Matematiikka ja opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen

Lasse Candé

Pro gradu -tutkielma

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto
Matematiikan aineenopettajan opinnot
Joulukuu 2020
Ohjaaja: Anne-Maria Ernvall-Hytönen

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree Programme
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta	Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Tekijä – Författare – Author
Lasse Cande

Työn nimi – Arbetets titel – Title
Matematiikka ja opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen

Oppiaine/Opintosuunta – Läroämne/Studieinriktning – Subject/Study track
Matematiikka, aineenopettaja

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Joulukuu 2020	55

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Työssä tutkitaan opetussuunnitelmien, ja erityisesti lukion opetussuunnitelman 2019, laaja-alaista osaamista ja sen suhdetta matematiikkaan. Työ perehtyy lisäksi prosenttilaskennan opetukseen yleisesti sekä laaja-alaisen osaamisen ja prosenttilaskennan väliseen yhteyteen. Tämän lisäksi työ esittelee oppirungon, jonka mukaisesti voisi toteuttaa matematiikan ja fysiikan ainerajat ylittävän opintokokonaisuuden sekä tutkii tämän yhteyttä laaja-alaiseen osaamiseen.

Opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen liitetään työssä osaksi kansainvälistä pedagogista liikehdintää. Varhaiskasvatussuunnitelman sekä esiopetuksen, perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien laaja-alaista osaamista verrataan pintapuolisesti. Perusopetuksen laaja-alaisen osaamisen yhteyttä matematiikkaan tutkitaan laadullisesti opetussuunnitelmaan pohjautuen, jonka jälkeen lukion ja perusopetuksen järjestelmiä verrataan ja lukion opetussuunnitelmasta luodaan tulkinta.

Työssä on käytetty laadullista analyysia opetussuunnitelmien vertailuun ja lukion opetussuunnitelman esittämien asioiden luokitteluun. Matematiikkaan liittyvää laaja-alaista osaamista on tulkittu tieteiskirjallisuuden valossa, keskittyen teoreettisiin esityksiin matematiikan olemuksesta, matematiikan opettamisesta ja luonnontieteellisestä lukutaidosta. Esiteltävä kirjailijan mielipidettä vastaava esitys sitä, kuinka prosenttilaskentaa tulisi opettaa, perustuu oppikirjoihin, taulukkokokoelmiin ja tieteiskirjallisuuteen. Fysiikkaa ja matematiikkaa yhdistelevä kinematiikan opintokokonaisuus taas on laadittu matemaattisen tiedon esitystapoja ja tuottamista monipuolistavasta lähtökohdasta.

Lopputulemana tutkimuksessa päädyttiin siihen, että matematiikkaan yhteydessä oleva laaja-alainen osaaminen liittyy läheisemmin molemmissa tutkituissa opetussuunnitelmissa tiettyihin laaja-alaisen osaamisen osa-alueisiin kuin toisiin. Niihin, joihin matematiikka ei juurikaan liity, tämän voi silti erikseen liittää esimerkiksi harjoitustehtävin, mikä asettaa vastuun toteutumisesta oppimateriaalien tekijöille ja opettajille. Lukiomatematiikkaan liittyvä laaja-alainen osaaminen jaettiin neljään luokkaan, jotka kattavat yhdessä jokaisen asian, mitä oppiaineen kuvaus toteaa laaja-alaisesta osaamisesta. Prosenttilaskennassa muut kuin laskennalliset kontekstit ovat tärkeitä sen oikean ymmärryksen kannalta. Fysiikan ja matematiikan yhdistävät opintokokonaisuudet voivat tarjota huomattavan opetuksellisen lisän kuvaajien tulkintaan ja opetuksessa hyödyntämiseen liittyen.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords
Matematiikka, opetus, laaja-alaisuus, opetussuunnitelma, prosenttilaskenta, kinematiikka, analyysi

Ohjaaja tai ohjaajat – Handledare – Supervisor or supervisors
Anne-Maria Ernvall-Hytönen

Säilytyspaikka – Förvaringsställe – Where deposited
HELDA - Helsingin yliopiston digitaalinen arkisto / HELDA - Helsingfors universitets digitala publikationsarkiv /HELDA - Digital Repository of the University of Helsinki

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Tutkielman tarkoitus on selvittää minkälaisia yhteyksiä matematiikan ja opetussuunnitelmien laaja-alaisen osaamisen välillä on, pohtia matematiikan ja laaja-alaisuuden välistä yhteyttä laajemmin sekä syventyä kahteen erityyppiseen oppirakenteseen, joilla on yhteys laaja-alaisuuteen. Aihe on oleellinen matematiikan didaktiikkaan liittyen juuri nyt, kun laaja-alaisuus on jo ollut osana peruskoulua muutaman vuoden ja tulee seuraavaksi lukioon, syksyllä 2021.

Minua aihe kiinnostaa niin yläkoulun kuin lukionkin fysiikanopettajana. Toimin lukiossa myös ns. tuutoriopettajana meneillään olevan lukioreformin paikallisena toteuttajana, minkä johdosta olen perehtynyt aiheeseen syvemmin. Lisäksi kävin pedagogiset opintoni lukuvuonna 2018-2019, jo perehtyneenä opetussuunnitelmiin ja koin laaja-alaisuuden olevan sekä uutta että tuntematonta. En ole melko lukeneenakaan ja vastauksia etsineenä kokenut ymmärtäväni riittävän hyvin sen suhdetta matematiikkaan ja opettamaani fysiikkaan. Tästä seuraa tietynlainen ennakkoasenne, josta en voi olla varma, lähdinkö korjaamaan vai vahvistamaan sitä. Tämä ennakkoasenteeni, jossa näen matematiikan ennen kaikkea perustavanlaatuisena taitona ja tekemisen tapana ja toisaalta vähemmän eettisiin, yhteiskunnallisiin ja vastaaviin ihmisten välisiin osaamisalueisiin liittyvänä, motivoi tutkielman tekemistä. Haluan saada vastauksen siihen, liittyykö matematiikka näihin osa-alueisiin ja toisaalta myös siihen, miten matematiikka liittyy laaja-alaiseen osaamiseen kokonaisuutena.

Hyödynnän työssäni niin kaksivuotista kokemustani lyhyen matematiikan opettajana 2011-2013, suorittamiani matematiikan opintojani Helsingin yliopistolla kuin myös didaktiikan oppineisuuttani. Teen työni itsenäisesti, osin perehtyen tieteelliseen kirjallisuuteen, opetussuunnitelmiin, laaja-alaisen osaamisen eri kehikoihin ja rakennan näistä kokonaisuuden. Työni keskittyessä matematiikkaan, niin käsitteellisenä oppirakenteena kuin myös didaktisena tutkimuskohteena, joudun rajaamaan perusteellisen katsauksen laaja-alaiseen osaamiseen kansainvälisenä liikkeenä pois ja raapaisen vain aiheen pintaa demonstroimalla lähinnä kuvin, mistä liikkeessä on kyse. Sen sijaan käsittelen perusopetuksen yläkoulumatematiikan ja varsinkin lukiomatematiikan yhteyden opetussuunnitelmien laaja-alaiseen osaamiseen varsin perusteellisesti ja tulkintani lukion laaja-alaisesta osaamisesta matematiikassa on työni tärkein aihe.

Tutkin laaja-alaista osaamista opetussuunnitelmissa laadullisella analyysillä, luokitellessani kuvauksia tästä lukiomatematiikassa, etsiessäni perusopetuksen opetussuunnitelmasta matematiikkaa koskettavat kohdat ja luodessani tulkinnan lukion opetussuunnitelmasta tämän työn tuloksena. Hyödynnän luokittelussani kolmea teoreettista asettelua, joista yksi koskettaa matematiikkaa itsessään, toinen sen opettamista ja kolmas luonnontieteellistä lukutaitoa, tavalla, jonka koen olevan samaistettavissa matemaattiseen lukutaitoon.

Rakennan kaksi oppirakennetta eri aiheisiin. Yhden prosenttilaskentaan ja toisen kinematiikan ja analyysin väliseen yhteyteen. Koen näiden yhdessä koskettavan isoa osaa laaja-alaisen osaamisen eri osa-alueista. Rajaan pois aiemmin suunnittelemani todennäköisyyslaskennan ja tilastomatematiikan, koska työ tulee jo tällaisenaan olemaan iso. Kyseinen aihepiiri osana tutkielmaa täydentäisi sitä ja toivon että joku joskus suorittaa tämän tutkimuksen.

Rakentaessani prosenttilaskennan oppirakennetta, hyödynnän oppikirjojen ja taulukkokokoelmien terminologiaa ja rakennan tätä edelleen. Liitän aiheen laaja-alaiseen osaamiseen ajattelua tukevien kuvien ja erinäisten kontekstien kautta. Oppirakenne toimii sellaisenaan myös havaintona aiheeseen liittyvästä didaktiikasta, ilman kytkentää laaja-alaiseen osaamiseen. Tutkin samassa yhteydessä prosenttilaskentaa myös tieteiskirjallisuuden valossa niin sen yhteiskunnallisen aseman, sen opetuksen kuin sen käsitteellisen rakenteen mielessä.

Rakentaessani kinematiikan ja analyysin yhteyttä käsittelevää oppirakennetta, lähtökohtani ovat pitkässä kokemuksessani fysiikan opettajana ja siinä, että omaan vahvan matematiikanopettajan identiteetin, vaikka en olekaan yksittäisiä sijaistuksia lukuunottamatta opettanut matematiikkaa yli seitsemään vuoteen. Fysiikka mallintaa luontoa matemattiisilla malleilla, jotka saavat usein suureyhtälön muodon. Haluan tässä oppirakenteessa tehdä ensi kädessä matematiikkaa, aloittaen matematiikan ja kinematiikan kytkemisellä toisiinsa ja sen jälkeen etenemällä matematiikan välinein tuloksiin, jotka ovat myös fysikaalisesti tosia. Fysiikan opetussuunnitelmat niin perusopetuksessa kuin lukiossakin korostavat fysiikan luonnetta kokeellisena tieteenä, jolloin tällainen matemaattinen konstruoiminen ei ole täysin fysiikan opetussuunnitelman hengen mukaista. Haluankin esitellä mallin matematiikan opetuksen kontekstissa. Tällainen tiedon rakentuminen eri tavoin luultavasti vahvistaa sekä matematiikan että fysiikan osaamista ja liittyy vahvasti laaja-alaiseen osaamiseen tavalla, jonka tulen osoittamaan.

Työni on kohdistettu ennen kaikkea kaikille matematiikan opetuksen kanssa tekemisissä oleville, niin opettajille, opetuksen tutkijoille kuin kehittäjillekin. Työni on sekundäärisesti kohdistettu muille pedagogeille, jotka saattavat vaatia matematiikan opetukselta laaja-alaisuutta, ymmärtämättä matematiikkaa riittävän hyvin. Ennen kaikkea työni on silti kohdistettu itselleni, tarpoessani tutkielman aiheiden haastavien ja antoisien pohdintojen parissa.

2 Laaja-alainen osaaminen ja sen yhteys matematiikkaan

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 (Opetushallitus 2019) esittelivät ns. laaja-alaisen osaamisen. Myöhemmin lukion opetussuunnitelman perusteet 2019 (Opetushallitus 2019) esittelivät toisenlaisen version laaja-alaisesta osaamisesta lukiossa. Laaja-alainen osaaminen löytyy myös niin varhaiskasvatussuunnitelman perusteista (Opetushallitus 2018) kuin esiopetuksen opetussuunnitelman perusteistakin (Opetushallitus 2014).

Tässä tutkielman luvussa käsittelen näiden opetussuunnitelmien ja varhaiskasvatussuunnitelman laaja-alaisen osaamisen taustoja ja olemusta, minkä jälkeen keskityn perusopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien perusteiden laaja-alaiseen osaamiseen sekä matematiikkaan niiden näkökulmasta. Aluksi esittelen opetussuunnitelmien laaja-alaisen osaamisen järjestelmät hyvin pintapuolisesti, jonka jälkeen liitän ne osaksi kansainvälistä pedagogista liikehdintää. Tämän jälkeen luon tulkinnan matematiikan ja laaja-alaisen osaamisen välisestä yhteydestä perusopetuksessa, hahmotellakseni vastaavaa lukiossa. Luku kulminoituu tulkintaani laaja-alaisesta osaamisesta lukion pitkässä matematiikassa, minkä perustan osin tieteellisestä kirjallisuudesta löytyviin luokitteluihin ja näkökulmiin, jotka esittelen luvun kolmanneksi viimeisessä osaluvussa.

2.1 Opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen pääpiirteissään

Perusopetuksen, esiopetuksen ja lukion opetussuunnitelmien perusteet sekä varhaiskasvatussuunnitelman perusteet toteavat jokainen laaja-alaisen osaamisen koostuvan tiedoista, taidoista, arvoista, asenteista ja tahdosta. Perusopetuksen ja esiopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa asia ilmaistaan sanoin *"Laaja-alaisella osaamisella tarkoitetaan tietojen, taitojen, arvojen,asenteiden ja tahdon muodostamaa kokonaisuutta."* Varhaiskasvatussuunnitelman perusteissa todetaan sama asia vain hieman eri sanavalinnalla ja lukion opetussuunnitelman perusteissa nämä samat viisi asiaa nähdään yleissivistyksen, hyväksi ihmiseksi kasvamisen, kestävän tulevaisuuden rakentamisen sekä jatko-opinto-, työelämä-, ja kansainvälisyysvalmiuksien rakentajina.

Perusopetuksen ja esiopetuksen nykyiset opetussuunnitelmien perusteet julkaistiin 2014. Niiden laaja-alainen osaaminen muodostuu toisiaan varsin pitkälle vastaavista osa-alueista. Varhaiskasvatussuunnitelman neljä vuotta myöhemmin ilmestyneissä perusteissa taas on täysin samat osa-alueet kuin esiopetuksen opetussuunnitelmassa, sillä erotuksella, että esiopetuksen (ja perusopetuksen) osa-alueet *Monilukutaito* ja *Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen* on varhaiskasvatussuunnitelman perusteissa yhdistetty otsikoksi *Monilukutaito sekä tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen*.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa on laaja-alaisen osaamisen osa-alueet:

L1: Ajattelu ja oppimaan oppiminen
L2: Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu
L3: Itsestä huolehtiminen ja arjen taidot
L4: Monilukutaito
L5: Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen
L6: Työelämätaidot ja yrittäjyys
L7: Osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen

Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteissa (ja edellä mainitun otsikointieron huomioiden myös varhaiskasvatussuunnitelman perusteissa) on osa-alueet:

- Ajattelu ja oppiminen
- Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu
- Itsestä huolehtiminen ja arjen taidot
- Monilukutaito
- Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen
- Osallistuminen ja vaikuttaminen

Esiopetuksessa ja varhaiskasvatuksessa on siis sellaisenaan samat osa-alueet kuin peruskoulussa, paitsi peruskoulun L6 otsikko työelämätaidoista ja yrittäjyydestä puuttuu sekä L7:stä on vain osallistuminen ja vaikuttaminen mukana, kun taas kestävän tulevaisuuden rakentaminen puuttuu. Pohtimatta eroavaisuuden syitä, on huomio tutkielmassa siinä, että laaja-alainen osaaminen nähdään kasvatuksessa ja opetuksessa peruskoulun loppuun saakka melko yhtenäisesti.

Kontrastina tälle, lukion opetussuunnitelman perusteissa osa-alueet ovat:

- Hyvinvointiosaaminen
- Vuorovaikutusosaaminen

- Monitieteinen ja luova osaaminen
- Yhteiskunnallinen osaaminen
- Eettisyys ja ympäristöosaaminen
- Globaali- ja kulttuuriosaaminen

Vaikka osa-alueiden kuvausten sisällöissä on paljon samankaltaisuuksia, voi mahdollisesti nähdä tietyn asteisen eron perusopetuksen ja lukion välillä siinä, kuinka lukion laaja-alainen osaaminen tunkeutuu syvemmin oppiaine- ja muihin sisältöihin. Tätä taas eivät perusopetuksen osa-alueet samoissa määrin tee. Lukion yllä listatuista osa-alueista kolme ensimmäistä läpileikkaavat kaikkia oppiaineita selkeämmin kuin kolme viimeistä. Esimerkiksi hyvinvointiosaamisessa viitataan lukio-opintojen sietokykyä vahvistavaan vaikutukseen, vuorovaikutusosaamisessa sivutaan kommunikaatiota ja monilukutaitoa sekä monitieteisessä ja luovassa osaamisessa sivutaan oppimaan oppimisen taitoja, jotka kaikki lienevät läsnä jokaisessa oppiaineessa. Toisaalta taas lukion osa-alueiden kolme viimeistä liittyvät selkeiten yhteiskunnallisiin asioihin ja ovat huomattavasti vahvemmin kytköksissä humanistisiin aineisiin ja kielten oppisisältöihin kuin vaikkapa matemaattisluonnontieteellisiin aineisiin, esimerkiksi kulttuuri-identiteettien käsittelyn sekä kansainvälistymis- ja globalisaatioilmiöiden erittelyn merkeissä. Nämä kaksi viimeistä esimerkkiä mainitaan globaali- ja kulttuuriosaamisen osa-alueen kuvauksessa.

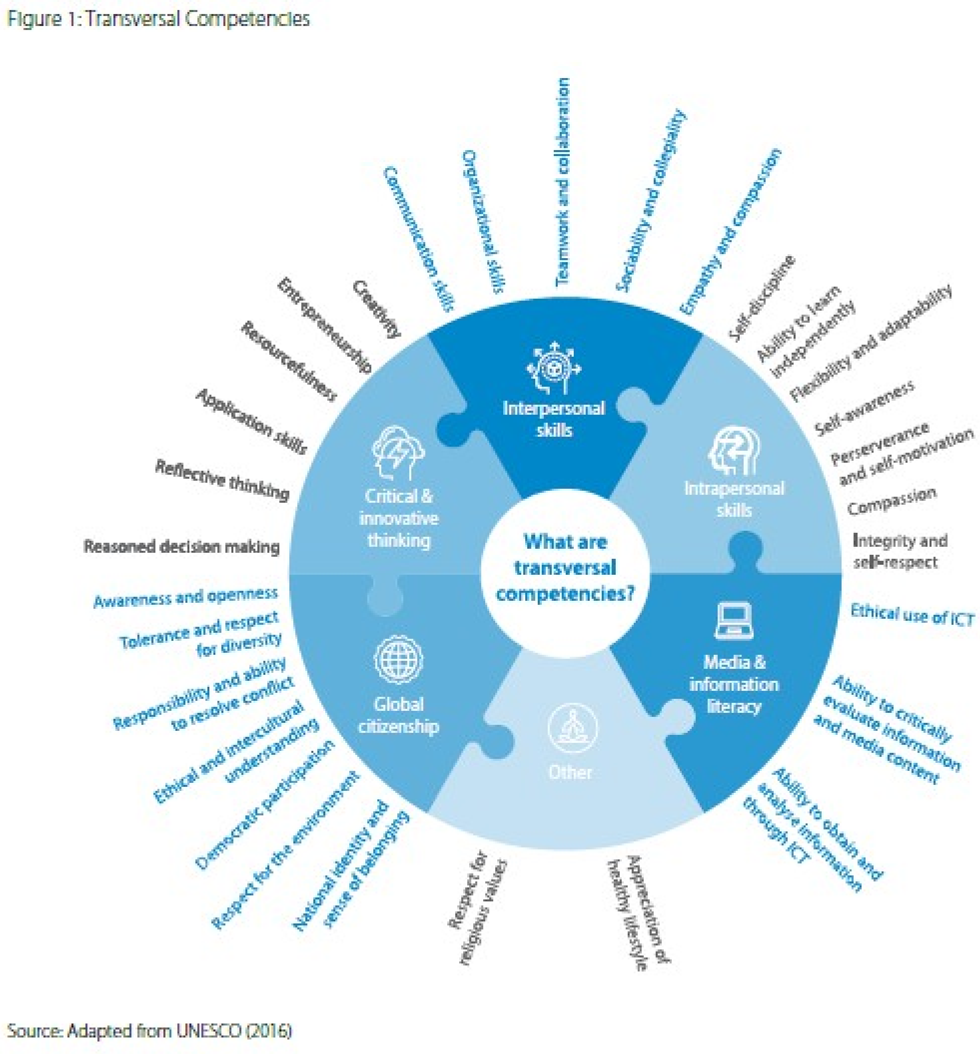
2.2 Opetussuunnitelmien laaja-alaisen osaamisen taustoista ja olemuksesta

Lukion laaja-alaisen osaamisen muotoilleen työryhmän puheenjohtaja, opetusneuvos Paula Mattila Opetushallituksesta, kertoi Educa-messuilla tammikuussa 2020 esityksessään, että lukion laaja-alainen osaaminen perustuu esimerkiksi sellaisiin pedagogisiin käsitteisiin kuin *transversal competencies*, *key competencies* ja *life skills* (Lehikoinen ym. 2020). Lisäksi hän totesi perusopetuksen OPS:n perusteiden laaja-alaisen osaamisen olevan yhtenä vaikuttimena työryhmän työssä.

Tällä pedagogisella liikehdinnällä, jota voisi kutsua myös opetuksen ja oppimisen uudellenarvioinniksi (Caren ym. (2019) sanoin "*rethinking our approach to education and learning*") on monta nimeä, jotka kantavat melko vastaavia sisältöjä. Esimerkiksi *transversal skills* ja *21st century skills* ovat synonyymejä (Care ym. 2019) (Lonka ym. 2017). Professori Kirsti Lonka työryhmineen käyttää molempia käsitteitä ja myös käsitteitä *21st century competences* ja *transversal competences* arviointityökalussaan *Road to 21st century competence - Evaluation framework for transversal skills* (Lonka ym. 2017). Kyseinen arviointityökalu on laadittu nimenomaisesti peruskoulun laaja-alaisen osaamisen osa-alueiden arviointiin. Myös Harju ja Niemi (2017) käyttävät peruskoulun laaja-alaiselle osaamiselle käsitettä *transversal competencies*. En tässä tutkielmassa syvenny käsitteiden *competence, competencies, competences* taikka *skills* välisiin mahdollisiin eroihin.

Care ym. toteavat tämän monia nimiä kantavan pedagogisen liikehdinnän perustuvan erinäisiin kehyksiin (*frameworks*) ja määritelmiin siitä, minkälaisista osa-alueista nämä taidot, kompetenssit taikka osaaminen koostuvat. Esimerkkeinä he mainitsevat seuraavat: *UNESCO Bangkok framework* (julkaistu eri vaiheissa alkaen vuodesta 2015), *OECD definitions of key competencies (OECD, 2005)* ja *The Partnership for 21st Century Learning (P21, 2009) definitions of 21st century student outcomes*.

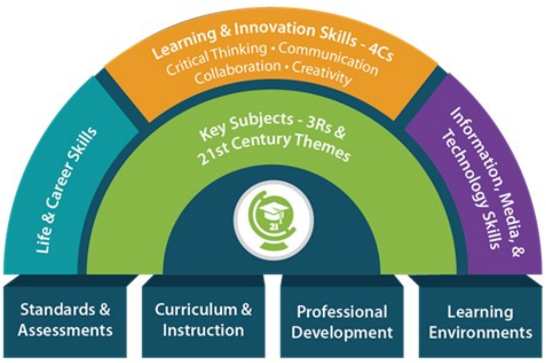
En syvenny tutkielmassa näihin määritelmiin tai kehyksiin sen enempää, kuin että pyrin osoittamaan joitain yhtymäkohtia ensin mainitun kehyksen ja suomalaisten opetussuunnitelmien laaja-alaisen osaamisen välillä, hyvin pintapuolisella tarkastelulla. Kahdesta muusta esittelen kuvia, jotta jotkut avainsanat tulevat näkyviin. Kuvien tarkoituksena on antaa pinnallinen käsitys siitä, mistä tässä pedagogisessa liikehdinnässä on kyse, siitä että eri nimikkeiden takana on vastaavanlaiset ideat sekä osoittaa, että opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen ilmentää tätä pedagogista liikehdintää. Tätä tarkempi katsaus laaja-alaisen osaamisen taustoihin ei olisi matematiikan tutkielman kannalta oleellinen.



