

HELSINGIN YLIOPISTO  
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA  
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN OSASTO

---

Maisterintutkielma

# Lukiolaisten virheet matematiikan kielentämisessä

Jemina Kontio

---

Matematiikan opettajan maisteriohjelma

Ohjaaja: Petteri Harjulehto

9. toukokuuta 2023



# Tiivistelmä

**Tiedekunta:** Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta

**Koulutusohjelma:** Matematiikan opettajan maisteriohjelma

**Opintosuunta:** Matematiikan opettaja

**Tekijä:** Jemina Kontio

**Työn nimi:** Lukiolaisten virheet matematiikan kielentämisessä

**Työn laji:** Maisterintutkielma

**Kuukausi ja vuosi:** Huhtikuu 2023

**Sivumäärä:** 41

**Avainsanat:** virheet, kielentäminen, matematiikan ylioppilaskoe

**Ohjaaja:** Petteri Harjulehto

**Säilytyspaikka:** Helsingin yliopiston kirjasto

## Tiivistelmä:

Tässä tutkielmassa tarkastellaan, millaisia virheitä opiskelijoilla ilmenee matematiikan ylioppilaskokeissa sanallista perustelua vaativissa tehtävissä. Lisäksi pyritään löytämään keinoja, joilla esiin tulleita virheitä voitaisi ehkäistä matematiikan opetuksessa. Matematiikan ylioppilaskokeiden sähköistyttyä tehtävien sisällöt ja vaatimukset ovat muuttuneet merkittävästi soveltammiksi. Kun opiskelijalta esimerkiksi vaaditaan sanallisia perusteluja, niin voidaan havaita, ymmärtääkö opiskelija tekemiään laskuja vai toimiiko hän suoraan saatavilla olevien kaavojen ja laskinten orjana, ja tämän vuoksi aiheetta on myös tärkeä tutkia.

Tutkielman teoriapohja koostuu matematiikan ymmärtämisen sekä kielentämisen tarkastelusta. Matematiikan ajatusprosessin esittäminen sanallisesti vaatii matematiikan rakenteiden pohtimista sekä oman matemaattisen ajattelun jäsentämistä siten, että asian voi ilmaista selkeästi. Opetussuunnitelmassa myös korostetaan päätelmien perustelemista sekä arviointia osana matematiikan osaamista.

Tutkielman aineisto koostuu vuosien 2019-2021 sähköisistä pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden kokelasratkaisuksista. Tehtävät eivät keskity mihinkään tiettyyn matematiikan aihealueeseen. Tehtävät valikoituivat näin, koska sähköiset ylioppilaskokeet ovat mahdollistaneet pidempiä sanallisia vastauksia vaativia tehtäviä, jotka ovat oleellisia tämän tutkimuksen kannalta. Valittuja sanallista perustelua vaativia tehtäviä on yhteensä viisi, joista jokaisesta poimittiin 100 ratkaisua.

Saadusta aineistosta nousi esiin melko erilaisia virheitä, riippuen tarkastel-

lusta tehtävästä ja sen aihealueesta. Yleisimmät virheet liittyivät abstraktien kertoimien käsittelyyn, mistä voidaan päätellä, että opiskelijoilla on vaikeuksia käsitellä funktioita ja polynomeja ilman konkreettisia lukuja. Tämän lisäksi ratkaisut olivat melko suppeita, mikä tuotti hankaluuksia ymmärtää ratkaisijoiden ajatusprosesseja ja niiden oikeellisuutta.

Virheiden korjaamiseksi tutkielmassa korostetaan sitä, että opitun soveltamista ja selittämistä sanallisesti tulisi harjoitella koko lukiomatematiikan oppimäärän ajan. Opettajan tulisi siis kiinnittää huomiota omaan opetuspuheeseensa sekä rohkaista opiskelijoita perustelemaan rohkeasti päätelmiään sanallisesti sekä ääneen oppitunneilla että kirjallisesti tehtäviä tehdessään. Tutkielmassa esitellään myös tehtävätyyppejä, joita matematiikan opetuksessa voitaisi käydä läpi, jotta opiskelijoiden perustelu- ja soveltamistaidot voisivat kehittyä paremmin, ja esiin tulleita virheitä voitaisi ehkäistä.

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Teoriaosuus</b>	<b>8</b>
2.1	Matematiikan ymmärtäminen . . . . .	8
2.2	Opetussuunnitelman näkökulma . . . . .	9
2.3	Matematiikan kielentäminen . . . . .	9
2.4	Matemaattinen teoria . . . . .	11
2.4.1	Rationaalifunktio . . . . .	11
2.4.2	Asymptootti . . . . .	11
2.4.3	Polynomien tulomuoto . . . . .	12
2.4.4	Jakoalgoritmi . . . . .	12
2.4.5	Määritelmä, lause ja todistus . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Tutkimuksen toteutus</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Tehtävien esittely</b>	<b>17</b>
4.1	Pitkä matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 4: Lauseke kuvaajasta (12 p.) . . . . .	17
4.1.1	Tehtävänanto . . . . .	17
4.1.2	Ratkaisuehdotus . . . . .	18
4.1.3	Tehtävän arviointi . . . . .	19
4.2	Lyhyt matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 11: Harrin palkka (12 p.) . . . . .	19
4.2.1	Tehtävänanto . . . . .	19
4.2.2	Ratkaisuehdotus . . . . .	20
4.2.3	Tehtävän arviointi . . . . .	20
4.3	Pitkä matematiikka, Syksy 2019, tehtävä 5: Polynomiepäyhtälö (12 p.) . . . . .	21
4.3.1	Tehtävänanto . . . . .	21
4.3.2	Ratkaisuehdotus . . . . .	21
4.3.3	Tehtävän arviointi . . . . .	21

4.4	Pitkä matematiikka, Kevät 2020, tehtävä 8: Polynomien ja-koalgoritmi (12 p.) . . . . .	22
4.4.1	Tehtävänanto . . . . .	22
4.4.2	Ratkaisuehdotus . . . . .	23
4.4.3	Tehtävän arviointi . . . . .	23
4.5	Pitkä matematiikka, Kevät 2021, tehtävä 10: Matemaattista tekstiä (12 p.) . . . . .	24
4.5.1	Tehtävänanto . . . . .	24
4.5.2	Ratkaisuehdotus . . . . .	25
4.5.3	Tehtävän arviointi . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Tutkimustulokset ja analysointi</b>	<b>27</b>
5.1	Pitkä matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 4: Lauseke kuvaajasta	27
5.2	Lyhyt matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 11: Harrin palkka .	28
5.3	Pitkä matematiikka, Syksy 2019, tehtävä 5: Polynomiepäyhtälö	29
5.4	Pitkä matematiikka, Kevät 2020, tehtävä 8: Polynomien ja-koalgoritmi . . . . .	30
5.5	Pitkä matematiikka, Kevät 2021, tehtävä 10: Matemaattista tekstiä . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Miten matematiikan kursseilla voisi opetella välttämään näitä?</b>	<b>33</b>
6.1	Tehtävä 1 . . . . .	36
6.1.1	Tehtävänanto . . . . .	36
6.2	Tehtävä 2 . . . . .	37
6.2.1	Tehtävänanto . . . . .	37
6.3	Tehtävien käyttö opetuksessa . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Pohdinta</b>	<b>38</b>

# Luku 1

## Johdanto

Matematiikan oppiminen ja opetus on kehittynyt merkittävästi sähköistymisen myötä. Matematiikka ei kuitenkaan tästä huolimatta ole pelkkää laskimeen kirjoittelua tai asioiden ulkoa opettelua. Sanallisia perusteluja sisältävät tehtävät matematiikassa vaativat opiskelijaa pohtimaan matematiikan käytäntöjä ja sääntöjä syvällisemmin sekä osoittamaan omaa ymmärrystä matematiikasta. Pelkkä mekaaninen laskeminen voi jättää oppimisen melko suppeaksi, joten sanallinen perustelu on tärkeää oppimisen kannalta. Myös ylioppilaskirjoituksissa tätä käytetään hyväksi erilaisia sanallisia perusteluja vaatimalla.

Aihe on tärkeä ja valikoitui tähän tutkielmaan, koska nykypäivän sähköiset ylioppilaskokeet eivät enää mittaa opiskelijoiden laskutaitoa samalla tavalla kuin ennen. Kokeissa on tarjolla kattavat laskinohjelmistot, joiden vuoksi mekaaninen laskeminen ei ole enää niin tärkeässä roolissa vaan tehtävissä korostetaan enemmän aiheiden soveltamista. Kun opiskelijalta vaaditaan sanallisia perusteluja, niin voidaan havaita, ymmärtääkö opiskelija tekemiään laskuja vai toimiiko hän suoraan saatavilla olevien kaavojen ja laskinten ohjauksena.

Tämän tutkielman tavoitteena on selvittää yleisimpiä virhekäsityksiä ylioppilaskokeiden tehtävissä, jotka vaativat perusteluja sanallisesti. Tavoitteena on myös selvittää tapoja, joilla näitä virhekäsityksiä voitaisi ennaltaehkäistä sekä korjata lukio-opetuksessa. Tutkielman aineistona käytetään kokelasratkaisuja sekä pitkän että lyhyen matematiikan ylioppilaskoetehtävistä.

Tutkielman alkuun käydään läpi tutkielmassa käytettävien tehtävätyyppien taustaa niin opintosuunnitelman kuin ylipäätään oppimisen kannalta sekä tarkastellaan, mitä on matematiikan kielentäminen. Pohditaan myös sitä,

miksi virhekäsityksiä matematiikassa voi syntyä. Tämän lisäksi tarkastellaan tehtävien kannalta tärkeitä matematiikan määritelmiä sekä lauseita, jotka myös todistetaan.

Tämän jälkeen käydään läpi tutkimuskysymykset, sekä esitellään aineisto. Tutkielmassa esitellään aineistoon valitut tehtävät, niiden ratkaisuehdotukset sekä arvioidaan tehtävänantoja opetussuunnitelman, oppikirjojen ja mahdollisten virhekäsitysten näkökulmasta. Pohdinnassa palataan ennustettuihin virheisiin ja peilataan niitä aineistosta löytyneisiin virheisiin.

