla suositaan laskemiskeskeisyyttä, jossa opettaja opettaa asian ja tämän jälkeen oppilaat laskevat tehtäviä. Matematiikan oppitunteja on kolmesta neljään tuntia viikossa (Espoo, 2020).

Tärkeää perinteisen opettajajohtoisen opettamisen sekä oppilaiden itsenäisen laskemisen lisäksi ovat ongelmanratkaisutaito, tutkiva oppiminen ja arkipäivän ongelmien tutkiminen. Oppituntien tulisi olla oppilaskeskeisiä ja opettajan tulisi kiinnittää huomiota yksilöön. Myös matematiikan integroiminen muihin oppiaineisiin nähdään tärkeänä. Perinteinen matematiikan tunti alkaa kotitehtävien tarkistamisella ja tämän jälkeen opettaja esittelee uuden aiheen esimerkkien avulla. Lopputunti vierähtää tehtävien laskemisessa ja tunnin lopussa opettaja antaa kotitehtävät.

Erityisesti vuosiluokilla 1-6 oppikirjaan perustuva opetus on erittäin yleistä. Nykyään täydennyskoulutuksissa keskitytään uusiin opetusmenetelmiin, kuten oppimispelisiin ja ongelmanratkaisuun. Ongelmanratkaisu nähdään usein tärkeänä osana matematiikkaa, mutta harva opettaja käyttää sitä opetuksessa. Yksi syy tähän voi olla oppilaiden pelko tehdä virheitä. Matematiikkaa olisi tärkeä opettaa ongelmanratkaisun kautta. Alakoulun aineenopettajien osaamista tulisi vahvistaa ja oppikirjasta tulisi myös uskaltaa poiketa. (Pehkonen, 2009.)

3. Tutkimuskysymykset

Tutkimuksen tavoite on selvittää opettajien näkökulmasta eri matematiikan aihealueiden osaamista ja onko niiden osaamisessa eroja. Tutkimuksen tarkoituksena on selvittää viidennen ja kuudennen luokan opettajien sekä seitsemännen luokan matematiikan aineenopettajien mielipide. Aihealueiden osaaminen selvitetään Likertin asteikolla.

Täsmälliset tutkimuskysymykset ovat

1. Onko eri matematiikan aihealueiden osaamisessa eroa?
 - Mikä matematiikan aihealue osataan heikoiten ja parhaiten?
 - Onko eri kaupunkien opettajien vastauksissa eroja?
 - Onko alakoulun ja yläkoulun opettajien vastauksissa eroja?
 - Onko opettajan opetuskokemuksella merkitystä eri aihealueiden osaamiseen?
2. Millaisia ongelmia opettajat näkevät matematiikan opetuksessa yleisesti ja eri aihealueissa?
 - Miten opettaja kehittäisi aihealueiden opetusta?

Näihin kysymyksiin pyrin löytämään vastauksen opettajilta kerättävän määrällisen sekä laadullisen aineiston avulla. PISA-tutkimusten mukaan heikoiten osataan sisältöalue tila ja muoto, johon kuuluu esimerkiksi erilaiset geometriset kuviot ja niiden hahmottaminen. PISA-tutkimusten mukaan parhaiten osataan määrällinen ajattelu, joka pitää sisällään muun muassa lukukäsitteen ymmärrystä ja laskutoimitusten osaamisen. (Kupari, ym., 2005 ja 2015.) TIMSS-tutkimuksen perustella suomalaiset osaavat parhaiten luvut ja laskutoimitukset ja heikoiten geometrian (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 23-33). Näin ollen opetussuunnitelman ja eri kirjasarjojen perusteella valikoiduista aihealueista heikoiten osattaisiin geometria ja parhaiten peruslaskutoimitukset. Ongelmana on, että matematiikan oppitunteja on vähennetty ja aihealueita on todella paljon. Näin ollen aikaa on liian vähän kaiken opettamiseen.

4. Tutkimuksen toteutus

Tutkimus toteutettiin kyselytutkimuksena vuoden 2019 lokakuun – vuoden 2020 tammikuun aikana pääkaupunkiseudulla Suomessa. Kyselyn alustana toimi Microsoftin Forms-sovellus. Tutkimuksen kohdejoukko oli pääkaupunkiseudun alakoulun ja yläkoulun opettajat, tarkemmin 5.-6. luokan opettajat sekä 7. luokan opettajat. Luvussa 4.1 kerrotaan tarkemmin aineiston keruusta ja sisällöstä ja luvussa 4.2 aineiston analysointimenetelmistä.

4.1 Aineiston kuvaus ja keruu

Kyselyä varten kerättiin Helsingin, Espoon, Vantaan ja Kauniaisten koulujen verkkosivuilta viidennen ja kuudennen luokan opettajien sekä yläkoulun matematiikan aineenopettajien sähköpostiosoitteet. Näihin 600 sähköpostiosoitteeseen lähetettiin linkki kyselyyn, jonka kautta opettajat pystyivät vastaamaan internetissä täytettävään lomakkeeseen. Tämän lisäksi kyselyn linkki jaettiin sosiaalisessa mediassa, Facebookissa Luokanopettajien keskustelupalsta-ryhmässä. Kyselyn jakamisessa oli apuna eräs espoolainen luokanopettaja. Kysely oli avoinna 24.10.2019-19.1.2020 välisen ajan. Kyselyyn vastaaminen oli täysin vapaaehtoista. Kyselyä varten opettajien ei tarvinnut kirjautua mihinkään vaan kysely toteutettiin nimettömänä. Näin ollen kyselyn vastauksia ei pystytä yhdistämään analysointivaiheessa yksittäiseen henkilöön. Tällä pyrittiin kasvattamaan opettajien luottamusta, jotta opettajat vastaisivat aidon mielipiteensä kyselyssä. Sähköpostissa, Facebookissa sekä kyselyn alussa opettajille kerrottiin kirjallisesti kyselyn tarkoitus (Liite 5) sekä arvioitu kyselyn vastaamisen kesto, 10 minuuttia. Kyselyn avulla kerättiin kahdenlaista aineistoa, määrällistä ja laadullista. Määrällinen aineisto koostui tutkimuksen taustatietokysymyksistä ja Likertin asteikolla mitattavasta mielipiteestä. Laadullinen aineisto koostui kyselyn avoimesta kysymyksestä.

Tutkimuksessa selvitettäviä taustatietoja olivat sukupuoli, opetettava luokka, koulutus sekä opetuskokemus vuosina. Sukupuolivaihtoehdot olivat nainen, mies ja muu. Tutkimuksen kohdejoukosta johtuen opetettava luokka vaihtoehdot olivat 5. luokka, 6. luokka, 7. luokka ja muu-vaihtoehto. Muu-vaihtoehtoon oli mahdollista kirjoittaa täsmennys opetettavasta luokasta. Kyselyn yksi kysymys koski opettajien

opetuskaupunkia. Tutkimuksen kysely kohdennettiin pääkaupunkiseudun kouluilla työskenteleville opettajille. Kaupunkivaihtoehdot olivat Helsinki, Espoo, Vantaa ja Kauniainen sekä muu-vaihtoehto. Muu-vaihtoehtoon oli mahdollista kirjoittaa täsmennys opetuskaupungista, mikäli se oli joku muu kuin aiemmat vaihtoehdot. Opetuskokemus vuosina asteikko oli seuraava: alle 1 vuosi, 1-5 vuotta, 6-10 vuotta, 11-15 vuotta, 16-20 vuotta ja yli 20 vuotta. (Liite 6)

Kyselyn ensimmäinen kysymys koski eri matematiikan aihealueiden osaamista. Aihealueet olivat valikoituneet Perusopetuksen opetussuunnitelman 2014 sekä eri kirjasarjojen sisältöjen mukaan. Opettajat vastasivat kokemuksensa mukaan väittämään ”Matematiikan aihealue osataan heikosti” eri matematiikan aihealueista.

Aihealueet olivat seuraavat

- peruslaskutoimituksen
- murtoluvut
- desimaaliluvut
- prosenttiluvut
- pinta-ala ja tilavuus
- geometriset kuviot
- tilastolliset tehtävät
- ongelmanratkaisu
- sanalliset tehtävät
- matemaattinen ilmaiseminen
- kymmenjärjestelmä
- yksikkömuunnokset
- tekniset apuvälineet
- algoritminen ajattelu ja ohjelmointi.

Opettajat vastasivat tähän kysymykseen Likertin asteikolla: täysin eri mieltä (1), jokseenkin eri mieltä (2), ei samaa eikä eri mieltä (3), jokseenkin samaa mieltä (4) ja täysin samaa mieltä (5). Jokaisen aihealueen kohdalla tuli erikseen pohtia, osaavatko oppilaat aihealueen heikosti. Seuraavassa kysymyksessä opettajat valitsevat samoista aihealueista kolme kaikista vaikeinta aihealuetta oppilailleen. Avoin kysymys, johon opettajien tuli kirjoittaa opetuksen kehittämisehdotuksia edellisen kysymyksen vaikeisiin aihealueisiin. Lopuksi oli vielä väittämä ”Koetko, että oppilaille vaikeiden aihealueiden opetukseen on aikaa”. Tähän kysymykseen vastausvaihtoehdot olivat seuraavat: sopivasti, pitäisi olla enemmän ja pitäisi olla vähemmän. Viimeisenä kysymyksenä ”Oletko kehittänyt omaa opetustasi (esimerkiksi täydennyskoulutukset, kurssit, messut, alan kehityksen seuraaminen yms)?” Vastausvaihtoehdot olivat seuraavat: en ollenkaan, vähän ja paljon. (Liite 7)

4.2 Aineiston analyysimenetelmät

Ensimmäiseksi Microsoft Forms-kyselyn vastaukset (N=137) katsottiin läpi ja tallennettiin Excel-taulukkoon. Kyselyn kaikki kysymykset olivat pakollisia. Kaikki kyselyn vastaukset soveltuivat tutkimukseen, sillä vastauksista ei löytynyt esimerkiksi vain yhden Likertin arvon vastauksia. Avoimeen kysymykseen jätti tyhjäksi 6 opettajaa. Tämä ei kuitenkaan estä näiden vastausten soveltuvuutta tutkimukseen. Vastausaikaa tutkittaessa kaikki opettajat käyttivät aikaa vastaamiseen yli kaksi minuuttia. Tämän perusteella yksikään opettaja ei ole vain nopeasti vastannut kyselyyn.

Microsoft Forms-sovellus antoi suoraan tulokset taustatekijöille, joita olivat sukupuoli, opetuskokemus, koulutus, luokka-aste ja kaupunki. Likertin asteikon vastausvaihtoehdot (täysin samaa mieltä, jokseenkin samaa mieltä, ei eri eikä samaa mieltä, jokseenkin eri mieltä ja täysin eri mieltä) muutettiin numeerisiksi asteikolla 1-5. Avoimen kysymyksen vastaukset analysoitiin etsimällä samanlaisia sanoja vastauksista sekä löytämällä johonkin tiettyyn aihealueeseen viittaava ongelma ja kehitysehdotus.

Määrällinen aineisto analysoitiin SPSS Statistic-ohjelmalla (versio 25). Tutkimustulosten tulkintaan käytettiin yleisiä tunnuslukuja, kuten keskiarvoa ja keskihajontaa. Tuloksia tutkittiin ristiintaulukoimalla aihealueen keskiarvo ja jokin muuttuja, esimerkiksi kaupunki, luokka-aste tai opetuskokemus. SPSS-ohjelman avulla selvitettiin, onko eri muuttujien ryhmien välillä eroa aihealueen jakaumassa. Ryhmien välistä eroa testattiin esimerkiksi Mann-Whitneyn U-testin ja Kruskal-Wallis-testin avulla. Nämä testit soveltuvat hyvin mielipideasteikoille. Kysely koostui kysymyksestä opettajien mielipiteestä ja näin ollen nämä testit soveltuivat käytettäväksi tuloksien analysointiin. Näissä testeissä ei tarvitse olettaa tuloksien olevan normaalisti jakautuneita. Testit vertasivat opettajien vastauksia aihealueista ja eri muuttujaryhmien välistä eroa. Esimerkiksi muuttuja oli opetuskaupunki ja testit vertasivat Helsingin ja Espoon välistä eroa. Muuttujia olivat esimerkiksi eri kaupungit, alakoulu tai yläkoulu ja opetuskokemus.

5. Tulokset

Tutkimustulokset esitellään tutkimuskysymyksittäin. Ensin esitellään luvussa 5.1 taustatiedot. Luvuissa 5.2, 5.3, 5.4 ja 5.5 käsitellään tutkimuskysymystä matematiikan aihealueiden osaamisen eroista ja luvussa 5.6 kyselyn avointa kysymystä ja tähän liittyvää tutkimuskysymystä liittyen matematiikan aihealueiden opetuksen ongelmiin ja niiden ratkaisuihin.

5.1 Taustatiedot

Tässä luvussa kuvataan kyselyn taustatietoja ja niistä saatavia tuloksia. Kyselyssä opettajat vastasivat ensin taustatietokysymyksiin, joita olivat sukupuoli, opetettava luokka, koulutus, opetuskaupunki ja opetuskokemus.

Kyselyyn vastasi yhteensä 137 opettajaa. Vastaajista 92 (67%) oli naisia, 42 (31%) miehiä ja kolme (2%) muun sukupuolen edustajia. Naisia (N = 92) kyselyyn vasta enemmän kuin miehiä (N = 42). Alla kuva (kuva 7) kyselyyn vastanneiden sukupuolijakautuneisuudesta.

1. Sukupuoli

[Lisätietoja](#)

● Nainen	92
● Mies	42
● Muu	3



Kuva 7: Vastaajien sukupuolijakautuneisuus.

Toisessa kysymyksessä selvitettiin, mitä luokkaa opettaja opettaa tällä hetkellä. Kyselyyn vastasi 22 (16%) 5. luokan opettajaa, 28 (20%) 6. luokan opettajaa, 58 (42%) 7. luokan opettajaa ja 29 (21%) jonkun muun luokan opettajaa. Muut vastaajat jakautuivat seuraavasti: pelkästään 8.-9. luokan opettajia oli 12 (9%) yläkoulun 7.-9. luokan opettajia oli yhdeksän (7%), alakoulun 2.-4. luokan opettajia kolme (22%), yksi (1%) 4.-6. luokan opettaja, yksi (1%) 6.-9. luokan opettaja, yksi (1%) 5.-6. luokan opettaja, yksi (1%) toisen asteen ammattiopiston opettaja sekä yksi (1%) opettaja, joka opettaa seitsemäsluokkalaisista lukioon oppilaita. Prosentti kertoo kuinka paljon

kaikista vastaajista (N = 137) kuului kuhunkin ryhmään. Alla kuva (kuva 8) opettajien opettamasta luokasta.

2. Opetan tällä hetkellä

Lisätietoja

● 5-luokka	22
● 6-luokka	28
● 7-luokka	58
● Muu	29



Kuva 8: Opettajien opettama luokka.

7. luokkaa opettavia opettajia oli yhteensä 69 ($58 + 9 + 1 + 1 = 69$, 50%) opettajaa, sillä pelkkää 7. luokkaa opetti 58 opettajaa, 7.-9. luokkia 9 opettajaa, seitsemännestä luokasta lukioon yksi opettaja ja 6.-9. luokkia yksi opettaja. 5.-6. luokkaa opettavia opettajia oli yhteensä 53 ($22 + 28 + 1 + 1 + 1 = 53$, 39%), sillä pelkkää 5. luokkaa opetti 22 opettajaa, pelkkää 6. luokkaa 28 opettajaa, 4.-6. luokkia yksi opettaja ja sekä 5. että 6. luokkaa yksi opettaja. Yksi opettaja opetti 6.-9. luokkia. Muita luokkia kuin 5., 6. tai 7. luokkaa opetti 16 ($12 + 3 + 1 = 16$, 12%) opettajaa, sillä 12 opettajaa opetti vain 8.-9. luokkia, kolme 2.-4. luokkia ja yksi opettaja opetti ammattikoulussa.

Kolmas taustatietokysymys koski opettajien koulutusta. Kyselyyn vastanneista 74 (54%) oli matematiikan aineenopettajia ja 41 (30%) luokanopettajia. Muita aineenopettajia oli yhdeksän (7%). Ei tutkintoa vastasi kaksi (1%) opettajaa ja jokin muu koulutus 11 (8%) opettajaa. Muut vastaajat jakautuivat seuraavasti: luokanopettajan ja matematiikan aineenopettajan koulutus viisi opettajaa, erityisopettajan koulutus kolme opettajaa ja matematiikan, kemian ja fysiikan opettajia kolme. Alla kuva (kuva 9) opettajien koulutuksen jakautumisesta.