Kuva 1. "Transversal competencies" - yksi hahmotelma kuvana. Kuvalähde: Care ym. (2019)

Care, Vista ja Kim käyttävät yllä olevaa kuvaa, joka on mukailtu versio UNESCO:n kehyksestä. Kuvan sisempi osa kuudesta pääotsikosta on hyvin lähellä peruskoulun laaja-alaisen osaamisen otsikoita siinä, että otsikkotasolla ei ole suuria päällekäisyyksiä. Lukion opetussuunnitelman otsikoinnin voi nähdä olevan rakennettu joiltain osin sisäympyrän otsikoista, esimerkiksi vuorovaikutusosaaminen, jota vastaa "interpersonal skills". Toisaalta voi nähdä yhtymäkohtia myös ulkoympyrän otsikoihin, esimerkiksi eettisyys ja ympäristöosaaminen, jota vastaa ulkoympyrän kaksi kohtaa, joissa "ethical"-sana ja toisaalta "respect for the environment"). Lukion otsikointi, jossa on toisaalta isoja sisäympyrän otsikoita ja toisaalta ulkoympyrän alaotsikoita, saattaa johtua painotusten valinnasta. Lukion laaja-alaisessa osaamisessa on huomioitu lukiolaisten peruskoululaisia kypsempi ikä sekä muita vaatimuksi, kuten korkeakouluvalmiusten ja työelämätaitojen kehittäminen, aikuisuuteen siirtymisen haasteet sekä se, että peruskoulussa on ollut toisenlainen laaja-alainen osaaminen, josta lukiolaisilla on jo kokemusta (Opetushallitus 2020). Tässä mielessä voi pitää ymmärrettävänä tällaisia painotuseroja.

Dede (2009), joka vertailee eri kehyksiä *21st century skills* -käsitteelle, toteaa P21:n vuonna 2006 työstämän kehikon olevan yksityiskohtaisempi ja laajemmin omaksuttu kuin vaihtoehtoiset kehikot. Täten tutkielmaan valittiin alle P21:n kuvamateriaalia. En syvenny tähän kehykseen, kuten en myöskään OECD:n määritelmiin ja valintoihin.

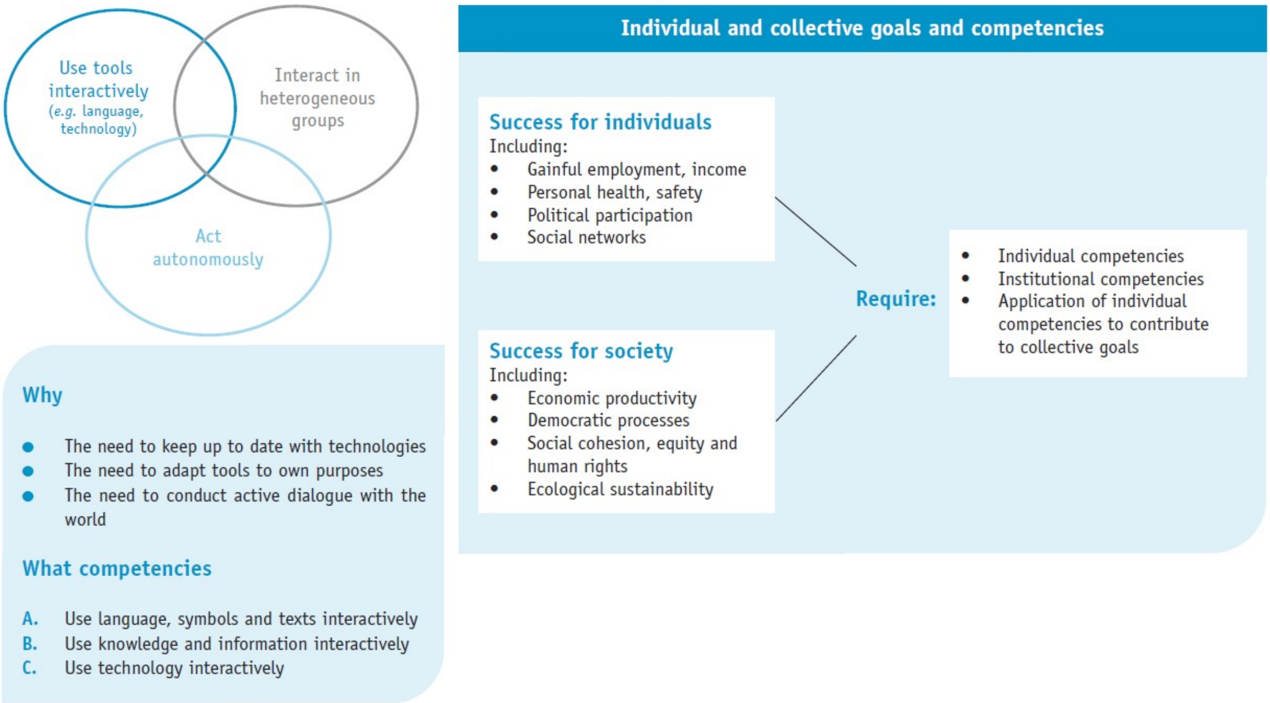


Learning and Innovation "The 4 C's"	Digital Literacy	Career and Life
Critical thinking & problem solving	Information literacy	Flexibility & adaptability
Creativity and innovation	Media Literacy	Initiative & self-direction
Communication	ICT Literacy	Social & cross-cultural interaction
Collaboration		Productivity & Accountability
		Leadership & responsibility

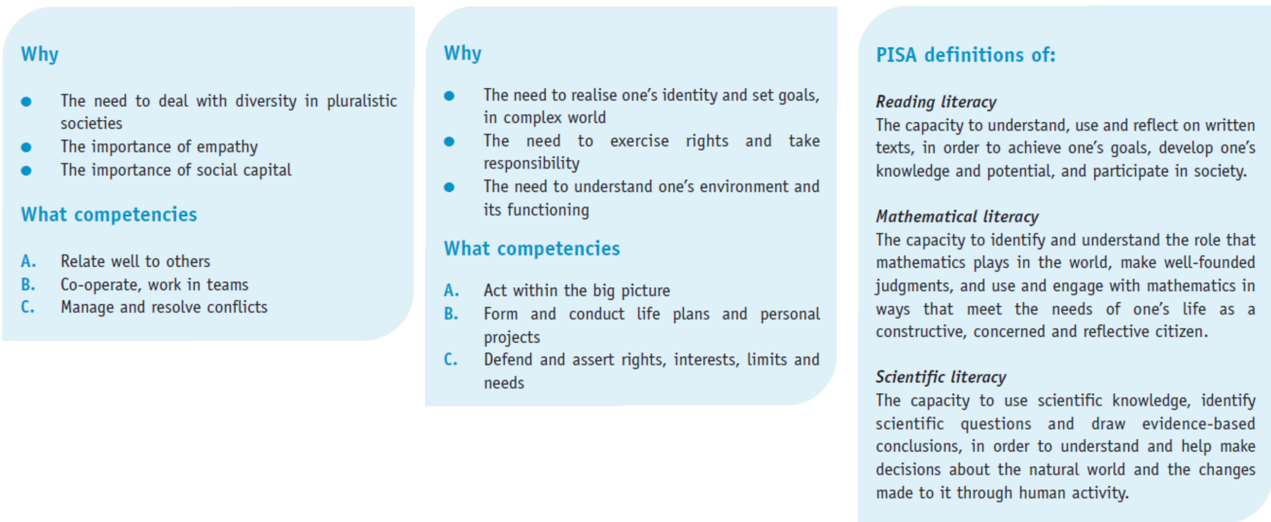
Table 1 - P21 Skills

Kuva 2. 21st century skills tiivistettynä kahteen kuvaan P21:n mukaan. Kuvalähteet: P21 (2020) (vas.) ja Wikimedia Commons (2020) (oik.)

OECD:n 2005 julkaisema *The Definition and Selection of Key Competencies - Executive Summary* (OECD 2005) lienee tärkeä lähtökohta tälle pedagogiselle liikehdinnälle kokonaisuudessaan ja myös Care ym. (2019) viittaa OECD:n samaiseen tuotokseen. OECD:n julkaisussa on myös määritelmät yleiselle lukutaidolle ("*reading literacy*"), matemaattiselle lukutaidolle ja luonnontieteelliselle lukutaidolle, joista kahteen viimeiseen palaan myöhemmin. Kuvakokoelma tästä julkaisusta on myös pelkkä esiintuonti joistain avainsanoista, joita julkaisu käsittelee.



Kuva 3. OECD (2005) - ensimmäinen kuva, jossa kolme eri kohdista otettua kuvakaappausta julkaisusta sommiteltuna samaan kuvaan. Kuvalähde: OECD (2005)



Kuva 4. OECD (2005) - toinen kuva, jossa kolme eri kohdista löytyvää kuvakaappausta julkaisusta sommiteltuna samaan kuvaan. Viimeisessä määritelmiä erityyppisille lukutaidoille ("literacy"). Kuvalähde: OECD (2005)

2.3 Perusopetuksen opetussuunnitelma - matematiikan tavoitteista laaja-alaiseen osaamiseen

Opetushallitus on antanut konkreettisia ja sitovia välineitä sen tulkintaan, kuinka matematiikka suhteutuu laaja-alaiseen osaamiseen oppiaineen osioissa perusopetuksen opetussuunnitelmien perusteissa. Perusopetuksen laaja-alaisen osaamisen osa-alueiden suhteutuminen matematiikkaan esitetään oppiaineen tavoitteiden kautta, joiden yhteydessä ilmaistaan, mihin osa-alueisiin tavoite liittyy. Alla olevassa taulukossa on merkittynä tavoitteet ja niitä vastaavat laaja-alaisen osaamisen osa-alueet. Taulukosta saa välineitä tulkita laaja-alaisen osaamisen yksittäisiä osa-alueita ja niiden suhteutumista matematiikkaan, Opetushallituksen näkemyksen mukaisesti. Näin voin edetä lukion laaja-alaisen osaamisen ja matematiikan käsitelyyn tämän jälkeisissä osaluvuissa.

	Laaja-alainen osaaminen						
Opetuksen tavoitteet	**L1**	**L2**	**L3**	**L4**	**L5**	**L6**	**L7**
Merkitys, arvot ja asenteet							
T1 vahvistaa oppilaan motivaatiota, myönteistä minäkuvaa ja itseluottamusta matematiikan oppijana	●		●		●		
T2 kannustaa oppilasta ottamaan vastuuta matematiikan oppimisesta sekä yksin että yhdessä toimien			●				●
Työskentelyn taidot							
T3 ohjata oppilasta havaitsemaan ja ymmärtämään oppimiensa asioiden välisiä yhteyksiä	●			●			
T4 kannustaa oppilasta harjaantumaan täsmälliseen matemaattiseen ilmaisuun suullisesti ja kirjallisesti	●	●		●	●		
T5 tukea oppilasta loogista ja luovaa ajattelua vaativien matemaattisten tehtävien ratkaisemisessa ja siinä tarvittavien taitojen kehittämisessä	●		●	●	●	●	
T6 ohjata oppilasta arvioimaan ja kehittämään matemaattisia ratkaisujaan sekä tarkastelemaan kriittisesti tuloksen mielekkyyttä	●		●	●		●	
T7 rohkaista oppilasta soveltamaan matematiikkaa muissakin oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa	●	●	●	●	●	●	●
T8 ohjata oppilasta kehittämään tiedonhallinta- ja analysointitaitojaan sekä opastaa tiedon kriittiseen tarkasteluun	●			●	●		
T9 opastaa oppilasta soveltamaan tieto- ja viestintäteknologiaa matematiikan opiskelussa sekä ongelmien ratkaisemisessa					●		
Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset tavoitteet							
T10 ohjata oppilasta vahvistamaan päättely- ja päässälaskutaitoa ja kannustaa oppilasta käyttämään laskutaitoaan eri tilanteissa	●		●	●			
T11 ohjata oppilasta kehittämään kykyään laskea peruslaskutoimituksia rationaaliluvuilla	●			●			
T12 tukea oppilasta laajentamaan lukukäsitteen ymmärtämistä reaalilukuihin	●			●			
T13 tukea oppilasta laajentamaan ymmärrystään prosenttilaskennasta	●		●			●	
T14 ohjata oppilasta ymmärtämään tuntemattoman käsite ja kehittämään yhtälönratkaisutaitojaan	●			●			
T15 ohjata oppilasta ymmärtämään muuttujan käsite ja tutustuttaa funktion käsitteeseen. Ohjata oppilasta harjoittelemaan funktion kuvaajan tulkitsemista ja tuottamista	●			●	●		
T16 tukea oppilasta ymmärtämään geometrian käsitteitä ja niiden välisiä yhteyksiä	●			●	●		
T17 ohjata oppilasta ymmärtämään ja hyödyntämään suorakulmaiseen kolmioon ja ympyrään liittyviä ominaisuuksia	●			●	●		
T18 kannustaa oppilasta kehittämään taitoaan laskea pinta-aloja ja tilavuuksia	●			●			
T19 ohjata oppilasta määrittämään tilastollisia tunnuslukuja ja laskemaan todennäköisyyksiä			●	●	●		
T20 ohjata oppilasta kehittämään algoritmista ajatteluaan sekä taitojaan soveltaa matematiikkaa ja ohjelmointia ongelmien ratkaisemiseen	●			●	●	●	

Kuva 5. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden yläkoulumatematiikan tavoitteet ja niihin liittyvät laaja-alaisen osaamisen osa-alueet taulukoituna. Lähde: Opetushallitus (2014), sisältö muokattu taulukoksi.

Ajattelu ja oppimaan oppiminen (L1) on taulukossa vahviten edustettuna, liittyen 17:ään tavoitteeseen 20:stä. Osa-alueen kuvauksessa tulkintani mukaan selkeiten matematiikkaan kytköksissä olevat maininnat ovat havaintojen tekeminen, tiedon rakentuminen monella eri tavalla, tietoinen päättely, avoimuus uusille ratkaisuille sekä tiedon käyttäminen (itsenäisesti ja vuorovaikutuksessa) ongelmanratkaisuun, argumentointiin, päättelyyn ja johtopäätösten tekemiseen. Näiden poimintojeni tulkintaa matematiikalle keskeisiksi voinee pitää melko triviaalina ja onkin varsin ymmärrettävää että osa-alue on matematiikan tavoitteissa vahvasti edustettuna. Osa-alueen kuvauksessa on myös sellaisia mainintoja kuin oppimisen ilo, joka toki voi olla matematiikassa läsnä, mutta tässä vaiheessa tutkielmassa vältetään liian yleisluontoisten mainintojen mukaanotto ja keskitytään asioihin, jotka tutkielman tekijä kokee liittyvän kiinteästi joko matematiikan luonteeseen tai sen tekemiseen. Tämä rajaus koskee myös muiden osa-alueiden käsittelyä.

Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu (L2) on jaetulla sijalla heikoiten edustettuna tavoitteissa, kahdella kohdalla. Tässä tavoitelistaus kytkee matematiikan muihin oppiaineisiin ja ympäröivään yhteiskuntaan. Eri tavoin ilmaisu ja varsinkin matemaattisten symbolien käyttäminen ovat tulkintani mukaan vahviten osa-alueen kuvauksessa matematiikkaan liittyvät asiat.

Itsestä huolehtiminen ja arjen taidot (L3) on neljänneksi vahviten edustettuna listalla, kahdeksalla kohdalla. Kolme kohtaa taulukon alaotsikosta "Käsitteelliset ja tiedonalakohtaiset taidot", T10, T13 ja T19 maalaavat minulle kuvan, että kuvauksessa oleellisimmat kohdat liittyvät oman talouden hallintaan, kuluttajaosaamiseen, mainonnan kriittiseen tarkasteluun sekä löyhästi turvallisuusasioihin. Esimerkiksi päässälaskutaito ja prosenttilaskenta liittyvät kuluttajataitoihin ja taloudenhallintaan, sekä mainosten kriittiseen tarkasteluun. Löyhä yhteys turvallisuuskysymyksiin voisi olla riskiarvioissa ja turvallisuuskysymyksiin liittyvien tilastojen tulkinnassa.

Monilukutaito (L4) on toiseksi vahviten edustettuna, 16:lla kohdalla. Kyseinen osa-aluekuvaus määrittelee käsitteen tavalla, joka sisällyttää matemaattisen lukutaidon piiriinsä. Tärkeimmiksi kokemani poiminnat ovat laaja-alaisessa käsityksessä tekstistä, pitäen sisällään matematiikalle ominaiset tiedon esitystavat, erilaiset tiedonkäsittelyn välineet ja erilaiset lukutaidot. Kuvaus peräänkuuluttaa jokaisessa oppiaineessa etenemistä arkikielestä tiedonalakohtaiseen kieleen ja esitystapoihin, millä on implikaatio siihen, kuinka matematiikkaa tulisi peruskoulussa opettaa.

Tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen (L5) on kolmanneksi vahviten edustettuna tavoitelistalla, 11:llä kohdallaan. Osa-alueen kuvauksessa selkein kohta on kohta kyseisestä osaamisesta oppimisen kohteena ja välineenä. Tavoite 9 (T9) käsittelee tieto- ja viestintäteknologiaa sellaisenaan. Kun tieto- ja viestintäteknologiaa tavoitteen johdosta käytetään opetuksessa ja oppimisessa, on selvää, että osa-alue kytkeytyy myös muihin tavoitteisiin. Tämän tavoitteen saattelemana tämän osa-alueen tulkinta oppiaineen osana on triviaalia.

Työelämätaidot ja yrittäjyys (L6) on kolmanneksi heikoiten edustettuna tavoitelistalla, viidellä kohdallaan. Prosenttilaskentaa (T13) käsittelevä tavoite liittyy kenties vahviten osa-alueen kuvauksen kohtaan riskien arvioinnista ja hallitusta ottamisesta, kun taas loput tavoitteista liittynevät kohtaan hypoteesien asettamisesta, erilaisten vaihtoehtojen kokeilemisesta ja johtopäätösten tekemisestä.

Osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen (L7) on jaetulla sijalla heikoiten edustettuna tavoitelistalla kahdella kohdallaan. Kohdat ovat T2, esimerkiksi yhdessä toimimisesta ja T7, matematiikan soveltamisesta muissakin oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa. Osa-alueen kuvauksesta ei juurikaan löydy kohtia, jotka ilmeisesti liittyisivät juuri matematiikkaan ja parhaaksi poiminnaksi tulkintani mukaan nousee kaksi mainintaa päätöksenteosta. Lisäksi T2 liittyy kohtaan yhdessä työskentelystä, mutta se on sitä kategoriaa yleisluontoisista asioista joita vältän tässä tutkielman osassa. Mainitsen asian, sillä oletan kohdan T2 kytkemisen osa-alueeseen perustuvan tähän.

Kun laaja-alaista osaamista matematiikan perusopetuksessa analysoi tällä menetelmälläni, nousee esiin ainakin kaksi havaintoa. Ensinnäkin tavoite matematiikan soveltamisesta muissakin oppiaineissa ja ympäröivässä yhteiskunnassa (T7) kattaa Opetushallituksen mukaan kaikki laaja-alaisen osaamisen osa-alueet. Tästä voisi vetää johtopäätöksen, että nimenomaisesti matematiikan soveltaminen on Opetushallituksen tulkinnan mukaan laaja-alaisen osaamisen ja matematiikan välisen suhteen keskiössä. Palaan tähän asiaan lukion opetussuunnitelmaa ja kirjallisuutta käsittelevissä osissa lähemmin. Toinen havainto on että heikoiten edustetut osaamisalueet (L2 ja L7) käsittelevät ihmisten välisiä asioita ja kestävää kehitystä, liittyen paljolti arvokasvatukseen. Vastaava ongelma matematiikan kytkemisestä näihin teemoihin ilmenee myös siinä, miten heikot välineet Opetushallitus antaa asiaan lukiopuolella, tutkielman laatijan tulkinnan mukaan.

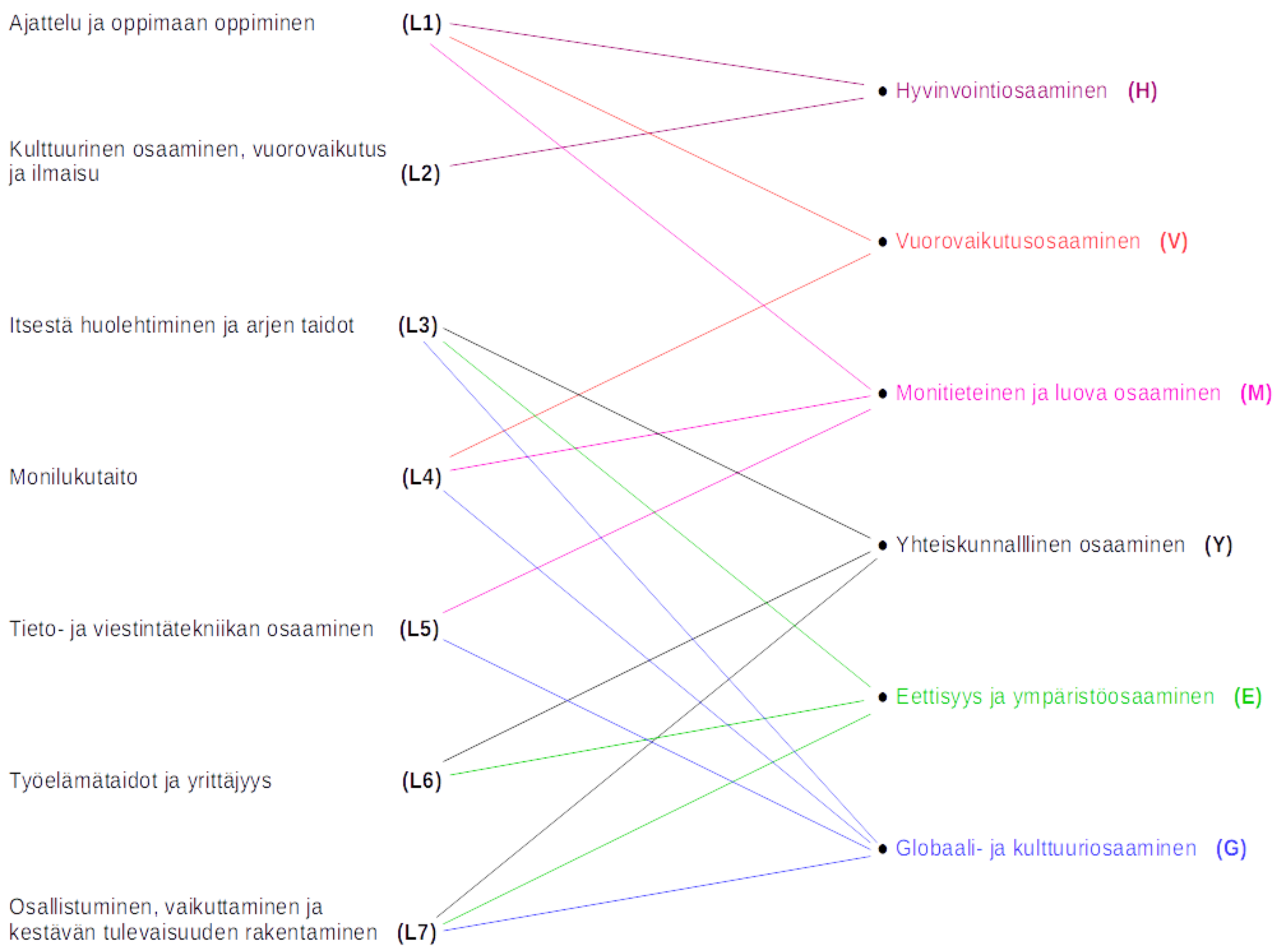
2.4 Laaja-alainen osaaminen ja matematiikka - perusopetustulkinnasta lukiotulkintaan

Lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueiden kuvaukset ovat lyhyempiä kuin peruskoulun ja ne voinee tulkita vähemmän konkreettisiksi. Lisäksi, siinä missä perusopetuksen opetussuunnitelma liittää osa-alueet yksitäisiin tavoitteisiin, lukion opetussuunnitelma liittää osa-alueet löyhästi koko oppiaineeseen. Tutkielman tekijä kokee näistä syistä, että lukion laaja-alaisen osaamisen kytkeytyminen matematiikkaan on ymmärrettävissä paremmin, jos käyttää perusopetuksen opetussuunnitelmaa tukena. Tutkielmassa tukeudutaankin perusopetuksen osa-alueisiin, tulkittaessa lukion osa-alueita. Samassa hyödynnetään matematiikan oppiainekuvauksen sitä osaa, joka ottaa kantaa laaja-alaiseen osaamiseen matematiikassa, sillä sitä voi pitää normatiivisimpana tekstinä siihen, kuinka yhteys laaja-alaisen osaamisen ja oppiaineen välillä tulee lukiossa ymmärtää.

Alla olevassa kuvassa näkyy yhteyksiä, joita olen löytänyt näiden kahden eri järjestelmän osa-alueiden välillä. Suorittamani yhteyksien etsintä rajoittui matematiikkaan liittyviksi kokemiini asioihin. Yhteyksiä olisi huomattavasti enemmän, mikäli osa-alueita tulkitaisiin sellaisinaan koko oppiainetarjonnan kontekstissa. Tämä subjektiivinen tulkintani osa-alueista ja niiden välisistä yhteyksistä saa tuekseen perustelut, kun käyn yhteydet yksi kerrallaan läpi.