Tutkimustuloksissa paneudutaan siihen, millaisia vastauksia tehtäviin on annettu sekä millaisia virheitä vastauksista löytyi. Tarkoituksena on luokitella useassa vastauksessa toistuvia virheitä, sekä nostaa esiin yksittäisiä virheitä. Viimeisenä käydään läpi sitä, miten esiin tulleita virheitä voitaisi välttää lukion opetuksessa. Käsitellään sitä, miten esimerkiksi opetuspuheessa tai opetussuunnitelmassa voitaisi ehkäistä virheitä, sekä esitellään erilaisia tehtävätyyppejä, joita opetuksessa tulisi käsitellä virheiden ehkäisemiseksi.

# Luku 2

## Teoriaosuus

### 2.1 Matematiikan ymmärtäminen

Tutkielmassa tarkasteltavat tehtävät testaavat opiskelijan ymmärrystä lukion matematiikan eri aiheista. Tehtävissä ei riitä pelkkä mekaaninen laskeminen, vaan opiskelijan tulee osata kertoa sekä perustella, mitä tehtävässä tehdään ja miksi. Käydään seuraavaksi läpi tällaisten tehtävien taustaa sekä sitä, millaisia taitoja sanallinen perustelu matematiikassa vaatii.

Lukiossa ilmenevät ymmärtämisen ongelmat johtuvat usein virheistä varhaisessa matematiikan ymmärtämisessä [14]. Ilman perusasioiden hallintaa vaativampien aiheiden ymmärtäminen on lähes mahdotonta. Jotta lukiolainen osaisi laatia matematiikassa sanallisia perusteluja, tulisi matemaattisten termien ja sisältöjen ymmärrys olla riittävän hyvällä tasolla. Perusteleminen on matematiikan soveltamista, mikä edellyttää rakenteiden ymmärtämistä sekä abstraktin ja symbolisen tiedon yhdistämistä realistisiin asioihin [1]. Tämä vaatii opettajalta opittavien asioiden havainnollistamista monipuolisesti, jotta uudet käsitteet ja asiat voidaan sisäistää aiemmin opittujen asioiden pohjalta. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että matematiikan opettajan tulisi käsitellä uusia aiheita erilaisten esimerkkien ja kattavan sanallistamisen kautta. Opettajan tulisi myös olla tarkka omissa sanavalinnoissaan ja perusteluissaan, jotta opiskelijat osaavat jatkossa käyttää itse oikeita termejä ja perusteluja.

Eräs tapa selvittää opiskelijoiden ymmärrystä sekä osaamista on seurata opiskelijan ongelmanratkaisuprosessia sekä pyytää häntä kertomaan sanallisesti ratkaisun vaiheistaan [14]. Jos opiskelija on vain opetellut ulkoa erilaisia kaavoja, mutta ei osaa kertoa tekemistään välivaiheista, jää osaamisesta

uupumaan asioiden ymmärrys. Opettaja voi esimerkiksi käydä jonkin tehtävän läpi yhdessä koko ryhmän kanssa pyytämällä opiskelijoita kertomaan laskuvaiheistaan sekä perustelevaan ne.

## 2.2 Opetussuunnitelman näkökulma

Tarkastellaan vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmaa, sillä tutkielmassa käsiteltävät tehtävät perustuvat tähän. Vuoden 2015 lukion opetussuunnitelmassa [3] esiintyy sanallisten perusteluiden merkitys eri tavoin. Opetussuunnitelman perusteissa on mainittu päätelmien ja tehtävien perustelu osana matematiikan osaamista. Arvioinnissa tulisi opetussuunnitelman mukaan kiinnittää huomiota päätelmien täsmälliseen ja johdonmukaiseen perustelemiseen. Opiskelijan tulisi siis osata perustella omia ajatuksiaan, eikä pelkkä mekaaninen laskeminen täytä arvioinnin kriteereitä.

Pitkän matematiikan opiskelijan tulisi opetussuunnitelman perusteiden mukaan oppia laatimaan ja arvostamaan perusteluja sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä. Lyhyen matematiikan osalta perusteluiden tärkeyttä ei suoranaisesti korosteta, mutta mainitaan, että opiskelijan tulisi sisäistää matematiikan merkitys välineenä, jolla ilmiöitä voi kuvata sekä selittää ja jota voidaan käyttää johtopäätösten tekemisessä. Ero pitkän ja lyhyen matematiikan välillä näkyy myös ylioppilaskokeissa, joissa sanallisia perusteluja vaativia tehtäviä löytyy huomattavasti vähemmän lyhyen matematiikan kokeissa.

Sekä opetussuunnitelman että aiempien tutkimusten mukaan perustelu on tärkeä osa matematiikan osaamista. Lukio-opiskelijat kuitenkin herkästi turvautuvat ulkoa opettelemiseen, koska matematiikan oppimäärä sisältää huomattavan paljon erilaisia aiheita. Jos matematiikan osaaminen perustuu ulkoa opeteltuihin asioihin sekä laskinohjelmistoihin turvautumiseen, voi sanallinen perustelu olla todella hankalaa ja jopa mahdotonta. Matematiikan opetuksessa tulisikin korostaa asioiden ymmärtämistä ja sitä, kuinka paljon ymmärtäminen merkitsee tulevien aiheiden oppimisessa.

## 2.3 Matematiikan kielentäminen

Käsitellään kielentämistä matematiikan opetuksessa ja opiskelussa lähteiden [11] ja [12] näkökulmasta.

Jos tarkastellaan lukio-opiskelijoiden laskutehtäviä, sisältävät ne pääosin

lausekkeita, laskutoimituksia sekä tuloksia eli yleisesti tehtävien esitystapa on melko niukka ja täsmällinen. Jos opiskelijalla ei ole minkäänlaista sanallista ilmaisua tehtävissä, tulee lukijan arvailla ajattelua pelkkien lausekkeiden perusteella. Jotta ajatusprosessia voi ymmärtää, tulee laskutoimitusten ja lausekkeiden olla todella täsmällisiä. Tätä on erityisesti tarkasteltu matematiikan ylioppilaskokeissa, ja huomattukin puutteita opiskelijoiden argumentointitaidoissa. Kielentäminen olisi siis matematiikan opiskelun ja oppimisen kannalta todella tärkeää.

Matematiikan kielentämisen tarkoituksena on painottaa matemaattisen ajattelun kehittämistä. Matemaattinen ajattelu voidaan määritellä useilla eri tavoilla, mutta yleisesti sitä voidaan ymmärtää matemaattisen tiedon prosessointina, joka toimii omien kognitiivisten taitojen ymmärtämisen perusteella. Matematiikan opiskelussa siis kielen tehtävä on auttaa opiskelijaa jäsentämään omaa ajatteluaan sekä välittämään sitä muille. Käytettävä kieli voi olla luonnollista kieltä eli puhe- ja kirjoitettua kieltä, kuviokieltä eli graafeja ja kuvioita tai matematiikan symbolikieltä.

Matematiikan opiskelu lähtee liikkeelle uusien käsitteiden opiskelusta. Käsite muodostuu aina sisällöstä ja ilmaisusta, jonka lähtökohtana on opiskelijan olemassa oleva merkityksellinen tieto ja taito. Opetuksen aikana opiskelija siis luo aiemman tiedon pohjalta mallin uudesta käsitteestä sen perusteella, millaisten esimerkkien ja muun materiaalin avulla käsite esitellään.

Kun opiskelija pyrkii ilmaisemaan oppimaansa käsitettä ja sen sisältöjä, tulee hänen osata kielentää tätä. Kielentäminen vaatii käsitteen piirteiden pohtimista sekä oman matemaattisen ajattelun jäsentämistä siten, että asian voi ilmaista selkeästi. Kun opiskelijat pystyvät näin kielentämään omaa käsitystään uudesta käsitteestä, he voivat peilata toistensa käsityksiä keskenään ja muovata täten omia käsityksiään sopiviksi.

Opettajan tehtävänä on suunnitella opetus sellaiseksi, että materiaalit, esimerkit ja opetuspuhe tukevat opiskelijoiden kielentämistä. Jos opettaja kannustaa opiskelijoita jäsentämään aiheita omin sanoin, voi opettaja selvittää opiskelijoiden ajatuksia aiheista. Suurissa opetusryhmissä on kuitenkin mahdollonta kuulla kaikkien ajatuksia ääneen, joten opettajan tulee myös ohjata tehtävien selostamiseen. Kun opiskelija tekee tehtäviä, tulisi hänen lisätä paljon väliotsikoita, selityksiä siitä, mitä seuraavaksi tapahtuu, miksi tapahtuu ja mitä tuloksista voi päätellä. Tällaisten välitekstien avulla opettaja pystyy arvioimaan jokaisen opiskelijan ajatteluprosessia ja ajattelun oikeellisuutta, sekä seuraamaan helpommin tehtävien kulkua. Tämä on myös merkittävää

opiskelijan oman oppimisen kannalta, koska tehtävien sanoittaminen jäsentää opiskelijan omaa ajattelua ja opiskelijan matematiikan ymmärrys voi kehittyä.

Kielentäminen kehittää siis opiskelijan matemaattista ajattelua todella merkittävällä tavalla sekä antaa opettajalle parempia valmiuksia arvioida opiskelijoita siitä näkökulmasta, miten hyvin asiat on ymmärretty. Parhaassa tapauksessa opiskelijat voivat myös oppia toistensa ajatteluprosesseista uusia näkökulmia sekä kyseenalaistaa ja haastaa toistensa ajatuksia.

## 2.4 Matemaattinen teoria

Tutkielmassa tarkasteltavat ylioppilaskoetehtävät ovat sekä pitkän että lyhyen matematiikan eri aiheista, kuten polynomeista, prosenttilaskennasta ja matemaattisesta tekstistä. Käydään seuraavaksi läpi matematiikan tuloksia, jotka liittyvät tehtävien sisältöihin. Määritelmät, lauseet ja todistukset ovat lähteistä [10], [13], [5] ja [2].

### 2.4.1 Rationaalifunktio

Lauseke kuvaajasta-tehtävässä tarkastellaan rationaalifunktiota ja sen kuvaajaa. Määritetään, mikä on rationaalifunktio.

**Määritelmä 2.4.1.** Rationaalifunktio esitetään muodossa  $\frac{p}{q}$ , missä  $p$  ja  $q$  ovat polynomeja. Funktion määrittelyjoukon muodostavat ne muuttujan  $x$  arvot, joilla  $q(x) \neq 0$ .

### 2.4.2 Asymptootti

Laske kuvaajasta-tehtävässä opiskelijan tulee hyödyntää annetun funktion asymptoottia ratkaistakseen tehtävän. Määritellään seuraavaksi pystysuora asymptootti tehtävän ymmärtämiseksi.