3. Koulutukseni

Lisätietoja

● Matematiikan aineenopettaja	74
● Muu aineenopettaja	9
● Luokanopettaja	41
● Ei tutkintoa	2
● Muu	11



Kuva 9: Opettajien koulutuksien jakautuminen.

Neljäs taustatietokysymys koski opettajien opetuskuntaa. Kyselyyn osallistui 51 (54%) opettajaa Helsingistä, 29 (21%) opettajaa Espoosta, 24 (18%) opettajaa Vantaalta ja 33 (24%) jostain muusta kaupungista. Kauniaisista tutkimukseen ei osallistunut yhtään opettajaa. Alla kuva (kuva 10) opettajien kaupungeista.

4. Toimin opettajana kaupungissa

Lisätietoja

● Helsinki	51
● Espoo	29
● Vantaa	24
● Kauniainen	0
● Muu	33



Kuva 10: Opettajien jakautuminen opetuskuntien mukaan.

Muut vastaukset (N = 33) jakoutuivat seuraavasti (taulukko1): Länsi-Suomi kolme, Etelä-Suomi (pois lukien Helsinki, Espoo, Vantaa ja Kauniainen) 16, Pohjois-Suomi viisi, Itä-Suomi viisi, Keski-Suomi kaksi ja Pohjanmaa kaksi. Näin ollen Etelä-Suomesta mukaan lukien Helsinki, Espoo ja Vantaa opettajia vastasi yhteensä 120 (88%).

Alue	Lukumäärä (N)	% kaikista (N=137)
Länsi-Suomi	3	2 %
Etelä-Suomi	16	12 %
Pohjois-Suomi	5	4 %
Itä-Suomi	5	4 %
Keski-Suomi	2	1 %
Pohjanmaa	2	1 %
Yhteensä	33	24 %

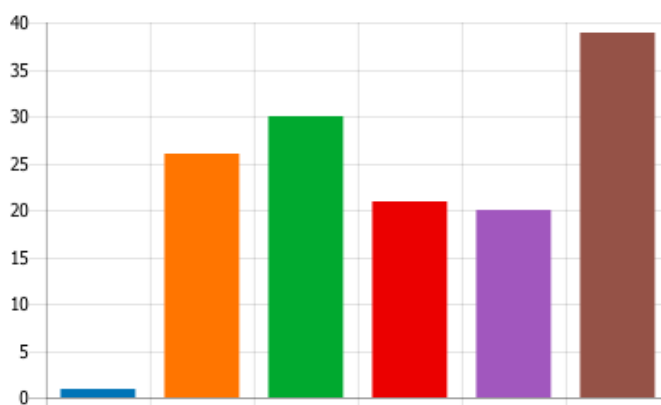
Taulukko 4: Muiden vastausten jakautuminen Suomessa.

Viides taustatietokysymys koski opettajien opetuskokemusta vuosina. Alle 1 vuotta yksi (alle 1%) opettaja, 1-5 vuotta 26 (19%) opettajaa, 6-10 vuotta 30 (22%) opettajaa, 11-15-vuotta 21 (15%) opettajaa, 16-20-vuotta 20 (15%) opettajaa ja yli 20 vuotta 39 (28%) opettajaa. Alla kuva (kuva 11) opettajien opetuskokemuksista.

5. Opetuskokemus vuosina

Lisätietoja

● Alle 1 vuotta	1
● 1-5 vuotta	26
● 6-10 vuotta	30
● 11-15 vuotta	21
● 16-20 vuotta	20
● yli 20 vuotta	39



Kuva 11: Opetuskokemus vuosina.

Yhdeksäs kysymys koski opettajien kokemusta vaikeiden aihealueiden opetukseen käytettävissä olevasta ajasta. 102 (74%) opettajaa vastasi, että opetukseen pitäisi olla enemmän aikaa. 34 (25%) vastasi, että opetukseen on sopivasti aikaa. Yksi opettajista

vastasi, että opetukseen pitäisi olla vähemmän aikaa. Alla vastauksien jakautuminen (kuva 12).

9. Koetko, että oppilaille vaikeiden aihealueiden opetukseen on aikaa

[Lisätietoja](#)

● sopivasti	34
● pitäisi olla enemmän	102
● pitäisi olla vähemmän	1



Kuva 12: Kysymyksen yhdeksän tulokset.

Kymmenes ja viimeinen kyselyn kysymys koski opettajien innokkuutta kehittää omaa opetustaan. 10 (7%) opettajaa ei ole kehittänyt opetustaan ollenkaan. 81 (59%) opettajaa on kehittänyt opetustaan vähän ja 46 (34%) kehittänyt opetusta paljon. 15 opettajaa (33%) opettajista, jotka vastasivat, että ovat kehittäneet opetustaan paljon, on opetuskokemusta yli 20 vuotta. Alla kuva (kuva 13) vastausten jakautumisesta. Opettajien opetuskokemus näyttäisi tässä tutkimuksessa liittyvän innokkuuteen kehittää opetusta. Erityisesti, jos opettaja vastasi, että hän oli kehittänyt paljon opetusta. Tässä kyselyssä, mitä enemmän opettajilla oli opetuskokemusta, sitä innokkaammin opettajat kehittivät opetusta. Tämä on nähtävissä alla olevasta kuvasta (kuva 14) nousevina pylväinä.

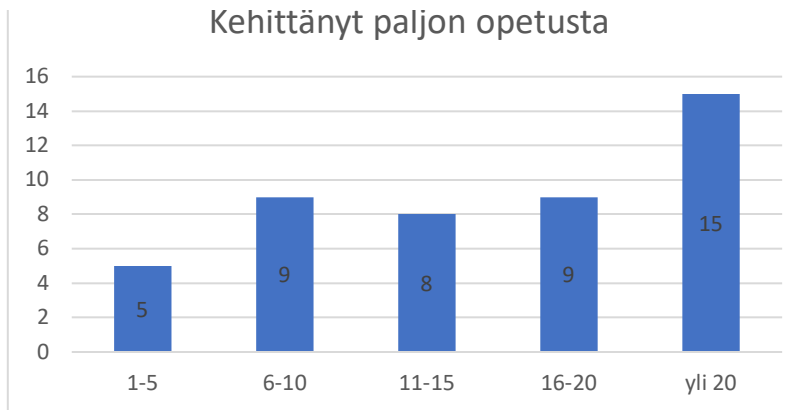
10. Oletko kehittänyt omaa opetustasi (esimerkiksi täydennyskoulutukset, kurssit, messut, alan kehityksen seuraaminen yms)

[Lisätietoja](#)

● En ollenkaan	10
● Vähän	81
● Paljon	46



Kuva 13: Kysymyksen 10 tulokset.



Kuva 14: Opetuskokemuksen ja innokkuus kehittää opetusta kuvaaja. Pystyakselilla opettajien määrä ja vaaka-akselilla opetuskokemus vuosina.

5.2 Matematiikan aihealueiden osaamisen erot

Itse kysely koostui kahdesta kysymyksestä, jossa opettajien tuli arvioida oppilaiden matematiikan osaamista eri aihealueissa. Kuudennessa kysymyksessä opettajien tuli arvioida osaavatko oppilaat aihealueen heikosti. Arviointi tapahtui Likertin asteikolla. Viisiportainen Likertin asteikko oli seuraava, suluisa vastausta vastaava numero (1-5).

- täysin eri mieltä (1)
- jokseenkin eri mieltä (2)
- ei eri eikä samaa mieltä (3)
- jokseenkin samaa mieltä (4)
- täysin samaa mieltä (5)

Matematiikan aihealueita oli 14 ja ne olivat seuraavat

- | | |
|--------------------------|------------------------------|
| • peruslaskutoimituksen | • sanalliset tehtävät |
| • murtoluvut | • matemaattinen ilmaiseminen |
| • desimaaliluvut | • kymmenjärjestelmä |
| • prosenttiluvut | • yksikkömuunnokset |
| • pinta-ala ja tilavuus | • tekniset apuvälineet |
| • geometriset kuviot | • algoritminen ajattelu |
| • tilastolliset tehtävät | ja ohjelmointi |
| • ongelmanratkaisu | |

Jokainen 14 aihealueesta tuli arvioida erikseen. Luku 5 tarkoittaa, että oppilaat osaavat aihealueen heikosti ja luku 1, että oppilaat osaavat aihealueen hyvin. Tämä pätee myös laskettuihin keskiarvoihin (ka). Opettajien mielestä heikoiten osattiin

yksikkömuunnokset ($ka=3,80$) ja parhaiten peruslaskutoimitukset ($ka=2,36$) Viisi heikoiten osattua aihealuetta opettajien mielestä olivat yksikkömuunnokset ($ka=3,80$), matemaattinen ilmaiseminen ($ka=3,78$), sanalliset tehtävät ($ka=3,76$), ongelman ratkaisu ($ka=3,64$) ja murtoluvut ($ka=3,44$). Näistä yksikkömuunnokset, matemaattinen ilmaiseminen, sanalliset tehtävät ja ongelman ratkaisu olivat lähempänä vastausvaihtoehtoa jokseenkin samaa mieltä (4) kuin ei eri eikä samaa mieltä (3). Opettajien mielestä oppilaat osaavat parhaiten peruslaskutoimitukset ($ka=2,36$) ja kymmenjärjestelmän ($ka=2,42$), jotka ovat lähempänä vastausvaihtoehtoa jokseenkin samaa mieltä (2) kuin ei eri eikä samaa mieltä (3). Keskihajonta (s) kuvaa, kuinka kaukana muuttujan arvot ovat keskimäärin keskiarvosta. Eniten mielipiteitä jakoi aihealue desimaaliluvut, sillä sen keskihajonta oli suurin ($s=1,09$). Aihealueista pinta-ala ja tilavuus jakoi vähiten mielipiteitä ($s=1,00$). Alla taulukko (taulukko 5) aihealueiden keskiarvoista ja keskihajonnoista. Taulukossa aihealueet on järjestetty suuruusjärjestykseen suurimmasta keskiarvosta pienimpään, ylhäältä alas. Taulukkoon on merkitty punaisella heikoiten osatun alueen keskiarvo ja vihreällä parhaiten osattu aihealueen keskiarvo. Aihealueiden osaamisessa on eroa sillä keskiarvot ovat aihealueissa erisuuret ja vaihtelevat peruslaskutoimitusten keskiarvosta 2,36 yksikkömuunnosten keskiarvoon 3,80. Keskihajonnat vaihtelevat 1-1,09 välillä.

Aihealue	Keskiarvo (ka)	Keskihajonta (s)
yksikkömuunnokset	3,8	1,02
matemaattinen ilmaiseminen	3,78	1,07
sanalliset tehtävät	3,76	1,03
ongelmanratkaisu	3,64	1,01
murtoluvut	3,44	1,11
pinta-ala ja tilavuus	3,39	1,00
desimaaliluvut	3,31	1,09
prosenttiluvut	3,28	1,01
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	3,21	1,02
tilastolliset tehtävät	3,04	1,01
tekniset apuvälineet	2,95	1,07
geometriset kuviot	2,71	1,07
kymmenjärjestelmä	2,42	1,01

peruslaskutoimitukset	2,36	1,03
-----------------------	------	------

Taulukko 5: Aihealueiden keskiarvot ja keskihajonnat koko aineistossa.

Seuraavaksi tarkastellaan vastausten jakautumista aihealueittain. Näissä luku N kuvaa kuinka monta opettajaa vastasi kyseisen numeron kyseisestä aihealuetta tarkasteltaessa. Eniten täysin samaa mieltä -vastauksia (5) keräsi matematiikan aihealue matemaattinen ilmaiseminen. 42 opettajaa 137 opettajasta (30,7%) oli täysin samaa mieltä (5), että oppilaat osaavat aihealueen matemaattinen ilmaiseminen heikosti. Vähiten täysin samaa mieltä -vastauksia (5) keräsi peruslaskutoimitukset, kolme opettajaa 137 opettajasta (2,2%) oli täysin samaa mieltä (5), että peruslaskutoimitukset osataan heikosti. Alla taulukko (taulukko 6) opettajien vastauksista, jossa tarkastellaan vain täysin samaa mieltä -vastausten lukumäärää erikseen eri aihealueissa. Taulukossa aihealueet on järjestetty suuruusjärjestykseen eniten vastauksia täysin samaa mieltä (5) keränneestä vähiten keränneeseen. Punaisella on merkitty eniten vastauksia kerännyt ja vihreällä vähiten vastauksia kerännyt.

Aihealue	5 (N)	% kaikista (N=137)
matemaattinen ilmaiseminen	42	30,7
yksikkömuunnokset	34	21,8
sanalliset tehtävät	33	21,1
murtoluvut	24	17,5
ongelmanratkaisu	24	17,5
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	20	14,6
desimaaliluvut	18	13,1
prosenttiluvut	16	11,7
pinta-ala ja tilavuus	16	11,7
tekniset apuvälineet	15	10,9
tilastolliset tehtävät	11	8
geometriset kuviot	9	6,6
kymmenjärjestelmä	5	3,6
peruslaskutoimitukset	3	2,2

Taulukko 6: Täysin samaa mieltä (5) vastausten jakautuminen aihealueittain koko aineistossa.

Jos tarkastelemme vastausvaihtoehtoja täysin samaa mieltä (5) ja jokseenkin samaa mieltä (4), eniten näitä vastauksia keräsi yksikkömuunnokset. 137 opettajasta 98 (71,5%) vastasi joko täysin sama mieltä tai jokseenkin samaa mieltä siihen, osaavatko

oppilaat yksikkömuunnokset heikosti. Vähiten täysin samaa mieltä tai jokseenkin samaa mieltä -vastauksia (5 tai 4) keräsi kymmenjärjestelmä, 23 (16,8%) vastausta. Alla taulukko (taulukko 7) opettajien vastauksista, jossa tarkastellaan täysin samaa mieltä (5) ja jokseenkin samaa mieltä (4) vastauksien lukumääriä erikseen eri aihealueissa. Aihealueet on järjestetty suuruusjärjestykseen eniten vastauksia keränneestä, merkitty punaiselle, vähiten vastauksia keränneeseen, merkitty vihreällä.

Aihealue	4 tai 5 (N)	% kaikista (N=137)
yksikkömuunnokset	98	71,5
sanalliset tehtävät	97	70,8
ongelmanratkaisu	92	67,2
matemaattinen ilmaiseminen	89	65
murtoluvut	78	56,9
pinta-ala ja tilavuus	73	53,3
desimaaliluvut	70	51,1
prosenttiluvut	60	43,8
tilastolliset tehtävät	46	33,6
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	46	33,6
tekniset apuvälineet	39	28,5
geometriset kuviot	36	26,3
peruslaskutoimitukset	27	19,7
kymmenjärjestelmä	23	16,8

Taulukko 7: Täysin samaa mieltä (5) ja jokseenkin samaa mieltä (4) vastausten lukumäärä aihealueittain koko aineistossa.

Ei ole merkitystä tarkastellaanko vain täysin samaa mieltä (5) olevien opettajien vastauksia vai täysin samaa mieltä (5) ja jokseenkin samaa mieltä (4) olevien opettajien vastauksia. Viisi eniten vastauksia täysin samaa mieltä (5) tai jokseenkin samaa mieltä (4) saanutta aihealuetta olivat yksikkömuunnokset, sanalliset tehtävät, ongelmanratkaisu, matemaattinen ilmaiseminen ja murtoluvut. Kaksi vähiten täysin samaa mieltä (5) tai jokseenkin samaa mieltä (4) saanutta aihealuetta olivat kymmenjärjestelmä ja peruslaskutoimitukset. Alla taulukko (taulukko 7) mielipiteiden jakautumisesta viidessä heikoiten osatussa aihealueessa.