Kun kuvan sisältöä käydään läpi, käytetään näkyville yhteyksille merkintää, joka koostuu kuvan oikealla puolella näkyvien lukion osa-alueiden kirjaimista (H, V, M, Y, E, G) ja perusopetuksen vasemman puolen osa-alueiden numeroista (1-7). Tällöin esimerkiksi lukion Hyvinvointiosaamisen (H) ja perusopetuksen Ajattelun ja oppimaan oppimisen (L1) välistä yhteyttä merkitään "H1". Kyseiset kirjainlyhenteet eivät ole Opetushallituksen käyttämiä, ainakaan opetussuunnitelman perusteissa.

Käyn seuraavassa läpi lukion osa-alueiden kuvausten sisällöt yksi kerrallaan. En käsittele yhteyksiä M5 ja G5 tieto- ja viestintäteknologiseen osaamiseen ollenkaan sillä tulkitsen että lukion opetussuunnitelmassa tieto- ja viestintäteknologista osaamista ei enää samalla tavalla nähdä erillisenä osa-alueena, vaan itsestään selvänä osana muita.



Kuva 6. Perusopetuksen ja lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueiden välisiä yhteyksiä, matematiikan näkökulmasta.

Hyvinvointiosaaminen (H) on kuvailtu terveyskysymysten lisäksi sosiaalisten suhteiden osalta ja myös yhteiskuntatason laajuisen hyvinvoinnin lisäämisen osalta. Matematiikan kannalta oleellista on kuitenkin alun osa joka käsittelee oppimaan oppimisen taitoja, mainitsemalla sekä vahvuuksien että kehittämiskohteiden tunnistamisen. Näiden kautta kuvausta L1 voikin käyttää täsmentävänä oppaana pohdinnassa, mitä hyvinvointiosaaminen lukiomatematiikassa voisi olla. Kun hyvinvointiosaamisen kuvaus mainitsee itselle merkityksellisen kulttuurin, tähän voi hyvin sisällyttää yhteisöt ja sisällöt joilla on yhteys matematiikkaan. Perusopetuksen L2 liittyy edellisen osaluvun perusteella vain hatarasti matematiikkaan, mutta tällä tavoin tulkittuna kytkös H2 on tehtävissä, mikä ei tosin tulkintani mukaan anna lisävälineitä hyvinvointiosaamisen tulkintaan matematiikan kontekstissa.

Oppiainekuvaus koskettaa tätä kokonaisuutta ennen kaikkea kiinnostuksen, itsetunnon ja sinnikkyyden osalta.

Vuorovaikutusosaaminen (V) on kuvailtu sen edellytysten, olemuksen ja tärkeyden osalta. Matematiikkan kannalta oleellinen kohta on se, joka liittyy vahviten työskentelytapoihin. Mainitessaan monilukutaidon, tulee itsestään selvä yhteys V4 samannimiseen osa-alueeseen (L4), mutta se on vahvempi seuraavassa osa-alueessa (M), kun tässä tapauksessa asiayhteys on vuorovaikutuksessa: Kuvauksen väite on, että yhdessä ja yhteistyössä oppiminen (erilaisissa ympäristöissä) kehittää monilukutaitoa. Hyvin vastaavalla tavalla löytyy myös yhteys V1. Nämä perusopetuksen kuvaukset antavat vain rajallisesti lisävälineitä lukion vuorovaikutusosaamisen tulkintaan, sillä tässä asiayhteydessä on oleellisempaa yhteys yhteistyötä peräänkuuluttavien opetusjärjestelyjen ja sen hyötyjen välillä, kuin vaikkapa monilukutaidon ymmärtäminen käsitteenä.

Oppiainekuvaus peräänkuuluttaa yhdessä tekemistä matematiikan työtapana, mikä vahvistaa yllä mainitun työskentelytapalähtöisen tulkinnan oikeellisuuden.

Monitieteinen ja luova osaaminen (M) omaa vahvan yhteyden M1, kun teksti mainitsee oppimaan oppimisen taidot ja kuvailee ajattelun taitoja, kuten tiedon luotettavuuden arvioimisen. Yhteys M4 monilukutaitoon tulee jo suoraan tämän käsitteen maininnasta, mutta myös esimerkiksi erilaisten tiedon esittämisen tapojen kautta, ollen sisällöltään hyvin vastaava kuin L4:n kuvaus. Sekä perusopetuksen kuvaus L1 että L4 voivat antaa lisävälineitä hahmottaa tämän osa-alueen (M) yhteyttä matematiikkaan, sillä niiden kuvaukset ovat paljon kattavampia ja konkreettisempia.

Oppiaineen kuvaus mainitsee tässä yhteydessä matematiikan luonteen universaalina kielenä, käsitteiden merkityksen ja niiden välisten yhteyksien hahmottamisen sekä myös sen hahmottamisen kuinka käsitteet liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin, niin oppiaineessa kuin myös oppiainerajat ylittäen. Kuvaus mainitsee kielen lisäksi merkinnät, ajattelua tukevat kuvat, piirrokset ja välineet. Näitä hyödynnetään ilmiöiden mallintamiseen, ongelmien ymmärtämiseen ja ratkaisemiseen sekä tuloksista keskustelemiseen.

Yhteiskunnallinen osaaminen (Y) on kuvailtu mainiten osallistumis- vaikuttamis- ja työkokemusten olevan osa-alueen osaamisen lähtökohtina. Osa-alue liittyy ihmisten välisiin asioihin tällä tavalla. Toisaalta se taas liittyy esimerkiksi perusteltujen riskien ottamisen maininnan myötä henkilökohtaiseen osaamiseen, esimerkiksi riskien arviointikyvyn kautta. Perusopetuksen L6 koskettaa täsmälleen samaa asiaa, mutta lisäksi se käsittelee hypoteesien asettamista, erilaisten vaihtoehtojen kokeilemista ja johtopäätösten tekemistä. Koska yhteiskunnallinen osaaminen liitetään kuvauksessa sekä työelämätaitoihin että yrittäjyyteen, on L6 kokonaisuudessaan mahdollista tulkita lisämateriaalina sen hahmottelemiseksi. Peruskoulun opetussuunnitelma kytkee L6:n esimerkiksi prosenttilaskentaan ja työskentelyn taitoihin, kuten tietojen kriittiseen tarkasteluun sekä logiikkaa ja luovuutta harjoittavaan toimintaan. Yhteys Y3 perustuu siihen, että itsestä huolehtimisen ja arjen taidot voi nähdä edellytyksenä yhteiskunnallisen osaamisen kehittymiselle. Koen että L3:n kuluttajataidot ja talouden suunnittelun taito sekä turvallisuuskysymykset ovat yhteiskunnallista osaamista (Y) ja sitä kautta myös L3 voisi toimia lisämateriaalina Y:n hahmottelemiseen. Turvallisuuskysymykset on myös mahdollista kytkeä perusteltujen riskien ottamiseen, vaikka lukion kuvauksessa (Y) konteksti lienee toinen. Matemaattisesti molemmat voisivat olla kytkettyjä vaikkapa tilastollisiin todennäköisyyksiin ja molemmat edellyttävät mielestäni samanlaista matematiikkaa soveltavaa otetta. Tämän takia yhteys Y3 on perusteltu.

Oppiaineen kuvaus yhdistää kaksi pitkää virkettä osa-alueisiin Y, E ja H, ilman tarkkaa erittelyä miten asia tulee tulkita. Opetussuunnitelman kuvaus yhteiskunnalliselle osaamiselle ei anna kovin pitkälle meneviä välineitä luokitella näiden virkkeiden kohtia. Tässä auttavatkin edellä käsitellyt yhteydet peruskoulun laaja-alaiseen osaamiseen. Yllä olevan tulkinnan avulla on oppiaineen kuvauksesta löytyvä yhteys arkielämän ja matematiikan välillä, tiedonhankintaprosessien vahvistaminen ja matematiikan soveltaminen päätöksenteossa tulkittavissa yhteiskunnalliseksi osaamiseksi. Noista kolmesta varsinkaan tiedonhankintaprosessien yhdistäminen yhteiskunnalliseen osaamiseen ei ole pelkän osa-aluekuvauksen perusteella itsestäänselvää ja tässä tapauksessa yhteys on löydetty perusopetuksen laaja-alaisen osaamisen kuvausten ansiosta. Osa-alueen kuvauksen maininta epävarmuuden, turhautumisen ja epäonnistumisen sietokyvystä liittyy selvästi oppiainekuvauksen mainintaan sinnikkäästä työskentelystä. Tämän yhteyden sinnikkyydestä oppiaineen kuvauksessa tein edellä myös hyvinvointiosaamiseen.

Eettisyys ja ympäristöosaaminen (E) käsittelee osa-aluekuvauksessa selkeästi otsikkonsa aiheita. Matematiikkaan yhteys löytyy lähinnä realiteettien ymmärtämisestä, kattaen ekologisesti ja taloudellisesti kestävän kehityksen, luonnonvarojen rajallisuuden ja luonnonympäristöjen kantokyvyn sekä kestävyyttä edistävän toiminnan arvioimisen ja tutkimisen. Nämä yhdistyvät suoraan peruskoulun osa-alueeseen L7 ja esimerkiksi vaihtoehtojen kokeilemisen ja johtopäätösten tekemisen kautta osa-alueeseen L6. Osa-alueeseen L3 yhteys löytyy vastaavasti kuin edellä osa-alueesta Y, kun tulkitsee matemaattisesa mielessä taloudellisen osaamisen olevan samankaltaista kuin vaikkapa kantokyvyn ja luonnonvarojen rajallisuuden. Löytämäni yhteydet peruskoulun laaja-alaiseen osaamiseen ovat täten samat lukion osa-alueista Y ja E.

Oppiaineen kuvauksessa on edellä mainitsemani kohdat yhteiskunnallisesta osaamisesta (Y) tulkittavissa myös osaksi tätä, joten matematiikan näkökulmasta kyseisiä osa-alueita (E ja Y) voi pitää lähestulkoon päällekäisinä. Selkein poikkeus on siinä, ettei eettisyys ja ympäristöosaaminen käsittele kuvauksessaan sinnikkyyttä eksplisiittisesti. Toisaalta oppiaineen kuvaus peräänkuuluttaa pohdintaa matematiikan ja kestävän kehityksen välisestä suhteesta, joka taas liittyy selkeästi tähän osa-alueeseen (E).

Globaali- ja kulttuuriosaaminen (G) liittyy monilukutaidon sekä monimuotoisten verkostojen, medioiden ja lähdeaineistojen mainintojen kautta monilukutaitoon (L4). Näiden mainitsemisen asiayhteys on silti kansainvälisessä osaamisessa. Tässä yhteydessä mainitaan myös teknologiaympäristöjen huomioiminen, joka luo yhteyden G5. Eettisesti vastuullisten elintapojen maininta luo yhteydet G3 ja G7 täysin samalla tavalla, realiteettien ymmärtämisen kautta, kuin lukion osa-alueista Y ja E muodostui yhteydet perusopetuksen osa-alueisiin L3 ja L7.

Oppiaineen kuvaus silti yhdistää eri asioita globaali- ja kulttuuriosaamiseen (G), kuin osa-alueisiin Y ja E. Selkeästi maininta matematiikan ymmärtämisestä kulttuureissa ja historiasta sekä maininta siitä universaalina kielenä liittyy tähän osa-alueeseen. Osio, jossa yhteydet osa-alueisiin tehdään, käsittelee samassa yhteydessä osa-alueet G ja M. Yhteys matematiikan ja muiden oppiaineiden tai laajempien kokonaisuuksien välillä ei kuitenkaan mielestäni löydä vastakaikua osa-alueen G kuvauksesta.

2.5 Matematiikka tietona kontekstissa - katsaus tieteiskirjallisuuteen

Opetushallitus toteaa työelämäprofessori Risto Sarvaksen määritelleen laaja-alaisen osaamisen tiedoksi kontekstissa (Opetushallitus 2020). Lukion opetussuunnitelman oppiainekuvaus laaja-alaisesta osaamisesta kytkee matematiikan laajempiin kokonaisuuksiin ja ympäröivään maailmaan. Tässä osaluvussa käsittelen tieteellisen kirjallisuuden kautta käsitteitä ja ajatuksia, joilla voi nähdä yhteyden lukion opetussuunnitelman laaja-alaiseen osaamiseen ja matematiikan väliseen suhteeseen. Seuraavassa osaluvussa kategorisoin oppiainekuvauksen laaja-alaisesta osaamisesta esiin tuomat asiat neljään luokkaan, osin tähän kirjallisuuskatsaukseen pohjautuen.

Katsauksessani matematiikkaa ja luonnontiedettä käsittelevään kirjallisuuteen on noussut esiin kolme erillistä, mutta toisiinsa kytköksissä olevaa pohdintaa: Mitä matematiikka itsessään on, mikä matematiikan merkitys on ja miten matematiikkaa tulisi opettaa. Yhteistä kaikille näille kolmelle pohdinnalle on se, että ne vievät ajatukseen jossa kytketään formaali matematiikka erilaisiin mallinnuksiin. Osa kirjallisuudesta on käsitellyt luonnontiedettä, mutta mielestäni nämä kolme suurta kysymystä ovat täysin vastaavilla tavoilla esitettävissä niin matematiikassa kuin luonnontieteessäkin, varsinkin lukiotasolla.

Juha Oikkonen pohti matematiikkaa itsessään, ehdottaessaan että matematiikalla on kaksi puolta (Oikkonen 2009). Matematiikan inhimillinen puoli (*the human side of mathematics*) liittyy intuitiivisiin ideoihin ja siihen, kuinka ihminen tekee matematiikasta itselleen ymmärrettävän (*heuristic descriptions*). Toisaalta matematiikan formaali puoli sisältää kaavoja, algoritmeja ja määritelmiä. Esimerkissään Oikkonen käsittelee jatkuvuutta molemmin tavoin.

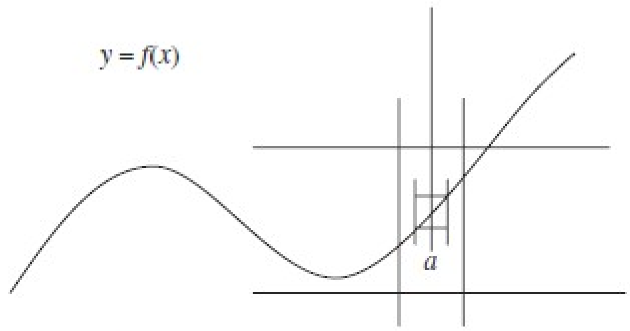


Figure 1. The human side of continuity.

Kuva 7. Oikkosen kuvituskuva jatkuvuden inhimillisestä puolesta. Kuvalähde: Oikkonen (2009)

Inhimillisessä puolessa Oikkonen näkee jatkuvuuden tarkoittavan sitä, että mikäli kaksi muuttuja-arvoa ovat lähellä toisiaan, myös niiden funktioarvot ovat, mistä hän jatkaa yllä olevan kuvan suorakaiteiden liittämisestä tähän ajatukseen. Formaalissa puolessa taas Oikkonen esittelee jatkuvuuden määritelmän, jossa on vastaava idea. Pohdintansa jatkuu siihen, että kun on kaksi vaihtoehtoista merkitystä jatkuvuudelle, kumpi on oikea? Oikkonen ehdottaa sellaista vastausta kysymykseen, ettei kumpikaan ja jatkaa siihen, että kokee hedelmälliseksi nähdä matematiikan syvimmän olemuksen olevan näiden kahden puolen välisessä vuorovaikutuksessa. Oikkonen spekuloi, että monelle matemaatikolle ja myös matematiikan lukio-opettajalle (*high school teachers*) matematiikka vaikuttaa tarkoittavan lähinnä sen formaalia puolta. Hän kysyykin, riittäisikö jatkuvuuden suhteen tässä tapauksessa osata ulkoa sen määritelmä, todetakseen että on oppinut mitä se tarkoittaa? Oikkonen erottaa kuitenkin tuon matematiikan olemuksellisen kysymyksen siitä, että hänen mukaansa on usein ajateltu matematiikan syntyneen pyrkimyksestä ymmärtää fysikaalista todellisuutta.

Lukion opetussuunnitelma peräänkuuluttaa matematiikan opetukselta ajattelua tukevia kuvia, piirroksia ja välineitä (Opetushallitus 2019). Tämä on vahvasti linjassa Oikkosen matematiikkakäsityksen kanssa, tuoden ihmispuolen osaksi lukiomatematiikkaa.

Marja van den Heuvel Panhuizen käsittelee kirjassaan *Assessment and realistic mathematics education* Freudenthalia, hänen matematisoinnin konspetiaan ja sen jatkopohdintaa, sekä ns. RME:ia (Heuvel-Panhuizen 1996). Tiivistän tähän aiheelle oleellisimmaksi kokemani kirjasta.

Oikkosen pohdintaa jossain määrin myötäillen, Hans Freudenthal on Heuvel-Panhuizenin mukaan esittänyt matematiikan olevan maailman matematisointiaa (*mathematization*), eli todellisista asioista saapumista formaaliin matematiikkaan. Freudenthal peränkuulutti matematiikalta todellisuuskytköstä, lapsiläheisyyttä sekä yhteiskunnallista relevanssia ollakseen ihmisarvoista (*be of human value*). Adrian Treffers jakoi tämän matematisoinnin horisontaaliseen ja vertikaaliseen. Freudenthal selitti horisontaalisen tarkoittavan saapumista elämästä matematiikan symbolien maailmaan ja vertikaalisen tarkoittavan matematiikan symbolimaailmassa itsessään etenemistä. Lukion opetussuunnitelma peräänkuuluttaakin oppiainekuvauksessa osana laaja-alaista osaamista, että opiskelija "oppii hahmottamaan matemattiisten käsitteiden merkityksiä ja tunnistamaan, kuinka ne liittyvät laajempiin kokonaisuuksiin sekä matematiikassa että muissa oppiaineissa". Oleellisesti tässä peräänkuulutetaan matematisoinnin molempia tapoja, osana matematiikan opetusta. Matematiikan opetuksen tällaista freudenthalilaista lähestymistä kutsutaan RME:ksi, sanoista Realistic Mathematics Education.

Freudenthalin voi nähdä koskettaneen kaikkia kolmea kysymystäni matematiikan luonteesta, merkityksestä ja opettamisesta. Tahdon silti nostaa esiin yhteiskunnallisen relevanssin ja ihmisarvoisuuden ohella toisen näkökulman matematiikan merkitykseen. Peruskoulun opetussuunnitelman määritellessä monilukutaidon ja lukion opetussuunnitelman viitatessa siihen, teen lyhyen katsauksen luonnontieteelliseen lukutaitoon Douglas A. Robertsin kategorisoinnin mielessä. Vaikka hän kategorisoikin matemaattisen sijaan luonnontieteellisen lukutaidon, voi vastaavan kahtiajaon tehdä matematiikalle ja kenties nähdä Freudenthalin jossain määrin koskettaneen myös tätä kahtiajakoa.

Roberts kategorisoi luonnontieteellisen lukutaidon kahteen visioon, jotka hän nimesi yksinkertaisesti Visio 1:ksi ja Visio 2:ksi (Roberts 2007). Visio 1:n mukaan luonnontieteellinen lukutaito on luonnontieteellisen tiedon ja prosessien hallintaa, jolloin keskiössä on perinne tai oppiaine itsessään. Hän tunnisti pedagogisessa keskustelussa aina olleen läsnä kahtiajaon, jonka mukaan luonnontieteellinen lukutaito tarkoittaa joko tuota tai toisaalta voisi tarkoittaa myös taitoa hakea tieteestä oleellinen, autenttisten ongelmien edessä. Tämä lukutaidon välinearvollisempi lähestyminen on hänen selitysmallinsa mukainen Visio 2.

Edellä lainattu kohta lukiomatematiikasta aineen sisäisenä kehitysprosessina ja toisaalta ainetta muihin asioihin soveltavana kehitysprosessina, osoittaa että lukion opetussuunnitelmassa on ajatus "matemaattisesta lukutaidosta", joka kattaa Robertsin esittämistä visioista molemmat. Aiemmin kuvana esittämäni PISA:n määritelmä matemaattiselle lukutaidolle taas kytkee sen kykyyn ymmärtää matematiikan merkitys maailmalle, kykyyn tehdä perusteltuja arvioita sekä matematiikan käyttöön ollakseen rakentava, osallistuva ja reflektoiva kansalainen (OECD 2005). Tällainen ajatus matemaatisen lukutaidon merkityksestä on selvästi enemmän Robertsin Visio 2:n mukainen.

Tiivistääkseni osaluvun Sarvaksen laaja-alaisen osaamisen määritelmän mielessä, esimerkiksi RME peräänkuuluttaa autenttisiin konteksteihin sidottua opetusta, on olemassa näkemyksiä joiden mukaan matemaattinen lukutaito on taitoa liittää matematiikka muuhun maailmaan ja matematiikka itsessään on myös tulkittavissa intuitiivisten ideoiden ja formalismin väliseksi vuorovaikutukseksi. Kaikki kolme esiin nostamaani kysymystä matematiikasta itsestään, sen merkityksestä ja sen opettamisesta voidaan siis liittää Sarvaksen ajatukseen, jossa laaja-alainen osaaminen on "tietoa kontekstissa", tarkoittaen tässä tapauksessa formaalin matematiikan yhdistämistä malleihin.

2.6 Laaja-alainen osaaminen lukiomatematiikassa - oppiainekuvauksen luokittelu

Edellä olen maalannut kuvan laajemmasta pedagogisesta liikkeestä, jonka osana suomalaisen laaja-alaisen osaamisen konseptin voi nähdä, edennyt peruskoulun laaja-alaisesta osaamisesta lukion vastaavan tulkintaan matematiikan osalta sekä paneutunut kirjallisuuteen, jonka voi nähdä koskettavan tätä aihetta. Nämä askeleet johtavat tulkintaani laaja-alaisesta osaamisesta lukiomatematiikassa, johon koko luku kulminoituu ja jonka esittelen tässä osaluvussa.

Normatiivisimmat osuudet lukion laaja-alaisen osaamisen ja matematiikan yhteydestä ovat laaja-alaisen osaamisen osaluku osa-aluekuvauksineen sekä matematiikan oppiainekuvaus, jossa tarjotaan tulkinta laaja-alaisesta osaamisesta matematiikassa. Koska laaja-alaisen osaamisen osa-alueet on jaoteltu koko lukio-opetusta silmällä pitäen, ei kyseinen jaottelu välttämättä ole paras mahdollinen laaja-alaisen osaamisen ymmärtämiseksi yksittäisen oppiaineen kontekstissa. Tästä syystä jaottelen matematiikan oppiainekuvauksen jokaisen esiin tuoman asian laaja-alaisesta osaamisesta neljään eri luokkaan, mikä tarjoaa vaihtoehtoisen näkökulman asiaan tavalla, jonka koen olevan paremmin yhteydessä käsittelemääni kirjallisuuteen ja aiempaan havaintooni lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueiden osittaisesta päällekäisyydestä matematiikan suhteen.

Kaksi alla olevaa luokkaa (1. ja 2.) liittyvät matematiikkaan ja sen tekemiseen itsessään ja kaksi (3. ja 4.) matematiikan ja muun maailman väliseen yhteyteen. Ensimmäinen myötäilee osittain Robertsin ensimmäistä visiota, kun taas kolmas ja neljäs hänen toista visiotaan. Suluissa mainitsen mihin lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueeseen oppiainekuvaus yhdistää sen listaamat kohdat (merkiten nämä "OPH"). Käytän jälleen lyhenteitä H, V, M, Y, E ja G samalla tavalla kuin edellä kuvaamaan lukion laaja-alaisen osaamisen osa-alueita. Lihavoin näistä näkemykseni mukaan keskeiset. Lihavoimattomat tulkitsen asiaan liittymättömäksi. Merkitsen toisaalta viivan jälkeen kursiivilla myös omia vaihtoehtoisia ehdotuksia osa-alueiksi ("Lisäksi"), mikäli näen tämän perustelluksi.

1. Työskentely ja oppiminen matematiikassa

Tämä luokka on vahviten kytköksissä metakognitioon ja matematiikan sisäiseen puoleen, sen tekemisen prosessien mielessä. Osa-alue myötäilee Robertsin ensimmäistä visiota, joskin on huomautettava, että se ei kosketa matematiikan sisällöllisiä oppirakenteita mitenkään, kuten ei juuri mikään muukaan laaja-alaisen osaamisen tekstissä. Sisältöihin ja oppirakenteisiin liittyvät asiat esitetään opetussuunnitelmassa moduulien keskeisinä sisältöinä.