**Määritelmä 2.4.2.** **Asymptootti** on suora tai jokin muu käyrä, jota funktion kuvaaja lähestyy muuttujan  $x$  lähestyessä jotain lukua tai ääretöntä.  $x = a$  on funktion  $f$  pystysuora asymptootti, jos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

tai

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

### 2.4.3 Polynomin tulomuoto

Polynomiepäyhtälö-tehtävässä opiskelijan tulee osata hyödyntää polynomifunktion tulomuotoa. Tarkastellaan, miten lukion pitkän matematiikan kursilla 2 aihetta käsitellään.

**Lause 2.4.3.** *Lauseke  $x - a$  on polynomin  $p$  tekijä, jos ja vain jos  $x = a$  on polynomin  $p$  nollakohta.*

*Todistus.* Polynomi  $p$  voidaan esittää muodossa

$$p(x) = q(x)(x - a) + r,$$

missä osamäärä  $q$  on polynomi ja jakojäännös  $r$  on reaaliluku. Oletetaan, että  $a$  on polynomin  $p$  nollakohta. Tällöin

$$p(a) = 0$$

$$q(a)(a - a) + r = 0$$

$$q(a) \cdot 0 + r = 0$$

$$r = 0$$

Jakojäännös  $r$  on nolla, joten  $p(x) = q(x)(x - a)$  eli  $x - a$  on polynomin  $p$  tekijä.

Oletetaan seuraavaksi, että  $x - a$  on polynomin  $p$  tekijä. Tällöin

$$p(x) = q(x)(x - a)$$

ja

$$p(a) = q(a)(a - a) = q(a) \cdot 0 = 0$$

Luku  $a$  on siis polynomin  $p(x)$  nollakohta. □

### 2.4.4 Jakoalgoritmi

Polynomien jakoalgoritmi-tehtävässä opiskelijalta vaaditaan jakoalgoritmin käyttämistä sekä selittämistä sanallisesti.

Polynomi  $p$  on jaollinen polynomilla  $q$ , jos on olemassa sellainen polynomi  $b$ , jolla  $p(x) = q(x) \cdot b(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Tällöin  $q$  ja  $b$  ovat polynomin  $p$  tekijöitä.

$$\begin{array}{r|l}
& 3x + 4 \\
\hline
2x - 1 & 6x^2 + 5x - 4 \\
& - \quad 6x^2 - 3x \\
& \quad \quad \quad \text{-----} \\
& \quad \quad \quad 8x - 4 \\
& - \quad \quad \quad 8x - 4 \\
& \quad \quad \quad \text{-----} \\
& \quad \quad \quad 0
\end{array}$$

Kuva 2.1: Jakokulma

Polynomeja voidaan jakaa esimerkiksi jakokulmassa. Tarkastellaan esimerkiksi kuvaa 2.1, jossa lasketaan  $\frac{6x^2+5x-4}{2x-1}$  jakokulmassa, kun  $x \neq \frac{1}{2}$ .

Jakokulman sisään sijoitetaan jaettava polynomi ja ulkopuolelle jakaja. Jaetaan ensin jaettavan korkeimman asteen termi jakajan korkeimman asteen termillä. Esimerkissä tämä on siis  $\frac{6x^2}{2x} = 3x$  ja kirjoitetaan saatu termi jakokulman yläpuolelle.

Seuraavaksi kerrotaan jakajan termit tällä saadulla termillä  $3x$  ja vähennetään jaettavasta polynomista  $6x^2 + 5x - 4$  saatu tulos eli  $6x^2 - 3x$ . Saatu erotus merkitään omalle rivilleen.

Aloitetaan prosessi alusta eli jaetaan tämän uuden tuloksen korkeimman asteen termi jakajan korkeimman asteen termillä ja edetään kuten aiemmin. Jakojäännökseksi jää lopulta 0, joten polynomi  $6x^2 + 5x - 4$  on jaollinen polynomilla  $2x - 1$  ja osamäärä on  $3x + 4$ .

## 2.4.5 Määritelmä, lause ja todistus

Matemaattista tekstiä-tehtävässä opiskelijan tulee ymmärtää, mitä matemaatiikassa ovat määritelmä, lause ja todistus.

Määritelmä antaa jonkin matemaattisen käsitteen sisällölle nimen sekä mahdollisen symbolin. Määritelmien avulla voidaan muodostaa erilaisia väitelauseita.

Väitelauseella pyritään ilmaisemaan jokin yleinen tosiseikka. Lauseessa on

yleensä oletus tai oletuksia, joiden nojalla tehdään jokin väite. Väite liitetään teorian aksiomajärjestelmään todistuksen avulla, jolloin väitelause on tosi. Lause on usein muodoltaan implikaatio  $p \Rightarrow q$ .

Todistuksen avulla osoitetaan annettuja väitelauseita tosiksi aksiomien, päätelyn ja aiemmin todistettujen lauseiden avulla. Todistus siis antaa lukijalle yksityiskohdat, joiden avulla tämä voi olettaa väitteen todeksi. Todistus etenee yleensä seuraavalla tavalla:

Oletetaan  $p$ .

Silloin  $q$ .

Siis  $p \Rightarrow q$ .

$p$  on oletus, jota käsitellään totena. Jos lopputulokseen  $q$  päästään suorittamalla sääntöjen mukaisia askelia, niin väitelause voidaan katsoa todistetuksi.

# Luku 3

## Tutkimuksen toteutus

Tässä tutkimuksessa on tavoitteena selvittää, että millaisia virheitä ja virhekäsityksiä sekä pitkän että lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa ilmenee. Erityisesti tutkitaan tehtäviä, joissa vaaditaan opiskelijoilta perusteluja tai muuta sanallista selitystä.

Aineistona tutkimuksessa käytetään Ylioppilastutkintolautakunnan luovuttamia ratkaisuja pitkän ja lyhyen matematiikan ylioppilastehtävistä. Tehtäviä on yhteensä viisi, ja jokaisesta tehtävästä aineistona on 100 kappaletta satunnaisia ja anonyymeja kokelasratkaisuja. Tehtävät valittiin tutkimukseen vuosilta 2019-2021, koska haluttiin sähköisten kokeiden vastauksia. Sähköiset kokeet ovat myös mahdollistaneet pidempiä sanallisia vastauksia vaativia tehtäviä, jotka ovat oleellisia tämän tutkimuksen kannalta. Tutkimuksessa pyritään vastaamaan seuraaviin tutkimuskysymyksiin:

1. Millaisia virheitä matematiikan ylioppilaskokeissa esiintyy tehtävissä, joissa vaaditaan sanallisia perusteluja?
2. Miten esiin tulleita virheitä voitaisiin ehkäistä matematiikan opetuksessa lukiossa?

Tutkimuksessa tarkastellaan aluksi valittuja tehtäviä ja niiden ratkaisutapoja. Tämän lisäksi tehtäviä arvioidaan opetussuunnitelman pohjalta, ja pohditaan sitä, ohjaavatko tehtävänannot jotenkin tietynlaisiin virheisiin. Tämän jälkeen tutkitaan saatua aineistoa ja luokitellaan aineistosta virheitä ja niiden määriä. Lisäksi analysoidaan tarkemmin jokaisessa tehtävässä esiin tulleita virheitä.

Lopuksi tarkastellaan nykyistä opetussuunnitelmaa sen pohjalta, onko tutkielmassa esiin tulleita virheitä mahdollista välttää sen avulla. Lisäksi käsitellään sitä, miten matematiikan opetuksessa voitaisiin ehkäistä esiin tulleita virheitä. Apuna on erilaisia tehtävätyyppejä, joiden avulla virheitä voitaisiin ehkäistä jo opetuksen aikana.

# Luku 4

## Tehtävien esittely

Ainestoon valittujen tehtävien tehtävänannot sekä apua ratkaisuehdotuksiin on otettu Ylen Abitreenit-sivulta [15].

### 4.1 Pitkä matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 4: Lauseke kuvaajasta (12 p.)

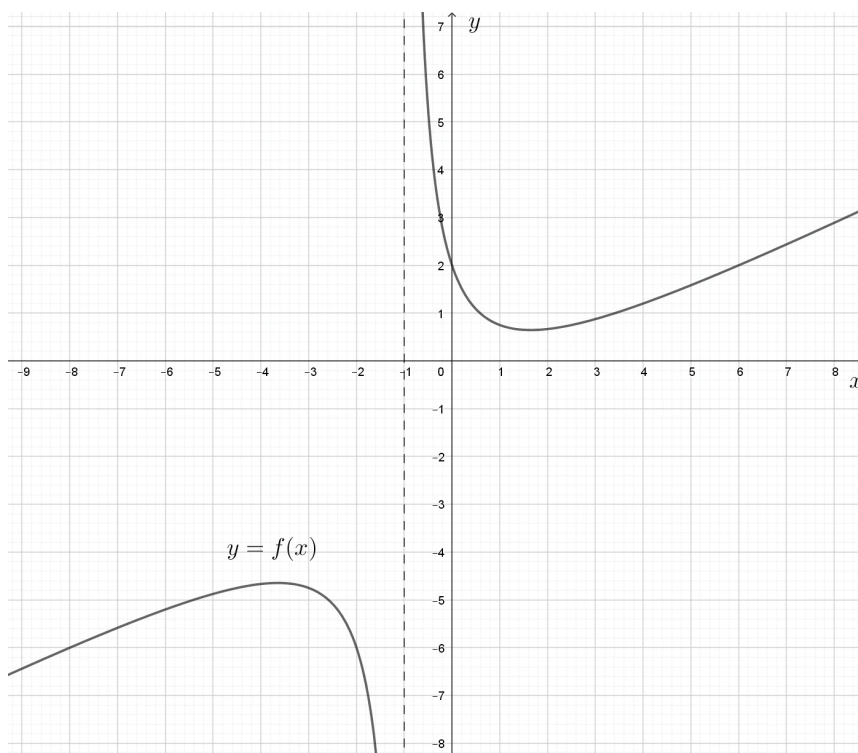
#### 4.1.1 Tehtävänanto

Kuvassa 3.1 on esitetty muotoa

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$$

olevan funktion kuvaaja  $y = f(x)$ , kun kertoimet  $a, b, c$  ja  $d$  ovat kokonaislukuja.

Päättele kuvaajan perusteella kertoimien arvot ja selitä sanallisesti, miten päädyit ratkaisuun.