Mielipide	Yksikkömuunnokset (N)	Sanalliset tehtävät (N)	Matemaattinen ilmaiseminen (N)	Ongelmanratkaisu (N)	Murtoluvut (N)
1	3	0	0	1	1
2	17	26	24	27	40
3	19	14	24	17	18
4	64	64	47	68	54
5	34	33	42	24	24
Yhteensä (N)	137	137	137	137	137

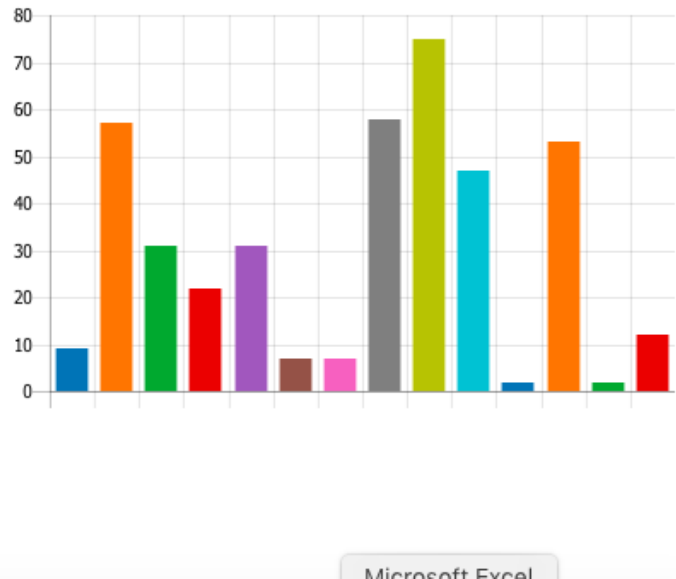
Taulukko 7: Mielipiteiden jakautuminen viiden heikoiten osatun aihealueen osalta

Seitsemännessä kysymyksessä opettajat valitsivat matematiikan aihealueista kolme kaikista vaikeinta aihealuetta oppilaille. Kaikista eniten vastauksia sai aihealue sanalliset tehtävät (N=75). 54 prosenttia opettajista koki, että sanalliset tehtävät olivat yksi vaikeimmista aihealuista oppilaille. Seuraavaksi eniten vastauksia keräsi ongelman ratkaisu (N=58), murtoluvut (N=57) ja yksikkömuunnokset (N=53). Kaikki aihealueet saivat vastauksia. Vähiten vastauksia keräsi kymmenjärjestelmä ja tekniset apuvälineet (N=2 kumpikin). Nämä tulokset poikkeasivat järjestykseltä kysymyksen kuusi vastausten tuloksista. Kuitenkin samat viisi aihealuetta olivat kärjessä: sanalliset tehtävät, ongelman ratkaisu, murtoluvut, yksikkömuunnokset ja matemaattinen ilmaiseminen. Vastauksia oli yhteensä 413, sillä jokainen opettaja (N=137) valitsi kolme vaihtoehtoa. Yksi opettaja oli vastannut kysymykseen viisi eri aihealuetta. Alla kuva (kuva 15) seitsemännen kysymyksen tuloksista.

7. Minkä aihealueen koet kaikista vaikeimmaksi oppilaille? (valitse kolme)

Lisätietoja

● peruslaskutoimitukset	9
● murtoluvut	57
● desimaaliluvut	31
● prosenttiluvut	22
● pinta-ala ja tilavuus	31
● geometriset kuvat	7
● tilastolliset tehtävät	7
● ongelmanratkaisu (ratkaisijan ...	58
● sanalliset tehtävät (tehtävänan...	75
● matemaattinen ilmaiseminen	47
● kymmenjärjestelmä	2
● yksikkömuunnokset	53
● tekniset apuvälineet (esim lask...	2
● algoritminen ajattelu ja ohjel...	12



Kuva 15: Vastauksien jakautuminen kysymyksessä seitsemän.

5.3 Opetettavan luokan vaikutus tulokseen

Tutkitaan alakoulun ja yläkoulun opettajien vastauksia. Alakoulun opettajia kyselyyn vastasi 55 (40%) ja yläkoulun opettajia 82 (60%). Alakoulun opettajat olivat pääasiassa 5.-6. luokan opettajia. Tähän luokkaan kuuluivat myös kyselyyn osallistuneet opettajat, jotka opettavat 2.-4. luokkia. Yläkoulun opettajat olivat pääasiassa 7.-9. luokan opettajia. Yläkoulun opettajiin luokiteltiin myös kyselyyn vastanneet opettajat, jotka opettivat ammattikoulua tai jotain muuta luokkaa luokasta kahdeksan lukioon asti. Yläkoulun opettajia vastasi kyselyyn enemmän (N=82), kuin alakoulun opettajia (N=55). Alakoulun opettajien mielestä oppilaat osasivat heikoiten yksikkömuunnokset (ka=3,51) ja parhaiten peruslaskutoimitukset (ka=2,07). Yläkoulun opettajien mielestä oppilaat osasivat heikoiten matemaattisen ilmaisun (ka=4,09) ja parhaiten peruslaskutoimitukset (ka=2,55). Alakoulun opettajien mielipiteiden keskiarvot olivat kaikissa aihealueissa pienemmät kuin yläkoulun opettajien. Suurin ero alakoulun ja yläkoulun opettajien vastauksien keskiarvojen välillä oli murtoluvut aihealueessa. Tässä aihealueessa alakoulun opettajien keskiarvo oli 2,85 ja yläkoulun opettajien keskiarvo oli 3,82 eli ero oli 0,98 yksikköä. Keskihajonnat sijoittuvat jokaisessa

aihealueessa sekä yläkoulussa, että alakoulussa välille 0,85-1,09. Alla taulukko (taulukko 8), jossa on tutkittu erikseen ylä- ja alakoulun opettajien vastauksien keskiarvoja sekä niiden välistä eroa ja keskihajontoja. Taulukkoon on merkitty koko aineiston mielipide. Alakoulun opettajien mielipide vastaa koko aineiston mielipidettä heikoiten ja parhaiten osatessa aihealueessa.

Aihealue	Kaikki (ka)	Yläkoulu (ka)	Alakoulu (ka)	Keskiarvojen ero	Yläkoulu (s)	Alakoulu (s)
peruslaskutoimitukset	2,36	2,55	2,07	0,48	1,08	0,88
murtoluvut	3,44	3,83	2,85	0,98	1,05	0,93
desimaaliluvut	3,31	3,52	2,98	0,54	1,07	1,05
prosenttiluvut	3,28	3,35	3,16	0,19	1,06	0,92
pinta-ala ja tilavuus	3,39	3,51	3,22	0,29	0,97	1,03
geometriset kuviot	2,71	2,82	2,55	0,27	1,09	1,03
tilastolliset tehtävät	3,04	3,15	2,89	0,26	1,00	1,01
ongelmanratkaisu	3,64	3,87	3,29	0,58	0,93	1,05
sanalliset tehtävät	3,76	4,06	3,31	0,75	0,87	1,09
matemaattinen ilmaiseminen	3,78	4,09	3,33	0,76	0,96	1,07
kymmenjärjestelmä	2,42	2,57	2,2	0,37	1,08	0,85
yksikkömuunnokset	3,8	3,99	3,51	0,48	1,02	0,96
tekniset apuvälineet	2,95	3,13	2,67	0,46	1,18	0,92
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	3,21	3,45	2,85	0,60	0,94	1,03
Yhteensä (N)	137	82	55			

Taulukko 8: Alakoulun ja yläkoulun keskiarvojen erot aihealueittain.

Tarkastellaan alakoulun ja yläkoulun opettajien mielipiteiden välisiä eroja Mann-Whitneyn U-testin avulla aihealueittain. Testattavana on nollahypoteesi: Tarkasteltavan aihealueen jakauma on sama molemmissa ryhmissä, alakoulu ja yläkoulu. Ero on merkittävä, mikäli p-arvo on pienempi kuin 0,05. Merkittävä ero alakoulun ja yläkoulun opettajien välillä löytyi aihealueissa murtoluvut, desimaaliluvut, ongelmanratkaisu, sanalliset tehtävät, matemaattinen ilmaiseminen, yksikkömuunnokset, tekniset apuvälineet, ohjelmointi ja peruslaskutoimitukset. Näiden aihealueiden p-arvo Mann-Whitneyn U-testin mukaan oli alle 0,05. Alla taulukko (taulukko 9) aihealueiden p-arvoista tarkastellessa alakoulun ja yläkoulun vastauksien eroja. Taulukossa ovat vain aihealueet, joiden ero on merkittävät ($p < 0,05$).

Aihealueet	p-arvo
Murtoluvut	0,000
Desimaaliluvut	0,004
Ongelmanratkaisu	0,001
Sanalliset tehtävät	0,000
Matemaattinen ilmaiseminen	0,000
Yksikkömuunnokset	0,002
Tekniset apuvälineet	0,017
Ohjelmointi	0,000
Peruslaskutoimitukset	0,009

Taulukko 9: Ala- ja yläkoulun merkittävästi eroavien aihealueiden p-arvot.

5.4 Opetuskaupungin vaikutus tulokseen

Seuraavaksi tarkastellaan kuudennen kysymyksen vastauksia kaupungeittain, Helsinki, Espoo, Vantaa ja muut kaupungit. Kyselyyn vastanneista opettajista 51 (37%) toimii opettajana Helsingissä, 29 (21%) Espoossa, 24 (18%) Vantaalla ja 33 (24%) jossain muussa kaupungissa. Helsingissä toimivien opettajien mielestä oppilaat osasivat heikoiten sanalliset tehtävät ($ka=3,73$) ja parhaiten kymmenjärjestelmän ($ka=2,24$). Espoossa toimivien opettajien mielestä oppilaat osasivat heikoiten yksikkömuunnokset ($ka=3,86$). Parhaiten Espoossa toimivien opettajien mielestä oppilaat osasivat peruslaskutoimitukset ($ka=2,21$). Vantaalla toimivat opettajat olivat samaa mieltä espoolaisten kanssa, että heikoiten oppilaat osasivat yksikkömuunnokset ($ka=3,75$). Vantaalla toimivien opettajien mielestä parhaiten oppilaat osasivat peruslaskutoimitukset ($ka=2,17$). Muiden paikkakuntien opettajien mielestä heikoiten oppilaat osasivat yksikkömuunnokset ($ka=4,24$) ja parhaiten taas peruslaskutoimitukset ($ka=2,55$). Espoon, Vantaan ja muiden kaupunkien opettajat olivat sitä mieltä, että heikoiten oppilaat osaavat yksikkömuunnokset ja parhaiten peruslaskutoimitukset. Nämä vastaavat kaikkien kyselyyn osallistuneiden opettajien mielipidettä (ks. luku 5.2). Helsingissä toimivien opettajien mielestä oppilaat osasivat heikoiten sanalliset tehtävät ja parhaiten kymmenjärjestelmä, joka erosi kaikkien vastanneiden opettajien mielipiteestä. Alla taulukko (taulukko 10) Helsingin, Espoon, Vantaan ja muiden paikkakuntien opettajien vastauksien keskiarvoista aihealueittain. Taulukkoon on merkitty myös kaikkien opettajien mielipide. Taulukkoon on merkitty

punaisella heikoiten osatun alueen keskiarvo ja vihreällä parhaiten osattu aihealueen keskiarvo.

Aihealue	Kaikki (ka)	Helsinki (ka)	Espoo (ka)	Vantaa (ka)	Muu (ka)
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	3,21	2,94	3,31	3,42	3,39
desimaaliluvut	3,31	3,08	3,45	3,38	3,48
geometriset kuviot	2,71	2,61	2,83	2,63	2,82
kymmenjärjestelmä	2,42	2,24	2,41	2,21	2,88
matemaattinen ilmaiseminen	3,78	3,65	3,79	3,5	4,18
murtoluvut	3,44	3,24	3,45	3,38	3,79
ongelmanratkaisu	3,64	3,47	3,52	3,67	3,97
peruslaskutoimitukset	2,36	2,41	2,21	2,17	2,55
pinta-ala ja tilavuus	3,39	3,2	3,59	3,29	3,61
prosenttiluvut	3,28	3,18	3,17	3,21	3,58
sanalliset tehtävät	3,76	3,73	3,69	3,71	3,91
tekniset apuvälineet	2,95	2,86	3,17	2,54	3,18
tilastolliset tehtävät	3,04	3,06	3,1	2,92	3,06
yksikkömuunnokset	3,8	3,49	3,86	3,75	4,24
Yhteensä (N)	137	51	29	24	33

Taulukko 10: Helsingin, Espoon, Vantaan ja muiden paikkakuntien vastauksien keskiarvot aihealueittain.

Tutkitaan kaupunkien välisten tulosten eroja Kruskal-Wallis testin avulla. Testattavana on nollahypoteesi: Aihealueiden jakauma on samanlainen kaikissa kaupungeissa. Nollahypoteesi hylätään, jos p-arvo on alle 0,05. Testin mukaan ainakin joidenkin kaupunkien välillä on eroa aihealueiden jakaumassa, sillä yksikkömuunnoksien p-arvo on 0,002 ja kymmenjärjestelmän p-arvo on 0,04. Yksikkömuunnokset aihealueen jakauman merkittävä ero löytyy kaupunkien Helsinki ja muut välillä. Näiden kaupunkien välinen p-arvo on 0,001. Kuva (kuva 16) osoittaa kaupunkien väliset p-arvot aihealueessa yksikkömuunnokset.

Sample1-Sample2	Test Statistic	Std. Error	Std. Test Statistic	Sig.	Adj.Sig.
1,00-3,00	-10,321	9,208	-1,121	,262	1,000
1,00-2,00	-15,868	8,651	-1,834	,067	,400
1,00-4,00	-31,257	8,310	-3,761	,000	,001

Kuva 16: Helsingin (1) ja Muu (4) välinen ero on ($p=,001$) merkittävä aihealueessa yksikkömuunnokset.

5.5 Opetuskokemuksen vaikutus tulokseen

Tarkastellaan vielä vastauksia opetuskokemuksen mukaan. Opetuskokemukset on jaettu 5 luokkaan; alle 5 vuotta, 6-10 vuotta, 11-15 vuotta, 16-20 vuotta ja yli 20 vuotta. Alkuperäisestä kyselyn jaosta poiketen tässä on yhdistetty alle 1 vuosi ja 1-5 vuotta vastausvaihtoehdot, sillä vastausvaihtoehdon alle 1 vuosi valitsi vain 1 henkilö. Alle 5 vuotta luokkaan kuului 27 opettajaa, 6-10 vuotta luokkaan 30 opettajaa, 11-15 vuotta luokkaan 21 opettajaa, 16-20 luokkaan 20 opettajaa ja yli 20 vuotta luokkaan 39 opettajaa. Opettajien, joilla on opetuskokemusta yli 16 vuotta (luokat 16-20 vuotta ja yli 20 vuotta) mielestä heikoiten osattu aihealue on yksikkömuunnokset. Alle 10 vuotta (luokat alle 5 vuotta ja 6-10 vuotta) opetuskokemusta omaavien opettajien mielestä oppilaat osaavat heikoiten aihealueen matemaattinen ilmaiseminen. Parhaiten osataan peruslaskutoimitukset tai kymmenjärjestelmä. Alle 5 vuotta, 6-10 vuotta ja 16-20 vuotta opetuskokemusta omaavat ovat sitä mieltä, että peruslaskutoimitukset osataan parhaiten. 11-15 vuotta ja yli 20 vuotta opetuskokemusta omaavat ovat sitä mieltä, että kymmenjärjestelmä osataan parhaiten. Alla taulukko (taulukko 11) aihealueiden keskiarvoista tarkastellessa opetuskokemusta.

Aihealue	alle 5 vuotta (ka)	6-10 vuotta (ka)	11-15 vuotta (ka)	16-20 vuotta (ka)	yli 20 vuotta (ka)
peruslaskutoimitukset	2,41	2,48	2,38	1,95	2,44
murtoluvut	3,59	3,76	3,43	3,35	3,18
desimaaliluvut	3,33	3,72	3,24	3,05	3,15
prosenttiluvut	3,33	3,34	3,29	3,35	3,18
pinta-ala ja tilavuus	3,52	3,34	3,29	3,35	3,41
geometriset kuviot	2,96	2,52	2,67	2,75	2,69
tilastolliset tehtävät	3,15	3,24	2,76	2,6	3,18
ongelmanratkaisu	3,56	3,83	3,43	3,75	3,56

sanalliset tehtävät	3,7	3,86	3,71	3,6	3,82
matemaattinen ilmaiseminen	3,74	4,14	3,57	3,7	3,69
kymmenjärjestelmä	2,44	2,55	2,14	2,55	2,41
yksikkömuunnokset	3,52	4,07	3,52	3,8	3,92
tekniset apuvälineet	2,7	3,03	2,71	3,15	3,03
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	3,26	3,28	3,33	2,9	3,21
Yhteensä (N)	27	30	21	20	39

Taulukko 11: Aihealueiden keskiarvot tarkastellessa opettajien opetuskokemusta.

Tutkittiin opetuskokemuksen vaikutusta aihealueen osaamiseen. Tätä testattiin Kruskal-Wallis testillä. Testattavana oli nollahypoteesi: Aihealueiden jakauma ei riipu opetuskokemuksesta. Nollahypoteesi hylätään, jos p-arvo on alle 0,05. Testin mukaan kaikkien aihealueiden p-arvot olivat yli 0,05. Näin ollen opettajan opetuskokemus ei vaikuta merkittävästi osaamiseen.