Luokkaan kuuluu:
- tiedonhankintaprosessien vahvistaminen sekä kokeilut (OPH: **Y**, E, **H** - Lisäksi: ***M***)

- kysymykset, oletukset ja päätelmät perusteluineen havaintojen pohjalta, opetustapojen valintaan osallistuminen, vaihtelevat työtavat (esimerkiksi yksin ja yhdessä) (OPH: **V** - Lisäksi: ***M, H, Y***)
- ongelman ymmärtäminen, ratkaisu sekä tuloksesta keskustelu (OPH: G, **M** - Lisäksi: ***V, Y***)

2. Yleiset kaikenlaisen harjoittelun hyödyt

Oppiainekuvaus mainitsee sellaisia hyötyjä matematiikan opiskelussa, jotka näkemykseni mukaan saattavat liittyä muuhunkin tavoitteelliseen harjoiteluun kuin matematiikkaan. Tämä kohta käsittelee opiskelijan jonkinlaista kasvua ihmisenä. Luokka silti liittyy matematiikkaan lähinnä metataitokokoelmana, osin edellytyksinä matematiikan harjoittamiselle ja osin sen harjoittamisen oletettuihin hyötyihin kasvussa ihmisenä.

Luokkaan kuuluu:
- kiinnostuksen ja itsetunnon vahvistuminen, sinnikäs työskentely ja tavoitteiden asettamisessa kasvaminen (OPH: **Y**, E, **H**)

3. Mallintamistaito, tiedon eheytys ja monilukutaito

Tässä rajaamassani luokassa ollaan vahviten kaikista tekemisissä matematiikan ja muun tiedon välisen yhteyden kanssa. Luokka toisaalta kytkee matematiikan muihin tieteisiin ja arkeen mallinnusten kautta, mutta toisaalta myös käsittelee matematiikan esitystapojen monimuotoisuutta. Tämä rajaamani luokka on se luokka, joka liittyy vahviten edellisen osaluvun kirjallisuuskatsauksen tärkeimpään löydökseen formalismin ja mallien välillä. Luokka koskettaa jokaista kolmea löytämääni näkökulmaa: matematiikan luonnetta itsessään, matematiikan merkitystä ja matematiikan opetusta. Yhteys Robertsin välinearvoa käsittelevään Visio 2:een. on selkeä, mutta myös oppiainelähtöisempi Visio 1. näkyy matematiikan oppirakenteiden sisällä tapahtuvassa eheytyksessä.

Tämä erottamani luokka käsittelee oleellisesti tiedon eheyttämistä - joko matematiikan sisäisesti tai oppiainerajat ylittäen. Luokan jokainen kohta on tulkittavissa Freudenthalin esittelemän ja Treffersin kahtiajakaman matematisoinnin kautta. Osa "horisontaalisesti" yhteytenä muuhun kuin matematiikkaan ja osa "vertikaalisesti" matematiikan käsitejärjestelmien sisällä tapahtuvissa oppimisprosesseissa.

Luokkaan kuuluu:
- arkielämän ja matematiikan välisen yhteyden tutkiminen (OPH: **Y**, E, H - Lisäksi: ***M***)
- opiskelijoita kiinnostavat aiheet, ilmiöt ja niihin liittyvät ongelmat, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla (OPH: **V** - Lisäksi: ***H, M, Y, E, G***)
- käsitteiden merkitysten hahmottaminen ja niiden yhteydet laajempiin kokonaisuuksiin muissa oppiaineissa tai matematiikan sisällä, eri muodot esittää matemaattista tietoa ilmiöiden mallintamisessa, ajattelua tukevat kuvat, piirrokset ja välineet sekä matematiikan luonne universaalina kielenä (OPH: G, **M**)

4. Matematiikan osaaminen kansalaistaitona ja maailmankansalaisuus

Luokkaan kuuluu:
- matematiikan taitojen soveltaminen päätöksentekoon sekä pohdinta matematiikan taitojen hyödyntämisestä kestävän kehityksen ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa. (OPH: **Y**, **E**, H - Lisäksi: ***G***)
- ohjaaminen ymmärtämään matematiikan merkitys historiassa ja erilaisissa kulttuureissa. (OPH: **G**, H)

2.7 Laaja-alainen osaaminen pitkän matematiikan moduuleissa

Pakolliset ja valtakunnalliset lukio-opinnot on jäsennelty opetussuunnitelman perusteisiin moduuleiksi, joista rakennetaan koulukohtaisia opintojaksoja. Kun opintojaksot rakennetaan, otetaan paikallisesti kantaa siihen, kuinka opintojaksossa "toteutetaan" laaja-alaisen osaamisen tavoitteita ja osa-alueita. Opetussuunnitelman perusteet eivät varsinaisesti velvoita sisällyttämään jokaista osa-aluetta jokaiseen opintojaksoon tai edes aineeseen. Toisaalta opetussuunnitelman perusteet velvoittavat *pyrkimään* osa-alueiden tavoitteisiin jokaisessa oppiaineessa (Opetushallitus 2019).

Opetushallitus on kuitenkin tukimateriaaleissa avannut taustalla olevaa ajattelua enemmän ja peräänkuuluttaa niin sanottua "kokonaiskoordinaatiota", jossa eri osa-alueet ovat tasapainoisesti mukana lukion opetustarjonnassa (Opetushallitus 2020). Se, ettei erinäisillä lisämateriaaleilla ole velvoittavaa asemaa, ei ole tämän tutkielman matemaattiselle puolelle olennaista, mutta koen tärkeäksi mainita että opetusssuunnitelman perusteiden lisäksi on julkaistu materiaaleja, jotka antavat välineitä tulkintaan.

Käyn seuraavassa läpi kaikki kohdat matematiikan oppiainekuvauksen osiosta laaja-alaiseen osaamiseen liittyen. Moduulit jotka olen analysoinut ovat kaikille yhteinen ensimmäinen moduuli ja pitkän matematiikan moduulit. Sivuutan lyhyen matematiikan kokonaan, sillä sen käsittely olisi tässä suhtessa lähestulkoon samanlainen.

Rajaamani luokka 1. työskentelystä ja oppimisesta matematiikassa on jokaisen kohdan osalta kaikissa opinnoissa toteutettavissa. Maininta opetustapojen valintaan osallistumisesta on mahdollisesti siinä mielessä poikkeus tässä, että opettaja voi valita sallia osallistumisen suuremmissa määrin joissakin opintojaksoissa ja pienemmissä määrin toisissa. Koska näen tuon luokan asioilla yhteyden jokaiseen muuhun osa-alueeseen, paitsi eettisyyteen ja ympäristöosaamiseen sekä globaaliin- ja kulttuuriosaamiseen, kaikkia muita neljää osa-aluetta voi edistää jokaisessa opintojaksossa, luokitteluni kokonaisuuden 1. mukaisesti.

Luokka 2. yleisistä hyödyistä kuten sinnikkyys ja tavoitteellisuus eivät ole riippuvaisia opintojakson sisällöstä ja täten kehityksen voi ajatella tapahtuvan jokaisessa opintojaksossa. Minä näen näiden välillä yhteyden hyvinvointiosaamiseen ja yhteiskunnalliseen osaamiseen. Asiat nostetaan oppiainekuvauksessa esiin yhteydessä, jossa myös mainitaan eettisyys ja ympäristöosaaminen, mutta en juurikaan näe luokkani kohtien välillä yhteyttä kyseisen osa-alueen kuvaukseen. Jokaisessa opintojaksossa voi siispä ajatella hyvinvointiosaamisen ja yhteiskunnallisen osaamisen kehittyvän näiden kohtien mielessä.

Luokka 3. mallintamistaidosta, tiedon eheytyksestä ja monilukutaidosta painottuu mitä varmimmin eri tavoin eri opintojaksoissa. Esimerkiksi prosenttilaskennan yhteys arkielämään lienee suurempi kuin trigonometristen funktioiden derivoinnin. Toisaalta esimerkiksi mallintaminen tai mallit mainitaan moduuleissa MAA2, MAA5, MAA6, MAA9. Joissain opintojaksoissa on siis mahdollisesti vahvemmin läsnä jotkut tämän kokonaisuuden osat. Riippuu toteutuksesta, missä opintojaksossa opetuksessa käsitellään "opiskelijoita kiinnostavia aiheita, ilmiöitä ja niihin liittyviä ongelmia, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla". Lisäksi se, mitä nämä ovat, riippuu opiskelijoiden kiinnostuksesta. Tämän kohdan olen edellä yhdistänyt jokaiseen laaja-alaisen osaamisen osa-alueeseen, mutta yhteyden olemassaolo riippuu tosiaankin opiskelijoiden kiinnostuksesta. Minkään moduulin tavoitteisiin tai keskeisiin sisältöihin ei lukeudu kiinnostuksesta kumpuava aihevalinta, jolloin tällainen käsittely tai sen mahdollinen pois jääminen tulee riippumaan opetusjärjestelyistä, joihin mahdollisesti oppimateriaalit vaikuttavat.

Näen monitieteisen ja luovan osaamisen sekä vuorovaikutusosaamisen olevan tämän luokan mielessä läsnä jokaisen moduulin aiheiden opiskelussa. Loput vaihtelevat opintojaksoittain ja kaikkien toteutumisesta ei ole takuita. Esimerkiksi globaali- ja kulttuuriosaamisen edistyminen riippuu siitä, milloin matematiikan ymmärtämistä universaalina kielenä käsitellään ja miten tämä tehdään. Tämän maininnan yhteys globaalin- ja kulttuuriosaamisen kuvaukseen ei myöskään ole kovin vahva.

Luokka 4. laaja-alaisen osaamisen maininnoista oppiainekuvauksena on sikäli erikoinen, että sen osina on lähinnä opetussisältöjä. Samaan aikaan näitä opetussisältöjä kestävästä kehityksestä, ihmiskunnasta taikka historiasta ja kulttureista ei löydy mistään moduulista, jolloin osien toteutuminen tai toteutumatta jääminen tulee olemaan kiinni opettajan toiminnasta tai oppimateriaaleista. Pienoisen poikkeuksen muodostaa päätöksenteko. Päätöksentekotaito mahdollisesti paranee kaikesta työskentelystä matematiikan parissa. Konkreettisesti talousmatematiikan moduuli MAA9 mainitsee esimerkiksi kannattavuuden laskennan, joka voisi liittyä päätöksentekokykyyn.

Näen asian niin, että hyvinvointiosaaminen, vuorovaikutusosaaminen, monitieteinen ja luova osaaminen sekä yhteiskunnallinen osaaminen kehittyvät jokaisen moduulin mukaisessa opetuksessa, kuten olen yllä esittänyt. Tämä edellyttää tulkintaa, jonka mukaan työskentelytaidot ja asenteiden parissa kasvaminen matematiikkaa opiskellessa ovat osa yhteiskunnalista osaamista, kuten olen edellä tulkinnut. Lisäksi tämä edellyttää että opetuksessa käytetään vuorovaikutuksellisia menetelmiä. Hyvinvointiosaamisen edistyminen riippuu siitä, missä määrin oppiainekuvauksen julistus matematiikan opiskelun yleisistä hyödyistä ovat tosia ja asiaan voinee vaikuttaa myös opetusjärjestelyin. Monitieteinen ja luova osaaminen on selvästi läsnä jokaisen moduulin opinnoissa, jo tiedon eri esittämistapojen kautta.

Sen sijaan eettisyys ja ympäristöosaaminen tai globaali- ja kulttuuriosaaminen eivät ole automaattisesti osa minkään moduulin mukaista opiskelua, vaan ne vaativat opettajalta, oppimateriaalin laatijalta tai opiskelijoilta omia ponnistuksia tullakseen osaksi opintoja. Niihin ei silti tarvita mitään muuta kuin laskutehtäviä, jotka käsittelevät kuvausten aihepiirejä, jolloin ensisijaisen vastuun voi nähdä oppimateriaalien tekijöillä. Jos kuitenkin nähdään yleinen kehitys realiteettien ymmärtämisessä osana näitä osa-alueita, voi hatarasti tulkita kehitystä tapahtuvan jokaisen moduulin mukaisissa opinnoissa. Tällainen tulkinta ei omaa vahvaa yhteyttä näiden osa-alueiden kuvauksiin, eikä vahvaa yhteyttä löydy myöskään oppiaineen kuvauksesta, mutta loin itse tällaisen yhteyden edellä, perustuen perusopetuksen ja lukion osa-alueiden väliseen vertailuun.

Tässä yhteydessä toistan silti perusopetuksesta sen, että sen osa-alueet *Kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu (L2)* ja *Osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen (L7)* ovat heikosti edustettuina sen tavoitteissa. Opetushallitus ei siis näe tämän tyyppisillä kenties humanistisiksi luokiteltavilla asioilla perusopetuksen puolella kovin montaa yhteyttä matematiikkaan. En tässä tutkielmassa ota kantaa siihen, onko tämä perusteltua vai ei. Tämän lukioanalyysin johtopäätös silti on, että vastaavasti vahvoja yhteyksiä ei näy matematiikan ja näiden osa-alueiden välillä myöskään lukiossa, ellei opettaja luo niitä itse tai ellei oppimateriaalit luo näitä harjoitustehtävissä.

3 Prosenttilaskenta ja laaja-alainen osaaminen

Prosenttilaskenta matematiikan osa-alueena on valittu tämän laaja-alaista osaamista käsittelevän tutkielman aihepiiriksi siksi, että se liittyy arkielämään ja on hyvin vakiintunut tapa joka puolella maailmaa esittää suhteita ja osamääriä. Esittelen ensiksi prosenttilaskennan tärkeimmät tässä luvussa käytettävät käsitteet. Sen jälkeen seuraa lyhyt katsaus tieteiskirjallisuuteen, käsitellen prosentilaskennan yleistä käsitteellistä oppirunkoa ja opetusta sekä osia prosenttilaskennan merkityksestä. Tämän jälkeen esittelen osin oppikirjoihin pohjautuvan itse laatimani oppirakenteen, joka esittelee sekä yhteyksiä että etenemisjärjestyksen sen osien välillä. Lopuksi kytken prosenttilaskennan lukion laaja-alaiseen osaamiseen, edellisen luvun tulkintaani sekä oppirakenteeseeni perustuen.

3.1 Prosenttilaskennan käsitteistä

Prosenttilaskennan peruskäsitteistö otetaan tässä tutkielmassa taulukkokirjasta *Matemaattisia kaavoja* (Valtanen ym. 2019) ja sitä laajennetaan käsitteistöllä oppikirjoista *Yhteinen tekijä - Lukion matematiikka 1* (Ekonen ym. 2018) ja *Lähihoitajan laskutaito* (Peltola ym. 2018). Lisäksi tehdään muutama huomio käsitteistöstä ja sen pienistä eroavaisuuksista eri oppikirjoissa. Peruskäsitteistöllä tarkoitetaan tässä tutkielmassa prosentin lisäksi prosenttilukua, prosenttiarvoa ja perusarvoa.

Prosentti on sadasosa, eli $1\ \% = \frac{1}{100}$. Suhdelukua, *p* %, sanotaan *prosenttiluvuksi* kaavan $\frac{a}{b} = \frac{p\ \%}{100\ \%}$ mukaan. Tässä tapauksessa lukua *b* kutsutaan *perusarvoksi* ja lukua *a* *vertoarvoksi* tai *prosenttiarvoksi*. Tässä tutkielmassa käytetään käsitettä prosenttiarvo.

Kirjoissa Yhteinen tekijä 1 ja Lähihoitajan laskutaito on myös käytössä käsitteet *prosenttikerroin*, *muutosprosentti*, *vertailuprosentti*, *prosenttiyksikkö* ja erinäisiä sovelluksissa näkyviä käsitteitä, kuten *veroprosentti* ja *tilavuusprosentti*. Alla annetaan näistä neljälle ensimmäiselle tutkielmassa käytettävät määritelmät ja määritellään luvun loputkin keskeiset käsitteet.

Prosenttikerroin on prosenttiluku muutettuna desimaaliluvuksi, esimerkiksi yhtälössä 15 % = 0,15, on 0,15 prosenttikerroin. Prosenttikerroin, $k = \frac{a}{b} = \frac{p\ \%}{100\ \%}$, voidaan toisaalta nähdä lähinnä työkaluna prosentuaalisessa muutoksessa, jolloin prosenttiarvo *a* on *muuttunut arvo*, eli *vertailuarvo* ja perusarvo *b alkuperäinen arvo*. Toisaalta sen voi tulkita minä tahansa desimaalilukuna, joka vastaa prosenttilukua. Muutoksen suuruutta, eli vertailuarvon ja perusarvon erotusta, $\Delta a = a - b$, kutsutaan tässä tutkielmassa *muutosarvoksi*.

Muutosprosentti viittaa prosentuaalisen muutoksen suuruuteen sitä kuvastavalla prosenttiluvulla. Merkitsemällä prosentuaalista pienennystä/vähennystä negatiivisella luvulla ja suurennusta/kasvua positiivisella, saadaan muutosprosentti, Δ*p* %, ilmaistua kaavalla $\Delta p\ \% = \frac{a-b}{b} \cdot 100\ \%$, kun $b \neq 0$. Tapaukset joissa $b = 0$, eivät ole tämän tutkielman aiheen kannalta oleellisia.

Vertailuprosentti mainitaan kirjassa Yhteinen tekijä 1 otsikossa "Muutos- ja vertailuprosentti", mutta osaluku ei anna kummallekaan otsikon käsitteelle määritelmää ollenkaan. Vertailuprosentti on kuitenkin mielekästä määritellä prosenttilukuna *p* %, silloin kun prosenttiarvo *a* on vertailuarvo esimerkiksi prosentuaalisessa muutoksessa tai muussa vertauksessa. Tällä tavoin määriteltynä vertailuprosentti on $p\% = 100\% + \Delta p\ \% = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$, joista keskimmäinen lauseke soveltuu prosentuaalisiin muutoksiin ja viimeinen muutosten lisäksi kaikkiin muihinkin vertauksiin.

Käsitettä *prosenttiyksikkö*, käytetään kun verrataan kahta prosenttilukua keskenään. Prosenttilukujen *p* % ja *q* % ero prosenttiyksiköissä on tällöin *q* - *p* prosenttiyksikköä tai *p* - *q* prosenttiyksikköä, riippuen vertauksesta.

Huomioita käsitteistöstä

Käsite *prosenttiluku* ymmäretään kirjallisuudessa vaihtelevasti merkityksessä "prosenttien määrä" ja toisaalta koko prosenttilausekkeena, eli lausekkeena, joka ilmoittaa prosenttien määrän ja sisältää myös prosenttimerkin. Ero näiden välillä on siis että esimerkiksi lausekkeessa 15 % ensin mainitussa "15" on prosenttiluku ja toiseksi mainitussa "15 %" on. Ensin mainittu näkyy kirjoissa Matemaattisia kaavoja ja Lähihoitajan laskutaito, kun jälkimmäinen taas näkyy kirjoissa Yhteinen tekijä 1 ja Lähihoitajan laskutaito. Lähihoitajan laskutaidossa siis näkyy molemmat tavat. Tässä tutkielmassa prosenttiluvulla tarkoitetaan koko lauseketta, joka sisältää prosenttimerkin. Opetuskokemukseni nojalla ero ei ole aina selvä ja joskus oppilaat ilmeisimmin kadottavat pohdinnoissaan prosentin merkityksen sadasosana. Tästä syystä kyseinen kaksoismerkitys voi olla hyvä vähintään tiedostaa ja tässä tutkielmassa pidetään aina prosenttimerkki mukana kun prosenttilukua käsitellään.

Prosenttiyksiköihin pohjautuvassa vertauksessa ei tarvitse perusarvon *b* pysyä vakiona. Esimerkiksi Yhteisessä tekijässä verrataan Kokoomuksen kannatuslukuja eduskuntavaaleissa 2015 ja 2011. Tällaisen vertauksen voi tehdä, vaikka ääntenlaskennassa hyväksyttyjen äänten lukumäärä *b* muuttuisi vaalien välillä.

Eräät prosenttilaskennan prosenttilukua kuvastavat käsitteet ovat muotoa "-*prosentti*", kuten muutos- ja vertailuprosentti. Tämä käytäntö on käytössä niin oppikirjassa Yhteinen tekijä kuin myös Lähihoitajan laskutaito. Muita esimerkkejä käytännöstä näissä oppikirjoissa on *veroprosentti*, *tilavuusprosentti* ja *kasvuprosentti*. Olisi mahdollista muodostaa sen tyyppisiä käsitteitä, kuin *muutoksen prosenttiluku*, *muutosta vastaava prosenttiluku* tai *muutosprosenttiluku*. Opettaja voisi tällä tavoin korostaa, että kyseessä on prosenttiluku, minkä arvelen vahvistavan prosenttilaskennan peruskäsitteistön hallintaa.

Prosentti näkyy myös sanassa *prosenttiarvo* sellaisessa merkityksessä, joka poikkeaa merkityksestä *yksi prosentti*. Tästä mahdollisesti seuraava sekaannus oppilaiden parissa olisi korjattavissa käyttämällä käsitettä *vertoarvo*. Valintaa *prosenttiarvo* taas voi puolustaa sillä että sen suhde perusarvoon vastaa prosenttiluvun suhdetta 100 %:iin.

Näiden huomioiden tarkoitus ei ole kehittää käsitteistöä, vaan tehdä näkyväksi mahdollisia kipukohtia prosenttilaskennan oppimisessa.

3.2 Katsaus prosenttilaskentaan tieteiskirjallisuudessa

Prosenttilaskenta on aiheena niin laaja, että se ansaitsisi oman tutkielman. Tämän melko pinnallisen katsauksen tavoitteena on todeta prosenttilaskennan yhteiskunnallinen ja arkinen merkitys, käsitellä aihetta prosenttilaskennasta ja opetuksessa hyödynnettävästä mallinnuksesta sekä pohjustaa seuraavan osaluvun oppirakennetta oleellisella tieteiskirjallisuudella. Näistä viimeksi mainittu liittyy tähän osalukuun itsessään, kahden ensiksi mainitun liittyessä matematiikkaan ja laaja-alaiseen osaamiseen. Pyrin yhdistämään tässä osaluvussa esitelemäni tieteiskirjallisuuden aiemmin esittelemääni tieteiskirjallisuuteen, joka liittyi laaja-alaiseen osaamiseen.

Artikkelissaan *Percent: A Privileged Proportion* Parker ym. korostavat prosenttilaskennan tärkeää merkitystä toisaalta aritmetiikassa ja toisaalta käytännöllisenä aiheena, jolla on juuret kaupankäynnissä ja joka näkyy niin uutisissa kuin jokapäiväisessä kanssakäynnissä (*everyday commerce*) (Parker ym.1995). Lisäksi artikkeli esittelee prosenttilaskennan yli neljän vuosituhannen pituisen historian. Tässä katsauksessa näkyy esimerkiksi käsitteen vakiintuminen edellisen vuosituhannen puolivälissä ja ympyrädiagrammin (*pie chart*) käyttöönotto oppikirjoissa 1900-luvun alkupuolella. Ennen kaikkea historiakatsaus kuitenkin kattaa sekä pitkän aikavälin, että useita maita ja maanosia, osoittaen artikkelin väitteen prosentista yleismaailmallisena (*universal*) konseptina perustelluksi. Artikkeli osoittaa myös tutkimuksiin nojautuen prosenttilaskennan oppimisen ja opettamisen olevan haasteellista.

Rianasari ym. (2012) toteaa moniin tutkimuksiin vedoten, että vaikka oppilaat saattaisivat osata toteuttaa mekaanisesti prosenttilaskennan askelia, he eivät välttämättä ymmärrä prosenttilaskentaa. He ehdottavatkin ratkaisuksi realistista matematiikan opetusta (RME), esimerkiksi kuvien tukemana, sekä käsittelevät Freudenthalin ja Treffersin ajattelua, joista kirjoitin edellisessä luvussa. He suosivat kuvituskuvina kahteen lähteeseen viitaten pylväsmalleja (*bar model*), joissa näkyy pinta-aloja.

Prosenttilaskennan vaikean ymmärrettävyyden toteaa myös Koay artikkelissaan *The knowledge of percent of pre-service teachers* (1998). Tästä artikkelista valitsen kaksi esimerkkiä osin siksi, että prosenttilaskennan ymmärryksen vaikeus jopa opetusharjoittelua suorittavien (*pre-service teacher*, kaksi eri kohderyhmää) tapauksessa ilmenee niiden kautta. En paneudu sitä tarkemmin tutkimukseen, kuin että esittelen oleelliseksi kokemani osat kahden kysymyksen osalta. Ennen kaikkea mainitsen tutkimuksen kysymysten itsensä takia, niiden käsitellessä arkisisia tilanteita. Edellisessä luvussa kytkin laaja-alaisen osaamisen matematiikan kontekstissa arkeen.