Kuva 4.1: Kuvaaja

### 4.1.2 Ratkaisuehdotus

Kuvaajalla on pystysuora asymptootti kohdassa  $x = -1$ , ja tällöin nimittäjä on nolla eli  $2 \cdot (-1) + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$ .

Kuvaajasta nähdään, että kun  $x = 0$ , funktion arvo on 2 eli  $\frac{a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c}{2 \cdot 0 + d} = 2 \Leftrightarrow \frac{c}{d} = 2 \Leftrightarrow \frac{c}{2} = 2 \Leftrightarrow c = 4$ .

Kuvaajasta nähdään, että  $f(6) = 2$  ja  $f(-2) = -6$ . Näistä tiedoista muodostamalla ja ratkaisemalla yhtälöpari

$$\begin{cases} \frac{a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 4}{2 \cdot 6 + 2} = 2 \\ \frac{a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + 4}{2 \cdot (-2) + 2} = -6 \end{cases}$$

saadaan  $a = 1$  ja  $b = -2$ .

Kertoimien arvot ovat siis  $a = 1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 4$  ja  $d = 2$ .

### 4.1.3 Tehtävän arviointi

Tehtävä liittyy vuoden 2015 opetussuunnitelman MAA6-kurssiin, jolla käsitellään rationaalifunktiot. Opetussuunnitelman mukaan kurssin tavoitteena on osata määrittää rationaalifunktion nollakohdat sekä käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa. Tämän lisäksi kurssin oppikirjassa Juuri 6 [7] määritellään rationaalifunktion lauseke sekä mainitaan tämän määrittelyehto. Kirjan esimerkeistä löytyy myös tämän tehtävän kaltainen rationaalifunktio, mutta kyseisessä esimerkissä ei käsitellä juurikaan funktion kuvaajaa.

Tehtävä vaatii opiskelijaa huomaamaan, että kyseessä on rationaalifunktio, jonka osoittaja on toisen asteen yhtälö ja nimittäjä ensimmäisen asteen yhtälö. Tehtävänanto ohjaa opiskelijaa tarkastelemaan erityisesti funktion kuvaajaa, ja selvittämään sen avulla kertoimet  $a, b, c, d$ . Tehtävänannossa kerrotaan, että kertoimet ovat kokonaislukuja eli se auttaa opiskelijaa siinä määrin, millaisia vastauksia tehtävästä tulisi saada. Opiskelijan tulisi siis tietää tehneensä virheen, jos kertoimista tulee jotain muuta kuin kokonaislukuja.

Tehtävä on kokeen A-osassa, joten opiskelijalla ei ole apunaan juurikaan laskinohjelmistoja. Tehtävän tarkoitus on siis testata opiskelijan yleistä funktioiden hallintaa sekä kuvaajan ymmärrystä. Tehtävä vaatii myös melko yksinkertaista mekaanista laskemista.

Tehtävänanto ei suoraan vaikuta virhekäsityksen syntyyn, jos opiskelija on lukenut tehtävänannon huolellisesti ja osaa myös palata tarkastelemaan sitä saatuaan ratkaisun aikaiseksi. Virheitä voi kuitenkin sattua tapauksissa, joissa opiskelija ei ymmärrä, miten rationaalifunktio käyttäytyy. Myös funktion määrittelyehdoissa voi esiintyä virheellistä ajattelua.

## 4.2 Lyhyt matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 11: Harrin palkka (12 p.)

### 4.2.1 Tehtävänanto

Harri saa palkkaa 4200 euroa kuukaudessa ja hänen työmääränsä on 155 tuntia kuukaudessa. Hän arvioi tuntipalkkaansa seuraavalla tavalla: Jos työtuntimääräni olisi 160 tuntia ja palkkani 4000 euroa, niin tuntipalkkani olisi  $4000/160 = 25$ . Tässä ei ole otettu huomioon 200 euroa palkasta, joten virhe on runsas euro tuntia kohti; palkka on siis runsaat 26 euroa. Todellinen työtuntimäärä on 155, ei 160 ja siitä tulee varmaankin pieni virhe, joten to-

dellinen tuntipalkka on ehkäpä 27 euroa.

11.1 Kuinka monta prosenttia enemmän tai vähemmän Harri arvioi saavansa palkkaa tunnilta kuin hän oikeasti saa? (4 p.)

11.2 Selitä Harrin päättelyn vaiheita ja arvioi, perustuuko päättely päteviin arvioihin. (8 p.)

### 4.2.2 Ratkaisuehdotus

11.1 Harrin arvion mukaan hänen kuukausipalkkansa olisi  $155 \cdot 27 = 4185$ . Verrataan todellisen palkan 4200 ja arvioidun palkan erotusta todelliseen palkkaan:  $\frac{4200-4185}{4200} = \frac{15}{4200} = 0,003571\dots$

Harri arvioi saavansa 0,36% vähemmän palkkaa kuin hän oikeasti saa.

11.2 Harri laskee aluksi, mikä hänen tuntipalkkansa olisi, jos työtunteja olisi 160.

Hän arvioi  $\frac{4200}{160} = \frac{4000}{160} + \frac{200}{160} = 25 + 1,25 = 26,25$ , joten arvio on oikea.

Seuraavaksi hän huomioi, että tämä tulos tulisi kertoa luvulla  $\frac{160}{155}$ , jotta hän saisi oikean tuntipalkan. Hän käyttää tässä arviota  $\frac{160}{155} \approx \frac{27}{26}$ . Tämä arvio on melko hyvä, sillä  $\frac{27}{26} = \frac{162}{156}$ .

Harrin selitys perustuu siis melko päteviin arvioihin.

### 4.2.3 Tehtävän arviointi

Tehtävässä tarvitaan prosenttilaskentaa, jota käsitellään matematiikan yhteisellä opintokokonaisuudella MAY1-kurssilla. Opintosuunnitelmassa tämän kurssin sisältöihin kuuluu prosenttilaskennan periaatteiden kertaus. Tehtävän voisi siis osata laskea myös yläkoulun taidoilla, mutta arviointia vaativa tehtävän osa vaatii tarkempaa yleistä matemaattista osaamista. Tehtävässä ei ole apua laskinohjelmistoista, koska vaadittavat laskut ovat simpeleitä, ja arviointia ei voi tehdä laskimella.

11.1 on selkeä tehtävänanto, jonka tulisi olla melko suoraviivainen opiskelijalle laskea. Tässä on mahdollisuus huolimattomuusvirheille, vaikka yksinkertainen prosenttilaskenta olisikin hallussa. Jos prosenttilaskentaa tai prosentin käsitettä ei hallitse, voi tässäkin osassa tehtävä esiintyä virhekäsityksiä.

11.2 antaa tehtävänantona opiskelijalle melko paljon vapauksia arvioida Harrin päättelyä eri tavoin. Tässä tehtävänannossa opiskelijan tulee ymmärtää, että päättelyketju tulisi avata melko yksinkertaisiksi laskutoimituksiksi, jolloin päättelystä voi tehdä myös oikeanlaisen arvion. Virheitä voi esiintyä siinä, kuinka Harrin päättelyä selitetään, ja kuinka Harrin valitsemat luvut ymmärretään.

## 4.3 Pitkä matematiikka, Syksy 2019, tehtävä 5: Polynomiepäyhtälö (12 p.)

### 4.3.1 Tehtävänanto

Ratkaise epäyhtälö  $x^3 - 2x^2 - 11x + 12 \geq 0$ . Voit käyttää esimerkiksi laskinohjelmistoa. Selitä sanallisesti, miten polynomifunktion tulomuotoa  $p(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$  voidaan käyttää epäyhtälön  $p(x) \geq 0$  ratkaisemiseen, kun  $a < b < c$ .

### 4.3.2 Ratkaisuehdotus

Epäyhtälö voidaan ratkaista laskinohjelmiston avulla

$$\text{solve}(x^3 - 2 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 12 \geq 0, x) \quad -3 \leq x \leq 1 \text{ or } x \geq 4$$

Polynomifunktion tulomuodosta nähdään sen nollakohdat, jotka ovat  $a, b, c$ . Voidaan siis tehdä kulkukaavio

	a	b	c	
$(x-a)(x-b)(x-c)$				

Sijoittamalla funktion testipisteet  $d < a$ ,  $a < e < b$ ,  $b < f < c$  ja  $g > c$  saadaan kulkukaavioon merkit, joista nähdään, millä väleillä  $p(x) \geq 0$ .

### 4.3.3 Tehtävän arviointi

Tehtävässä käsiteltävä polynomiepäyhtälö käydään läpi kurssilla MAA2 Polynomifunktiot ja -yhtälöt. Opetussuunnitelman mukaan opiskelijan tulisi

osata ratkaista yksinkertaisia polynomiepäyhtälöitä sekä osata käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiepäyhtälöiden ratkaisussa.

Kurssin oppikirjassa Juuri 2 [5] käsitellään yhtälön tulomuotoa sekä tekijöitä, ja sitä, että yhtälön merkki voi vaihtua vain nollakohdissa. Näitä tarkastelemalla opiskelijan tulisi siis pystyä selittämään tulomuodon merkitys epäyhtälön ratkaisussa.

Tehtävä on kokeen B1-osassa, joten siinä saa käyttää apuna laskinohjelmistoa, joiden avulla epäyhtälön voi ratkaista. Tehtävänannossa myös mainitaan laskinohjelmistojen käyttö epäyhtälön ratkaisemisessa eli opiskelija saa laskea alun epäyhtälön suoraan ohjelmistolla. Tässä osassa ei tulisi myöskään näkyä opiskelijan virhekäsityksiä liittyen epäyhtälöihin, koska vastauksen voi antaa suoraan laskimesta ilman perusteluja.

Tehtävän soveltava osa voi olla hieman harhaanjohtava, jos opiskelija ajattelee, että hänen tulee käyttää alun polynomia osana selitystä. Opiskelijoille voi myös olla haastavaa ymmärtää kysyttyä asiaa ilman konkreettisia lukuja. Tässä heräsi ajatus siitä, että kuuluuko kurssin MAA2 sisältöihin tämänkaltaiset tehtävät, joissa käytetään kirjainkertoimia. Tällaisia tehtäviä löytyy Juuri 2-kirjasta [5] vain syventävissä tehtävissä. Ongelmana tässä on se, että opiskelija, jolla on haasteita perustehtävissäkin, ei koskaan pääse tekemään syventäviä tehtäviä, sillä tällaisia ei yleensä käsitellä myöskään oppituntien aikana. Tämän tyyppinen tehtävänanto ilman konkreettisia lukuja saattaa siis tulla esiin ensimmäistä kertaa ylioppilaskokeessa, jolloin opiskelija joko turvautuu joihinkin konkreettisiin lukuihin tai jättää tehtävän tekemättä.