5.6 Matematiikan aihealueiden ongelmat ja ratkaisuja niihin

Luku 5.6 perustuu opettajien avoimen kysymyksen vastauksiin. Luvussa 5.6.1 esitellään opettajien vastauksia ja niistä löytyviä yleisiä yhtäläisyyksiä. Luvuissa 5.6.2-5.6.6 peilataan avoimen kysymyksen vastauksia kyselyn edellisen kysymyksen ”minkä aihealueen koet kaikista vaikeimmaksi oppilaille” vastauksiin. Viisi eniten vastauksia saanutta aihealuetta edellisessä kysymyksessä olivat sanalliset tehtävät, ongelmanratkaisu, murtoluvut, yksikkömuunnokset sekä matemaattinen ilmaiseminen.

5.6.1 Yleiset ongelmat ja ratkaisut

Avoimen kysymyksen vastaukset jakautuivat yleisiin ongelmiin opetuksessa ja koulussa ja niiden ratkaisuihin sekä jonkin tietyn aihealueen ongelmiin ja niiden ratkaisuihin. Yleisenä ongelmana opettajat kokivat vähäisen ajan ja suuren aiheiden määrän. Ratkaisuna heikkoon matematiikan osaamiseen nähdään esimerkiksi toisto, aiheiden karsiminen ja oppituntien lisääminen matematiikassa. Useammassa vastauksessa toivottiin lisää aikaa jonkun tietyn aihealueen opetukseen. Kahdeksan opettajaa vastasi avoimeen kysymykseen ”miten kehittäisi opetusta?”, että ”ei tiedä” tai osa heistä jätti kokonaan vastaamatta kysymykseen. 57:n (42%) opettajan vastauksesta löytyi joku tai useampi seuraavista sanoista; enemmän, lisää, aikaa tai

toistoa. Opettajat toivoivat esimerkiksi lisää aikaa tai heidän mielestään jotain aihetta tulisi käsitellä tunneilla enemmän. Aikaa-sana löytyi kahdenkymmenen yhden opettajan vastauksista ja enemmän tai lisää -sana neljänkymmenen viiden opettajan vastauksista. Vähän-sana esiintyi 8 opettajan vastauksissa ja viittasi siihen, että aikaa tai harjoittelua on liian vähän. Esimerkiksi ”harjoittelua on ihan liian vähän perustaidoissa” (Opettaja 32) tai ”aikaa jokaiseen osa-alueeseen on aika vähän” (Opettaja 76). Paljon-sana esiintyi 11 kertaa opettajien vastauksissa. Tässä on yksi esimerkiksi ”Sanallisia tehtäviä tulee harjoitella paljon” (Opettaja 41). Opettajat kokevat toiston olevan tärkeää matematiikan opetuksessa ja 6 opettajaa mainitsi toiston vastauksissaan. Kännyköiden käyttö tunnilla mainittiin ongelmaksi yhdessä vastauksessa. Alla neljän opettajan vastaukset, jossa toivottiin lisää aikaa tai toistoa matematiikan opetukseen.

”Matematiikan tunteja vähennettiin uuden opsin myötä. Enemmän tunteja, niin saadaan pohja kuntoon, onnistuu sitten vaativammatkin tehtävät.” (Opettaja 38)

”Enemmän toistoa ja eritasoisia tehtäviä, Aikaa käydä asia perinpohjin läpi.” (Opettaja 55)

”Ei muuta vaihtoehtoa kuin harjoitella enemmän, mutta siihen ei välttämättä ole aikaa yksittäisen aihekokonaisuuden aikana. Lisäksi entistä heikompi oppilasaines, kännyköihin tottunut sukupolvi ei kykene ratkaisemaan / keskittymään tarpeeksi hyvin haasteellisiin tehtäviin.” (Opettaja 8)

”En lähtisi kehittämään minkään aihealueen opetusta vaan ennemminkin pitäisin kiinni siitä, että kaikki asiat käsitellään ja laskurutiini syntyy. Näen uhkana sen, että osassa kouluista edetään omaan tahtiin ja tehdään peruslaskuja liian vähän, jolloin pohjaa matematiikan oppimisella ei synny.” (Opettaja 81)

Ratkaisuna liian vähäiseen aikaan opettajat näkivät esimerkiksi opetettavan sisällön karsimisen erityisesti alakoulussa ja alakoulussa perusteiden opettaminen paremmin. Näin yläkoulussa on helpompi siirtyä uusiin aiheisiin. Opettajat kokivat yleisesti, että moneen aiheeseen ja ongelmaan tulisi kiinnittää huomiota jo alakoulussa. Asioita, joihin tulisi jo alakoulussa kiinnittää huomiota, olivat esimerkiksi asioiden havainnollistaminen eri keinoin sekä peruslaskutoimitusten opettelu erityisesti murtoluvuilla. Opettajat myös kokivat, että alakoulussa tulisi opettaa täsmällisyyttä

sekä laskun eri vaiheita ja välttää pelkän vastauksen ilmaisemista. Monet alakoulun oppikirjat näyttävät opettajien mielestä ohjaavan vastauskeskeisyyteen. Vastauskeskeisyys oli erään opettajan mielestä yläkoulussa suurin este oppimiselle. Sama opettaja koki, että jo alakoulussa tulisi perustella asioita ja pohtia asioita syvällisemmin pelkän mekaanisen laskemisen sijaan. Opettajat kokivat, että alakoulun matematiikan aihealueita voisi tiivistää ja aihealueita voisi vähentää. Eräs opettaja näki ongelmana, että alakoulussa kerrataan joka vuosi kaikki edellisten vuosien aihealueet ja tämä vie aikaa uusien asioiden opiskelulta. Tällöin esimerkiksi ongelmanratkaisulle ja ajattelun taidoille opetuksessa ei jää riittävästi aikaa. Alla esimerkkejä opettajien vastauksista.

”Alakoulun opetukseen pitää palauttaa vaativuus ja peruslaskutoimitusten mekaanista harjoittelua lisää.” (Opettaja 91)

”Ongelma on oikeastaan kaikessa samaa, alakoulussa pitäisi pysähtyä miettimään syvällisemmin asioita eikä keskittyä määrään.” (Opettaja 31)

”Suurin osa 7-luokkalaisista ei ymmärrä laskujen välivaiheiden merkitystä. Eivät ymmärrä, että pelkkä vastaus on veikkaus. Osa oppilaista on tottunut, etteivät välivaiheet ole tarpeellisia ja jos vastaus on väärin. Oppilaiden mielestä on aivan sama, miten vastaukseen on päästy. Eivät ymmärrä, että polku kiinnostaa enemmän kuin määränpää (vastaus). Välivaiheita ja ratkaisun matemaattista kirjaamista pitäisi opettaa huomattavasti enemmän ala-asteella!!!” (Opettaja 108)

”Heikosti osattavat asiat vaihtelevat vuosittain erittäin paljon riippuen siitä, mitä alakoulussa on ehditty painottaa.” (Opettaja 5)

”Matematiikan opetuksesta saisi paljon enemmän irti, kun asiat perusteltaisiin yhdessä tarkasti selkeistä lähtökohdista (esim. murtoluvun määritelmä ja yhteys jakolaskuun) sen sijaan, että kaavat annetaan valmiina. Yläkoulun näkökulmasta tässä isoin jarru ovat oppilaat, jotka ovat alakoulussa tottuneet opetustapaan, jossa opettaja antaa valmiit vastaukset (”Mikset voi vaan kertoa miten tää menee?!”) eikä olla opittu siihen, että asioita voisi pohtia syvällisemmin. Kehitysehdotus on siis, että alakoulun opetukseen murtoluvuista (ja monesta muustakin aiheesta) lisää perusteluita ja pohdintaa pelkän mekaanisen laskemisen rinnalle. Matematiikasta menetetään paljon, jos ”miksi”-kysymykset sivuutetaan tai niihin päästään vasta yläkoulussa/lukiassa.” (Opettaja 66)

”Matikassa menee alakoulussa valtavasti aikaa siihen, että asioita opiskellaan joka vuosi uudestaan. Voisiko olla tehokkaampaa, jos kaikkia osa-alueita ei kerrattaisi, jolloin aikaa jäisi perusteisiin. Ongelmanratkaisulle ja ajatteluntaitojen opetukselle ei tunnu löytyvän riittävästi aikaa.” (Opettaja 76)

Neljässä vastauksessa ilmaistiin, että oppilailla oli yhtäsuuruusmerkin (= merkin) kanssa ongelmia. Opettajien mielestä yhtäsuuruusmerkkiä käytetään monessa eri paikassa ja se saattaa aiheuttaa oppilailla sen, että lausekkeet ovat hyvin pitkiä. Opettajat olivat sitä mieltä, että yhtäsuuruusmerkin käyttö tulisi opettaa ja tämän jälkeen seurata sen käyttöä sekä sallia asioiden laskeminen osissa. Opettajat kokivat ongelmana myös jakomerkin (: merkki) käytön. Kaksi opettajista poistaisi jakolaskumerkin, sillä tämä hämmentää oppilaita ja oppilaat eivät osaa ajatella sitä samana asiana kuin jakoviiva. Jakolaskumerkki hämmentää erityisesti murtolukujen oppimista. Alla opettajan vastaus liittyen jakomerkkiin.

”Kaikki jakolaskut olisi hyvä esittää murtolukumuodossa ja unohtaa koko kaksoispiste, koska sille ei oma määritelty esim. supistamisia ja laventamisia. Konkreettisesti jätetään matikankirjoista kaksoispisteen käyttö pois.” (Opettaja 69)

Opettajat näkivät oppilaiden oppimisen kannalta tärkeänä asioiden liittämisen toisiinsa. Tehtävien liittäminen oppilaiden arkeen ja ylipäättänsä matematiikan liittäminen reaalimaailmaan nähdään tärkeänä. Eri matematiikan aihealueiden tulisi käsitellä yhdessä, kuten esimerkiksi murtolukuja ja desimaalukuja.

”Matematiikan opetus on paljon kappale kerrallaan etenemistä, jolloin kokonaisvaltainen ymmärtäminen jää vähemmälle. Tarvittaisiin opetusmenetelmiä ja sanallistamista siihen, miten oppilaat saisi näkemään matematiikan kokonaisuutena ja sen osina. Keinoja miten havainnollistan sen, kuinka asiat liittyvät toisiinsa.” (Opettaja 134)

”He saattavat olla mekaanisesti hyviä laskijoita, mutta lukujen ja reaalimaailman yhteyttä he eivät ymmärrä” (Opettaja 19)

”Desimaalilukujen ja murtolukujen käsittely yhdessä eikä erillisinä käsitteinä.” (Opettaja 83)

5.6.2 Sanalliset tehtävät ja niiden haasteet opettajien näkökulmasta

Opettajat kokivat, että sanallisen tehtävän hahmottaminen saattaa tuottaa ongelmia oppilaille. Opettajien ratkaisu tähän oli esimerkiksi käydä tunnilla sanallisten tehtävien ratkaisumalli oppilaiden kanssa läpi. Tähän auttaa esimerkiksi taulukointi, lausekkeiden muodostamista ja piirroksien tekemistä sanallisesta tehtävästä. Opettajien mielestä oppilaiden kielitaito vaikuttaa merkittävästi sanallisen tehtävän onnistuneeseen ratkaisemiseen. Eräs opettaja koki sanalliset tehtävät haastaviksi oppilaille oppilaiden lukivaikeuden tai äidinkielen takia. Hänen mielestään vaikeuksia tuottavat esimerkiksi pitkät sanat, vanhat suomenkieliset sanat, joita he eivät käytä arjessaan tai jos sanallinen tehtävä on todella pitkä. Opettajan ratkaisu tähän voisi olla esimerkiksi sanojen muuttaminen nykyaikaan ja arjen esimerkkien käyttäminen, tehtävät voisivat olla aluksi lyhyempiä ja helposti luettavia. Myös tehtävien lukeminen ääneen ja avain sanojen alleviivaaminen voi helpottaa tehtävän ratkaisua. Erään opettajan mielestä oppilaille voi tuottaa haasteita ymmärtää, että ja-sana tarkoittaa yhteenlaskumerkkiä (+ merkkiä). Opettajien mielestä tulisi käyttää enemmän aikaa sanallisten tehtävien tekemiseen itselle ja toisille oppilaille sekä näiden tehtävien ratkaisemiseen ja ratkaisujen vertaamiseen. Opettajat kokivat sanallisten tehtävien ratkaisemisen parin kanssa hyödylliseksi. Eräs opettaja koki, että sanallisia tehtäviä tulisi laskea enemmän ja käyttää eri kirjasarjojen tehtäviä. Toinen opettaja koki, että sanallisia tehtäviä pitäisi olla jo alakoulun ensimmäisestä luokasta lähtien.

”Sanalliset tehtävät ovat oppilaille haastavia, koska monella oppilaalla on lukivaikeuksia (pitkät sanat, vanhat suomenkieliset sanat eivät ole heidän arjessaan käytössä tai kappaleet ovat pitkiä) tai ryhmässä on paljon oppilaita, joilla äidinkieli on muu kuin suomi/ruotsi. Sanallisten tehtävien ratkaisemisessa tulisi miettiä käytettävät sanat uudelleen nykyaikaa vastaavaksi, käyttää enemmän arjen esimerkkejä ja kiinnittää huomiota kielitietoisuuteen. Käytännössä aloittaa lyhyillä helposti luettavilla tehtävillä (sijamuotojen määrä aluksi pienempi, jos kieli ei ole vielä kehittynyt).” (Opettaja 28)

”Käyttää aikaa enemmän siihen, että oppilas sanoittaa itse tehtäviä sekä käyttää aikaa sanallisten tehtävien ratkaisemiseen. Toisille on vaikea ymmärtää esimerkiksi, että tehtävän annossa ja sana tarkoittaa usein laskussa + merkkiä.” (Opettaja 19)

”Sanallisia tehtäviä tulee harjoitella paljon ja mielellään eri kirjasarjojen tehtävillä, jotta oppilaat eivät opi laskemaan sanallisia vain siksi, että tietävät miten tällainen on aikaisemminkin laskettu.” (Opettaja 41)

5.6.3 Ongelmanratkaisu ja sen haasteet opettajien näkökulmasta

Opettajien kokemus ongelmaratkaisutehtävistä, ongelmanratkaisutehtävien tekeminen olisi hyvä olla monipuolista. Opettajat ehdottivat, että oppilaat voisivat laatia ja ratkoa tehtäviä sekä itse että ryhmissä. Opettajat näkevät toisten tekemien tehtävien ratkomisen tärkeänä. Myös oppilaan oman ratkaisutavan kertominen koetaan tärkeänä. Erilaisiin ongelmanratkaisumenetelmiin tutustuminen ja ongelmanratkaisun vaiheet, mitä tehdään missäkin vaiheessa koetaan tärkeiksi opettaa oppilaille. Erityisesti pilkkominen ja piirtäminen nähdään avuksi ratkaisun löytämisessä. Ongelmanratkaisutehtävien liittäminen erilaisiin ilmiöihin sekä pulmatehtävien ratkaiseminen koetaan mielekkäiksi tavoiksi oppilaille käsitellä ongelmanratkaisua ja siihen liittyviä tehtäviä. Oppikirjoihin toivotaan enemmän ongelmanratkaisutehtäviä ja alakoulussa voitaisiin ratkaista ja pohtia jo enemmän ongelmanratkaisutehtäviä.

”Ongelmanratkaisutehtävien teettäminen ryhmissä olisi tehokasta” (Opettaja 1)

”Ongelmaratkaisu. Kysyn aina, miten laskit. Oppilaat sanoittavat tapansa ajatella ja etsiä ratkaisua. Piirrämme, kirjoitamme, pilkomme.” (Opettaja 17)

”Pulmatehtäviä oppilaat rakastavat, niitä vain on kirjassa liian vähän. Saisi olla myös konkreettisia pulmapelejä.” (Opettaja 37)

”Matemaattinen ilmaiseminen ja ongelmanratkaisu ovat yhteydessä toisiinsa, joten ilmaisemisen harjoittelu esim. kuvan piirtäminen laskusta kehittäisi myös ongelmanratkaisutaitoja.” (Opettaja 128)

Varga Nemenyi-menetelmä perustuu oppilaan ajattelua kunnioittavaan tapaan opettaa matematiikkaa. Opettajan tehtävänä on ohjata oppilaita työskentelemään niin yksin kuin yhdessä. Matematiikan oppiminen perustuu monenlaisiin tapoihin ilmaista matematiikkaa, esimerkiksi leikkien, vertaillen, järjestäen, rakentamalla, kuuntelemalla, piirtämällä ja katsomalla. Matematiikan asioita kirjoitetaan ja puhutaan niin suomenkielellä kuin matematiikan kielellä. Oivallus ja ymmärrys ovat tärkeitä tässä

menetelmässä. (Varga Nemenyi Ry, 2020) Eräs opettaja kokikin, että juuri tämä menetelmä on auttanut oppilaiden matemaattisia ongelmanratkaisutaitoja ja matemaattista ymmärrystä.