Seuraavassa kuvia näistä lähteistä. Ensin kuva, josta olen jalostanut oman myöhemmässä vaiheessa esiteltävän kuvituskuvani prosenttipylväälle. Sen jälkeen kuva, jossa yllä mainitsemani kaksi arkista tilannetta, jotka käsittelen näiden jälkeen.

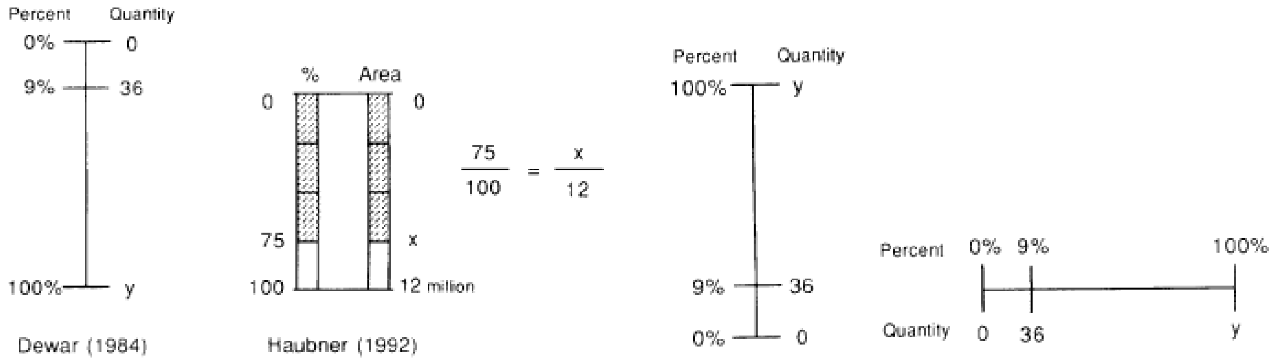
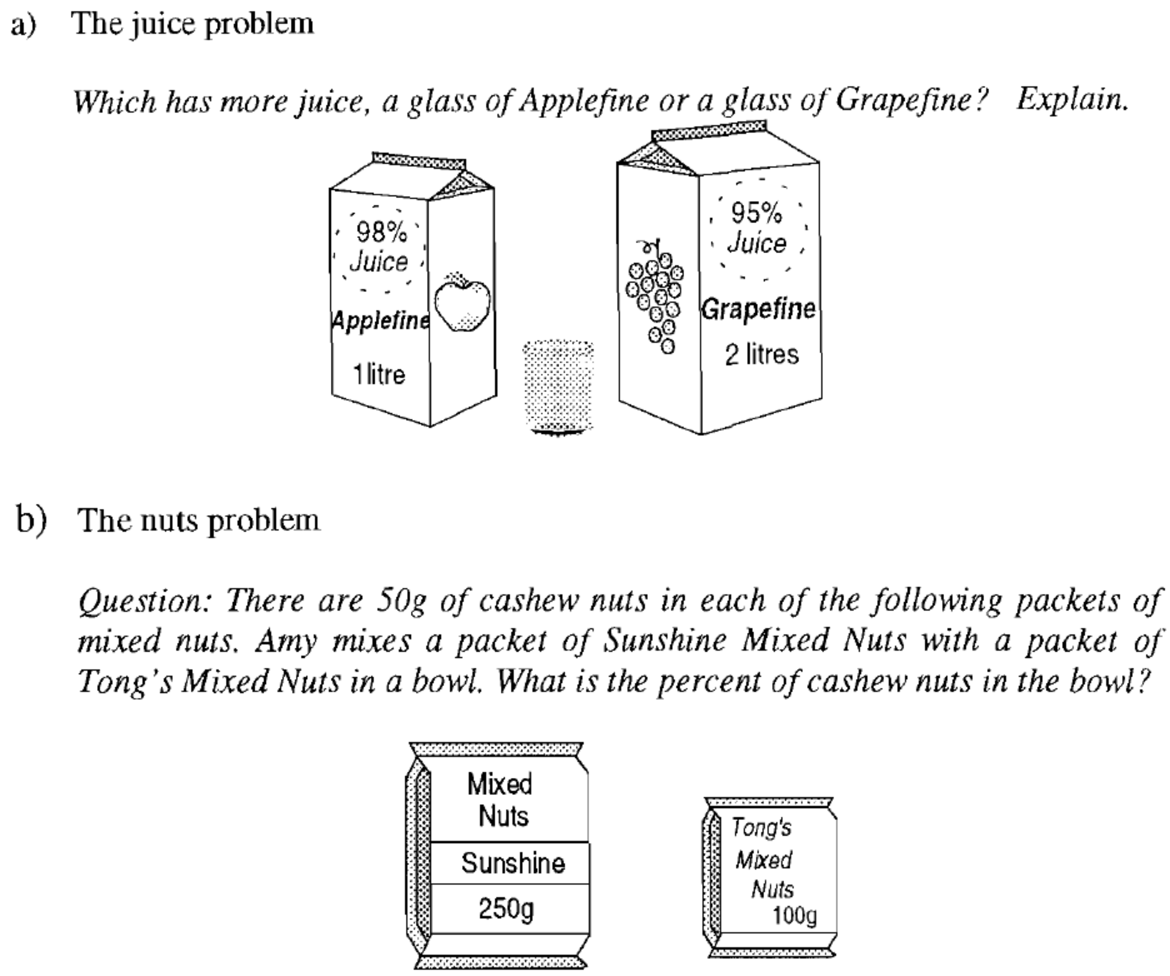


FIGURE 5. *Comparison scales used to facilitate proportional setup for problems of percent*

FIGURE 6. *Alternate positioning for Dewar's (1984) percent scale*

Kuva 8. Perusarvon ja prosenttiarvon suhteutuminen sataan prosenttiin ja prosenttilukuun erilaisin kuvin konkretisoituna, niin janamittoina kuin pinta-aloinakin. Kaksi eri kuvaa on sommiteltu yllä samaan kuvaan. Kuvalähde: Parker & Leinhardt (1995)



Kuva 9. Kaksi kysymystä prosenttilaskennasta kontekstissa Koayn tutkimuksesta, sommiteltuna samaan kuvaan. Kuvalähde: Koay (1998)

Kuvassa 8. olevat eri tavat yhdistää prosenttilaskennan käsitteitä mittoihin kytkeytyvät edellisen luvun tieteiskirjallisuuden mielessä selkeiten Oikkosen ajatukseen matematiikan ihmispuolesta ja formaalista puolesta. Siinä kytketään formaalin puolen aiemmin esittelemäni yhtälö $\frac{a}{b} = \frac{p\,\%}{100\,\%}$ johonkin kuvaan, joka konkretisoi sitä. On myös mahdollista ajatella tällaisten kuvien olevan reaalimaailman matematisointia Freudenthalin esittämän mielessä, jos joko geometriset mitat itsessään ovat tutkittavina tai jos kuvien pinta-alojen tai janojen mitat jostain syystä toimivat hyvänä konkretisoivana "välimallinnuksena" kysymyksen ja formaalin ratkaisun välillä.

Kuvassa 9. taas on käsittelyssä Koayn tutkimuksesta kaksi kysymystä, joista a-kysymys mehusta meni selityksen kera oikein kahdesta tutkitusta ryhmästä vain 54 %:lta ja 48 %. Väärin se meni ilman tai selityksen kanssa, joko väärän mehun tai vastauksen "same" kautta molemmissa kohderyhmissä yli 30 %:lta vastaajia. Alempi b-kysymys pähkinöistäkin meni paremmassa ryhmässä tavalla tai toisella väärin 24 %:lta. Tässä koen tärkeäksi mainita suosituimman virhetyypin, jossa on päädytty vastaukseen "20 % + 50 %". Näitä oli 13 % vahvemmalta ja 16 % heikommalta ryhmältä.

Nämä kaksi Koayn tutkimuksen esimerkkiä opetusharjoittelussa olevien vastauksista demonstroivat prosenttilaskennan oikeanlaisen ymmärtämisen haasteellisuutta. Mutta kuten edellä sanottu, toinen tärkeä syy niiden esiin nostamiseksi on kysymysten arkisessa luonteessa itsessään. Näiden kysymysten menestyksekäs ratkaisu vaatii freudenthalilaista todellisen maailman matematisointia ja edustavat Robertsin vision 2. mukaista sovellustaitoon kytköksissä olevaa lukutaitoa. Formaali ratkaisu olisi pähkinätehtävässä mahdollinen, uuden prosenttiarvon ja perusarvon selvittämisen kautta ja siis perustuu näiden käsitteiden hallintaan, tokikin autenttisessa tilanteessa. Mehutehtävä taas jo itsessään edellyttää tietoa siitä, että prosenttiluku on mehuun itseensä ja sitä kuvastavaan vakiosuureeseen liittyvä ominaisuus (täysmehupitoisuus) ja että kyseinen prosenttiluku *p* % on vakio, joka pätee jokaisen prosenttiarvon *a* ja sitä vastaavan perusarvon *b* suhteelle, riippumatta siitä, kuinka suuri perusarvo, eli tässä tapauksessa lasi, on kyseessä. Tällaisten suureiden kuin "täysmehupitoisuus" ymmärtäminen on ehkäpä lähempänä luonnontieteellistä suureiden luonteen ymmärtämistä kuin Oikkosen tarkoittamaa formaalia matematiikkaa. Kiistatta tällaisissa tehtävissä lukiomatematiikan oppiainekuvauksen mukaisesti "tutkitaan arkielämän ja matematiikan välisiä yhteyksiä", minkä edellä liitin laaja-alaisen osaamisen osa-alueisiin Yhteiskuntaosaaminen sekä Monitieteinen ja luova osaaminen.

Alla enemmän seuraavaan osalukuun ja vähemmän laaja-alaiseen osaamiseen liittyvä kuva, jossa Parkerin ja Leinhardtin (1995) yhdeksän prosenttilaskennan ongelman tyyppiä. Artikkelissa *fraction* määritellään osamääräksi tai suhteeksi tilanteissa, joissa perusarvo on kokonaisen joukon koko ja prosenttiarvo on sen osajoukon koko. Toisessa kategoriassa, *ratio*, taas vastaavasti vertailtavat joukot ovat toisistaan erillisiä.

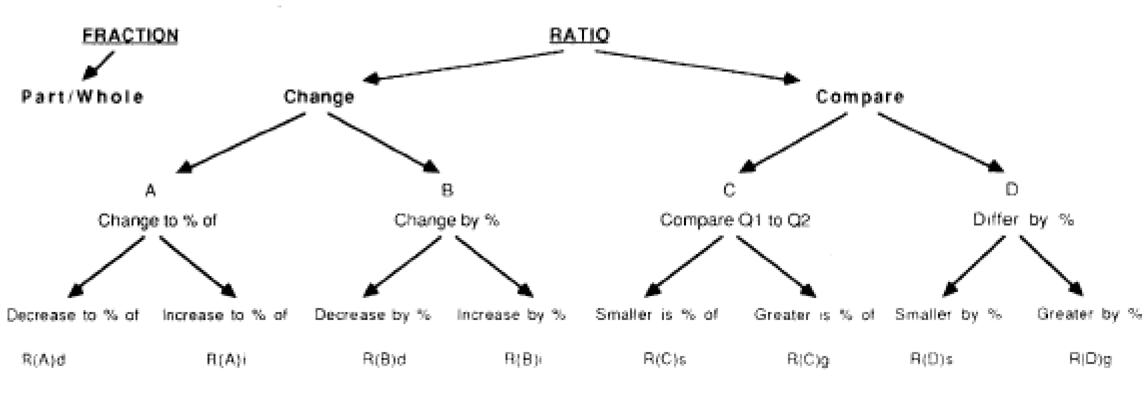


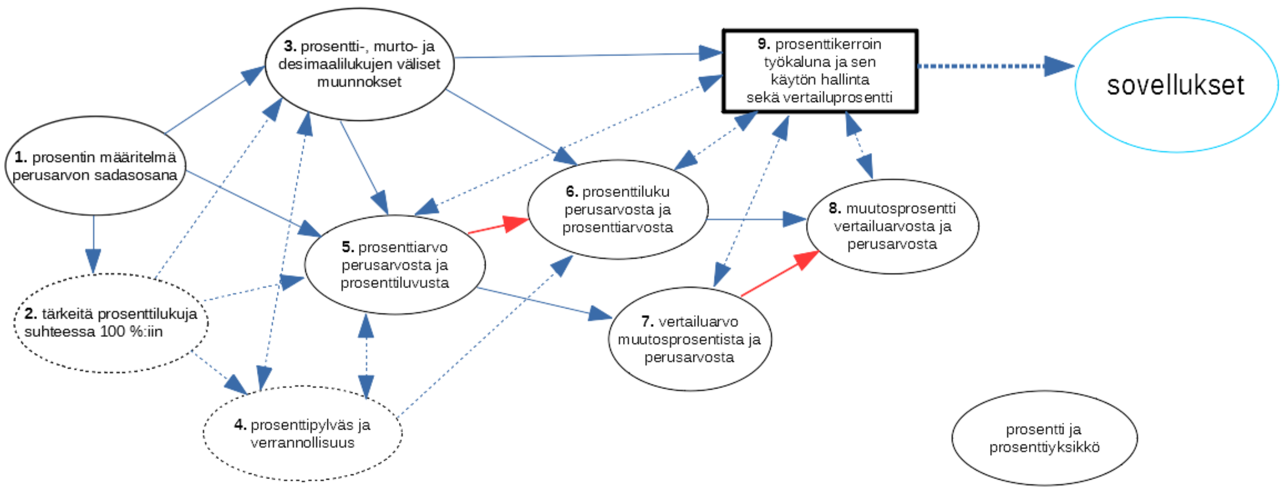
FIGURE 2. *The nine comparative contexts of percent problems*

Kuva 10. Yhdeksän prosenttilaskennan ongelmatyyppiä. Kuvalähde: Parker & Leinhardt (1995)

Seuraavassa osaluvussa esittelemäni oppirunko keskittyy tuota erottelua suuremmissa määrin matemaattisiin operaatioihin ja niiden parissa etenemiseen kuin Parkerin ja Leinhardin *fraction-ratio* -erotteluun. Se käsittelee kaikki *ratio*-luokan kahdeksan tehtävätyyppiä, mutta ei sulje pois tilannetta (*fraction*) jossa prosenttiarvo kuvastaa osajoukkoa perusjoukosta, jota taas kuvaa perusarvo. Nämä kahdeksan tehtävätyyppiä näkyvät kuvassa 10. *ratio*:n alla kolmen peräkkäisen kahtiajaon haaroina.

3.3 Yksi oppirakenne prosenttilaskentaan

Seuraava oppirakenne noudattaa suurinpiirteisesti oppikirjan Yhteinen tekijä 1 (Ekonen ym. 2018) opetusjärjestystä. Täydennän tätä järjestystä hieman purkamalla kirjan kappalejakoa osiin, perustuen sekä akateemiseen kirjallisuuteen että omaan opetuskokemukseeni lyhyestä matematiikasta. Oppirakenne keskittyy perusteisiin ja se päättyy tässä esityksessä prosenttikertoimeen työkaluna. Kohdissa 5.-8. käsitellään Parkerin ja Leinhardtin (1995) yllä esitellyt yhdeksän tehtävätyyppiä, joskin erottelussani tyyppejä nähdään vain kahdeksan, kuten edellä sanottu.



Kuva 11. Prosenttilaskennan oppirunko. Osien numerointi on suuntaa antava opetusjärjestys. Nuolet osoittavat joitain tärkeitä yhteyksiä osien välillä. Kaksi punaista nuolta ovat kohdissa joissa olisi mahdollista kääntää opetusjärjestys toisinpäin.

Prosentin määritelmä ja prosenttilaskennan perushahmotus (osat 1. - 4.)

Prosentti määritellään sadasosana. Yhtä prosenttia (1 %) vastaava prosenttiarvo a perusarvosta b on täten $a = b/100$. (Kuvassa osa 1. Tästä eteenpäin ilmaistaan osat pelkällä numerolla suluissa.) Jo tällä määritelmällä ja riittävällä alkeisalgebran osaamisella avautuu loput oppirakenteesta, kunhan tarvittavat laskutoimitukset opetellaan. Rianasari ym. (2012) toteaa kuitenkin prosenttilaskennan hahmottamisen olevan vaikeaa, vaikka oppilas osaisi prosentin määritelmän ja laskutoimitukset. Tästä syystä opetusrunko ei etene suoraan määritelmästä ja yhtä prosenttia vastaavasta prosenttiarvosta muita prosenttilukuja vastaaviin prosenttiarvoihin (5). Sen sijaan aluksi hankitaan suurinpiirteinen käsitys eri prosenttilukujen suhteutumisesta sataan prosenttiin (2) ja opitaan suhteuttamaan näitä murtolukuihin (3). Desimaalimuunnos (3) opitaan samassa yhteydessä. Tässä yhteydessä opetellaan muuntamaan prosentti-, murto ja desimaaliluvusta jokaisesta yksi kerrallaan kahteen jäljelle jäävään muotoon.

Osassa 2. on mahdollista määrittää tietylle perusarvolle *b* prosenttiarvoja *a* jotka vastaavat esimerkiksi kymmenellä jaollisia prosenttilukuja, 10 %, 20 %, (...) ja prosenttilukuja, jotka vastaavat murtolukuja joissa on 1 osoittajana ja nimittäjiä viiteen asti, eli 100 % 50 %, 33,33... %, 25 % ja 20 %. Tässä vaiheessa oppirungossa hyödynnetään myös kuvia, kuten pylväs- ja ympyräkaavioita, varsinkin peruskoulussa. Tämä osa on merkitty katkoviivalla, sillä kyseessä on enemmänkin didaktinen ratkaisu, jonka tarkoitus on tukea siirtymistä osiin 3. ja 4. Kun oppilaalla on osan 2. mukainen perushahmotus, oppirakenteessa oletetaan osan 3. olevan sisällöllisesti merkityksellisempi, edellä mainitulla tavalla, jota Rianasari ym (2012) ehdottaa. Tätä tukemaan otetaan oppirakentessa käyttöön ns. *prosenttipylväs* (englanniksi *bar model*), joka perustuu graafiseen hahmottamiseen pylväskaaviossa (4). Osa 4. on samasta syystä kuin osa 2. merkitty katkoviivalla.

Osasta 1. on merkitty tavalliset nuolet osiin 2., 3. ja 5. sillä jokaiseen voi halutessaan edetä määritelmästä suoraan. Kohdan 2. ajatellaan tukevan kohtien 3. - 5. hahmotusta, minkä takia siitä on katkonuolet näihin kohtiin. Prosenttipylväästä (4) on molemminsuuntaiset katkonuolet kohtiin 3. ja 5. sillä se on visuaalinen työväline näihin, joka osaltaan rakennetaan kyseisten osien avulla ja jolla osaltaan voidaan tukea oppimista näissä kohdissa. Kohtaan 6. se yhdistyy yksisuuntaisella katkonuolella, sillä prosenttipylvään malli rakennetaan kohdalla 5. mutta sillä voi visualisoida kohdan 6. sisältöä.

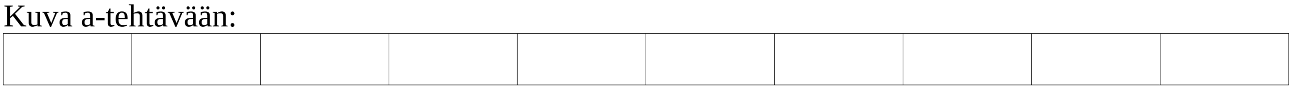
Alla oleva esimerkki 1. käsittelee yhtä prosenttia vastaavaa prosenttiarvoa perusarvosta (1). Esimerkki 2. a) käsittelee tärkeää prosenttilukua (kymmenellä jaollinen prosenttiarvo) visuaalisesti (2), jonka jälkeen osan b) ratkaisussa hyödynnetään murtolukua (3). Yhdessä nämä ovat myös esimerkki vaakasuorasta prosenttipylväästä (4), mutta varsinainen prosenttipylväs (pystysuora) näytetään ratkaisun alla kuvassa 12., muutaman muun prosenttipylvään lisäksi. Esimerkissä 3. tehdään muunnokset prosentti-, murto- ja desimaalilukujen välillä taulukossa (3), kiinnittämättä huomiota siihen, minkälaisia strategioita oppilas mahdollisesti käyttäisi.

Esimerkki 1. Kuinka paljon on yksi prosentti (1 %) luvusta 54?

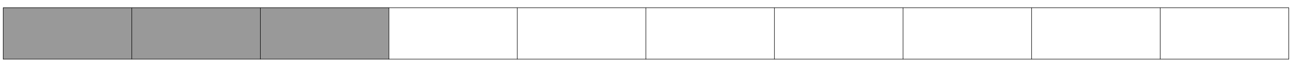
Ratkaisu. Yksi prosentti (1 %) luvusta 54 on 54/100 = 0,54.

Esimerkki 2. a) Väritä 30 % kuvasta ja b) määritä 30 % luvusta 160.

Kuva a-tehtävään:



Ratkaisu. a)



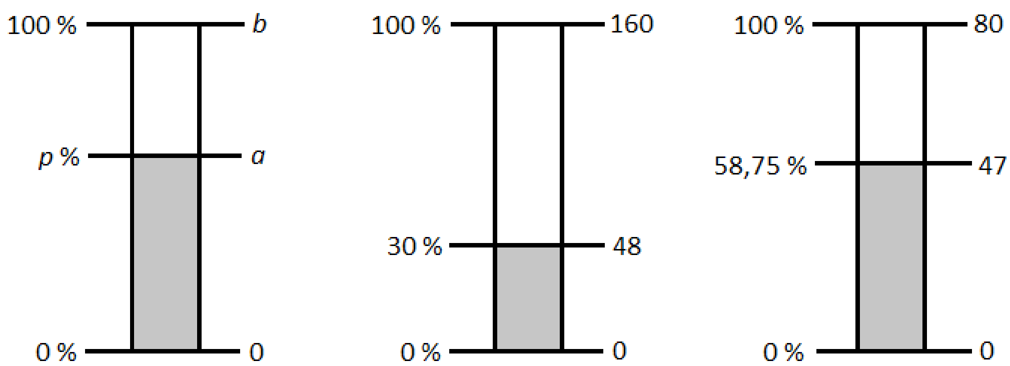
b) 30 % = 3 /10. Tällöin 30 % luvusta 160 on $3/10 \cdot 160 = 48$.

Esimerkki 3. Täydennä taulukkoon annettua lukua vastaavat prosentti-, murto- ja desimaaliluvut.

prosenttiluku	**murtoluku**	**desimaaliluku**
35 %		
	3/8	
		0,94

Ratkaisu.

prosenttiluku	**murtoluku**	**desimaaliluku**
35 %	7/20	0,35
37,5 %	**3/8**	0,375
94 %	47/50	**0,94**



Kuva 12. Prosenttipylväitä vasemmalta oikealle: Yleinen, jossa verrannollisuus prosenttiluvun p % ja prosenttiarvon a välillä, suhteessa 100 %:iin ja perusarvoon b, esimerkkien 2. ja 4. tilanteet. Kaikissa on myös pohjalla 0 % ja 0, kuten Parker & Leinhardtin (1995) esittelemässä Dewarin janamallissa.

Yllä olevan kaltainen (Kuva 12.) prosenttipylväs vastaa Dewarin janaa (Kuva 8.), mutta jana on muutettu pinnaksi, Rianasarin ym. (2012) ehdottaman mukaisesti. Opetuskäytössä on toki taululle nopeampaa piirtää jana. Tallaiset kuvat liittyvät edellä sanotun nojalla niin Oikkosen kuin Freudenthalinkin ajatteluun. Lisäksi nämä ovat esimerkkejä lukiomatematiikan oppiainekuvauksen "ajattelua tukevista kuvista ja piirroksista", jotka edellä liitin laaja-alaisen osaamisen osa-alueeseen Monitieteinen ja luova osaaminen.

Prosenttiarvo ja perusarvo sekä prosenttiluku (osat 5. ja 6.)

Prosenttiarvo *a* määräytyy perusarvosta *b* ja prosenttiluvusta *p* % määritelmässä ilmaistuna verannollisuutena $\frac{a}{b} = \frac{p\ \%}{100\ \%}$. Prosenttipylväs kuvastaa tätä verrannollisuutta. (Kuva 12.) Tässä oppirungossa nähdään prosenttiarvon ratkaisemisen (5), tunnetulla perusarvolla ja prosenttiluvulla, olevan kiinteämmässä yhteydessä edeltäviin vaiheisiin kuin prosenttiluvun ratkaisemisen kahdesta muusta (6). Se, että tämä järjestys on kuitenkin mielestäni vahvemmin oma valintani kuin muut tähänastiset on merkitty punaisella nuolella osien välillä, kuvassa 11. Perusarvon ratkaiseminen prosenttiarvosta ja -luvusta nähdään korkeampana sovelluksena, vaikka se ei ole vaikeaa alkeisalgebralla. Tästä syystä se puuttuu oppirakenteesta kokonaan.