## 4.4 Pitkä matematiikka, Kevät 2020, tehtävä 8: Polynomien jakoalgoritmi (12 p.)

### 4.4.1 Tehtävänanto

Polynomien jakoalgoritmilla voi jakaa esimerkiksi polynomin

$$p(x) = x^6 - 4x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4$$

polynomilla  $q(x) = x^2 - 3x + 1$ . Tässä on suoritettu jakoalgoritmin ensimmäiset vaiheet:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 q(x) + 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \\ &= (x^4 + 3x^3)q(x) + 4x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 4 \end{aligned}$$



keskenään sekä jakoyhtälö, jossa on jakojäännös, kuten tässä tehtävässä. Oppikirjassa käsitellään myös jakoalgoritmi vaihe vaiheelta sekä allekkain että jakokulmassa.

Tehtävänanto ei ohjaa ohjelmistojen käyttöön, eikä tässä myöskään voi hyödyntää mitään ohjelmistoa, paitsi vastauksen tarkastamisessa.

Tehtävänanto on selkeä, mutta jakoalgoritmi on erilainen kuin oppikirjoissa, joten tämä voi hämmentää opiskelijoita. Opiskelijan tulisi siis ymmärtää, mikä on jakoalgoritmi, jolloin hän näkee, miten sitä on tehtävänannossa käytetty. Jos jakoalgoritmin käyttöä ei muista tai osaa, tehtävään saatetaan vastata arvaamalla, mitä algoritmin ensimmäisissä vaiheissa on tehty. Tehtävässä voi esiintyä virhekäsityksiä myös esimerkiksi eri asteisten muuttujien kerto- ja jakolaskuissa.

## 4.5 Pitkä matematiikka, Kevät 2021, tehtävä 10: Matemaattista tekstiä (12 p.)

### 4.5.1 Tehtävänanto

Matemaattinen teksti rakentuu mm. käsitteiden määritelmistä, yleisesti pätevistä tuloksista (lauseet), tulosten todistuksista ja erikoistapauksiin sovelletuista laskuista (esimerkit).

1. Valitse alla olevan aineiston kunkin tekstin (a)–(c) kohdalla, onko kyseessä määritelmä, lause, todistus vai esimerkki. Vastauksia ei tarvitse tässä kohdassa perustella. (3 p.)
2. Minkä lauseen kohdassa 1 valitsemasi todistus osoittaa todeksi? Muotoile lauseen sisältö täsmällisesti niin, että sen yhteys todistukseen käy ilmi. (4 p.)
3. Kohdassa 1 valitsit yhden tekstin lauseeksi. Todista tämä lause. (5 p.)

a) Olkoon  $ABC$  kolmio, jonka sivujen pituudet  $a$ ,  $b$  ja  $c$  toteuttavat ehdon  $a^2 + b^2 = c^2$ . Tarkastellaan toista kolmiota, joka on suorakulmainen ja jonka kateettien pituudet ovat  $a$  ja  $b$ . Pythagoraan lauseen mukaan tämän toisen kolmion hypotenuusan pituus on  $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2} = c$ , joka on sama kuin ensimmäisen kolmion kolmannen sivun pituus. Koska molempien kolmioiden sivujen pituudet ovat samat  $a$ ,  $b$  ja  $c$ , niin kolmiot ovat yhtenevät. Näin ollen kolmioiden kulmat ovat samat ja erityisesti sivujen  $a$  ja  $b$  välinen kulma on

molemmissa kolmioissa suora.

b) Olkoon  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Positiivisen luvun  $x$   $a$ -kantainen logaritmi  $\log_a x$  on luku johon kantaluku  $a$  on korotettava, jotta saadaan luku  $x$ , toisin sanoen

$$a^{\log_a x} = x, x > 0.$$

c) Jos positiivisen kokonaisluvun  $n$  numeroiden summa on jaollinen kolmella, niin myös luku  $n$  on jaollinen kolmella.

### 4.5.2 Ratkaisuehdotus

1. a) todistus, b) määritelmä ja c) lause
2. Todistus a) osoittaa sen, että jos kolmion sivujen pituudet  $a, b, c$  toteuttavat ehdon  $a^2 + b^2 = c^2$ , niin kolmio on suorakulmainen.
3. *Todistus.* Olkoon luku  $n$  muotoa  $n = a_n \cdot 10^n + a_{n+1} \cdot 10^{n+1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ .  
Luku  $n$  on jaollinen kolmella, kun  $n \equiv 0 \pmod{3}$ .  
Koska  $10 = 3 \cdot 3 + 1$ , niin  $10 \equiv 1 \pmod{3}$ , kongruenssin laskusääntöjen mukaan pätee  
$$\begin{aligned} n &= a_n \cdot 10^n + a_{n+1} \cdot 10^{n+1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \equiv a_n \cdot 1^n + a_{n+1} \cdot 1^{n+1} + \\ &\dots + a_1 \cdot 1^1 + a_0 \cdot 1^0 \\ &\equiv a_n + \dots + a_0 \pmod{3}. \end{aligned}$$
  
Luvulla  $n$  ja sen numeroiden summalla on siis sama jakojäännös, kun tutkitaan kolmella jaollisuutta. Täten väite on todistettu.  $\square$

### 4.5.3 Tehtävän arviointi

Tämän tehtävän kohdalla opetussuunnitelman sisällöistä löytyy ainoastaan todistusperiaatteisiin tutustumista kurssilla MAA11 Lukuteoria ja todistaminen. Opetussuunnitelman mukaan opiskelijan tulisi osata lukea matemaattista tekstiä, joten opettajan vastuulla on opettaa, mitä lause ja määritelmä tarkoittavat. Oppikirjoissa ei ole selkeää kohtaa, joissa olisi selitetty, mitä ovat määritelmä ja lause. Tehtävässä esitellyt määritelmä, lause ja todistus ovat kuitenkin tuttuja matematiikan kurssien sisällöistä, joten tarkastellaan myös niitä.

a)-kohdan todistus liittyy kurssiin MAA3 Geometria, sillä siinä todistetaan

Pythagoraan lause suorakulmaisille kolmioille. Opetussuunnitelmassa mainitaan Pythagoraan lause osana keskeisiä sisältöjä. Oppikirjassa Juuri 3 [6] käsitellään myös kolmioiden yhtenevyys, jota a)-kohdan todistuksessa on apuna käytetty. Lause on siis tuttu, mutta itse todistus voi tulla ensimmäistä kertaa esiin tätä tehtävää tehdessä.

c)-kohdan lause on osa kurssin MAA11 Lukuteoria ja todistaminen sisältöä, sillä opetussuunnitelman mukaan opiskelijan tulisi kurssilla osata tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kongruenssin avulla. Lauseen todistus löytyy myös kokonaisuudessaan oppikirjasta Juuri 11 [8] eli ainakin tämä oppikirja antaa hyvät mahdollisuudet todistuksen osaamiseen.

Tehtävässä ei voi käyttää apuna juurikaan laskinohjelmistoja, koska se on kokeen A-osassa, joten se vaatii opiskelijalta matemaattista päättelyä, ongelmanratkaisua sekä syvää ymmärrystä tehtävän aiheista.

Tämä tehtävänanto on hieman outo ja aiheuttaa varmasti useita virhekäsityksiä opiskelijoiden ratkaisuisissa. Lauseen todistus on tehtävyyppinä hyvä ja selkeä kurssin MAA11 sisällöstä. Lauseen muodostaminen todistuksen perusteella on kuitenkin melko haastava lukion oppimäärän perusteella, jos kyseinen todistus ei ole ennestään tuttu.

Tehtävässä esiintyy todennäköisesti virheitä siinä, miten 1. kohdassa nimeää annetut tekstit. Lukio-opiskelijat myös saattavat ajatella, että todistuksena riittää jonkin yksittäisen tapauksen tai esimerkin esittäminen, jos todistamista ei ole harjoiteltu riittävän kattavasti tai syventäviä kursseja ei ole suoritettu. Lauseen muodostamisessa voi esiintyä virheitä siinä, miten todistuksesta ymmärretään todistettava asia.

# Luku 5

## Tutkimustulokset ja analysointi

### 5.1 Pitkä matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 4: Lauseke kuvaajasta

Virhetyyppi	Määrä (%)
Kertoimet ratkaistu hyödyntämällä 2. asteen yhtälön sääntöjä	35
Oikeita ratkaisuja	20
Kertoimet ratkaistu siten, että kuvaaja ajateltu paraabelina	11
Laskuvirheitä	10
Keskeneräisiä ratkaisuja	9
Kertoimille annettu monta mahdollista arvoa	3

Taulukko 5.1: Lauseke kuvaajasta

Tehtävässä yleisimpänä virheenä ilmeni se, että funktiota käsiteltiin toisen asteen funktiona. Kertoimet on näissä vastauksissa selvitetty toisen asteen funktion säännöin, ja perusteltu näillä omia ratkaisuja. Tehtävässä olevaa kuvaajaa on myös käsitelty paraabelin tavoin. Esimerkiksi joissain ratkaisuissa on perusteltu saatuja kertoimia paraabelin aukeamissuunnalla tai paraabelin huipun pisteellä.

Erityisen usein osoittajan kerroin määriteltiin suoraan sen perusteella, missä kuvaaja leikkaa  $y$ -akselin. Esimerkiksi " $c = 2$ , koska kuvaaja leikkaa  $y$ -akselin, kun  $y = 2$ ". Osassa ratkaisuista samaa perustelua oli sovellettu määrittämään kertoimia  $a$  tai  $b$ . Tämä on siis selkeästi yleisin virhe, jota ratkaisuissa esiintyy, ja syynä edellä mainittu virhekäsitys siitä, että koko rationaalifunktiota voi käsitellä toisen asteen funktion säännöin.

Tällaiset virheet voivat johtua siitä, että opiskelijalla on virheellinen käsitys siitä, mikä on rationaalifunktio ja kuinka se käyttäytyy. Opiskelija ajattelee voivansa tarkastella erikseen osoittajaa ja sen kertoimia sekä nimittäjää ja sen kertoimia. Kuvaajien tuntemuksessa on myös puutteita, jos opiskelija ei erota paraabelia ja hyperbeliä toisistaan. Koetilanteen tuottamassa paineessa opiskelija saattaa myös turvautua toisen asteen funktion tuttuihin sääntöihin ja kaavoihin ratkaistakseen kertoimet.