”Varga Nemenyi - pedagogiikka on vahvistanut oppilaiden matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoja.” (Opettaja 120)

5.6.4 Murtoluvut ja niiden haasteet opettajien näkökulmasta

Opettajat näkevät murtoluvut keskeisenä aihealueena matematiikassa ja murtoluvun käsite tulisi opettaa perusteellisesti. Opettajat kokivat, että murtoluvut ovat hankala aihealue, koska murtolukulaskuissa tulee osata yhteen- vähennys-, kerto- ja jakolasku hyvin. Näiden lisäksi oppilailla ei välttämättä ole ymmärrystä, mikä laskutoimitus tehdään missäkin vaiheessa. Opettajien mielestä yksi ratkaisu on harjoitella enemmän murtolukujen peruslaskutoimituksien eli yhteen- ja vähennyslaskuja sekä laventamista ja supistamista. Kerto- ja jakolaskua voisi harjoitella vasta kun edelliset ovat hallussa. Ylipäättänsä olisi tärkeää osata peruskertotaulu hyvin ennen kuin lasketaan murtolukujen kertolaskua. Näin aika ei mene pelkkään peruskertolaskun opetteluun. Alakoulussa jakolaskussa käytetään usein kaksoispistettä ja näin ollen yläkoulussa jakoviiva-merkintä saattaa olla oppilaille täysin vieras. Tähän ratkaisuna jakomerkinän kaksoispiste poistaminen ja jakoviivan käyttöönotto. Murtolukujen opettamisessa ongelmana nähdään muistisääntöjen opettaminen ja perustaitojen harjoittelun vähyyys. Tämä saattaa johtaa heikkoon ymmärtämiseen ja asioiden nopeaan unohtamiseen. Laskusääntöjen ulkoa opettelu saattaa johtaa siihen, että oppilaat kritisoivat sitä, että matematiikassa tulee osata ulkoa paljon asioita. Tähän ratkaisu voisi olla esimerkiksi selkeä perustelu asioille. Tässä tapauksessa esimerkiksi murtoluvun määritelmä ja yhteys jakolaskuun. Oppilailta puuttuu ymmärrys murtoluvuista, ymmärrystä ja murtoluvun hahmottamista voisi auttaa esimerkiksi alakoulussa käydyt piirakat, konkreettisia ja toiminnallisia menetelmiä. Opettajat kertovat, että erityisesti murtolukutehtävissä vastaukset tulisi olla muitakin kuin kokonaislukuja. Sovelletaan murtolukujen laskutoimituksia muissa matematiikan aiheissa ja esimerkiksi murtoluvun ja jakolaskun yhteys sekä desimaalilukujen ja murtoluvun yhteys koetaan tärkeänä murtolukukäsitteen ymmärryksessä.

Murtolukujen peruslaskutoimitukset kaipaavat useimmilla oppilailla lisäharjoitusta. Niinpä keskittyminen niihin (yhteen- ja vähennyslasku, laventaminen, supistaminen) on tärkeämpää kuin liian nopea laukkaaminen kerto- ja jakolaskuihin ilman ymmärrystä. (Opettaja 84)

Murtoluvuissa pitää osata vähentää, jakaa ja kertoa, eikä oppilailla ole aina ymmärrystä siitä, mitä pitikään missä välissä tehdä. (Opettaja 23)

"Yläkouluun tulevat oppilaat eivät tunne ollenkaan jakoviiva -merkintää, vain kaksoispisteen. Tämä mm. hankaloittaa murtolukujen hahmottamista." (Opettaja 24)

"Murtolukujen laskusäännöt (toki moni muukin asia koulumatematiikassa) opetetaan liian usein vain kokoelmana ulkoa opeteltuja sääntöjä. Tämän vuoksi asia koetaan vaikeaksi, unohtuu nopeasti ja aiheuttaa kritiikin, että "matematiikassa pitää muistaa niin paljon". Matematiikan opetuksesta saisi paljon enemmän irti, kun asiat perusteltaisiin yhdessä tarkasti selkeistä lähtökohdista (esim. murtoluvun määritelmä ja yhteys jakolaskuun) sen sijaan, että kaavat annetaan valmiina." (Opettaja 66)

"Murtoluvuissa nimenomaan asian hahmottaminen piirroksin ja välinein tukisi oppimista, nyt vaikuttaa siltä, että suurin osa opetellaan mekaanisesti ulkoa opetellen." (Opettaja 20)

"Murtoluvuissa jotkut osaavat laskea, mutta usealta puuttuu ymmärrys murtoluvuista. Alakoulussa pitäisi olla riittävästi aikaa piirakan paloitteluun ja konkreettiaan." (Opettaja 56)

"Lisää murtolukuharjoituksia, laskujen vastaukset kirjoissa pitäisi olla muitakin kuin kokonaislukuja." (Opettaja 70)

5.6.5 Yksikkömuunnokset ja niiden haasteet opettajien näkökulmasta

Eräs opettaja kertoi, että yksikönmuunnosmato on hyvä ja konkreettinen apu yksikkömuunnosten harjoittelussa. Yksikkömuunnosmadolla tarkoitetaan tässä yksikkömuunnostaulukkoa. Taulukoinnissa on järkevä käyttää ruutuvihkoa ja laittaa siinä jokaiselle yksikölle omaruutu. Opettajat ehdottavat yksikkömuunnosten opettamista toiminnallisesti ja käytännön avulla, ei vain ulkoa opettelua ja taulukoita. Opettajien mielestä olisi tärkeää ymmärtää yksikkömuunnokset jako- ja kertolaskuna. Osa opettajista kokee, että yksikkömuunnoksissa on osattava ulkoa etuliite, esimerkiksi kilogramma (kg), gramma (g) tai milligramma (mg). Oppilaat eivät

välttämättä halua opetella mitään ulkoa ja tämä saattaa tuottaa ongelmia erityisesti yksikkömuunnoksien etuliitteiden käytössä. Opettajien mielestä osalla yläkouluun tulevista oppilaista ei ole ymmärrystä, mitä eroa on pituudella, pinta-alalla ja tilavuudella. Oppilaiden olisi hyvä hahmottaa, että sama mittayksikkösystemi (milli, desi, -, heka, hehto, kilo) toimii paino- ja litrayksiköissä. Opettajat kokevat, että alakoulussa olisi hyvä arvioida ja mitata erilaisia asioita. Tähän voi käyttää apuna tuttuja kappaleita, vettä, hiekkaa ja askarrella erilaisia kappaleita, joita voidaan tutkia ja mitata. Opettajat ehdottivat, että ensin mitattaisiin ja arvioitaisiin itse sekä otettaisiin arkielämä mukaan yksikkömuunnoksiin ja tämän jälkeen vasta siirryttäisiin kirjan mekaanisiin tehtäviin.

"Yksikkömuunnoksissa auttaa taulukointi ruutuvihkoon, jokaiselle yksikölle oma ruutu/ruutuja" (Opettaja 92)

"Mielestäni ei kannattaisi käyttää taulukoita, vaan selittää asia jako- tai kertolaskun avulla." (Opettaja 126)

"Yksikönmuunnoksissa ongelma tuntuu olevan, että mitään ei haluttaisi opetella ulkoa. Etuliite on kuitenkin osattava ulkoa, mikäli meinaa muunnokset oppia." (Opettaja 52)

"Yksikkömuunnoksia kannattaisi harjoitella toiminnallisesti. Yläkouluun tulevissa oppilaissa on paljon sellaisia, jotka eivät ymmärrä esim. mitä eroa on pituudella ja pinta-alalla tai pinta-alalla tai tilavuudella. Mittayksikkösystemiä ei myöskään ymmärretä: milli sentti DESi, DEKA, HeHto ja kilo. Sama systeemi toimii myös paino ja litra yksiköissä. Mittailkaa alakoululaisten kanssa mahdollisimman paljon, arvioikaa pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia, lotratkaa vedellä, mitatkaa hiekkaa, askarrelkaa neliödesimetri ja -metri ja mitatkaa niiden avulla pinta-aloja, jotta ymmärrys syntyisi konkreettiaan kautta." (Opettaja 63)

"Arjen konkreettiaan nivominen osaksi matematiikan opiskelua riittävän konkreettisella tavalla mittayksiköiden opiskelussa (itse mittaaminen, arjen mittayksikköesimerkkien kerääminen, arviointitaitojen kohentaminen). Alussa aihealueisiin perehtymiselle pitäisi olla enemmän aikaa, jotta voitaisiin kehittää ensin toiminnallisuuden, arjen ja konkreettiaan avulla pohjaa ymmärtämiselle. Ei kiire kirjaan!" (Opettaja 100)

5.6.6 Matemaattinen ilmaiseminen ja sen haasteet opettajien näkökulmasta

Opettajien mielestä sekä kirjalliseen, että sanalliseen matematiikan ilmaisemiseen tulisi kiinnittää huomiota. Heidän mielestään näihin auttaisi esimerkiksi tehtävien selittäminen muille oppilaille ja opettajalle. Parin kanssa työskentely voisi toimia hyvin ja näin oppilaat kertovat omin sanoin asioita ja matematiikan käsitteet vahvistuvat. Ongelmanratkaisu ja sanalliset tehtävät kehittävät matemaattista ilmaisemista. Vastauskeskeisyys koettiin ongelmana ja tähän ratkaisuna voisi olla esimerkiksi lausekokeet sanallisista tehtävistä. Opettajat olivat sitä mieltä, että matemaattisiin merkintöihin tulisi kiinnittää huomiota enemmän. Esimerkiksi yhtäsuuruusmerkin käyttöä tulisi opettaa jo alakoulussa, jotta oppilaat eivät tekisi pötkölaskuja. Jakomerkintää tulisi täsmentää, kaksoispiste ja jakoviiva sama asia. Opettajat haluaisivat poistaa kaksoispisteen käytön jakolaskuissa.

”Matemaattinen ilmaisu on monilla oppilailla heikkoa. Mielestäni tehtävien selittäminen sekä muille oppilaille että opettajalle voisi parantaa matemaattista ilmaisua.” (Opettaja 121)

”Suurin osa 7-luokkalaisista ei ymmärrä laskujen välivaiheiden merkitystä. Eivät ymmärrä, että pelkkä vastaus on veikkaus. Osa oppilaista on tottunut, etteivät välivaiheet ole tarpeellisia ja jos vastaus on väärin. Oppilaiden mielestä on aivan sama, miten vastaukseen on päästy. Eivät ymmärrä, että polku kiinnostaa enemmän kuin määränpää (vastaus). Välivaiheita ja ratkaisun matemaattista kirjaamista pitäisi opettaa huomattavasti enemmän ala-asteella!!!” (Opettaja 108)

”Matematiikan merkintäkielen tärkeyttä voisi korostaa esimerkiksi niin, että välillä olisi pelkkiä lausekekokeita, joissa sanallisista tehtävistä ei olisi tarkoituskaan saada tuloksia. Pisteet saisi oikein merkityistä lausekkeista. Tällaisten harjoitusten kautta oppilaat kenties oppisivat muuttamaan sanallisia ilmauksia (”346 euroa vähemmän kuin”) matematiikan kielelle luontevasti.” (Opettaja 117)

”Matemaattinen ilmaiseminen: Oppikirjoissa olisi hyvä vaatia vaiheistamista. Nyt ne ovat liian vastauskeskeisiä.” (Opettaja 48)

Kirjallinen matemaattinen ilmaiseminen. Tuntuu siltä, että AL-puolella on keskitytty suorien marginaalien piirtämiseen mutta esimerkiksi =-merkin merkitystä ei ole mietitty, vaan monet oppilaat laskevat "putkeen" kuten $3 \cdot 4 = 12 + 7 = 19$ (p.o. $3 \cdot 4 + 7 = 12 + 7 = 19$). Jakolaskumerkinnän : heittäisin roskeen ja käyttäisin jakoviivaa. (Opettaja 101)

*"Alakoulussa matemaattisia merkintöjä pitäisi tehdä oikein ja perustella lapsille, miksi ne ovat tärkeitä. Esim. Pötkölaskusta pois oppiminen ja = merkin oikeanlainen käyttö."
(Opettaja 82)*

6. Luotettavuus

Tutkimuksen on tarkoitus olla mahdollisimman luotettava, jotta siitä olisi hyötyä tulevaisuuden tutkimuksia varten. Kyselytutkimuksen luotettavuustarkastelussa käytetään validiteettia ja reliabiliteettia. Tämä kyselytutkimus on luotu itse, joten sen luotettavuutta ei voida verrata toisten tutkimusten kanssa. Tutkimuksessa käytetty Likertin asteikko on yleisesti käytössä mielipidekysymyksissä. Laadullisen aineiston analysoinnissa mukaan tulevat tutkijan oma tausta, arvot sekä näkemys maailmasta (Creswell & Clark, 2007). Luotettavuutta kasvattaa tutkijan oma opiskeluala, matematiikan aineenopettaja. Tutkija on perehtynyt matematiikan luonteeseen sekä matematiikan opetuksen sekä koulumaailman ongelmiin niin kirjallisuuden kuin opetuskokemuksen avulla. Tutkijan näkemystä avarsi keskustelu luokanopettajan kanssa, joka on ollut mukana tämän tutkimuksen teossa.

Tutkimuksen tuloksia ei tarkastella yksittäisen opettajan osalta, mutta yksittäisen opettajan vastaukset otetaan huomioon tutkimuksen kannalta oleellisista ominaisuuksista. Tarkastellessa kaupunkien välisiä eroja valitaan esimerkiksi helsinkiläiset opettajat ja tarkastellaan heidän mielipidettensä oppilaiden matematiikan osaamisesta eri aihealueissa. Yhden helsinkiläisen opettajan vastaus vaikuttaa kaikkien helsinkiläisten opettajien tulokseen. Näin taataan tutkimukseen osallistuneiden opettajien nimettömyys. Avoimen kysymyksen vastauksissa yksittäisen opettajan vastaus saattaa olla mielenkiintoinen, mutta tässäkin säilytetään opettajan nimettömyys. Avoimen kysymyksen vastaukset on numeroitu, esimerkiksi ”(Opettaja 139)”, vastausjärjestyksen mukaan, joten niiden perusteella ei voida selvittää opettajan henkilöllisyyttä.

Tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää opettajien näkökulmasta oppilaiden matematiikan eri aihealueiden osaaminen. Tätä tutkittiin eri muuttujien näkökulmasta, kuten kaupunki, opetuskokemus ja opetettava luokka. Tutkimuksen kyselyn kysymykset mittasivat tätä, sillä opettajat vastasivat ensin taustatiedoissa opetuskaupungin, opetuskokemuksen ja opetettavan luokan ja tämän jälkeen Likertin asteikolla mielipiteensä eri aihealueiden osaamiseen. Näin ollen tutkija pystyi analyysivaiheessa yhdistämään esimerkiksi helsinkiläisten vastaukset ja tutkimaan helsinkiläisten opettajien mielipidettä. Tutkimuksen tavoitteena oli löytää opettajien

mielestä eri aihealueiden suurimmat ongelmat ja ongelmien ratkaisemiseksi opetuksen kehitysehdotuksia. Avoin kysymys toi esiin opettajien mielipiteen matematiikan opetuksen ongelmista ja opettajat pohtivat niihin ratkaisuja. Tämä vastasi tutkimuksen toisen tutkimuskysymyksen tarkoitusta. Tutkimuksen validisuutta heikensi hieman se, että opettajat kirjoittivat ongelmista, mutta saattoivat jättää kehitysideat kirjoittamatta. Tämä ei ollut kysymyksen tarkoitus, joten kysymyksen asettelu olisi voinut olla hieman selkeämpi. Kokonaisuudessaan tutkimuksen validiteetti eli pätevyys oli hyvä.