Yhtälöstä ratkeaa $a = \frac{p\ \%}{100\ \%} \cdot b$ (5) ja $p\ \% = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$ (6). Vaihtoehtoisia strategioita on muuntaa ensimmäisessä kaavassa prosenttiluku desimaaliluvuksi, eli prosenttikertoimeksi, $k = \frac{p\ \%}{100\ \%}$ ja sijoittaa kaavaan taikka muuntaa tämä luku murtoluvuksi. Toisessa kaavassa pätee jo $k = \frac{a}{b}$, joten se ilmentää sellaisenaan desimaaliluvuksi muuntamisen strategiaa. Vaihtoehtoisesti murtoluvun $\frac{a}{b}$ voi laventaa saaden nimittäjäksi 100 tai 100 %, jolloin prosenttiluku tai sen lukuarvo ilmenee osoittajasta.

Oppirakenne ei sinänsä ota kantaa alkeisalgebrallisen strategian valintaan, vaan ainoastaan siihen, että ratkaisun tulkinta kytketään perushahmotuksessa käsiteltyihin asioihin. Varsinkin kohdassa 5, hyödyntämällä prosenttipylvästä (4) realistisen tuloksen arvioinnissa ja tuloksen oikeellisuuden tarkastamisessa. Prosenttipylvästä voi käyttää jollakin muotoa kaikissa erilaisissa tilanteissa joissa käsitellään perusarvoa sekä prosenttilukua ja sitä vastaavaa prosenttiarvoa. Oppirakenteessa sen silti ajatellaan olevan vahvimmin kytköksissä ensimmäiseen vaiheeseen (5), aiemmin perustellusta syystä. Desimaali- tai murtolukumuunnokset (3) nähdään edellä esitetyn mukaisesti työkaluna kohdissa 5. ja 6., minkä takia kohta 3. on yhdistetty tavallisella nuolella näihin.

Esimerkki prosenttiarvon ratkaisemisesta (5) sivuutetaan, sillä tällainen tehtävä ratkaistiin jo esimerkki 2:n b-kohdassa. Alla olevassa esimerkissä lasketaan prosenttiluku annetusta prosenttiarvosta ja perusarvosta (6) määrittämällä ensin prosenttilukua vastaava desimaaliluku (prosenttikerroin) ja muuntaen tämä prosenttiluvuksi. Tätä esimerkkiä vastaava prosenttipylväs esitettiin kuvassa 12.

Esimerkki 4. Kuinka monta prosenttia luku 47 on luvusta 80?

Ratkaisu. 47/80 = 0,5875 = 0,5875 · 100 % = 58,75 %

Prosentuaalinen muutos (osat 7. ja 8.)

Vastaavasti kuin osien 5. ja 6. järjestyksen suhteen, osien 7. ja 8. järjestys on oma valintani ja tämä näkyy jälleen punaisena nuolena kuvassa 11. Jos järjestykseksi valitaan osien 5. ja 6. osalta valitsemani, on johdonmukaisempaa tehdä valintani mukaisesti myös tässä tapauksessa ja kääntäen. Tämä perustuu ajatukseen, jonka mukaan on johdonmukaista, että joko molemmissa opitaan määrittämään prosenttiarvo ensin tai sitten molemmissa opitaan märittämään prosenttiluku ensin.

On vähintään kaksi järkevää tapaa määrittää vertailuarvo (7). Toisaalta voi määrittää ensin vertailuprosentin p % muutosprosentista Δp % kaavalla $p\% = 100\% + \Delta p\ \%$. Tämän jälkeen vertailuarvo määräytyy prosenttiarvona a, kuten edellä. Toisaalta taas voi ensin ratkaista muutosprosenttia vastaavan prosenttiarvon, *muutosarvon*, $\Delta a = \frac{\Delta p\ \%}{100\ \%} \cdot b$. Tämän jälkeen saa vertailuarvon, $a = b + \Delta a$, jossa Δa:lla on sama etumerkki kuin Δp %:llä.

Muutosprosentti Δp % (8) on vastaavasti määritettävissä ainakin kahdella järkevällä tavalla. Toisaalta sen saa määrittämällä vertailuarvon (desimaalimuotoisen) osuuden $\frac{a}{b}$ perusarvosta, josta saa vertailuprosentin. Vähentämällä tästä 100 % saadaan muutosprosentti: $\Delta p\ \% = \frac{a}{b} \cdot 100\ \% - 100\ \%$. Toisaalta voi määrittää muutosarvon, $\Delta a = a - b$, avulla muutosprosentin, $\Delta p\ \% = \left(\frac{\Delta a}{b}\right) \cdot 100\ \%$. Sekä Yhteinen tekijä 1 että Lähihoitajan laskutaito opettavat esimerkeissään jälkimmäisen tavan.

Sekä osassa 7. että 8. yhdistyvät yhteen- tai vähennyslasku kerto- tai jakolaskuun. Yllä tehtiin näkyväksi molempien osalta molemmat järjestykset: Yhteen- tai vähennyslaskun voi aina tehdä joko prosenttilukujen osalta tai perus- ja vertailuarvon osalta, jolloin jäljelle jäävässä hyödynnetään kerto- tai jakolaskua.

Prosenttiarvon määrittäminen (5) on yhdistetty suoralla nuolella vertailuarvon määrittämiseen (7), sillä vertailuarvo on prosenttiarvo jota lopulta voi käsitellä samoin kuin kohdassa 5. Vastaavasti prosenttiluvun määrittäminen (6) on yhdistetty muutosprosentin määrittämiseen (8), sillä muutosprosentti on prosenttiluku.

Prosenttikerroin ja vertailuprosentti työkaluina (kohta 9.)

Kuten edellä mainittu, prosenttikerrointa ja vertailuprosenttia voi käyttää työkaluina prosentuaaliseen muutokseen. Tämä on siinä mielessä muutosprosentin käyttöä parempi tapa, että mikäli prosentuaalisia muutoksia tulee kaksi tai useampi peräkkäin, tulee aina ottaa edellisen vertailuarvo a uudeksi perusarvoksi b jokaisessa muutoksessa. Kuitenkin määrittämällä ensin vertailuprosentit $p\% = 100\% + \Delta p\ \%$ ja näistä prosenttikertoimet $k = \frac{p\ \%}{100\ \%}$, ei tarvitse laskea välissä uusia perusarvoja. Esimerkiksi lopullinen vertailuarvo a on saatavissa kahden prosenttikertoimia k ja l vastaavien muutosten jälkeen perusarvosta b yhtälöllä $a = bkl$. Tässä bk on ensimmäisessä muutoksessa määritettävä prosenttiarvo, joka tulee toisessa muutoksessa olemaan perusarvo. Toisaalta taas tekijä kl on molempia prosentuaalisia muutoksia vastaava prosenttikerroin.

Esimerkkinä tästä voi mainita MAOL:n taulukkokirjassakin (Järvinen ym. 2019) näkyvän talousmatematiikan sovelluksen, *korkoa koron päälle*, jossa loppupääoma on $K_n = Kq^n$, kun alkupääoma on K, koron maksujen lukumäärä on n ja q on p %:ia vastaavan koron korkokerroin, $q = 1 + \frac{p\,\%}{100\,\%}$. Prosenttikerrointa käyttämällä vältytään työläiltä laskutoimituksilta.

Prosenttikerroin määritetään ilmaisemalla sitä vastaava prosenttiluku desimaalilukuna. Tämän takia oppirakenteen kaavakuvassa on tavallinen nuoli kohdasta 3. kohtaan 9. Kohta 9. liittyy taas kaavakuvassa kohtiin 5. - 8. molemminpuolisin katkoviivaisin nuolin, sillä kaikissa kohdissa voi hyödyntää prosenttikerrointa ja toisaalta koska oppirakenne vie näistä kohdista (5. - 8.) kohti prosenttikerrointa (9) pääasialliseksi valinnaksi prosenttilaskennan tehtäviin. Prosenttikerroin (9) on yhdistetty sovelluksiin, sillä se on hyvä väline moniin sovelluksiin, kuten edellä mainittu talousmatematiikan sovellus.

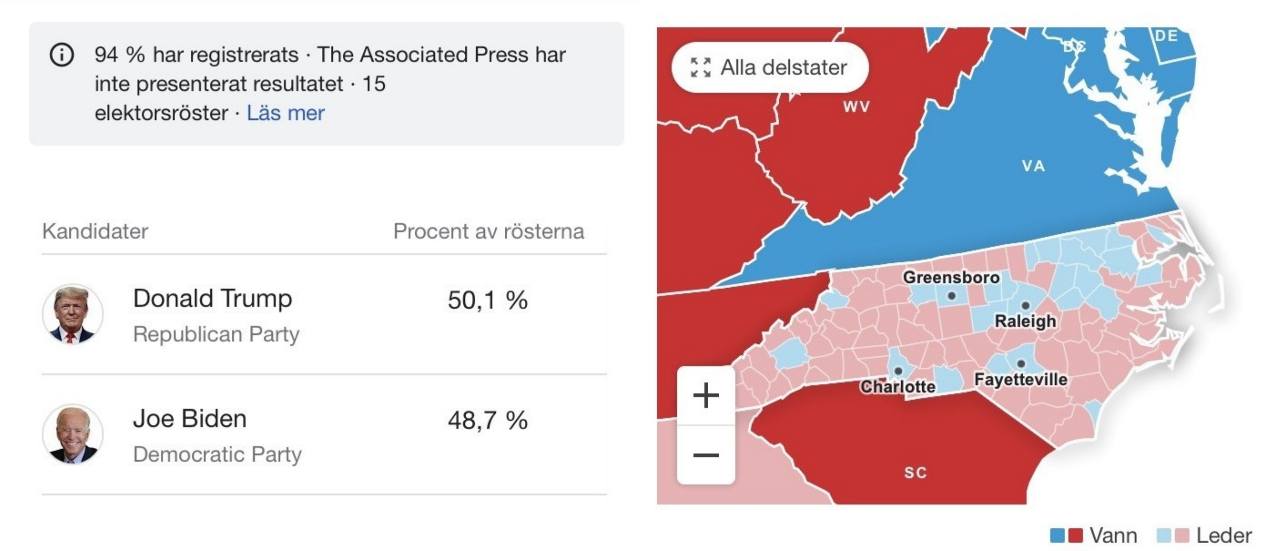
Prosenttiyksikkö ja prosentti

Prosenttiyksikön käsite liittyy määrittelyssä mainitulla tavalla prosenttilukujen vertaukseen. Vaikka se on kytkettävissä prosentuaaliseen muutokseen, se on luontevaa nähdä tästä erillisenä asiana. Prosenttiyksikkömuutoksen vertaushan ei noudata samaa laskutoimituskokonaisuutta, jossa on mukana jokin perusarvo ja prosenttiarvo, vaan siinä verrataan vain prosenttilukuja suoraan. Tämän takia siihen tai siitä ei ole yhdistetty nuolia muihin kokonaisuuksiin. Sen käsittelyä voi kuitenkin pitää tärkeänä kansalaistaitona ja erityisesti prosenttiyksikkömuutos on tärkeä erottaa selkeästi prosentuaalisesta muutoksesta. Opetuksessa sen käsittely on tästä syystä luontevaa prosentuaalisen muutoksen jälkeen.

3.4 Esimerkki vaaleista - prosenttilaskenta ja laaja-alainen osaaminen

Luvussa 3.2 oli Koayn (1998) esimerkkejä kontekstiin sidotuista prosenttilaskennan tehtävistä. Tarjoan tässä toisen tyyppisen esimerkin, jonka saa sidottua ainakin Yhteiskunnalliseen osaamiseen ja Globaaliin ja kulttuuriosaamiseen sekä mahdollisesti muihin.

Esimerkki 5. Yhdysvaltain presidentinvaaleissa 2020 oli 6.11.2020 North Carolinassa laskentatilanne, jonka mukaan Donald Trumpilla oli 50,1 % äänistä, Joe Bidenilla 48,7 % ja äänistä oli 94 % rekisteröity. Palataan mielissämme tuohon hetkeen, ilman tietoa tuloksesta. Oletettakoon loppujen äänien jakautuvan näille ehdokkaille ja mainittujen arvojen olevan tarkkoja. Kuinka monta prosenttia jäljellä olevista äänistä Bidenin tulee saada, jotta hän voittaa osavaltion? Arvioi Bidenin mahdollisuuksia ratkaisusi ja muun tiedon pohjalta.



Kuva 13. Ääntenlaskutilanne North Carolinasta 6.11.2020. Kuva on sommiteltu uusiksi. Kuvalähde: Google & The Associated Press (2020)

Ratkaisu. Muille ehdokkaille on mennyt 0,94*(100 % - 50,1 % - 48,7 %) = 1,128 % koko äänisaaliista, jolloin tasapelitilanteessa Trumpilla ja Bidenilla olisi kummallakin (100 % - 1,128 %) / 2 = 49,436 % äänistä. Tällä hetkellä Bidenillä on 0,94*48,7 % = 45,778 % kaikista äänistä. Biden tarvitsee 49,436 % - 45,778 % = 3,658 % koko äänisaaliista lisää. Jäljellä olevista äänistä tämä on (3,658 % / (100 % - 94 %)) * 100 % = 60,9666... %.

Oleellista pohdinnassa Bidenin mahdollisuuksista olisi ainakin vastauksen suhteuttaminen äänten jakaumaan tuona hetkenä. Muihin asioihin pohdinta kuitenkin liittyisi esimerkiksi sitä kautta, keiden äänet ovat tilanten aikana vielä laskematta ja onko syytä olettaa niihin lukeutuvan enemmän jomman kumman ääniä.

Tällaisella tehtävällä olisi tuolloin ollut mahdollista ainakin sitoa prosenttilaskenta yhteiskunnalliseen kontekstiin, jolloin tehtävä kehittää Yhteiskunnallista osaamista sekä Monitieteistä ja luovaa osaamista (arkielämän ja matematiikan välisen yhteyden tutkiminen). Tämä olisi luultavasti ollut tuona hetkenä kategoriaa "opiskelijoita kiinnostavat aiheet, ilmiöt ja niihin liittyvät ongelmat, joita voidaan ratkoa matematiikan avulla", jolloin tehtävällä on edellä esittämäni mukaan kytkös Vuorovaikutusosaamiseen, Hyvinvointiosaamiseen, Yhteiskunnalliseen osaamiseen ja Globaaliin ja kultuuriosaamiseen.

Arvelen tällaisen ongelman edessä monien sekoittavan prosenttien ja prosenttiyksiköiden merkitykset. Tällainen ajattelu voisi olla muotoa: "*Kuusi prosenttia jäljellä ja Biden tarvitsee vain 1,4. Bidenin mahdollisuudet ovat melko hyvät.*" Tällaisessa olisi muitakin virheitä, mutta oleellisimpana näistä tällaisessa ajatuksessa ehkä unohtuisi, että Biden tarvitsee jäljellä olevista äänistä noin 61 %, mikä on melko iso osuus. On luultavaa että tuossa tilanteessa monet ihmiset ovat arvioineet Bidenin mahdollisuutta matemaattisessa mielessä väärin, monella eri tavalla, johtuen siitä ettei ymmärretä prosenttiluvun ja prosenttiyksikön eroa eikä ymmärretä näiden suhdetta eri perusarvoihin, joita tässä ovat kaikki äänet, lasketut äänet ja laskemattomat äänet. Tällaisen esimerkin edessä nähdäkseni toteutuu vahvasti "ongelman ymmärtäminen, ratkaisu sekä tuloksesta keskustelu", minkä olen liittänyt Monitieteelliseen ja luovaan osaamiseen, Vuorovaikutusosaamiseen ja Yhteiskunnalliseen osaamiseen. Käyttämällä sopivaa kuvaa, voisi myös sisällyttää "ajattelua tukevat kuvat, piirrokset ja välineet" ja edistää Monitieteistä ja luovaa osaamista tätä kautta. Keskustelu vaalijärjestelmistä loisi yhteyden muihin oppiaineisiin ja tämä avaisi lisää laaja-alaisen osaamisen osa-alueita.

4 Analyysi, fysiikan alkeiskinematiikka ja laaja-alainen osaaminen

4.1 Tutkielman osion tavoite ja esitietovaatimukset

Tämän osion tavoite on pohtia fysiikan ja matematiikan ainerajat ylittävän opiskelun mahdollisuutta lukiotasolla analyysin osalta ja tarjota tähän yksi konkreettinen malli. Koska fysiikan monet suureet yhdistyvät toisiinsa derivoinnin ja integroinnin kautta, on kinematiikan käsittely analoginen muiden fysiikan tällaisten suurekokonaisuuksien kanssa. Esimerkiksi sähkövirta varaussiirtymän aikaderivaattana on analoginen nopeudelle paikanmuutoksen aikaderivaattana.

Tässä tutkielman osassa rajoitutaan kinematiikan tiettyihin alkeisiin, joita kutsun *alkeiskinematiikaksi*. Tarkoitan alkeiskinematiikalla paikan ja siirtymän, nopeuden sekä kiihtyvyyden välisiä yhteyksiä ajan funktiona, kun liike tapahtuu suoralla. Sen mallit tasaiselle ja tasaisesti kiihtyvälle liikkeelle käsitellään erikoistapauksina yleisemmälle teorialle ja malleihin liittyvät peruskaavat johdetaan. Sitä ennen käsitellään kuitenkin paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden välisiä yhteyksiä ajan funktiona laajemmin ja johdetaan näiden yleiset yhtälöt.

Osion tavoitteena on ennen kaikkea käsitellä matematiikan opetuksen ja oppimisen rikastuttamista fysiikan autenttisilla tilanteilla. Toisaalta taas fysiikan opetus ja oppiminen voivat hyötyä siitä että matematiikassa opittu otetaan käyttöön fysiikassa. Olivat nämä hyödyt oppimisen kannalta todellisia tai eivät, yhteys oppiaineiden välille rakentuu. Tällaiseen lähestymiseen pohjautuva opetus tähtää lukion opetussuunnitelman Monitieteellisen ja luovan osaamisen kehittämiseen. Kyseisen laaja-alaisen osaamisen osa-alueen kuvauksen mukaan "*[Opiskelija] tutustuu erilaisiin tiedonhankinnan ja -esittämisen tapoihin ja harjaantuu käyttämään niitä*." Saman tideon käsittely eri tavoilla ja eri lähtökohdista saattaa olla hyvä tapa saavuttaa tuo opetussuunnitelman tavoite. Tämä on osion taustaoletus.

Tutkielman osion lukiotasoisesta aihepiiristä johtuen eräät matematiikan sisällöt oletetaan esitiedoiksi. Näihin lukeutuvat:

- Riemann-integroituvuus
- Määrätty integraali kuvaajan alle jäävänä pinta-alana integroimisvälillä
- Raja-arvo
- Jatkuvuus ja derivoituvuus
- Derivaatta- ja yleinen integraalifunktio sekä analyysin peruslause näiden välisestä yhteydestä
- Vakiofunktion sekä ensimmäisen ja toisen asteen funktion derivaattafunktioiden johtaminen
- Vakiofunktion ja lineaarisen funktion integraalifunktioiden johtaminen
- Vakiolla kerrotun funktion integraali- ja derivaattafunktiot
- Kahden funktion summan derivaatta

Sen sijaan derivaatan määritelmä käsitellään sillä se on relevantti myös luvun kuvaajille. Ajatus määrätystä integraalista ylä- tai alasummana välillä korvataan sitä vastaavalla ajatuksella, joka luultavasti antaa valmiuksia matematiikan oppimiseen. Tämä valinta perustuu toisaalta siihen, että tyypillisesti alkeiskinematiikka opitaan lukiofysiikassa ennen integroimista lukiomatematiikassa. Toisaalta se taas perustuu osion autenttisuuslähtöisyyteen.

Fysikaalisella pinta-alalla ja *-kulmakertoimella* tarkoitetaan vastaavasti pinta-alaa ja kulmakerrointa joilla on akseleiden suureista saatavat dimensiot. Tällöin ensin mainitun yksiköksi tulee funktioarvojen yksikkö kerrottuna muuttuja-arvojen yksiköllä ja jälkimmäisen yksiköksi ensin mainittu yksikkö jaettuna jälkimmäisellä. Tässä tutkielmassa fysikaalista pinta-alaa kutsutaan usein lyhyesti pinta-alaksi ja fysikaalista kulmakerrointa kulmakertoimeksi.

Eräiden tärkeiden tulosten matemaattinen johtaminen sivuutetaan, mutta tulokset esitellään niiltä osin kuin tämä osio hyödyntää niitä. Osiossa rajoitutaan reaalilukujen joukkoon matemaattisen teorian osalta.

4.2 Joitain integroimisen perustuloksia

Seuraavia integroimisen perustuloksia hyödynnetään tutkielmassa kinematiikan käsittelyssä kuvaajia tulkittaessa. Todistukset sivuutetaan.

Lause 6. (*Integroimisvälin jakaminen useampaan.) Jatkuvan funktion f määrätylle integraalille välillä* $[x_0, x_n]$ *pätee:*

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx,$$

kun $x_i \in [x_0, x_n]$, *kaikilla* $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Tulos pätee yleisesti, mutta tutkielmassa rajoitumme tapauksiin, joissa $x_i < x_{i+1}$, kaikille $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Lause 7. *Jatkuvien funktioiden f ja g summan integraalifunktioarvoille pätee:*

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Näiden kahden lauseen tulosten hyödyllisyys tarkasteltaessa autenttisia fysikaalisia pinta-aloja on sen formalisoinnissa, kuinka intuitiivinen ajatus pinta-alasta sen osien summana - niin vaaka- kuin pystysuunnassa - vastaa myös matematiikassa opittavia tuloksia. Jälkimmäinen tulee tutkielmassa käyttöön vain sellaisen tilanteen osalta, jossa yksi funktioista on vakiofunktio.

Tässä tutkielmassa kutsutaan integroimisosaväliä $[x_i, x_{i+1}]$ vastaavia pinta-aloja $(f(x))_{max} \cdot (x_{i+1} - x_i)$ ja $(f(x))_{min} \cdot (x_{i+1} - x_i)$ osavälien tai elementtien *ylä-* ja *ala-arvoiksi*. Edellä $(f(x))_{max}$ ja $(f(x))_{min}$ merkitsevät vastaavasti välin suurinta ja pienintä funktioarvoa.

4.3 Erotusosamäärän ja derivaatan määritelmä

Erotusosamäärää käytetään fysiikassa keskimääräisen muutosnopeuden mittana. Keskimääräisen muutosnopeuden käsitteen avulla voi formalisoida hetkellisen muutosnopeuden käsitteen raja-arvon ja derivaatan kautta.

Määritelmä 8. *Olkoon funktio f määritelty joka pisteessä tietyllä avoimella välillä. Tällöin tällä välillä olevien kahden eri pisteen* x_1 *ja* x_2 *välinen erotusosamäärä on*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Määritelmä 9. *Olkoon funktio f derivoituva tietyllä avoimella välillä ja olkoon piste x tällä välillä. Olkoon h≠0. Funktion f derivaatta pisteessä x on tällöin*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Kaksi edellä olevaa määritelmää sisältävät samanlaiset erotusosamäärät, joita tässä vain merkitään eri tavoin. Joskus (esim Kilpeläinen 2001-2003) yllä olevan derivaatan erotusosamäärää kutsutaan erotusosamääräksi pisteessä *x*. Tässä tutkielmassa erotusosamäärä tulkitaan kahden pisteen väliseksi, sillä erotusosamäärää sellaisenaan käytetään tutkielmassa nimenomaisesti molempien pisteiden välisen keskimääräisen muutosnopeuden määrittämiseksi.

Kun suure *y* on suureen *x* funktio, $y = y(x)$, vastaavaa erotusosamäärää kuin yllä, välillä jonka pituus on Δx, merkitään usein myös $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ja derivaattaa pisteessä *x* merkitään $\frac{dy}{dx}$.