Joissain ratkaisuisissa on löydetty kertoimille erilaisia haarukoita, kuten esimerkiksi  $a > 0$  tai  $b < 4$ . Näitä on perusteltu diskriminantin sekä kuvaajan pisteiden avulla. Tehtävänannossa sanotaan selkeästi, että kertoimet ovat kokonaislukuja, joten tällaisissa ratkaisuisissa ei ole ymmärretty tehtävänantoa täysin. Ei ole myöskään ymmärrystä siitä, että on annettu yhden yksittäisen funktion kuvaaja, jolloin kertoimille on pakko löytää yksittäiset ratkaisut.

## 5.2 Lyhyt matematiikka, Kevät 2019, tehtävä 11: Harrin palkka

Virhetyyppi	Määrä (%)
Väärää arviota Harrin päätelmistä verrattu oikeaan palkkaan	20
Oikeita ratkaisuja	18
Laskuvirheitä	18
Selitetty Harrin päätelmiä hyvänä arvauksena	3
Otettu esiin Harrin mahdollisia bonuksia tms.	3

Taulukko 5.2: Harrin palkka

Tässä tehtävässä esiintyi eniten virheitä laskutoimituksissa. Näihin virheisiin ei tässä tutkielmassa kuitenkaan paneuduta tarkemmin, vaan keskitytään virheisiin päättelyssä ja arvioinnissa.

Eniten virheitä tapahtui tehtävän ensimmäisessä osassa, jossa Harrin arviota hänen palkastaan tuli verrata todelliseen palkkaan. Viideosassa vastauksista todellinen palkka oli laskettu oikein, mutta sitä oli verrattu Harrin päätelmissä esiintyvään 25 euroon eikä lopulliseen 27 euron päätelmään. Tämä voi johtua siitä, että Harrin päätelmiä ei ole tarkasteltu kokonaan tai ei olla ymmärretty, että 25 euron päätelmä on vain Harrin välietappi koko päätelmässä.

Tehtävän toisen osan useissa ratkaisuisissa ajateltiin, että Harri on arvannut

palkan lähes oikein, joten Harrin pohdinnat on jätetty tällaisissa vastauksissa huomiotta. Tässä syynä voi olla kiire kokeessa, epävarmuus Harrin pohdinnasta tai jopa laiskuus tarkastella Harrin pohdintoja tarkemmin.

Yleisesti ratkaisuihin oli melko pintapuolisia ja suppeita perusteluita Harrin pohdinnalle, joten selkeitä virhekäsityksiä oli hankala selvittää. Vain joissain ratkaisuihin opiskelijat ovat laskeneet Harrin päätelmiä auki, ja huomanneet, että mihin päätelmät oikeasti perustuvat. Näitä oli kuitenkin melko vähän. Tämän tehtävän analysointi jää siis todella suppeaksi sanallisten perusteluiden osalta, koska aineisto ei tähän materiaalia antanut.

### 5.3 Pitkä matematiikka, Syksy 2019, tehtävä 5: Polynomiepäyhtälö

Virhetyyppi	Määrä (%)
Yhdistetty tehtävän alun epäyhtälö perustelutehtävään	17
Oikeita ratkaisuja	12
Laskuvirheitä	12
Keskeneräisiä ratkaisuja	28
" $(x - a)(x - b)(x - c) \geq 0$ , kun $x - a \geq 0$ tai $x - b \geq 0$ tai $x - c \geq 0$ "	2

Taulukko 5.3: Polynomiepäyhtälö

Tämän tehtävän useissa ratkaisuihin on määritetty, miten voidaan ratkaista  $p(x) = 0$  tulomuodon avulla, mutta epäyhtälön ratkaiseminen on jätetty käsittelemättä. Tällöin opiskelija on siis ainoastaan huomannut, että voi hyödyntää tulon nollasääntöä määrittääkseen nollakohdat. Epäyhtälömerkki on usein tiputettu kokonaan ratkaisusta pois. Nämä ovat taulukossa siis keskeneräisiä ratkaisuja.

Ratkaisuihin oli myös yhdistetty tehtävän alussa oleva epäyhtälö tehtävän loppuosan päätelmään. Opiskelija ei siis ole tehnyt päätelmiään tuntemattomilla kertoimilla, vaan käyttänyt apunaan aiemmin annetun epäyhtälön tietoja. Opiskelija ei tässä tapauksessa välttämättä osaa toimia ilman konkreettisia lukuja, jolloin on helppoa turvautua tehtävän alun epäyhtälöön, joka sisältää haluttuja konkreettisia lukuja. Usein kurssien aikana käsitellään vain epäyhtälöitä, joissa on numeraalisia lausekkeita eikä tällaisia yleisiä, abstrakteja lausekkeita, mistä tämä virhe voisi johtua. Voi olla myös, että opiskelija on ymmärtänyt tehtävän siten, että tehtävän toisessa osassa

tulee käyttää alun epäyhtälöä.

Parissa vastauksessa oli todettu, että polynomiepäyhtälön voi ratkaista suoraan siten, että  $(x - a)(x - b)(x - c) \geq 0$ , kun  $x - a \geq 0$  tai  $x - b \geq 0$  tai  $x - c \geq 0$ . Epäyhtälö on siis ratkaistu tulon nollasäännön avulla, ja todettu tällaisen päättelyn riittävän suoraan. Tällaisen päättelyketjun tekevä opiskelija ei osaa erottaa epäyhtälön ja normaalin yhtälön sekä näiden toimintasääntöjen välisiä eroja.

## 5.4 Pitkä matematiikka, Kevät 2020, tehtävä 8: Polynomien jakoalgoritmi

Virhetyyppi	Määrä (%)
Oikeita ratkaisuja	35
Laskuvirheitä	27
Keskeneräisiä ratkaisuja	21
Jakoalgoritmia jatkettu lopullisen jakojäännöksenkin jälkeen jotenkin	6
Laskettu sulut auki ja saatu alkuperäinen polynomi	3

Taulukko 5.4: Polynomien jakoalgoritmi

Ratkaisuista noin kolmasosa oli tehty oikein, joten jakoalgoritmi ja sen vaiheet on selkeästi opiskeltu tosi hyvin. Osalla opiskelijoista, jotka osasivat algoritmin vaiheet oikein, esiintyi pieniä laskuvirheitä erityisesti jakoalgoritmin loppuosassa. Näistä ei tosin välttämättä ole menettänyt juurikaan pisteitä. Ratkaisunhan voisi tarkastaa kertomalla sulkeet auki ja sieventämällä polynomin. Jos sievennyksestä tulisi ratkaisuksi jotain muuta kuin alkuperäinen polynomi  $p$ , niin opiskelija tietäisi tehneensä virheen. Toisaalta kokeessa voi olla myös kiire siirtyä seuraavaan tehtävään, jolloin tarkastaminen jää tekemättä.

Useissa ratkaisuissa oli selitetty algoritmin alkuvaiheet oikein ja lähdetty ratkaisemaan sitä loppuun myös oikeilla tavoilla, mutta jätetty lopulta ratkaiseminen kesken. Tämä voi johtua kiireestä, tai siitä, että opiskelija ei tiedä, milloin algoritmi on valmis. Samasta syystä voi johtua ratkaisut, joissa algoritmia on pyritty laskemaan vielä jakojäännöksenkin jälkeen omilla mielenkiintoisilla keinoilla.

Yleisesti tämän tehtävän ratkaisuissa oli siis oikeita tai vähintään oikeanlaisia ratkaisuja, joten selkeitä virhekäsityksiä tähän tehtävään liittyen ei voida

tutkia. Jakoalgoritmi ei myöskään enää sisälly vuoden 2019 opetussuunnitelmaan, joten lukiolaiset eivät sitä enää ainakaan käsin opettele laskemaan.

## 5.5 Pitkä matematiikka, Kevät 2021, tehtävä 10: Matemaattista tekstiä

Virhetyyppi	Määrä (%)
Pelkkä 1. osa tehtävästä oikein	58
Todistuksesta muodostettu lause kolmioiden yhtenevyydelle	35
Lause todistettu esimerkkien avulla	20
Määritelmä merkitty lauseeksi	14
Täysin oikeita ratkaisuja	2

Taulukko 5.5: Matemaattista tekstiä

Yli puolessa ratkaisuista oli tunnistettu tekstit oikein, mutta vain kahdessa ratkaisussa oli osattu tehdä tehtävän toinen osa oikein. Toisen osan ratkaisuissa oli selkeitä virhekesityksiä, jotka toistuivat useissa ratkaisuisa. Opiskelijat ovat osanneet siis erottaa määritelmät, lauseet ja todistukset toisistaan erinomaisesti, mutta näiden käsittelyä ei ole harjoiteltu tarpeeksi. Kuten aiemmin on mainittu, tämä tehtävä on hieman outo, eikä tällaisiin tehtävätyypppeihin ole todennäköisesti paneuduttu kurssien aikana. Todistaminen kuuluu myöskin pitkän matematiikan syventäviin kursseihin, joita kaikki matematiikan kirjoittajat eivät ole edes suorittaneet.

Osassa ratkaisuista lause on todistettu yksittäisellä esimerkillä eli vaikka " $1 + 2 + 3 = 6$  on jaollinen kolmella, joten 123 on jaollinen kolmella. Lause on siis tosi". Opiskelijoilla on siis käsitys siitä, että todistukseksi riittää jonkin erikoistapauksen esittäminen. Tämä voi johtua siitä, että MAA11 kurssilla harjoitellaan paljon epätodeksi todistamista, jonka voi tehdä esimerkin avulla. Myöskin, jos opiskelija ei koetilanteessa ole keksinyt korrektia tapaa todistaa lausetta, on ollut helppo turvautua esimerkkitaapauksiin.

Noin kolmasosassa ratkaisuista aineiston todistuksesta on muodostettu lause kolmioiden yhtenevyydelle tai yhdenmuotoisuudelle. Todistuksessa esitetään, että "joten kolmiot ovat yhtenevät". Tämä ei kuitenkaan ole suoraan asia, jota todistetaan, mutta useissa ratkaisuisa tämän kohdan perusteella lause on muodostettu. Näissä tapauksissa on voitu vain tarttua tuohon yhteen toteamukseen ilman todistuksen tarkempaa tarkastelua tai asia on vain ymmärretty väärin. Nimenomaan tämä osa tehtävästä on hieman outo, koska

tällaisia todistuksesta lauseeksi-tehtäviä ei oppikirjoissa esiinny.