Perusjoukon muodosti 137 opettajaa, joten tästä voidaan tehdä yleistyksiä matematiikan aihealueiden osaamisen eroista. Tutkimukseen vastanneiden opettajien joukko ei kuitenkaan kata koko Suomen luokanopettajien ja matematiikan opettajien joukkoa. Luokitellessa opettajat alakoulun ja yläkoulun opettajiin luokkien koot olivat 55 (alakoulu) ja 82 (yläkoulu). Alakoulun ja yläkoulun opettajien vastauksista ja niiden eroista voidaan tehdä yleistyksiä. Eri kaupunkien vastauksia tutkittaessa eri kaupunkien otoskoot olivat 51 (Helsinki), 29 (Espoo), 24 (Vantaa) ja 33 (Muu). Kaupunkien välisestä erosta ei voida tehdä kovin päteviä yleistyksiä sillä osa otoksista oli alle 30 opettajan suuruisia. Opetuskokemuksen perusteella tehdyssä jaottelussa otoskoot jäivät alle 30 opettajan, joten näistä ei voida tehdä yleispäteviä yleistyksiä. Valintakysymyksissä opettajille annettiin useampi vaihtoehto, joista valita. Mikäli mikään vastausvaihtoehto ei vastannut opettajan mielipidettä oli kysymyksissä muu vaihtoehto. Vaihtoehdot eivät menneet päällekkäin. Näin ollen opettaja pystyi varmasti valitsemaan oikean vaihtoehdot tarjolla olevista, eikä kyselyn täyttäminen jäänyt kesken tämän osalta. Opetuskokemuksen arvioiminen vuosina saattoi aiheuttaa ongelmia. Esimerkiksi jos opettajalla on opetuskokemusta 10,5 vuotta, valitsiko hän vastausvaihtoehdon 5-10 vuotta vai 11-15 vuotta. Kysymys oli opetuskokemus vuosina, joka tutkijan mukaan tarkoitti täysiä vuosia ja näin ollen opettajan olisi tullut vastata 5-10 vuotta. Tähän kysymykseen olisi voinut laittaa selvennyksen "opetuskokemus *täysinä* vuosina" tai antaa opettajien vastata itse numeroilla. Tutkija jäi pohtimaan, olisiko sukupuolikysymyksen voinut jättää pois kyselystä. Tässä tutkimuksessa ei tarkasteltu sukupuolten välisiä eroja. Kyselyn yhdeksäs kysymys: "Onko opetukseen tarpeeksi aikaa", vastaus oli melko itsestään selvä. Tutkija jäi pohtimaan, olisiko tämän kysymyksen voinut jättää myös kokonaan pois kyselystä.

Opettajat saattoivat ymmärtää aihealueisiin kuuluvan sisällön eri tavalla. Suurin osa aihealueista olivat sellaisia, että opettajat luultavasti ymmärsivät, mitä ne pitävät sisällään. Näitä olivat esimerkiksi murtoluvut ja yksikkömuunnokset. Näihin löytyy selkeät luvut esimerkiksi oppikirjoista (Etelämäki, 2015; Hassinen, 2016; Heinonen, ym., 2012; Kiviluoma & Manninen, 2018, 2015; Rinne & Sintonen, 2016) Sanalliset tehtävät ja ongelmanratkaisu-aihealueet voidaan ymmärtää eri tavoin. Opettajan omaa tulkintaa pyrittiin vähentämään selittämällä sanat, esimerkiksi ”sanalliset tehtävät (tehtävänanto sanallisessa muodossa)”. Kyselyn ajankohdalla saattaa olla merkitystä, sillä juuri opetettu aihealue on voinut jäädä opettajien mieleen oppilaille vaikeana. Opettajien edetessä kirjan mukaan on mahdollista, että useampi kyselyyn osallistunut opettaja on oppilasryhmän kanssa samassa aihealueessa. Opettajat vastaava mielipiteensä jokaiseen eri aihealueeseen, joka vähentää juuri opetetun aihealueen erottumista joukosta.

Varmastikaan kaikkia matematiikan aihealueet eivät olleet mukana tutkimuksessa. Esimerkiksi aihealueista puuttui potenssit. Tutkija jätti tämän tietoisesti pois, sillä potensseja opetellaan vasta kahdeksannella luokalla ja tutkimus keskittyi 5.-7. luokkalaisten matematiikan osaamiseen. Myös yhtälönratkaisu puuttui, tämä oli tutkijan tietoinen valinta, sillä yhtälönratkaiseminen tulee selkeästi vasta 7. luokalla ja tutkimuksessa pyrittiin keskittymään aiheisiin, joita on ollut jo alakoulussa enemmän. Näin jälkikäteen tutkija jäi pohtimaan olisiko sen sittenkin pitänyt olla mukana aihealueissa. Yksi opettaja huomautti asiasta avoimessa kysymyksessä: ”Yhtälönratkaisu puuttuu listalta. Se osataan huonoiten.”

Avoimen kysymyksen luotettavuuteen liittyy tämän tutkimuksen suurimmat epävarmuudet. Tutkijan tulkinnan varaan jää opettajien avoimen kysymyksen vastaukset opetuksen ongelmista ja opetuksen kehitysehdotuksista. Opettajien haastattelu olisi lisännyt luotettavuutta, sillä tällöin olisi voinut kysyä täsmentäviä kysymyksiä ja varmistaa, että opettajat vastaavat juuri haluttuun kysymykseen. Kehitysehdotukset eivät ole yleispäteviä, sillä ne ovat yksittäisen opettajan kokemuksia siitä, mikä toimii tai mikä ei. Vastauksista on löydettävissä samankaltaisuuksia, joiden avulla voidaan tehdä varovaisia yleistyksiä. Näin ollen vastaukset antavat yleiskuvan matematiikan aihealueiden mahdollisista ongelmista,

riskeistä sekä kehittämismahdollisuuksista. Näitä ongelmia voisi jatkossa lähteä tutkimaan tarkemmin.

Tutkimusten analysoinnissa Tutkimustulokset vietiin Microsoft Forms-kyselystä suoraan Microsoft Excel-taulukkoon sekä SPSS-ohjelmaan. Tässä kohtaa virheiden mahdollisuus on hyvin pieni, verrattaessa esimerkiksi käsillä syötettäviin tuloksiin. Aineistosta on laskettu yleiset tunnusluvut, kuten keskiarvo ja keskihajonta Microsoft Excel-taulukon ja SPSS-ohjelman avulla ja näiden tulokset eivät eronneet toisistaan, joten tunnuslukujen virheiden mahdollisuus on hyvin pieni. Aineistolle on tehty tilastollisia testejä, kuten Kruskal-Wallis-testi ja Mann-Whitneyn U-testi. Näiden testien soveltuvuudesta on keskusteltu ohjaajan kanssa, mikä lisää tutkimuksen luotettavuutta. Tutkimuksen uudelleen toteuttaminen ala- ja yläkoulun opettajilla on mahdollista.

Kokonaisuutena tutkimusta voidaan pitää varsin luotettavana näin matematiikan aineenopettajan näkökulmasta. Matematiikan aihealueisiin on perehdytty perusopetuksen opetussuunnitelman (2014) ja oppikirjojen avulla. Aineiston analysointiin perehdytty muun muassa kirjallisuuden ja Akin menetelmäblogin avulla. Tutkimuksen tekovaiheessa ohjaajat ovat olleet aktiivisesti mukana varmistamassa työskentelytapojen oikeellisuutta.

7. Johtopäätökset ja pohdinta

Tutkimuksen aihe kumpuaa tutkimuksiin Suomen matematiikan osaamisesta. Suomi on maailmankuulu hyvänä matematiikan opetusmaana. Suomalaiset ovat menestyneet PISA-tutkimuksissa, vaikkakin tulokset ovat laskeneet viime vuosina. (Kupari & Hiltunen, 2018, s. 16) Opetuksen painotus on muuttunut vuosien saatossa aritmetiikasta ongelmanratkaisuun (Haapasalo, 2011, s. 144-148). Opetussuunnitelma ohjaa opetusta, joten se oli tärkeä osa tätä tutkimusta. Opetussuunnitelmaa tässä tutkimuksessa käsiteltiin niin kirjoitetun, toimeenpannun, mahdollisen kuin toteutuneen opetussuunnitelman näkökulmasta. (Robitaille ym., 1993) Kirjoitettu opetussuunnitelma perusopetuksen opetussuunnitelma (2014) ja mahdollinen opetussuunnitelma eli peruskoulun matematiikan oppikirjat kuuluivat keskeisesti tähän tutkimukseen. Toimeenpannun opetussuunnitelman käyttö tuli esille tutkimuksessa lähinnä avoimien kysymyksen vastauksissa. Vastauksissa opettajat pohtivat oppituntien kulkua, työskentelymenetelmiä ja miten kehittää opetusta jatkossa. Toteutunut opetussuunnitelma taas näkyi tutkimuksessa opettajien mielipiteenä oppilaiden osaamisesta. Opettajien mielipide voi perustua esimerkiksi koearvosanoihin tai yleisesti havaintoihin, joita opettajat ovat tehneet oppitunneilla oppilaiden tiedoista ja taidoista.

Tässä tutkimuksessa selvitettiin opettajien näkökulmasta oppilaiden osaamisen eroja eri matematiikan aihealueissa. Tarkasteltavana oli opettajien eri taustamuuttujien ero matematiikan aihealueiden osaamisessa sekä matematiikan aihealueiden ongelmat. Kaikki vastaukset huomioiden viisi heikoiten osattua aihealuetta oppilaille olivat yksikkömuunnokset, matemaattinen ilmaiseminen, sanalliset tehtävät, ongelmanratkaisu ja murtoluvut. Sanallisten tehtävien sijoittuminen kolmen heikoiten osatun aihealueen joukkoon ei yllätä, sillä tässä tutkimuksessa keskityttiin pääkaupunkiseudun opettajien mielipiteeseen. Pääkaupunkiseudulla maahanmuuttajien määrä on suurempi kuin muualla Suomessa (Tilastokeskus, 2018). Sanallisiin tehtäviin tarvitaan muun muassa hyvää suomen kielen taitoa. Murtoluvut-aihealueen sijoittuminen heikoiten osattujen aihealueiden joukkoon voi selittyä sillä, että murtolukuihin tarvitaan osaamista niin eri laskutoimituksista kuin lukukäsitteen ymmärrystä (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ongelmanratkaiseminen koetaan usein vaikeaksi, koska se vaatii oppilailta asioiden yhdistämistä.

Ongelmanratkaisemiseen tarvitaan niin matemaattista ilmaisemista, peruslaskutoimituksia kuin yleensä sanallisten tehtävien ymmärtämistä. Ongelmanratkaisemisessä lähdetään yleensä ongelmasta ja ratkaisuun päästään monen vaiheen kautta. Ratkaisun löytäminen vaatii esimerkiksi luovaa ajattelua ja päättelykykyä.

Parhaiten opettajien mielestä oppilaat osasivat peruslaskutoimitukset. Tähän yksi syy saattaa olla Back to Basics eli takaisin perusteisiin suuntaus, jossa peruslaskutoimitukset ovat yksi keskeisistä aihealueista. (Haapasalo, 2011, s. 146). Peruslaskutoimituksia opetellaan lähes jokaisella oppitunnilla, mikä lisää oppilaiden laskurutiinia. Matematiikan muut aihealueet edellyttävät peruslaskutoimitusten osaamista. Mikäli oppilaat eivät osaisi näitä olisi hyvin vaikeaa oppia laskutoimituksia murtoluvuilla tai laskea esimerkiksi geometriassa pinta-aloja.

Tässä tutkimuksessa selvitettiin myös opettajan opetettavan luokka-asteen, ala- ja yläkoulu, vaikutusta tulokseen. Yläkoulussa heikoiten osataan matemaattinen ilmaiseminen ja alakoulussa yksikkömuunnokset. Parhaiten niin alakoulussa kuin yläkoulussa osataan peruslaskutoimitukset. Alakoulussa ymmärrys mittaamisesta ja erilaisista mittayksiköistä voi olla uutta, kun taas yläkoulussa oppilaat ovat jo käyttäneet enemmän eri mittayksiköitä arjessa esimerkiksi ruuanlaitossa ja fysiikan tunneilla. Peruslaskutoimitukset opitaan jo alakoulussa ja näiden harjoittelua on lähes joka matematiikan tunnilla. Alakoulun ja yläkoulun tulosten välillä oli merkittävä ero usean aihealueen välillä (ks. luku 5.3 taulukko 10). Eron voi selittää esimerkiksi erilaiset painotukset opetuksessa (POPS, 2014) tai yläkoulun opettajien heikko käsitys alakoulussa opetetuista sisällöistä. Tämä voi johtaa siihen, että yläkoulussa opetus etenee liian nopeasti monien oppilaiden taitotasoon nähden. Tämä tuo riskin, että oppilaan mielenkiinto matematiikkaa kohtaan hiipuu ja vähentää mahdollisuuksia jatko-opintoihin, joissa tarvitaan matematiikkaa. Koen, että yhteistyö luokanopettajien ja matematiikan aineenopettajien välillä on tärkeää. Aineenopettajien on hyvä tietää, mitä ja miten alakoulussa opetetaan matematiikkaa ja mitkä aihealueet koetaan haastaviksi. Näin aineenopettajat pystyvät kohdentamaan opetustaan enemmän haasteellisiin aihealueisiin. Toisaalta luokanopettajien on hyvä tietää, mikä koetaan yläkoulussa haasteelliseksi ja pyrkiä opettamaan perusteet alakoulussa jo paremmin ja selkeämmin. Tämän tutkimuksen tuloksia voivat käyttää aineenopettajat ja

luokanopettajat hyödyksi opetuksessaan, esimerkiksi pohtiessaan, minkä aihealueen opetukseen kannattaisi kiinnittää enemmän huomiota. Mielestäni olisi hyvä, jos matematiikan aineenopettajan koulutuksessa olisi jopa kursseja luokanopettajien matematiikasta. Näin aineenopettajat hahmottaisivat paremmin alakoulun opetuksen sisällön ja saisivat osaamista matematiikan opetuksen toiminnallistamiseen. Avoimen kysymyksen vastausten perusteella opettajat kokivat juuri toiminnallisen opetuksen tärkeänä. Alakoulusta ja yläkouluun siirytään muutamassa kuukaudessa ja samalla usein toiminnallisesta opetuksesta mekaaniseen laskemiseen. Oppilaat kokevat usein samanaikaisesti myös muita muutoksia, esimerkiksi koulu, oppimisympäristö, luokkakaverit ja opettajat (Pietarinen & Rantala, 1998). Nämä muutokset voivat olla monella haasteellista ja ne voivat vaikuttaa oppimistuloksiin.

Kaupunkien välisestä erosta ei voida tehdä yleistyksiä, sillä otoskoot olivat liian pienet eri kaupunkien välillä. Tuloksia analysoidessa merkittäviä eroja ei löytynyt kuin Helsingin ja muiden kaupunkien välillä aihealueessa yksikkömuunnokset. Espoon, Vantaan ja muiden kaupunkien tulokset vastaavat kaikkien opettajien mielipidettä, että heikoiten osataan yksikkömuunnokset ja parhaiten peruslaskutoimitukset. Helsingin tulokset poikkesivat kaikkien opettajien tuloksesta, sillä helsinkiläisten mielestä heikoiten osattiin sanalliset tehtävät ja parhaiten kymmenjärjestelmä. Helsingin tuloksen voi selittää suurempi otoskoko verrattaessa Espoon, Vantaan ja muiden kaupunkien otokseen. Emme myöskään tiedä, mistä päin Helsinkiä opettajat olivat ja näin ollen otokseen on voinut valikoitua opettajia sellaisista kouluista, joissa maahanmuuttotaustaisten oppilaiden määrä on suuri. Heikko suomenkielentaito voi hankaloittaa sanallisen tehtävän ymmärrystä ja näin ollen etenemistä tehtävässä.

Tutkimuksessa selvitettiin, onko opettajan opetuskokemuksella vaikutusta oppilaiden eri aihealueiden osaamiseen. Opetuskokemuksella ei näyttänyt olevan merkittävää vaikutusta osaamiseen. Tämä tulos on hieman yllättävä, sillä uskoisin, että opettajalla ja opettajan kokemuksella on merkitystä oppilaiden osaamiseen. Opettajan pedagoginen osaaminen ei välttämättä ole riippuvainen opetuskokemusvuosista. Opetus on sidottu vahvasti opetussuunnitelmaan ja oppikirjoihin (Hellström, 2008, s. 222, Heinonen, 2005, s. 233, 244), joten takaako tämä tasalaatuisen opetuksen opetuskokemuksesta riippumatta. Opettajankoulutus on uudistunut ja mahdollisesti nuoret opettajat osaavat hyödyntää paremmin esimerkiksi tietotekniikkaa ja

havainnollistamisen keinoja. Nämä tekijät voivat tasoittaa opetuskokemuksen tuomaa osaamisen hyötyä.