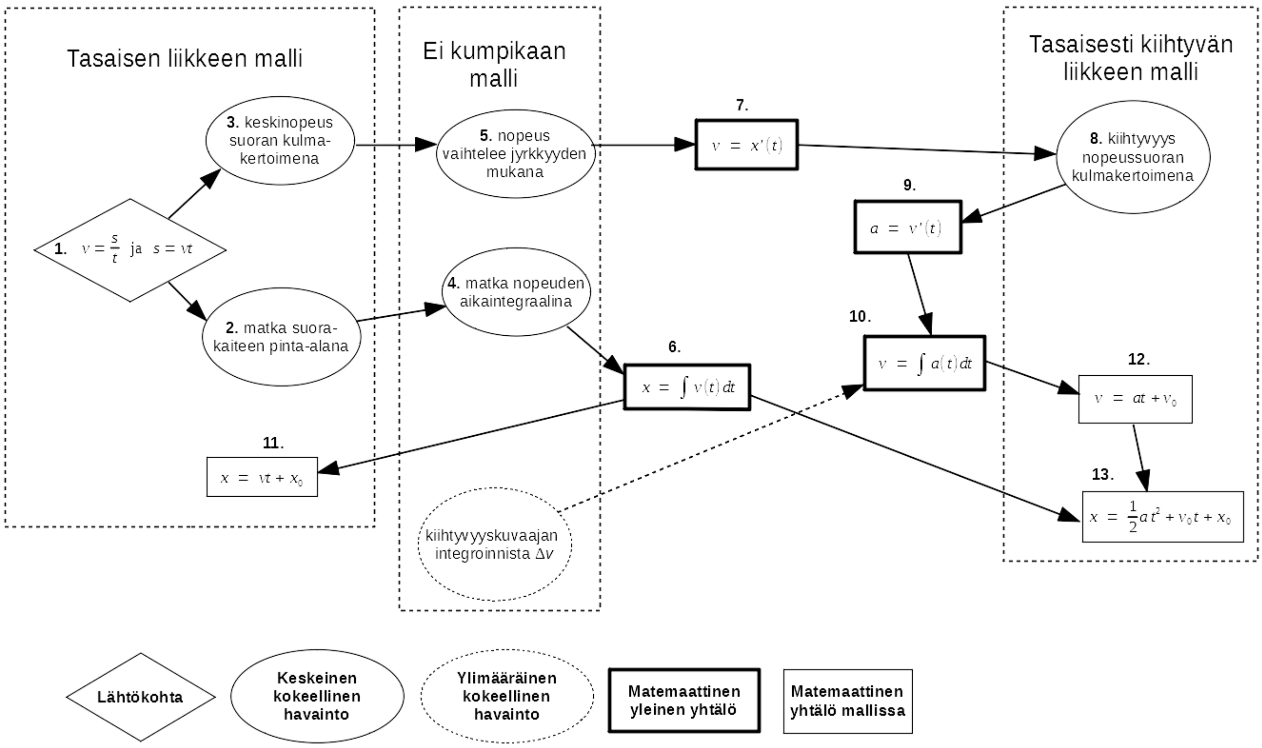
4.4 Alkeiskinematiikan oppirakenne

Seuraavan oppirakenteen tavoitteena on tukea differentiaali- ja integraalilaskennan hallintaa mallintamalla niillä aluksi autenttisia tilanteita ja luomalla lopuksi matemaattinen yhteys yleisten kaavojen ja erikoistapausten kaavojen välille. Matemaattisesti oppirungon tärkein tavoite on saavuttaa kinematiikan yleiset aikaderivaatta- ja aikaintegraalimuotoiset yhtälöt paikan ja nopeuden sekä nopeuden ja kiihtyvyyden välille. Näiden lauseiden hallintaa vahvistetaan johtamalla näistä erikoistapaukset tasaisen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen välille integrointiharjoituksena.

Kiihtyvyys suhteutuu nopeuteen kuten nopeus paikkaan. Tästä syystä vastaavaa integrointi- ja derivointijärjestelyä ei toteuteta toistamiseen, vaan oletetaan että nopeuden ja paikan yhteyden kanssa analoginen yhteys kiihtyvyyden ja nopeuden välillä on todettavissa pelkästään tasaisen kiihtyvyyden mallin kokeen kautta. Koska keskiössä on matematiikka, tämä ajatellaan toiston välttämisen kannalta perustelluksi, mutta tärkein syy on että kuvaajien käsittelyssä tavoitellaan selkeyttä, jolloin rajoitutaan pelkkiin paikan ja nopeuden aikakuvaajiin, tarkastellen jokaisessa kuvaajia tuottavassa kokeessa juuri näiden kuvaajien suhteutumista toisiinsa.

Oppirakenne etenee numerojärjestyksessä alla olevan kuvan mukaisesti tasaisen liikken mallissa yksinkertaisista siirtymän ja nopeuden pohjatiedoista (1) melko idealisoituihin fysiikan kokeisiin ja niiden kuvaajiin (2 ja 3). Tästä jatketaan yleisempään tarkasteluun epäidealisoiduista kuvaajista (4 ja 5), joista johdetaan matemaattisen yleisen teorian ensimmäiset yhtälöt (6 ja 7). Nopeuden yhtälöstä (7) edetään tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallissa tapahtuvaan kokeeseen (8), josta päädytään kahteen yleiseen matemaattiseen tulokseen (9 ja 10). Matemaattisista yleisistä tuloksista (6, 7, 9 ja 10) johdetaan paikan ja loppunopeuden yhtälöt integroimalla tasaisen liikkeen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen erikoistapauksiin.

Oppirakenteen kaaviokuvassa joidenkin osien nimeämiset perustuvat kuvateknisistä syistä idean tiivistettyyn välittämiseen, täsmällisen kielen sijaan. Se tulee siksi tulkita pelkkänä kuvituskuvana, joka näyttää kohtien väliset yhteydet ja osien luokittelujen ideat.



Kuva 14. Oppirakenteen numerojärjestyksessä etenevä kaaviokuva.

Tasaisen liikkeen perustietojen läpikäynti (osa 1.)

Jo yläkoulussa lasketaan vakionopeuden, ajan ja siirtymän välisiä yhtälöitä. Täten on luultavaa, että lukiolaiselle on yksinkertaiset laskutoimitukset näistä helppoja. Rajaamme ajan määrittämisen siirtymästä ja vakionopeudesta oppirungossa pois. Ensimmäisessä osassa (1) kerrataan yksinkertaisin laskuin kaavat $v = \frac{s}{t}$ ja $s = vt$. Tämä voi esimerkiksi tapahtua nopeuden osalta määrittämällä keskinopeus v, kun tunnetaan siirtymä s = 15 m ja siirtymää vastaava aika t = 3,0 s, saaden v = 5,0 m/s. Siirtymän osalta taas voi laskea esimerkiksi vakionopeutta v = 4,0 m/s ja aikaa t = 2,0 s vastaavan siirtymän, s = 8,0 m. Kun ollaan matemaattisen kertauksen tuloksena havaittu kaavat, palautetaan mieleen suorakaiteen pinta-ala ja havaitaan yhtälön $s = \Delta x = vt$ päteminen myös koordinaatistossa (2). Muuttuja x merkitsee paikkaa, jolloin Δx on siirtymä ja siis sama asia, kuin s.

Perustietojen havaitseminen kuvaajassa (osat 2. ja 3.)

Osissa 2. ja 3. käytetään samaa tasaisen liikkeen mittausdataa ja tilanne näytetään sekä (t,v)- että (t,x)-kuvaajissa. Kuvaajat kuvaavat tilannetta, jossa kappale liikkuu mahdollisimman tasaista nopeutta, mutta on kuitenkin selvästi autenttinen mittaustilanne. Nopeuskuvaajasta (2) luetaan melko tasanopeuksiselta osuudelta nopeus ja sen pieni vaihteluväli. Kuvaajan tietty aikaväli integroidaan mittausohjelmalla ja havaitaan graafisen integroinnin antavan toisaalta vakionopeuden ja aikavälin tulon että saman tuloksen kuin paikkakuvaaja antaa saman aikavälin siirtymälle.

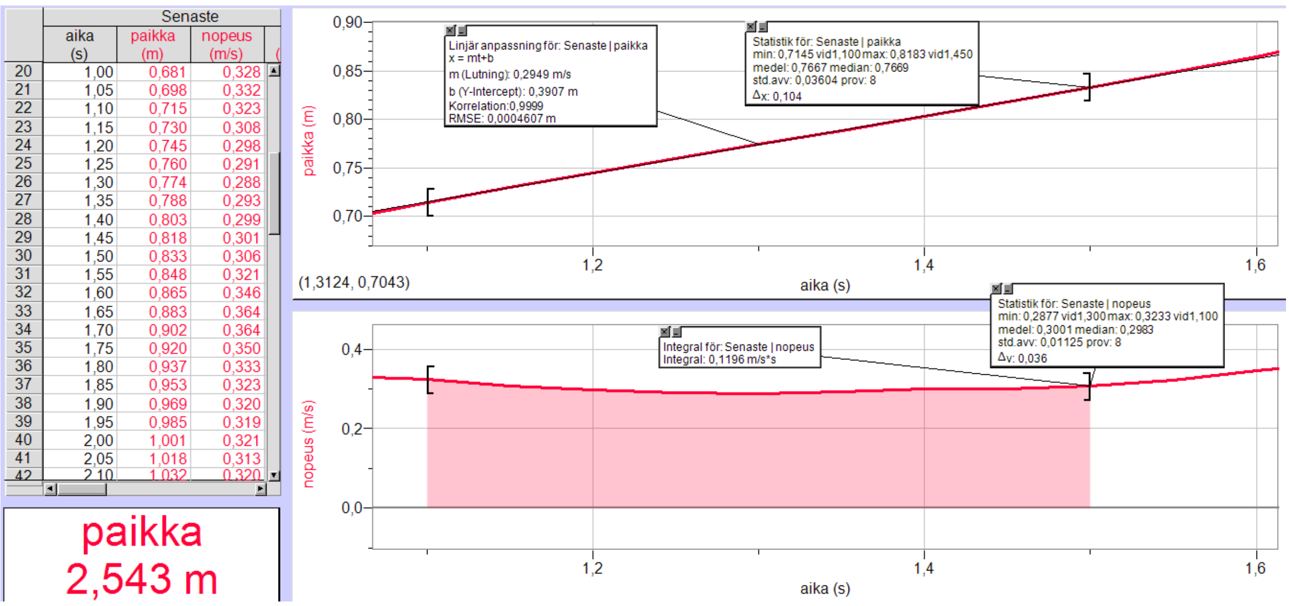
Siirtymäapproksimaatiot Δx määritetään myös nopeuden v maksimi-, keski- ja minimiarvoja vastaten aikavälille Δt,

$$\Delta x_{min} = v_{min}\Delta t, \qquad \Delta x_{keski} = v_{keski}\Delta t \qquad \text{ja} \qquad \Delta x_{max} = v_{max}\Delta t,$$

havaiten arvojen olevan joksenkin samat ja keskinopeutta vastaavan siirtymän vastaavan graafista integrointia varsin hyvin. Tällä tavalla tuetaan ylä- ja alasummien hahmottamista yksittäisen elementin ylä- ja ala-arvojen osalta, autenttisen mittauksen kautta.

Paikkakuvaajasta (3) havaitaan lineaarinen osuus ja siihen sovitetaan suora, ottaen suoran kulmakerroin. Havaitaan että kulmakertoimesta saadaan suurinpiirteisesti sama nopeus kuin mitä nopeuskuvaaja antaa keskinopeudeksi ja että se vastaa myös suurinta ja pienintä nopeutta hyvin. Lisäksi arvoa verrataan välin keskinopeuden arvoon, $v_{keski} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, jotta kulmakertoimen arvo samaistuu oppilaalla laskennalliseen keskinopeuteen.

Alla olevasta Logger Prolla ultraäänianturin ja käsin siirrettävän esineen avulla laaditusta nopeuden esimerkkikuvaajasta havaitaan aikavälillä 1,1 s ... 1,5 s kuvaajasta tai taulukosta, että siirtymä, Δx = 0,833 m - 0,715 m = 0,118 m, vastaa melko hyvin graafista integrointia, Δx = 0,1196 m. Tämän havaitaan vastaavan aikavälin, Δt = 1,5 s - 1,1 s = 0,4 s, sekä minimi-, keski- ja maksiminopeuksien (0,2877 m/s, 0,3001 m/s ja 0,3233 m/s) tuloja 0,11508 m, 0,12004 m/s ja 0,12932 m/s. Varsinkin keskinopeutta vastaavan siirtymän havaitaan vastaavan sekä integraalia että paikkadatasta määritettyä siirtymää erinomaisesti.



Kuva 15. Kuvaajat ja taulukoidut arvot osiin 2. ja 3. suurinpiirteisesti tasaisesta liikkeestä. Käytetty Logger Pron versio on ruotsinkielinen.

Yllä olevan kuvan paikkakuvaajaan sovitetun suoran kulmakerroin toisaalta antaa nopeudeksi 0,2949 m/s, joka vastaa myös edellä mainittua keskinopeutta erinomaisesti sekä minimi- että maksiminopeuksia jokseenkin hyvin. Kulmakertoimen ja nopeuskuvaajaan melko tasaisen korkeuden välillä havaitaan yhtenevyys. On huomioitava, että keskinopeus ei (suoran sovituksen tavasta riippuen) välttämättä ole täysin sama asia kuin sovitetun suoran kulmakerroin. Esimerkiksi tässä edellä paikka-arvot antavat keskinopeudeksi erotusosamäärän $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}118\ \mathrm{m}}{0{,}4\ \mathrm{s}} = 0{,}295\ \mathrm{m/s}$, josta nopeusdatan antama keskinopeus poikkeaa; tosin vain 0,0001 m/s, joka saattaa myös perustua merkitsevien numeroiden eri määrään.

Idealisoidusta tilanteesta yleiseen kokeellisesti (osat 4. ja 5. sekä yleiset yhtälöt 6. ja 7.)

Näissä osissa käytetään vastaavaa mittausmenettelyä kuin edellä, mutta fysikaalisessa mittausjärjestelyssä tasaisesta liikkeestä poiketaan enemmän. Osien matemaattinen tavoite on yleistää nopeuden suorakaidemuotoinen integraali muihin integraaleihin (4) sekä havaita hetkellisen nopeuden näkyvän paikkakuvaajan paikallisena jyrkkyytenä (5).

Oppirakenteen oletus on, että on matematiikan kannalta hyödyllistä tehdä näkyväksi, että paikallisen jyrkkyyden mittana käytetään pisteeseen piirretyn tangentin kulmakerrointa (5). Tällä tavoin fysiikan opetus joko alustaa tai kertaa matematiikan opetusta derivaatasta, joka perustuu sen määritelmään. Mikäli taas tämä opetus annetaan matematiikan kurssilla derivaatan tangenttitulkinnan yhteydessä, saadaan autenttiset fysikaaliset suureet osaksi opetusta, mikä saattaa tukea oppimista.

Erityishyötynä matematiikan oppimiselle nähdään derivaatta- ja integraalikuvaajan näkyminen tilanteessa, jossa funktioarvot eivät noudata mitään selkeästi hahmotettavaa mallia. Välillä missä nopeus on suurempi, on paikkakuvaajan vastaava siirtymä suurempi, mikä tukee integraalin hahmotusta. Siellä taas, missä paikkakuvaaja on jyrkempi, on nopeuskuvaajan funktioarvo suurempi, jolloin nopeuskuvaajan kautta avataan derivaattafunktion käsitettä pisteittäin vertailtuna.

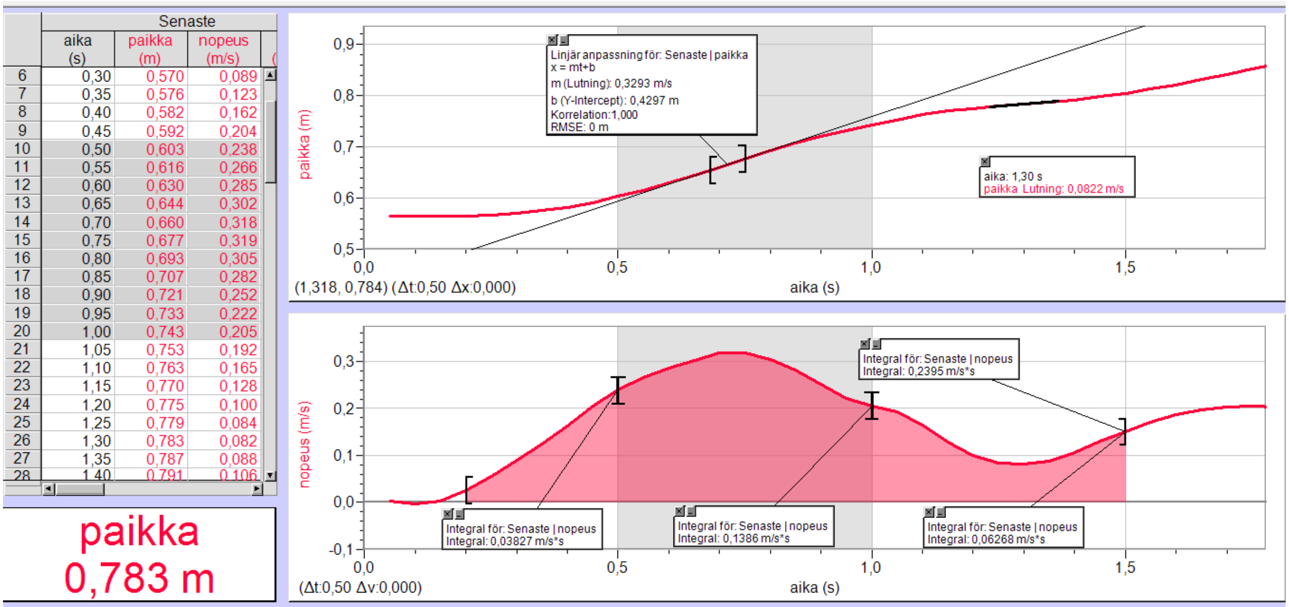
Nopeuskuvaajaksi (4) halutaan mallissa sellainen, jonka nopeusvaihtelut ovat riittävän suuria näkymään myös paikkakuvaajan kaltevuuden vaihtelussa. Kuvaaja jaetaan sopiviksi ajallisiksi integroimisväleiksi, ottaen niitä vastaaville matkoille arvot. Integroimisväleiksi voidaan valita toisaalta siinä määrin vakionopeuksisia kohtia, että tämä on kytkettävissä edelliseen idealisoituun kokeeseen. Toisaalta voidaan valita myös kohtia, joissa nopeus muuttuu ja kuvaaja poikkeaa oleellisesti vaakasuorasta.

Lopulta integroinnissa todetaan koko välin integraalin ja osavälien integraalien summan olevan samat,

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt + \ldots + \int_{n-1}^{n} v(t)dt,$$

Jolloin saadaan käytännöllinen esimerkki lauseelle 6.

Alla oleva esimerkkikuvaaja osista 4. ja 5. on myös laadittu Logger Prolla, kuten edellä, mutta vaihdellen esineen nopeutta käsin. Kuvaajissa on havaittavissa että paikkakuvaaja on jyrkempi niissä kohdissa, missä nopeuskuvaajan funktioarvot ovat korkeammat (5). Nopeuskuvaajan huippukohtien havaitaan vastaavan paikkakuvaajan jyrkkyyskehitystä. Kaksi paikan aikaderivaattaa ovat esimerkkikuvaajissa määritetty eri tavoin, ajankohtina 0,75 s ja 1,3 s. Nämä vastaavat pienillä poikkeamilla nopeuden maksimi- ja minimiarvoja, mikä havaitaan sekä paikkakuvaajan jyrkkyydestä että nopeuskuvaajan korkeudesta. Lähestymisessä koetaan tärkeäksi piirtää ainakin yksi tangentti pisteeseen, ja se löytyy jyrkimmästä kohdasta. Toinen jyrkkyysmääritys on tehty eri työkalulla, jossa pientä tangenttijanaa voi liikutella kuvaajan päällä. Opetuksessa tällä työkalulla on suositeltavaa käydä koko kuvaaja läpi, sillä työkalu antaa jyrkkyyden lisäksi myös numerisen arvon derivaatalle ja on helposti tarkistettavissa alla olevasta kuvaajasta että se vastaa derivaattafunktion arvoa kyseisessä kohdassa.



Kuva 16. Kokeiden 4. ja 5. kuvaajat tilanteessa jossa on nopeusvaihtelua.

Nopeuskuvaajan osavälien integraaleista näkyy, että ne vastaavat paikkakuvaajan vastaavan aikavälin korkeuserosta luettavaa siirtymää Δx (4). On suositeltavaa myös kerrata pinta-alan yhteys suorakaiteiden pinta-alaan lyhyempien aikavälien kautta, vaikka kuva yllä ei tätä näytäkään käytännön syistä. Koko väli on jaettu kolmeen osaväliin ja niiden integraalien summan havaitaan vastaavan koko välin integraalia ja paikkakuvaajan siirtymää koko välillä.

Näillä kokeilla oikeutetaan matemaattisesti muotoillut yleiset yhtälöt paikalle nopeuden integraalina (6) ja nopeudelle paikan derivaattana (7),

6. $\boxed{x = \int v(t)dt}$ ja

7. $\boxed{v = x'(t).}$

Tässä kohdassa vedotaan analyysin peruslauseeseen ja todetaan, että sille on annettu kokeellinen esimerkki.

Nopeuden ja kiihtyvyyden yhteys (osa 8. sekä yleiset yhtälöt 9. ja 10.)

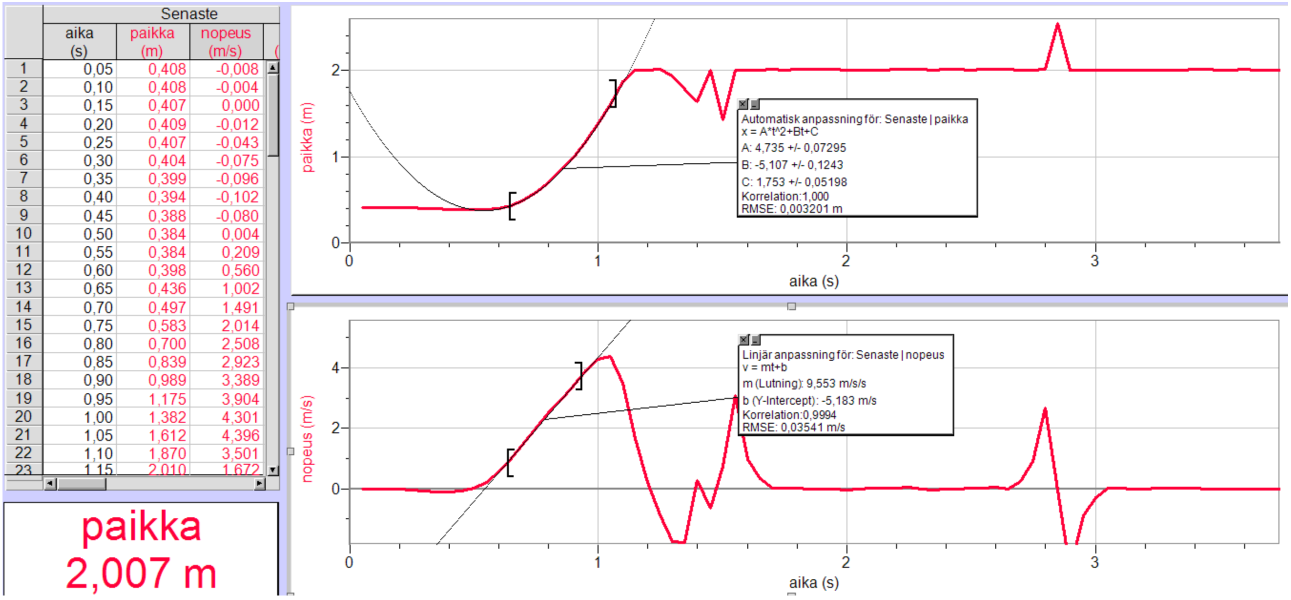
Tässä lähestymisessä on tausta-ajatuksena, että samankaltaiset kuvaajayhteydet nopeuden ja kiihtyvyyden sekä paikan ja nopeuden välillä, saattavat häiritä eri suureiden ymmärrystä. Tästä syystä kokeessa, joka käsittelee kiihtyvää liikettä, halutaan havaita kiihtyvyys paikkakuvaajan jyrkkyyden kasvuna ja koe totetuetaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallissa, saaden paraabelimuotoinen kuvaaja. Vaihtoehto olisi tehdä kokeille 4. ja 5. analogiset derivaatta- ja integraalikäsittelyt samaan aikaan näkyvillä nopeus- ja kiihtyvyyskuvaajilla. Lähestymisessä halutaan kuitenkin kuvaajaparin suureiden aina olevan samat ja yleiset yhtälöt johdetaan tasaisen kiihtyvyyden kokeesta lähinnä vedoten aiempaan matemaattiseen käsittelyyn ja tilanteen analogisuuteen. Lähestymisen kaaviokuvaan on merkitty ylimääräinen kokeellinen havainto, jossa integroitaisiin kiihtyvyyskuvaaja. Opettaja voi halutessaan toimia näin tai sitten lopuksi näyttää tämän yhteyden rakennetun matemaattisen teorian testaamiseksi fysiikan koejärjestelyllä.