Myös useassa ratkaisussa opiskelijat olivat merkinneet määritelmän lauseeksi. Tällöin on lähdetty logaritmin sääntöjen mukaan todistamaan määritelmän osaa  $a^{\log_a x} = x$ . Määritelmä voi olla opiskelijoille tuntematon tai outo, minkä vuoksi se on ymmärretty lauseeksi. Todistaminen on myös helppo aloittaa, kun etsii käsiinsä logaritmin eri säännöt ja hyödyntää niitä.

Määritelmän ja lauseen ero voi olla opiskelijoilla hieman hämärän peitossa, sillä niitä ei erikseen esitellä kaikissa oppikirjoissa. Oppikirjoissa voidaan puhua lauseista ja todistaa niitä, mutta opiskelijoille ei opeteta sitä, mitä lause tai määritelmä tarkoittaa. Tässä tehtävässä siis oletetaan, että matematiikan kurssien alussa olisi tutustuttu matematiikan sanastoon tarkemmin.

## Luku 6

# Miten matematiikan kursseilla voisi opetella välttämään näitä?

Tässä luvussa käsitellään sitä, miten tutkielmassa esiin tulleita virhekäsityksiä voitaisi ehkäistä matematiikan opetuksessa. Käsitellään asiaa opetussuunnitelman, oppituntien sekä erilaisten aiheeseen soveltuvien tehtävien avulla. Painotetaan päätelmissä sitä, että esiin tulleita virheitä voitaisi ehkäistä syventämällä lukio-opiskelijoiden ymmärrystä matematiikasta, sekä kehittämällä heidän perustelu- ja analysointitaitojaan.

Tarkastellaan aluksi, kuinka vuoden 2019 opetussuunnitelmassa [4] on määritelty matemaattisen perustelun tai päättelyn roolia. Opetussuunnitelman mukaan matematiikan opetuksen tehtävä on ohjata käyttämään puhuttua matematiikkaa, ja se antaa valmiuden arvioida matematiikkaa. Opiskelijan tulisi oppia käsittelemään tietoa, laatimaan perusteluja, arvioimaan perusteluja sekä perustelemaan omia väitteitä. Arvioinnin osalta mainitaan myös, että arvioinnissa huomioidaan matemaattisen ajattelun taitoja, sekä päätelmien perustelua ja analysointia.

Uusi opetussuunnitelma siis antaa opettajalle valmiudet vaatia opiskelijoilta syvää ymmärrystä matematiikan aiheista sekä taitoja perustella omia ratkaisuja sekä muuta matemaattista tekstiä. Arvioinnin sisältö päätelmien perustelemiseen liittyen ei ole juurikaan muuttunut kahden peräkkäisen opetussuunnitelman välillä, vaan molemmissa kiinnitetään huomiota siihen, että opiskelija osa perustella ja analysoida päätelmiään. Vuoden 2019 opetussuunnitelmassa ei enää määritellä erikseen, mitä pitkän ja lyhyen matematiikan opiskelijoiden tulisi osata, mutta erityisesti vuoden 2015 opetussuunnitelman

[3] pitkän matematiikan sisällössä mainitaan samanlaisia vaatimuksia päätelmien perusteluille kuin vuoden 2021 opetussuunnitelman matematiikan sisällössä.

Ylioppilaskirjoitusten tehtävät ovat laskinohjelmistojen lisääntymisen myötä soveltavampia, joten ne vaativat erityistä matematiikan aiheiden ymmärrystä ja analysointia. Tällöin sillä, että opiskelija ymmärtää ja osaa soveltaa oppimaansa, on todella iso merkitys kokeen sujuvuuden kannalta. Tätä tulisikin harjoitella jo lukion ensimmäiseltä matematiikan kurssilta lähtien, jotta opiskelijoiden perustelu- ja soveltamistaidot automatisoituisivat ylioppilaskirjoituksiin mennessä.

Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeissa viimeisten muutaman vuoden aikana on ollut todella vähän tehtäviä, joissa vaaditaan perusteluja tai päätelmien arviointia, joten lyhyessä matematiikassa tiettyjä tehtäviä tärkeämpää olisi tuoda matemaattista perustelua esiin oppitunneilla. Opettajan tulee opetuksessaan korostaa sitä, että opiskelijoita arvioidaan matemaattisen ajattelun, päätelmien ja perustelemisen perusteella. Perustelutehtävien lisäksi tällainen opiskelu on tärkeää koko matematiikan oppimisen kannalta, jotta opiskelija osaa arvioida omia päätelmiään tehokkaasti ja toimivasti. Tämä helpottaa kaikenlaisten ylioppilaskoetehtävien ratkaisua ja ratkaisujen arviointia.

Tutkielmassa olevan aineiston ratkaisujen analysoinnissa nousi esiin se, että sanallinen perustelu tai päättely jää useasti melko suppeaksi tai jopa kokonaan pois. Opiskelijat eivät joko tiedä, miten laskutoimituksia tai päättelyä muuttaa sanalliseen muotoon, tai eivät ymmärrä laskutoimitusten tai päättelyn sisältöjä. Matematiikan muuttamista arkikieleksi ei ole harjoiteltu tarpeeksi, jolloin tällaiset tehtävät ovat todella hankalia ja jäävät tämän vuoksi helposti suppeiksi tai kesken. Tutkielmassa tarkasteltavissa tehtävissä oli myös tehtävätyyppejä, joissa käsiteltiin abstrakteja kertoimia ilman konkreettisia lukuja, ja näissä ilmeni vaikeuksia ymmärryksessä. Opiskelijoilla on vaikeuksia tehdä päätelmiä tai ymmärtää, mitä tehtävänannossa kysytään ilman oikeita lukuja. Opetuksessa olisikin tärkeää käsitellä aiheita myös ilman konkreettisia lukuja, jolloin opiskelijoiden ymmärrys syventyisi entisestään.

Matematiikan opettajan tehtävä on oppitunneillaan kurssien aikana käsitellä aiheita siten, että opiskelijoiden päättelytaidot ja ymmärrys kehittyisivät mahdollisimman paljon. Alkuun oppitunneilla voidaan harjoitella päätelmien selittämistä esimerkiksi siten, että opettaja selittää esimerkkien tai muiden oppitunneilla käytävien laskujen päätelmät läpi. Myöhemmin oppitunneilla voidaan siirtyä siihen, että opiskelijat selittävät omia päätelmiään

auki joko opettajalle tai vieressä istuvalle. Myös kokeissa osa arvosanasta voi koostua siitä, että opiskelija perustelee opettajalle sanallisesti yhden koetävän ratkaisun. Tällöin opiskelijat harjaantuvat ymmärtämään tekemänsä laskutoimitukset ja oppivat perustelemaan sekä analysoimaan matematiikkaa. Opettajan on myös helpompi arvioida opiskelijoita, kun matemaattista osaamista joutuu esittämään sanallisesti tehtyjen laskutehtävien lisäksi.

Tarkastellaan seuraavaksi erilaisia tehtävätyyppejä, joita sekä pitkän että lyhyen matematiikan opetuksessa voitaisi käydä läpi, jotta opiskelijoiden perustelu- ja soveltamistaidot voisivat kehittyä paremmin, ja esiin tulleilta virheiltä voitaisi välttyä. Tällaiset tehtävät ovat yleensä muotoa ”perustele”, ”selitä” tai ”arvioi”.

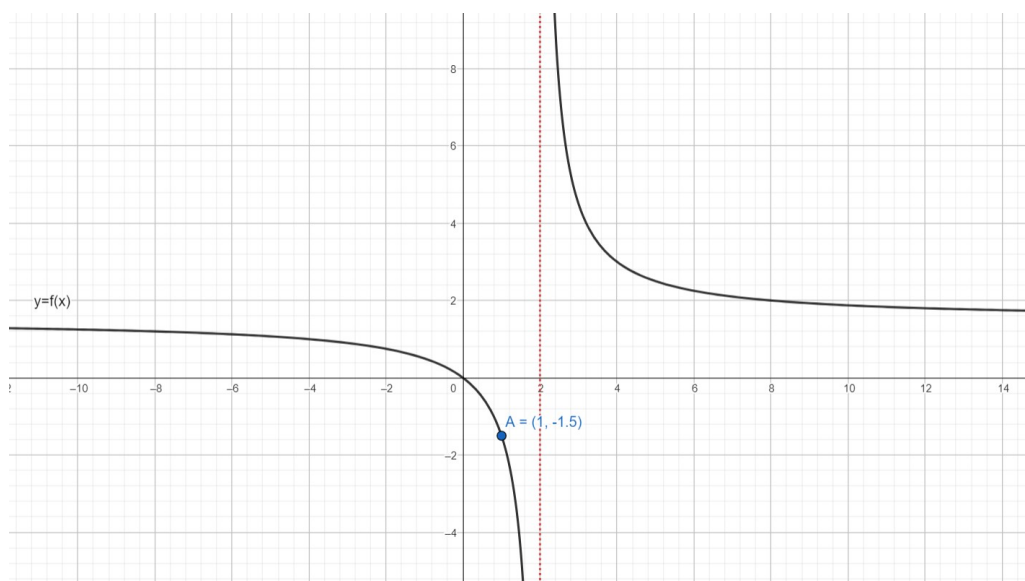
## 6.1 Tehtävä 1

Tämän tyylinen tehtävä olisi erinomainen moduuliin MAA2, jonka aikana käsitellään rationaalifunktiota. Tällaisen tehtävän voi käydä läpi opettajan johdolla oppitunnilla, jonka jälkeen samanlaisia tehtäviä voi esiintyä harjoituksissa sekä kokeessa. Tehtävätyypissä testataan ymmärrystä rationaalifunktion kuvaajasta ja tiedon soveltamisesta. Kuvaajaa tarkastellessa voitaisi esimerkiksi keskustella opettajaohjoisesti siitä, miten tulokseen vaikuttaa annettu piste  $(1, -1,5)$ , jos koordinaatit ovat likiarvoja.

Tehtävässä pyydetään sanallista perustelua, jotta ratkaisun lukija voi seurata ratkaisijan päättelyketjua. Perustelutehtävän tarkoituksena on myös auttaa ratkaisijaa itseään ymmärtämään omia ajatuksiaan kertoimien ratkaisusta.