Tutkimuksen avoimen kysymyksen vastauksista nousi esille asiat, jotka opettajat kokivat opetuksen kehittämiskohteena. He nostivat muun muassa murtoluvut-aihealueesta sen, että oppilaat eivät ymmärrä jakopisteen ja jakoviivan merkitsevän samaa laskutoimitusta. Tähän konkreettinen kehitysehdotus olisi, että alakoulussa ei opeteltaisikaan jakopistemerkintää jakolaskulle. Kieltämättä kaksi merkintää, jotka tarkoittavat samaa, saattavat sekoittaa oppilaita, varsinkin jos he käyttävät merkintöjä väärissä paikoissa. Opettajat ehdottivat, että yksikkömuunnokset opetettaisiin toiminnallisilla keinoilla ja itse mittamalla. Yksikkömuunnokset on helppo liittää arkielämään ja näin kasvattaa niiden ymmärrettävyyttä. Monia aihealueita tarvitaan toisten aihealueiden osaamiseen esimerkiksi sanallisten tehtävien osaamista melkein jokaisessa aihealueessa. Opettajat olivat sitä mieltä, että aihealueiden yhdistäminen olisi tärkeää, jotta oppilaat näkisivät matematiikan kokonaisuutena, eikä vain erillisinä alueina. Konkretia ja toiminnallisuus näkyivät monen opettajan vastauksissa, joten näiden lisääminen erityisesti yläkoulun 7. luokan opetukseen olisi hyvä. Näin siirtyminen toiminnallisesta oppimisesta mekaaniseen laskemiseen ei olisi niin suuri. Opettajat kokivat, että matemaattinen ilmaiseminen on tärkeää eri aihealueen opetuksessa eritoten sanallisissa tehtävissä ja ongelmaratkaisutehtävissä. Opettajat olivat sitä mieltä, että oppilaille tulisi opettaa matemaattiset merkinnät paremmin ja vaatia niiden käyttöä tehtäviä ratkaistaessa. Näitä merkintöjä ovat muun muassa välivaiheet, yhtäsuuruusmerkki ja jakomerkki. Matematiikan yhdistäminen arkielämän ongelmiin nähdään tärkeänä (Lampiselkä ym., 2007, s. 35-48). Sanallisten tehtävien yhdistäminen selkeämmin vielä oppilaiden arkielämään voisi lisätä niiden kiinnostavuutta. Opettajat ovat innokkaita kehittämään opetustaan, mikä käy ilmi myös tässä tutkimuksessa. 92% vastanneista opettajista on kehittänyt opetustaan joko vähän tai paljon. Opettajat voisivat tulevaisuudessa keskittyä kehittämään juuri vaikeiden aihealueiden opetusta ja löytää uusia erilaisia tapoja opettaa innostavasti ja luovasti matematiikkaa.

Tämän tutkimuksen mukaan 74% opettajista oli sitä mieltä, että aikaa ei ole riittävästi vaikeiden asioiden opetukseen. Tuloksen selittäviä syitä voi olla monia. Yksi syy voi olla se, että opetussuunnitelma on liian laaja suhteessa oppituntimäärään. Aikaa ei

riitä aiheiden syvälliseen käsittelyyn. Avoimissa vastauksissa muutamat opettajat jopa ehdottivat opetussuunnitelman ja oppikirjojen supistamista. Toinen syy voi olla vuoden 2010 muutos, jolloin erityisryhmät lakkautettiin ja erityistukea tarvitsevat oppilaat integroitiin perusopetusryhmiin (OAJ, 2019). Tämä on aiheuttanut sen, että opettajien työmäärä on kasvanut ja eteneminen opetussuunnitelman mukaisesti on vaikeutunut.

Yleisesti vastauksissa haluttiin kaikkea lisää, esimerkiksi aikaa, toiminnallisuutta ja toistoa. Pohdintaan jää, mistä aikaa kaikkeen? Osa ehdotti, että karsittaisiin asioita jo alakoulun puolella ja näin saataisiin perusasiat kuntoon. Matematiikan kumulatiivinen luonne (POPS, 2014, s. 128) johtaa myös siihen, että perusasioiden osaaminen on erittäin tärkeää ja niihin tulisikin mielestäni kiinnittää enemmän huomiota, vaikka esimerkiksi peruslaskutoimitukset näyttävät olevan hyvin hallussa oppilailla. Koen perusasioihin kuuluvan esimerkiksi murtoluvut ja ongelmanratkaisun, jotka kumpikin koettiin hankalaksi aihealueeksi oppilaille. Opettajat kokivat, että opetukseen tulisi olla enemmän aikaa ja aihealueita taas voisi olla vähemmän.

PISA- ja TIMSS-tulokset ovat saman suuntaisia tämän tutkimuksen tulosten kanssa. PISA-tutkimuksien perusteella suomalaiset oppilaat osaavat parhaiten määrällisen ajattelun sisältöalueen, johon kuuluu esimerkiksi peruslaskutoimitukset (Kupari, ym., 2013, s. 19-20; Kupari & Välijärvi, 2005, s. 17). Opettajien mielestä oppilaat osaavat parhaiten peruslaskutoimitukset myös tässä tutkimuksessa. Heikoiten PISA-tutkimusten mukaan suomalaiset oppilaat osaavat tila- ja muoto sisältöalueen, johon kuuluu esimerkiksi mittaaminen ja yksikkömuunnokset (Kupari, ym., 2013, s. 19-20; Kupari & Välijärvi, 2005, s. 17). Yksikkömuunnokset olivat opettajien mielestä yksi heikoiten osatuista aihealueista myös tässä tutkimuksessa. PISA- ja TIMSS-tutkimuksissa tehtävät on jaettu laajempiin aihealueisiin kuin tässä tutkimuksessa, joten suoraa vertailua tämän tutkimuksen ja PISA- ja TIMSS- tutkimusten välillä ei voida tehdä. Lisäksi kattavan kuvan saaminen vaatisi valtakunnallista tutkimusaineistoa. Tämän tutkimuksen kohderyhmänä keskityttiin pääkaupunkiseudun opettajiin, vaikka mukana oli myös opettaja Suomen muista kaupungeista.

Älypuhelinien käyttö arjessa näyttää lisääntyneen ja älypuhelimet ovat läsnä lähes kaikkialla ja kaikenikäisillä. Tutkimusten mukaan älypuhelimet vievät aivoilta kapasiteettia oppia uusia asioita sekä ne vievät keskittymisen muualle kuin

opetukseen ja tähän riittää pelkästään jo älypuhelimien läsnäolo (Ward, Duke, Gneezy & Bos, 2019). Kyselyssä opettajat eivät maininneet älypuhelimien aiheuttavan ongelmia oppitunneilla. Koen kuitenkin älypuhelimien käytön olevan suuri ongelma nykypäivänä koulussa ja oppitunneilla. Jos oppilaat saavat pitää älypuhelinta pöydällä huomio kiinnittyy helposti mahdollisiin viesteihin ja vie näin ollen oppilaiden huomion opetettavasta asiasta. Ratkaisu ongelmaan voisi olla älypuhelimien käytön kieltäminen oppitunneilla, kuten esimerkiksi Ranskassa on jo tehty (Yle, 2018). Voisiko lisääntynyt kännyköiden käytöllä oppitunneilla olla jopa yhteys PISA-tulosten heikkenemiseen? Tässä yksi hyvä jatkotutkimuksen aihe.

Matematiikan ja erityisesti pitkän matematiikan suosio tulee varmasti kasvamaan tulevaisuudessa, koska jatkossa eniten hakupisteitä yliopistoon saa pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusarvosanalla (Keskisuomalainen, 2019). Näin ollen ala- ja yläkoulussa olisi erittäin tärkeää oppia matematiikan perustaidot hyvin, jotta oppilailla on hyvät valmiudet esimerkiksi lukio-opintoihin ja sen myötä korkeakouluopintoihin. On osoitettu, että heikko menestyminen matematiikassa lähtee jo alemmilta luokilta ja erot osaamisessa vain kasvavat ylemmillä luokilla (Metsämuuronen 2017, s. 67). Heikosta matematiikan osaamisesta voi seurata työllistymisongelmia ja syrjäytymisriskiä, jotka ovat sekä yksilön että yhteiskunnan näkökulmasta suuri kustannus (Myrskylä, Räsänen, 2012, s. 1168).

Teknologian kehitys on muuttanut ja muuttaa varmasti tulevaisuudessa opetusta ja opetussuunnitelmaa. Ylioppilaskirjoitusten sähköistyminen on muuttanut jo lukion matematiikan opetusta sähköistämällä oppikirjoja, tehtäviä ja kokeita. Miten teknologian kehitys ja sähköistyminen näkyvät jatkossa perusopetuksessa? Siirtääkö teknologia matematiikan pääpainoa enemmän ongelmanratkaisuun ja monimutkaisempiin tehtäviin. Oppilaiden ei tarvitse osata laskea peruslaskutoimituksia, koska laskimet tekevät sen heidän puolestansa.

Lähteet

- Aalberg, V. & Siimes, M.A. (1999). *Lapsesta aikuiseksi. Nuoren kypsyminen naiseksi tai mieheksi*. Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.
- Aho E, Pitkänen K., & Sahlberg P. (2006). *Policy Development and Reform Principles of Basic and Secondary Education in Finland since 1968*. May 2006. Washington, D.C., U.S.A.: The World Bank. http://siteresources.worldbank.org/EDUCATION/Resources/278200-1099079877269/547664-1099079967208/Education_in_Finland_May06.pdf
- Arinen, P. & Karjalainen, T. (2007). *PISA 2006 ensituloksia*. Opetus- ja kulttuuriministeriö. <http://julkaisut.valtioneuvosto.fi/bitstream/handle/10024/79236/opm38.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational studies in mathematics*, 64(3), 293-316.
- Creswell, J. W. & Plano-Clark, V. L. (2007). *Designing and conducting mixed methods research*. Thousand Oaks (California): SAGE Publications cop. 2007.
- Espoo (2020). Espoon suomenkielisen perusopetuksen tuntijako 1.8.2019 alkaen. <https://www.espool.fi/download/noname/%7B1B19DA46-DF55-46BE-8C0D-6248C1468636%7D/104218> (katsottu 28.2.2020)
- Eukleides, K., Aschan, P., Kahanpää, L. & Nykänen, A. (2011). *Alkeet: Kuusi ensimmäistä kirjaa eli tasogeometria*. [Jyväskylä]: Lauri Kahanpää. 1-13
- Englund, B. (1999). Lärobokskunskap, styrning och elevinflytande. *Pedagogisk forskning i Sverige*, 4(4), 327-348
- Etelämäki, H. (2015). *Säde: 1, Matematiikka* (1. p.). Helsinki: Edita.
- Gross J, Hudson C, & Price D (2009). *The long term costs of numeracy difficulties*. London: Every Child a Chance Trust and KPMG.
- Haapasalo, L. (2011). *Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu*. Jyväskylä: MEDUSA-Software.
- Hassinen, S. (2016). *Kuutio: 7* (9. uudistettu painos.). Helsinki: Sanoma Pro.
- Heinonen, J.-P. (2005). Opetussuunnitelmat vai oppimateriaalit – peruskoulun opettajien käsityksiä opetussuunnitelmien ja oppimateriaalien merkityksestä opetuksessa. Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 257.
- Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. & Urpiola, T. (2012). *Pii: Matematiikka. 7* (1. p.). Helsingissä: Otava.

- Heinonen, M., Luoma, M., Mannila, L., Rautakorpi-Salmio, K., Tapiainen, T., Tikka, T. & Urpiola, T. (2014). *Pii: Matematiikka. π E* (1. p.). Helsinki: Otava.
- Hellström, M. (2008). *Sata sanaa opetuksesta: keskeisten käsitteiden käsikirja Martti Hellström*. PS-kustannus.
- Hirvonen, K. (2012). Onko laskutaito laskussa. *Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*.
- Ikäheimo, H. (1997). Matematiikan esi- ja alkuopetuksen kysymyksiä. Teoksessa: *Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T. & Malinen P.(toim.) Matematiikka– näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen. Niilo Mäki Instituutti. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylä: Yliopistopaino, 239-250*.
- Keskisuomalainen (2019). Ensi kevään yliopistohaussa palkitaan pitkässä matematiikassa pärjäämistä, mutta oppiaineen suosio vaihtelee paljon lukioittain. <https://www.ksml.fi/kotimaa/Ensi-kevään-yliopistohaussa-palkitaan-pitkässä-matematiikassa-pärjäämisestä-mutta-oppiaineen-suosio-vaihtelee-paljon-lukioittain/1487445> (katsottu 17.2.2020)
- Kiviluoma, P. & Manninen, M. (2015). *Tuhattaituri: 6b* (1. painos.). Helsingissä: Kustannusosakeyhtiö Otava.
- Kiviluoma, P. & Manninen, M. (2018). *Tuhattaituri: 6a* (1. painos.). Helsingissä: Kustannusosakeyhtiö Otava.
- Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T. & Manninen, M. (2016). *Tuhattaituri: 5a* (1. painos.). Helsingissä: Kustannusosakeyhtiö Otava
- Kiviluoma, P., Nyrhinen, K., Perälä, P., Rokka, P., Salminen, M., Tapiainen, T. & Manninen, M. (2017). *Tuhattaituri: 5b* (1. painos.). Helsingissä: Kustannusosakeyhtiö Otava.
- Kupari, P. (1999). Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.
- Kupari, P., & Hiltunen, J. (2018). Matemaattiset taidot kansainvälisten arviointitutkimusten valossa. Teoksessa *J. Joutsenlahti, H. Silfverberg & P. Räsänen (toim.) Matematiikan opetus ja oppiminen. Niilo Mäki Instituutti, 16-53*
- Kupari, P., Reinikainen, P., Nevanpää, T. & Törnroos, J. (2001). Miten matematiikkaa ja luonnontieteitä osataan suomalaisessa peruskoulussa? Jyväskylän yliopisto: Koulutuksen tutkimuslaitos.
- Kupari, P., Reinikainen, P., & Törnroos, J. (2007). Finnish students' mathematics and science results in recent international assessment studies: PISA and TIMSS. In *How Finns learn mathematics and science* (pp. 9-34). Brill Sense.

- Kupari, P., Vettenranta, J., & Nissinen, K. (2012). Oppijälhtöistä pedagogiikkaa etsimään: kahdeksannen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen: kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa.
- Kupari, P., Välijärvi, J., Andersson, L., Arffman, I., Nissinen, K., Puhakka, E., & Vettenranta, J. (2013). PISA12 ensituloksia.
- Kupari, P. & Välijärvi, J. (2005). Osaaminen kestäväällä pohjalla: PISA 2003 Suomessa.
- Kääriäinen, H. & Rikkinen, H. 1988. Siirtyminen peruskoulun ala-asteelta yläasteelle oppilaiden kokemana. Helsinki: Yliopistopaino. (9-12)
- Lampiselkä, J., Ahtee, M., Pehkonen, E., Meri, M., & Eloranta, V. (2007). Mathematics and science in Finnish comprehensive school. In *How Finns learn mathematics and science* (pp. 35-48). Brill Sense.
- Lehtinen, E. & Kuusinen J. 2001. Kasvatuspsykologia. Helsinki: WSOY.
- Leino, Ahonen, Hienonen, Hiltunen, Lintuvuori, Lähteinen, Lämsä, Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, Pulkkinen, Rautapuro, Siren, Vainikainen & Vettenranta (2019). PISA18 Ensituloksia – Suomi parhaiden joukossa. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja, Valtioneuvoston julkaisuarkisto.
- Malaty, G. 1998. Eastern and western mathematical education: Unity, diversity, and problems. *International journal of mathematical education in science and technology* 29(3), 420–435.
- Martio, O. (2004). Didaktinen matematiikka?. *Tieteessä tapahtuu*, 22(2).
<https://journal.fi/tt/article/view/56898/19000>
- Metsämuuronen, J. (2013). Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Tampere: Opetushallitus.
- Metsämuuronen, J. (2017). *Oppia ikä kaikki: Matemaattinen osaaminen toisen asteen koulutuksen lopussa 2015*. Helsinki: Kansallinen koulutuksen arviointikeskus.
https://karvi.fi/app/uploads/2017/03/KARVI_0117.pdf
- Minkel (2018). The Problem with hurrying Childhood Learning. Education Week
<https://www.edweek.org/tm/articles/2018/04/18/the-problem-with-hurrying-childhood-learning.html> (katsottu 12.2.2020)
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS 2015 International Results in Mathematics. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 International Results in Mathematics. Chestnut Hill, MA: Boston College, TIMSS and PIRLS International Study Center.

- Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., O'Connor, K. M., Chrostowski, S. J., Gregory, K. D., ... & Smith, T. A. (2001). Mathematics benchmarking report: TIMSS 1999—Eighth grade. *Chestnut Hill, MA: International Study Center.* (Mullis, Martin, Gonzalez, O'Connor, Chrostowski, Gregory & Smith, 2001)
- Myrskylä, P. (2012). *Hukassa – Keitä ovat syrjäytyneet nuoret?* EVA-analyysi, no 19 <http://www.eva.fi/wp-content/uploads/2012/02/Syrjaytyminen.pdf>
- Niemi, E. K. (2008). Matematiikan oppimistulosten kansallinen arviointi 6. vuosiluokalla vuonna 2007. *Oppimistulosten arviointi*, 1, 2008.
- OAJ (2019). Oppimisen tuki. Riittävästi tukea oppimiseen ja koulunkäyntiin. <https://www.oaj.fi/politiikassa/riittavasti-tukea-oppimiseen-ja-koulunkayntiin/> (katsottu 17.2.2020)
- OECD (2001). Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2001). Knowledge and Skills for Life: First Results from PISA 2000, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2004). Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2007). PISA 2006: Science Competencies for Tomorrow's World: Volume 1: Analysis, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2010). PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do: Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I), PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2012). PISA 2009 Technical Report, PISA, Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2014). PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do (Volume I, Revised edition, February 2014): Student Performance in Mathematics, Reading and Science, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2016). PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, PISA. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2018). PISA 2015: Results in focus. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2019). PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do. Pariisi: OECD Publishing.
- OECD (2020). Where: Global reach. <https://www.oecd.org/about/members-and-partners/> (katsottu 31.1.2020).

- POPS (2014). Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus <https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/perusopetuksen-opetussuunnitelmien-perusteet> (katsottu 18.9.2019)
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2000. <https://minedu.fi/pisa-2000> (katsottu 31.1.2020).
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2003. <https://minedu.fi/pisa-2003> (katsottu 31.1.2020).
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2006. <https://minedu.fi/pisa-2006> (katsottu 31.1.2020).
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2009. <https://minedu.fi/pisa-2009> (katsottu 31.1.2020).
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2012. <https://minedu.fi/pisa-2012> (katsottu 31.1.2020)
- Opetus- ja kulttuuriministeriö (2020). PISA-tutkimus ja tulokset 2015. <https://minedu.fi/pisa-2015> (katsottu 31.1.2020)
- Pehkonen, E. (2009). How Finns learn mathematics: What is the influence of 25 years of research in mathematics education. *Teaching mathematics: Retrospectives and perspectives*, 71-101.
- Pehkonen, L., & Krzywacki-Vainio, H. (2007). Mathematics teaching in primary schools. In *How Finns learn mathematics and science* (pp. 155-164). Brill Sense.
- Pepin, B. & Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French, and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 33(5), 158–175.
- Pietarinen, J. (1999). Peruskoulun yläasteelle siirtyminen ja siellä opiskelu oppilaiden kokemana. Joensuun yliopisto kasvatustieteellisiä julkaisuja n:o 50. Joensuun yliopistopaino. (22-25)
- Pietarinen, J. & Rantala, S. (1998). Koulu sosiaalisena ympäristönä yläasteelle siirtymisen vaiheessa: näkökulma sosiaaliseen kehitykseen. Teoksessa M-L. Julkunen (toim.) *Opetus, oppiminen, vuorovaikutus*. Juva: WSOY, 225-241.
- Pääkkönen, H. (2002). Mihin koululaisten arki kuluu? Tilastokeskus
- Rinne, S. & Sintonen, A. (2016). *Kymppi: 5, Syksy* (1. painos.). Helsinki: Sanoma Pro.
- Rinne, S., Sintonen, A., Uus-Leponiemi, M. & Uus-Leponiemi, T. (2019). *Kymppi: 6, Kevät* (1.-3. painos.). Helsinki: Sanoma Pro.

- Rinne, S., Sintonen, A., Uus-Leponiemi, M. & Uus-Leponiemi, T. (2019). Kymppi: 6, Syksy (1.-3. painos.). Helsinki: Sanoma Pro.
- Robitaille, D. F., Schmidt, W. H., Raizen, S., McKnight, C., Britton, E. & Nicol, C. (1993). Curriculum frameworks for mathematics and science. 2nd edition. Vancouver: Pacific Educational Press.
- Robitaille, D. F. & Garden, R. A. (toim.) (1989). The IEA study of mathematics II: Contexts and outcomes of school mathematics. Oxford: Pergamon Press.
- Räsänen P (2012). Laskemiskyvyn häiriö eli dyskalkulia. *Duodecim*, 128, 1168–1177.
- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T. & Wiley, D. E. (1997). Many visions, many aims (Volume 1, A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics). Dordrecht: Kluwer Academic.
- Sulkunen, S., Kupari, P., Törnroos, J., Reinikainen, P., Malin, A., Leino, K., ... & Välijärvi, J. (2002). Tulevaisuuden osaajat: Pisa 2000 suomessa.
- Tilastokeskus (2018). Maahanmuuttajat väestössä. http://pxnet2.stat.fi/explorer/Maahanmuuttajat_2017/kuntakartta.html (katsottu 12.2.2020)
- Varga Nemenyi Ry (2020). Varga Nemenyi -menetelmä. <https://varganemenyi.fi/menetelma/tietoa-menetelmasta/varga-nemenyi-menetelma> (katsottu 31.1.2020).
- Vettenranta, J., Hiltunen, J., Nissinen, K., Puhakka, E., & Rautopuro, J. (2016). Lapsuudesta eväät oppimiseen: neljännen luokan oppilaiden matematiikan ja luonnontieteiden osaaminen: kansainvälinen TIMSS-tutkimus Suomessa.
- Vettenranta, J., Välijärvi, J., Ahonen, A., Hautamäki, J., Hiltunen, J., Leino, K., Lähteinen, S., Nissinen, K., Nissinen, V., Puhakka, E., Rautopuro, J. & Vainikainen, M.-P. (2016). PISA 2015 – Ensituloksia. Huipulla pudotuksesta huolimatta. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2016:41. Opetus- ja kulttuuriministeriö, Koulutuksen tutkimuslaitos & Koulutuksen arviointikeskus.
- Välijärvi, J., Kupari, P., Ahonen, A. K., Arffman, I., Harju-Luukkainen, H., Leino, K., ... & Tuominen-Soini, H. (2015). Millä eväillä osaaminen uuteen nousuun? PISA 2012-tutkimustuloksia.
- Ward, A. F., Duke, K., Gneezy, A., & Bos, M. W. (2017). Brain drain: The mere presence of one's own smartphone reduces available cognitive capacity. *Journal of the Association for Consumer Research*, 2(2), 140-154.
- Yle (2018). Lastenpsykiatri ehdottaa kännykkäkieltoa kouluihin – Ranskassa näin ontehty, mutta Suomessa laki ei sitä salli. <https://yle.fi/uutiset/3-10410296> (katsottu 17.2.2020)

Liitteet

Liite 1: Opetuksen tavoitteet vuosiluokilla 3-6 (POPS, 2014, s. 260-261)

T1	Innostus
T2	Yhteydet
T3	Kysymykset ja perustelut
T4	Matemaattinen ilmaiseminen: konkreettia, välineet, piirtäminen, suullinen ja kirjallinen taito Päätelykyky, tieto- ja viestintäteknologia
T5	Ongelman ratkaisutaito
T6	Matemaattiset käsitteet ja merkinnät
T7	Ratkaisun ja tuloksen järkevyyden arviointi
T8	Kymmenjärjestelmä
T9	Lukukäsite: positiiviset ja negatiiviset luvut
T10	Peruslaskutaito sekä päässäälaskutaito
T11	Geometria: pinta-alat ja tilavuudet
T12	Mittayksiköt ja mittayksikkömuunnokset
T13	Tilastolliset tunnusluvut ja todennäköisyys
T14	Ohjelmointi

Liite 2: Opetuksen tavoitteet vuosiluokilla 7-9 (POPS, 2014, s. 374)

T1	Motivaatio
T2	Vastuu yhdessä ja yksin
T3	Asioiden yhteydet
T4	Täsmällinen matemaattinen ilmaisu
T5	Looginen ja luova ajattelu sekä ongelmanratkaiseminen
T6	Ratkaisujen ja tuloksien arviointi kriittisesti
T7	matematiikka muissa oppiaineissa ja yhteiskunnassa, soveltaminen
T8	Tiedon hallinta ja analysointi
T9	Tieto- ja viestintäteknologia
T10	Päättely ja päässäälaskutaito
T11	Peruslaskutoimitukset rationaaliluvuilla
T12	Reaaliluvut
T13	Prosenttilaskenta
T14	Tuntematon ja yhtälön ratkaiseminen
T15	Muuttuja ja funktio: kuvaajan tulkitseminen ja tuottaminen
T16	Geometriset käsitteet ja niiden väliset yhteydet
T17	Suorakulmainen kolmio ja ympyrä
T18	Pinta-alat ja tilavuudet
T19	Tilastolliset tunnusluvut ja todennäköisyys
T20	Ohjelmointi ja algoritmia, soveltaminen

Liite 3: Opetuksen sisältö tavoitteet vuosiluokilla 3-6 (POPS, 2014, s. 260-262)

S1: Ajattelun taidot	vertailu, luokittelu, järjestäminen, ohjelmointi
S2: Luvut ja laskutoimitukset	kymmenjärjestelmä, lukujen yhteys ja jaollisuus luokittelemalla, yhteen- ja vähennyslasku, kertotaulu 1-10, jakolasku, pyöristäminen ja tuloksen arviointi, negatiiviset luvut, murtoluku, desimaaliluku, prosenttiluvut, päässäälasku, tuloksen arviointi
S3: Algebra	lukujono, tuntemattoman käsite, yhtälö ja sen ratkaiseminen pääättelemällä tai kokeilemalla
S4: Geometria ja mittaaminen	piirtäminen, mittaaminen ja tutkiminen -> kappaleet (lieriö, kartio, muut) ja kuviot (kolmio, nelikulmio, ympyrä), piste, jana, suora, kulma symmetria, koordinaatisto, mittakaava, mittaaminen (piiri, pinta-ala, tilavuus), mittayksiköt ja yksikkömuunnokset.
S5: tietojenkäsittely, tilastot ja todennäköisyys	tiedon kerääminen, taulukko, diagrammi, tunnusluvut (pienin ja suurin arvo, keskiarvo ja tyyppiarvo), todennäköisyys arkitilanteessa

Liite 4: Opetuksen sisältö tavoitteet vuosiluokilla 7-9 (POPS, 2014, s. 375-376)

S1: Ajattelun taidot ja menetelmät	päätelykyky ja perusteleminen, todistaminen, tekstien tulkitseminen ja tuottaminen, ohjelmointi
S2: Luvut ja laskutoimitukset	peruslaskutoimitukset negatiivisilla luvuilla, murtoluvut (kerto ja jako), käänteisluku, vastaluku ja itseisarvo, reaalityluvut, alkutekijät, desimaalityluvut, tarkka-arvo, prosenttiluvut (muutos- ja vertailuprosentti), neliöjuuri, potenssilaskenta
S3: Algebra	muuttuja ja lausekkeen arvo, polynomi (yhteen-, vähennys ja kertolasku), lauseke ja sen sieventäminen, yhtälö (1. ja 2. asteen), yhtälöpari, epäyhtälö, lukujono ja verranto
S4: Funktiot	riippuvuus (graafinen sekä algebrallinen) verrannollisuus (suoraan ja kääntäen), funktio, suora, paraabeli, kulmakerroin (kasvaminen ja väheneminen) ja vakiotermi, kuvaaja (nollakohta)
S5: Geometria	piste, jana, suora, kulman -> viiva ja puolisuora, yhdenmuotoisuus, geometrinen konstruointi, Pythagoraan lause, trigonometriset funktiot, kehä- ja keskuskulma, Thaleen lause, monikulmioiden piiri ja pinta-ala, ympyrän piiri, pinta-ala, kehän ja kaaren pituus sekä sektorin pinta-ala, 3-ulotteiset kappaleet (pallo, lieriö, kartio), mittayksiköt ja yksikkömuunnokset
S6: Tietojen käsittely ja tilastot sekä todennäköisyys	tiedon kerääminen ja analysointi, keskiarvo ja tyyppiarvo, frekvenssi, mediaani, hajonta, diagrammit, todennäköisyys

Liite 5: Saate teksti kyselyyn

Tämän kyselyn tarkoituksena on selvittää opettajien näkökulmasta, mikä matematiikan aihealue osataan nivelvaiheessa, oppilaiden siirtyessä alakoulusta yläkouluun, heikoiten. Kyselyn tarkoituksena on myös löytää kehitysehdotuksia vaikeiden aihealueiden opetukseen. Kysely koostuu kahdesta osasta: taustatiedoista ja kysymyksistä liittyen oppilaiden matematiikan osaamiseen sekä opetuksen kehittämiseen. Matematiikan aihealueet ovat valikoituneet Perusopetuksen opetussuunnitelman 2014 sekä kirjasarjojen (Tuhattaituri, Kymppi, Pii, Kuutio, Säde) sisältöjen mukaan. PISA tulosten heikkeneminen ja matematiikan kumulatiivinen luonne aiheuttavat paineita opetukselle ja sen kehittämiseksi.

Kyselyn vastauksia käsitellään anonyymisti, eikä vastausta yhdistetä yksittäiseen henkilöön. Kyselyn täyttäminen on täysin vapaaehtoista.

Opiskelen Helsingin Yliopistossa matematiikan aineenopettajaksi. Tämä kysely liittyy pro graduuni, jonka aiheena on matematiikan osaaminen nivelvaiheessa, siirryttäessä alakoulusta yläkouluun.

Kiitos ajastasi, jonka käytät kyselyyn vastaamiseen!

Liite 6: Microsoft forms kyselyn taustetietokysymykset

1. Sukupuoli *

 Nainen Mies Muu

2. Opetan tällä hetkellä *

 5-luokka 6-luokka 7-luokka

3. Koulutukseni *

 Matematiikan aineenopettaja Muu aineenopettaja Luokanopettaja Ei tutkintoa Muu

4. Toimin opettajana kaupungissa *

 Helsinki Espoo Vantaa Kauniainen Muu

5. Opetuskokemus vuosina *

 Alle 1 vuotta 1-5 vuotta 6-10 vuotta 11-15 vuotta 16-20 vuotta yli 20 vuotta

9. Koetko, että oppilaille vaikeiden aihealueiden opetukseen on aikaa *

- sopivasti
- pitäisi olla enemmän
- pitäisi olla vähemmän

10. Oletko kehittänyt omaa opetustasi (esimerkiksi täydennyskoulutukset, kurssit, messut, alan kehityksen seuraaminen yms) *

- En ollenkaan
- Vähän
- Paljon

Liite 7: Kyselytutkimuksen kysymykset

6. Matematiikan aihealue osataan heikosti *

	täysin eri mieltä	jokseenkin eri mieltä	ei samaa eikä eri mieltä	eri jokseenkin samaa mieltä	täysin samaa mieltä
peruslaskutoimitukset (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
murtoluvut	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
desimaaliluvut	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
prosenttiluvut	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
pinta-ala ja tilavuus	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
geometriset kuviot (kolmio, neliö, suunnikas, suorakulmainen särmiö, ympyrä)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
tilastolliset tehtävät	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
ongelmanratkaisu (ratkaisijan ajatteluprosessi; taidot ja vaiheet)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
sanalliset tehtävät (tehtävänanto sanallisessa muodossa)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
matemaattinen ilmaiseminen (suullinen, kirjallinen, piirtäminen yms)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
kymmenjärjestelmä	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
yksikkömuunnokset	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
tekniset apuvälineet (esim laskin)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
algoritminen ajattelu ja ohjelmointi	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

7. Minkä aihealueen koet kaikista vaikeimmaksi oppilaille? (valitse kolme) *

- peruslaskutoimitukset
- murtoluvut
- desimaaliluvut
- prosenttiluvut
- pinta-ala ja tilavuus
- geometriset kuviot
- tilastolliset tehtävät
- ongelmanratkaisu (ratkaisijan ajatteluprosessi; taidot ja vaiheet)
- sanalliset tehtävät (tehtävänanto sanallisessa muodossa)
- matemaattinen ilmaiseminen
- kymmenjärjestelmä
- yksikkömuunnokset
- tekniset apuvälineet (esim laskin)
- algoritminen ajattelu ja ohjelmointi

8. Edellisessä kysymyksessä valitsit kolme oppilaille vaikeaa aihealuetta. Miten kehittäisit jonkun valitsemasi aihealueen opetusta? Pyri antamaan jokin konkreettinen esimerkki *

Kirjoita vastaus