### 6.1.1 Tehtävänanto

Määritä funktion  $f(x) = \frac{ax}{2x+b}$  kertoimet  $a$  ja  $b$  kuvaajan 6.1 avulla.  $a$  ja  $b$  ovat kokonaislukuja. Perustele myös päätelmäsi sanallisesti.



Kuva 6.1: Tehtävän 6.1.1 Kuvaaja

## 6.2 Tehtävä 2

Seuraava tehtävätyyppi sopii myös jo moduuliin MAA2, jolla käsitellään korkeamman asteen yhtälöitä ja funktioita. Tehtävässä esiintyy sekä abstrakti kerroin että sanallista perustelua, joista molemmissa oli vaikeuksia aineiston ratkaisuisissa. Tehtävä olisi oivallinen moduulin lopussa käytäväksi, ja esimerkiksi osittain yhdessä opettajan kanssa, jolloin tämäntyyppisen tehtävän ratkaiseminen tulee tutuksi. Päätelmien perustelu on tärkeä osa tehtävää, jotta opiskelija voi itsekin seurata omaa ajatuksenkulkuaan ja ymmärrystään aiheesta.

### 6.2.1 Tehtävänanto

Voidaanko vakio  $a$  valita siten, että

1. funktio  $f(x) = ax^4 + 4x^3 + x^2$  ei saa negatiivisia arvoja?
2. funktio  $f(x) = x^4 + ax^3 - 2ax^2$  saa positiivisia ja negatiivisia arvoja?

Määritä mahdollinen  $a$  ja perustele päätelmäsi sanallisesti.

## 6.3 Tehtävien käyttö opetuksessa

Esiteltyjen tehtävien tyyppisiä tehtäviä löytyy useiden oppikirjojen viimeisistä, soveltavista tehtävistä, joten niiden tuominen opetukseen ei olisi kovin vaikeaa. Näitä tulisi kuitenkin pyrkiä testaamaan ja tutkimaan niiden toimivuutta lukion oppitunneilla opiskelijoiden ymmärtämisen ja oppimisen näkökulmasta.

Käytännössä tällaisia tehtäviä voidaan käydä läpi opettajajohtoisesti oppitunneilla esimerkiksi opintojakson lopussa tai kokeeseen kerratessa. Opettajajohtoisesti tehtäviä käsitellessä opiskelijat voivat jatkuvasti tuoda esille omia ajatuksiaan tehtävän ratkaisemisesta ja oppia toisiltaan tällöin uusia ajatusmalleja liittyen aiheeseen. Soveltavampia tehtäviä tulisi olla myös opintojaksojen kokeissa, jotta opiskelijat voivat harjoitella tehtävien tekoa myös koetilanteessa, joka voi olla jännittävä tai stressaava.

# Luku 7

## Pohdinta

Tutkielman tarkoituksena oli selvittää, millaisia virheitä lukiolaisilla esiintyy matematiikan ylioppilaskirjoituksissa tehtävissä, jotka vaativat sanallista selitystä. Aiemmin aihetta on muun muassa tarkasteltu siitä näkökulmasta, millaiset argumentointitaidot lukiolaisilla on ylioppilaskirjoitusten perusteella.

Palataan siihen, millaisiin tutkimuskysymyksiin tutkimuksessa haluttiin vastata:

1. Millaisia virheitä matematiikan ylioppilaskokeissa esiintyy tehtävissä, joissa vaaditaan sanallisia perusteluja?
2. Miten esiin tulleita virheitä voitaisiin ehkäistä matematiikan opetuksessa lukiossa?

Tehtävien sanallisia perusteluja vaativissa osissa esiintyi monipuolisesti erilaisia virheitä, riippuen tehtävätyypistä ja perustelun laajuudesta. Yleistä oli se, että abstraktien kertoimien käsittely ja perustelu oli hankalaa ja suppeaa. Opiskelijat ovat opetuksessa ja kurssien tehtävissä pääosin tottuneet konkreettisiin lukuihin funktioita ja polynomeja käsitellessä, jolloin kirjainkertoimia sisältävät tehtävät ovat voineet tulla ensi kertaa esiin vasta ylioppilaskokeessa.

Toinen ongelma sanallisissa vastauksissa oli se, että useat opiskelijoiden perustelut olivat melko suppeita. Lyhyistä ratkaisuksista on usein hankalaa ymmärtää opiskelijan ajatusprosessia ja sen oikeellisuutta. Ratkaisuissa ei siis aina ollut mitään selkeää virhettä, mutta ajatusprosessin seuraaminen oli hankalaa.

Tehtäviä esitellessä tutkielmassa arvioitiin, millaisiin virheisiin tehtävänänot voisivat ohjata. Ennusteet osuivat melko oikeaan jokaisen tehtävän kohdalla, koska ylioppilaskokeiden tehtävät pyrkivätkin oletettavasti erottelemaan opiskelijoita siinä, miten hyvin tehtävänänto ymmärretään sekä miten hyvin siihen vastataan todenmukaisesti. Monet virheet saattoivat johtua suoraan siitä, että tehtävänäntoa ei oltu luettu tarkasti tai palattu siihen ratkaisun saamisen jälkeen.

Yleisellä tasolla esiin tulleita virheitä tulisi pyrkiä ehkäisemään matematiikan opetuksessa läpi koko matematiikan lukio-oppimäärän. Jo ensimmäisen matematiikan yhteisen opintojakson aikana matematiikan kielentämistä voitaisi esitellä opiskelijoille, ja korostaa sen merkitystä heidän oppimisensa kannalta. Kun arvioinnissa korostetaan matematiikan perustelun, päättelyn ja analysoinnin merkitystä, tulee matematiikan kielentäminen puhekielellä luonnolliseksi osaksi matematiikan opetusta ja oppimista. Käytännössä tätä voi toteuttaa opettajan opetuspuheella sekä opiskelijoiden omien päätelmien ääneen ilmaisemisella. Oppituntien esimerkkitehtäviin tulisi myös lisätä tehtäviä, jotka eivät ole suorita laskutehtäviä, vaan vaativat laajempaa päättelyä ja perustelua. Tällöin sekä opettaja että opiskelijat pääsevät esittämään omia ajatusprosessejaan oppituntien aikana.

Ääneen puhutun kielentämisen lisäksi matematiikan opetuksessa tulisi aktiivisemmin ohjata opiskelijoita avaamaan ajatusprosessejaan laskutehtävissä. Erilaisten välivaiheiden, päätelmien ja tulosten selittäminen sanallisesti laskujen keskelle helpottaa sekä opettajan työtä, kun hän tarkastelee tehtäviä, että opiskelijoiden oman ajattelun ja matematiikan taitojen kehittämistä.

Tähän tutkimukseen valikoitunut aineisto ei ollut paras mahdollinen lukio-opiskelijoiden kielentämisen taitojen tutkimiseen, koska saadut ratkaisut olivat melko suppeita ja kaikki tehtävät eivät vaatineet kovin laajaa sanallista perustelua. Matematiikan kielentämisestä lukiossa tulisi ehdottomasti tehdä jatkotutkimuksia. Aihetta voisi tutkia esimerkiksi haastatteluilla, joissa testattaisiin lukiolaisten taitoja sanoittaa matemaattista ajatteluaan. Eräs tapa tutkia asiaa olisi myös se, että testiryhmälle lisättäisi kielentämistä eri muodoissa oppitunneilla ja verrattaisi tämän ryhmän osaamisen tuloksia ryhmään, jonka kielentämisen käyttö oppitunneilla olisi tasoa, jota useissa kouluissa tällä hetkellä toteutetaan. Tarkemmat tutkimukset antaisivat tietoa myös siitä, millaisilla keinoilla kielentämisen taitoja voitaisi kehittää parempaan suuntaan.

# Kirjallisuutta

- [1] Ahonen, T., Aunio, P., Haapasalo, L., Hannula, M. S., Hannula-Sormunen, M., Hautamäki, J., Helakorpi, S., Huhtala, S., Ikäheimo, H., Joutsenlahti, J., Kaasila, R., Keranto, T., Kupari, P., Kuusela, J., Laine, A., Lehtinen, E., Leino, J., Lindgren, S., Linnanmäki, K. ja Yrjönsuuri, Y. 2004. Matematiikka: näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen (2. uud. p.). Niilo Mäki Instituutti.
- [2] Heiskanen, P., Kaakinen, P., Lehtonen, J., Leikas, M. ja Tahvanainen, J. 2020. Tekijä Pitkä matematiikka 12. Sanomapro.
- [3] Helsinki: Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2015. Nextprint Oy.
- [4] Helsinki: Opetushallitus. Lukion opetussuunnitelman perusteet. 2019. Punamusta Oy.
- [5] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luomaaho, E., Raittila, T., Tikka, T. 2016. Juuri 2. Otava.
- [6] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luomaaho, E., Raittila, T., Tikka, T. 2016. Juuri 3. Otava.
- [7] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Louhikallio-Fomin, S., Luomaaho, E., Raittila, T., Tikka, T. 2016. Juuri 6. Otava.
- [8] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, T., Raittila, T., Tikka, T. 2017. Juuri 11. Otava.
- [9] Hähkiöniemi, M., Juhala, S., Juutinen, P., Laitinen, T., Raittila, T., Tikka, T. 2018. Juuri 12. Otava.
- [10] Immonen, K., Martinson, T., ja Thompson, J. 1993. Matematiikan käsikirja. Tammi.

- [11] Joutsenlahti J. 2003. Kielentäminen matematiikan opiskelussa. Teoksessa Virta Arja ja Marttila Outi (toim.) (toim.) Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta (Ainedidaktinen symposium 7.2.2003). Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 188–196.
- [12] Joutsenlahti, J. ja Perkkilä, P. 2022. Matemaattisen ajattelun kielentäminen ymmärtävän oppimisen perustana. <https://dimensiolehti.fi/matemaattisen-ajattelun-kielentaminen-ymmartavan-oppimisen-perustana/> (Luettu 14.4.2023).
- [13] Kivelä, S. 2000. Lukiotason matematiikan tietosanakirja. Matta.
- [14] Veloo, A., Krishnasamy, H. N., ja Wan Abdullah, W. S. 2015. Types of student errors in mathematical symbols, graphs and problem-solving. Asian Social Science. Asian Social Science. <https://www.ccsenet.org/journal/index.php/ass/article/view/45577> (Luettu 22.4.2023).
- [15] Yle. Abitreenit. <https://yle.fi/aihe/artikkeli/2015/12/15/yo-kokeet-matematiikka> (Luettu 22.4.2023).