Kokeessa 8. aikaansaadaan tasaisesti kiihtyvän liikkeen kuvaaja, esimerkiksi painovoimaa hyödyntäen. Paikkakuvaajaan sovitetaan paraabeli siihen aikaväliin, jolla liike selvästi noudattaa tasaisen kiihtyvyyden mallia. Havaitaan paikkakuvaajan jyrkkyyden kasvun vastaavan nopeuden kasvua ja myös että tasaisen kiihtyvyyden mallissa nopeuskuvaaja on suora, jonka kulmakerroin antaa kiihtyvyyden ja paikkakuvaajassa sitä vastaa paraabelimuotoinen osa. Paikkakuvaajasta havaitaan myös että tiettyä aikaväliä vastaavat siirtymät kasvavat liikkeen jatkuessa.

Kokeen yhteydessä todetaan nopeuden derivaatan olevan vakio, sillä osio on lineaarinen. Vedotaan edellisten kokeiden 3. ja 5. matemaattisesti analogiseen tilanteeseen, jossa edettiin lineaarisesta muodosta muihin kuvaajiin ja johdettiin derivaattamuoto nopeudelle. Todetaan, että nyt voisi toistaa samat vaiheet nopeuden ja kiihtyvyyden suhteen ja saada derivaattamuodon kiihtyvyydelle,

9. $$\boxed{a = v'(t).}$$

Esimerkkikokeessa mitattiin putoamiskiihtyvyys pudottamalla koripallo. Paikkakuvaajaan sovitettiin paraabeli ja nopeuskuvaajaan suora, niille osille joissa liike noudatti mallia.



	Senaste		
	aika (s)	paikka (m)	nopeus (m/s)
1	0,05	0,408	-0,008
2	0,10	0,408	-0,004
3	0,15	0,407	0,000
4	0,20	0,409	-0,012
5	0,25	0,407	-0,043
6	0,30	0,404	-0,075
7	0,35	0,399	-0,096
8	0,40	0,394	-0,102
9	0,45	0,388	-0,080
10	0,50	0,384	0,004
11	0,55	0,384	0,209
12	0,60	0,398	0,560
13	0,65	0,436	1,002
14	0,70	0,497	1,491
15	0,75	0,583	2,014
16	0,80	0,700	2,508
17	0,85	0,839	2,923
18	0,90	0,989	3,389
19	0,95	1,175	3,904
20	1,00	1,382	4,301
21	1,05	1,612	4,396
22	1,10	1,870	3,501
23	1,15	2,010	1,672

Kuva 17. Tasaisesti kiihtyvä liike. (Tapahtuman jälkeen anturi mittaa muuta ja vain paraabelin tai sitä vastaavan suoran osat ovat oleellisia.)

Putoamiskiihtyvyydeksi saatiin nopeuskuvaajasta 9,553 m/s². Paikkakuvaajastakin saa kihtyvyyden kertomalla kuvassa näkyvän A-parametrin kahdella, mistä enemmän kohdassa 13.

Kiihtyvyydelle on nyt yleinen derivaattamuotoinen yhtälö, $a = v'(t)$. Tästä johdetaan integraali nojaten analyysin peruslauseeseen ja siihen, että koejärjestely kiihtyvyyden ja nopeuden välillä antaisi vastaavan tuloksen kuin kokeet 4. ja 5. nopeuden ja kiihtyvyyden välillä. Todetaan että voidaan ottaa käyttöön nopeuden yleinen yhtälö,

$$\textbf{10.} \quad \boxed{v = \int a(t)\,dt\,.}$$

Tasaisen ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallin yhtälöiden johtaminen yleisistä (osat 11. - 13.)

Integroimalla yhtälöt 6. ja 7. vakiofunktioille, saadaan tasaisen liikkeen paikkayhtälö ja tasaisesti kiihtyvän liikkeen nopeusyhtälö. Tasaisessa liikkeessä nopeus on vakio, $v(t) = v$, jolloin saadaan yleisestä yhtälöstä 6. paikan yhtälö 11. tasaisen liikkeen malliin,

$$\textbf{11.} \quad x = \int v(t)\,dt = vt + x_0,$$

jossa x_0 on integroimisvakio. Integroimisvakio tulkitaan alkutilanteen paikaksi. Vastaavasti tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä kiihtyvyys on vakio, $a(t) = a$, jolloin nopeudelle saadaan yhtälö 12. tasaisesti kiihtyvän liikkeen mallissa,

$$\textbf{12.} \quad v = \int a(t)\,dt = at + v_0.$$

Tässä yhtälössä integroimisvakio v_0 tulkitaan lähtönopeudeksi. Tasaisesti kiihtyvässä mallissa saadaan paikan yhtälö 13. mallissa, nopeuden yhtälöstä 12. $v(t) = at + v_0$, integroimalla paikan yleinen yhtälö 6.:

$$\textbf{13.} \quad x = \int v(t)dt = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0,$$

jossa x_0 on integroimisvakio, joka jälleen tulkitaan alkutilanteen paikaksi. Yhtälön 13. parametri $\frac{1}{2}a$ näkyy kokeen 8. paikkakuvaajan paraabelin parametrinä, kuten kokeen käsittelyn yhteydessä mainittu.

Oppirakenteen tulosten jatkokäsittelyä ja tulkintaa

Edellisissä yhtälöissä siirtymä ja nopeudenmuutos ovat $\Delta x = x - x_0$ ja $\Delta v = v - v_0$, jolloin saadaan myös yhtälöiden 11. ja 12. kanssa yhtäpitävät erotusosamäärämuotoiset nopeuden ja kiihtyvyyden yhtälöt,

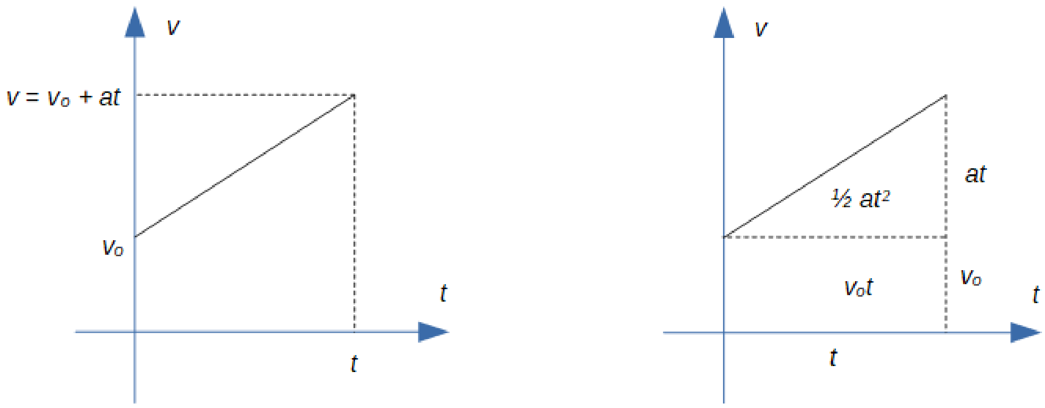
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ja} \quad a = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

jotka ovat yhtä suuria lineaarisissa paikan ja nopeuden kuvaajissa kuin yleisten yhtälöiden 7. ja 9. derivaattalausekkeet,

$$v = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \text{ja} \quad a = \frac{dv}{dt} = v'(t).$$

Annetaan vielä yhtälöiden 11. - 13. jokaiselle termille fysikaalinen merkitys ja pohditaan varsinkin yhtälöä 13.

Yhtälössä 11. termi *vt* on ajassa *t* kuljettu matka ja kaikissa yhtälöissä x_0 on alkutilanteen paikka. Yhtälön tulkinta vastaa koko lähestymisen lähtökohtaa. Yhtälössä 12. nopeus kasvaa lineaarisesti lähtönopeudesta v_0 nopeuden muutoksen verran, $\Delta v = at$. Tämän yhtälön kuvaaja on tärkeä, sillä siitä löytyy pinta-aloina kaavan 13. termit $\frac{1}{2}at^2$ ja $v_0 t$.



Kuva 18. Nopeuskuvaaja tasaisessa kihtyvyydessä ja siitä saatavat pinta-alat matkoille.

Ajatellaan nopeudella v_0 liikkuvaa koordinaatistoa, jossa kappale lähtee levosta kiihtyvään liikkeeseen, kihtyvyydellä *a*. Tässä koordinaatistossa, ajassa *t*, kappale matkaa etäisyyden $\frac{1}{2}at^2$ ja lisäksi koordinaatisto itsessään liikkuu matkan $v_0 t$. Tällöin kappale liikkuu paikallaan olevassa koordinaatistossa matkan $\frac{1}{2}at^2 + v_0 t$. Nämä termit ja niiden summa näkyvät pinta-aloina kuvassa 18. oikealla.

Tilanteessa nopeuden arvot ajan funktiona ovat vakiofunktion, $v_1(t) = v_0$, ja lineaarisen funktion, $v_2(t) = at$, summa. Näiden aikaintegraalit ovat vastaavasti $x_1(t) = v_0 t$ ja $x_2(t) = \frac{1}{2}at^2$. Tällä tarkastelulla saadaan esimerkki yhdestä summafunktiosta fysikaalisessa tilanteessa ja saadaan konkreettinen esimerkki sen integraalin lauseen 7. yhtälöstä,

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

Oppirakenteen esimerkkikokeissa ovat siirtymät olleet jokaisella aikavälillä positiivisia. Jatkokäsittelyssä tai lisäesimerkeissä olisi mahdollista myös käyttää kuvaajia, joissa liike tapahtuu negatiiviseen suuntaan ja siis nopeus on negatiivinen. Kun oppirakenteen sisältö on omaksuttu, voi ottaa mukaan myös kiihtyvyyskuvaajan, mikä jätettiin selkeyden takia pois. Tätä kautta avautuu myös mahdollisuus tulkita kiihtyvyys paikan toisena aikaderivaattana.

4.5 Opintokokonaisuuden yhteys laaja-alaiseen osaamiseen ja tieteiskirjallisuuteen

Tällainen projekti on selvästi Freudenthalin tarkoittamaa maailman matematisointia, sellaisessa mielessä kuten esitin luvussa 2. Oppirakenteessa matematisoidaan ensin todellista maailmaa (horisontaalinen matematisointi) ja sen jälkeen edetään matematiikalla itsellään uusiin tuloksiin (vertikaalinen matematisointi). Tämä on myös opetusrungon idea, sillä runko on fysiikkaa hyödyntävä matematiikan oppirunko, eikä päin vastoin.

Oikkonen pysytteli pohdinnassaan matematiikassa eikä niinkään käsitellyt matematiikan hyödyntämistä luonnontieteeseen. Niin päin tämä silti toimii myös, sillä tällä lähestymisellä voi todella vahvasti käsitellä varsinaista matematiikkaa. Tässä kokonaisuudessa liikutaan jatkuvasti Oikkosen tarkoittamien matematiikan puolten välillä - sen ihmispuolen ja formaalin puolen.

Lukion laaja-alaisesta osaamisesta opintokokonaisuus koskettaa lukuisia asioita. Tiedonhankintaprosessien vahvistaminen tapahtuu sitä kautta, että tässä tietoa hankitaan eri tavoin, niin matemaattisesti johtaen kuin myös fysiikan kautta. Tässä toteutuu luvun 2. luokitteluni pisin kohta luokasta 3, sen jokaisen osan osalta: käsitteiden merkitysten hahmottaminen ja niiden yhteydet laajempiin kokonaisuuksiin muissa oppiaineissa tai matematiikan sisällä, eri muodot esittää matemaattista tietoa ilmiöiden mallintamisessa, ajattelua tukevat kuvat, piirrokset ja välineet sekä matematiikan luonne universaalina kielenä. Nämä liittyvät vahviten Monitieteelliseen ja luovaan osaamiseen. Oletan "matematiikan luonteen universaalina kielenä" tarkoittavan toisaalta sitä, että matematiikka on kaikille kulttuureille yhteinen ja toisaalta sitä, että matematiikka näkyy luonnonilmiöissä. Tässä kokonaisuudessa ollaan jälkimmäisen ytimessä vahvasti, sillä kokeet tuottavat sekä lineaarisia että paraabelimuotoisia malleja. En ole vakuuttunut, että osa-aluekuvauksen tarkoittama Globaali- ja kulttuuriosaaminen vahvistuu tästä, mutta matematiikan oppiainekuvaus luo noista monista asioista yhteyden tähän osa-alueeseen.

Tässä tutkitaan arkielämän ja matematiikan välistä yhteyttä, luultavasti päätellään perusteluineen havaintojen pohjalta ja opiskelijasta riippuen ratkotaan matematiikan avulla opiskelijaa kiinnostavia ilmiöitä. Nämä luokistani 1. ja 3. löytyvät maininnat olen liittänyt jokaiseen osa-alueseen. Tässä tapauksessa taatusti yhteys Monitieteiseen ja luovaan osaamiseen on vahva. Lisäksi toteutuksesta ja opiskelijasta riippuen yhteydet Vuorovaikutusosaamiseen, Hyvinvointiosaamiseen ja Yhteiskunnalliseen osaamiseen voivat toteutua.

5 Pohdinta

Tässä luvussa pohdin tutkielman lukujen 2. - 4. sisällöistä kumpuavia havaintoja sekä matematiikan ja laaja-alaisen osaamisen välistä yhteyttä näiden havaintojen valossa. Tutkielmaan liittyvä keskeisin tutkimustyöni on ollut opetussuunnitelmien vertaaminen ja niiden sisältöjen luokittelu, perustuen kirjallisuuteen ja näkemyksiini. Lisäksi olen koostanut kaksi oppirunkoa matematiikan sisältöjen tulkintaan tai opettamisen tueksi. Tässä luvussa pohdin näiden luokittelujen ja tulkintojen oikeutettavuutta ja kritisoin lukion laaja-alaisen osaamisen kehikkoa niin kokemieni ongelmien kuin mahdollisuuksienkin valossa. Pyrin parhaani mukaan myös tekemään omat ennakkoasenteeni näkyviksi, sillä vaikka laatimani luokittelut ja muut tulokseni lienevät laajalti käyttökelpoisia, on lähes varmaa että osin vahvatkin ennakkoasenteeni ovat ohjanneet tutkielmani edistymisen suuntaa. Tämä, vaikka olen aktiivisesti pyrkinyt pitämään ennakkoasenteeni sivussa. Tässä luvussa silti teen nämä ennakkoasenteeni näkyviksi parhaani mukaan.

Opetussuunnitelmien laaja-alaisen osaamisen yhteys laajempaan pedagogiseen liikehdintään on tutkielmassa osoitettu kiistattomasti, sekä kirjallisuuslähtein että osoittaen yhteyksiä kehikkojen välillä. Vaikka yhteydet tulevat kiistattomasti esiin ja lukion laaja-alaisen osaamisen työryhmän puheenjohtajan esitys Educa-messuilla antoi suunnan kehikkojen etsinnälle, ei perusteellinen perehtyminen aihepiiriin ole ollut mahdollista tai edes tarkoituksenmukaista. Tämä pätee erityisesti, koska tutkielman painopiste on matemaattinen. Näiltä osin valikoima, jolla yhteyttä demonstroidaan ei mahdollisesti maalaa oikeaa kuvaa Opetushallituksen kehikkojen synnystä, vaikuttimista tai niiden oikeanlaisesta tulkinnasta.

Perusopetuksen laaja-alaisen osaamisen ja matematiikan yhteyden välinen tulkinta on ollut sikäli helppoa, että opetussuunnitelman perusteet liittävät tavoitteet suoraan osa-alueisiin. Tutkimustyön ajatus oli löytää osa-aluekuvauksista tärkeimmät maininnat, jotka vastaavat tätä esitettyä yhteyttä. Ei kuitenkaan ole lainkaan varmaa, että matematiikan opetussuunnitelmatyöryhmä on perustanut tulkintansa osa-aluekuvaukseen. On yhtä hyvin mahdollista, että vaikkapa monilukutaidosta on ollut työryhmän sisällä muitakin ajatuksia kuin mitä näkyy sen osa-aluekuvauksessa. Minun mielestäni silti perusopetuksen osa-aluekuvaukset ovat niin kattavia ja konkreettisia, että tällainen tapa tulkita on ollut mielekäs. Ja nähdäkseni se onnistuikin. Huomion arvoista on silti, että kaikella tällä oli tarkoitus ymmärtää lukion opetussuunnitelmaa paremmin.

Tästä päästään tutkielman mahdollisesti suurimpaan ongelmaan tai vaihtoehtoisesti sen parhaaseen puoleen, sen luovuuden mielessä. Olen tulkinnut lukion laaja-alaisen osaamisen osa-aluekuvaukset hyvin abstrakteiksi, enkä erityisesti pidä niistä teksteistä. On mahdollista, että tästä seuraa tutkielman objektiivisuudelle haitallinen ennakkoasenne. Olen työni puolesta perannut lukion laaja-alaista osaamista niin fysiikan opettajana kuin myös ns. tuutoriopettajana runsaasti lukuvuonna 2019-2020. Tässä opettajatyössäni rajoituin ehkä liiaksi osa-aluekuvauksiin, ymmärtämättä sitä, kuinka suurissa määrin oppiainekuvauksessa esitettävä laaja-alaisen osaamisen tulkinta mahdollisesti on osa kyseisen opetussuunnitelman hengen oikeaoppista tulkintaa. Oppiainekuvauksen tulkinta laaja-alaisesta osaamisesta sai kuitenkin lopulta tutkielmassani kiistattomasti tärkeimmän sijan kaiken keskiössä.

Onkin jokseenkin kyseenalaista, onko perusopetuksen opetussuunnitelman tulkinta apuvälineenä lukion vastaavaan ollut menetelmänä ylipäätään järkevä. Lopulta koen, että on. Tärkeimmät syyt ovat perusopetuksen osa-alueiden Ajattelu ja oppimaan oppiminen sekä Monilukutaito osa-aluekuvaukset, jotka onnistuin kytkemään lukion eri osa-alueisiin - ennen kaikkea Monitieteiseen ja luovaan osaamiseen. Nämä kytkennät eivät ole sinänsä merkityksellisiä, mutta kaikki tämä työ avasi itselleni ajattelua ja johti lopulta mielipiteeseen siitä, kuinka laaja-alaisen osaamisen ja matematiikan välistä yhteyttä tulee tulkita lukiossa. Koen tutkielman luvun 2. valmistuttua entistä vahvemmin, että lukion laaja-alaisen osaamisen osa-aluekuvausten ymmärtäminen edellyttää perusopetuksen järjestelmän ymmärtämistä. Kuten luvussa 2. osoitin, perusopetuksen järjestelmä on ollut lukion järjestelmän yksi lähtökohta. Yksi kokemani lisähyöty tästä vertailutyöstäni on, että onnistuin tulkitsemaan lukion Yhteiskunnallisen osaamisen vahvemmin matematiikkakytköksisenä, kuin mitä muutoin olisin onnistunut. Lisäksi koen, että perusopetuksen kautta lähestyminen on helpottanut runsaasti lukion Eettisyyden ja ympäristöosaamisen sekä Globaali- ja kulttuuriosaamisen ymmärtämistä matematiikalle melko epäoleellisina. Vastaavia teemoja omaavat asiat kun liitetään perusopetuksessa hyvin rajallisesti matematiikkaan, kuten osoitin luvussa 2. Niin tai näin, lukion opetussuunnitelman tulkinta perusopetuksen vastaavan kautta on luovuudessaan tarkoittamani suurin ongelma tai paras puoli.

Kritisoin lukion järjestelmää muutamasta asiasta. En koe sen antavan oppiaineiden kautta tapahtuvalle opetukselle juurikaan lisäarvoa. Tämä, sillä toisaalta esimerkiksi kielissä jokainen nykyisen järjestelmän osa-alue on nähdäkseni jo pitkään toteutunut hyvässä opetuksessa, jolloin järjestelmä ei tulkintani mukaan tuo näiden oppiaineiden opetukselle lisäarvoa, vaan ainoastaan todetaan jo toteutuvia asioita. Toisaalta matematiikassa ja vaikkapa fysiikassa selvästi jotkut osa-alueet jäävät vähemmälle huomiolle ja Monitieteinen ja luova osaaminen sekä samaa kokonaisuutta koskettavat osat muiden osa-alueiden kuvauksista nousevat keskeisiksi. Silti järjestelmä ja varsinkin siitä viestintä Opetushallituksen toimesta peräänkuuluttaa jokaisen osa-alueen sisällyttämistä oppiaineisiin. On nähdäkseni perusteltu kysymys, kehittyykö opiskelijan laaja-alainen osaaminen parhaiten sitä kautta, että kaikilta oppiaineilta edellytetään jokaisen osa-alueen edistämistä ja oppiaineet siispä muokataan tällaiseen järjestelmään sopiviksi? Vai kehittyisikö tämä osaaminen paremmin, jos nähtäisiin laaja-alainen osaaminen tavoitteena ja eri oppiaineiden kehittävän siitä eri asioita eri tavoin? Koen lukion opetussuunnitelman perusteiden kuvailevan järjestelmää myös jälkimmäisen kautta ja korostavan oppiaineiden tällaista integriteettiä toistuvasti osana järjestelmää. Koen silti ristiriitaa siinä, että myös ensin mainittua peräänkuulutetaan, kuten luvussa 2. osoitin. Koen lisäksi matematiikan olevan ennen kaikkea perustaito, kuten vaikkapa lukemisen. Luvussa 2. ilmeni, että jotkut laaja-alaisuutta vastaavien ideoiden kehikot, kuten OECD:n Key competencies (2005), asettavatkin matematiikan erinäiset taidot tällaiselle paikalle, esimerkiksi matemaattisen lukutaidon määrittelyn kautta. Tulisiko näin tehdä myös suomalaisissa opetussuunnitelmissa?

Toisekseen, en pidä järkevänä, että lukion laaja-alaista osaamista kuvaillaan niin epämääräisesti osa-alueiden kuvauksissa. Minulle, kyseistä opetussuunnitelmaa keskimääräistä opettajaa huomattavasti enemmän peranneena, on auennut tätä tutkielmaa tehdessäni lukuisten tuntien jälkeen, että joko tällä perusopetuksen opetussuunnitelmaa hyödyntävällä tulkintamenetelmälläni lukion tekstejä voisi ymmärtää menestyksekkäästi tai sitten olen luonut liian pitkälle meneviä tulkintoja. On lähes kiistatonta, että kun näin on, on myös lukioteksteissä runsaasti tulkinnan varaa. Pelkään pahoin, että liikaakin. Opettajana olenkin nähnyt kuinka kollegani toisaalta peräänkuuluttavat lisämateriaaleja Opetushallitukselta tai muilta tahoilta tulkinnan tueksi ja toisaalta, kuinka jotkut eivät näe tässä laaja-alaisen osaamisen järjestelmässä juurikaan järkeä. Ymmärrän molemmat näkemykset ja pidän tätä lukion opetussuunnitelman perusteiden ongelmana. Opettajistojen kenttä ei ole harmonisoitu ja opetussuunnitelman perusteet tuntuvat vaativan kylkiäisekseen oppaita jotta niiden sisällön voisi ymmärtää. Sisällön tulisi nähdäkseni selittää itse itsensä ja tehdä näin ymmärrettävällä tavalla. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet mielestäni onnistuvatkin tässä ja omaavat muutenkin mielestäni paremmin oppiaineita ja ihmisen kehitystä läpileikkaavan laaja-alaisen osaamisen osa-aluejaon.

Mielestäni lukion olisi pitänyt käyttää tätä samaa kehikkoa, jonka jo varhaiskasvatus, esiopetus ja perusopetus pienin poikkeavuuksin jakavatkin. Uskon että tällöin olisi järjestelmän tulkinta ja kaikki kehitystyö helpompaa, kuin täysin uuden mallin tapauksessa. Jos lukion osa-aluejako onkin tarkoituksenmukaisempi lukioon, pidän silti todennäköisenä että hyödyt jatkuvuudesta oppiasteiden välillä olisivat luoneet opettajille, opetuksen tutkijoille ja kaikille muillekin yhteisen kielen, minkä laajamittaisen hyödyn arvelen olevan suurempi kuin hieman optimoidumman osa-aluejaon. Varsinkin, kun arvioin henkilökohtaisesti lukion osa-aluejaon olevan, optimoidumman sijaan, huonompi kuin mitä perusopetuksen osa-aluejako olisi lukiossa sellaisenaan, edellä mainitsemastani syystä: Kun se toteutuu joissain oppiaineissa itsestään ja toisissa ei juuri millään, se ei juurikaan tuone lisäarvoa kumpiinkaan eikä läpileikkaa oppiaineita.

Ongelma on myös siinä, että kun laaja-alainen osaaminen täsmennetään oppiaineissa, tuskin kovin moni opettaja perehtyy muiden oppiaineiden kuvauksiin tämän asian suhteen. Jos näin on ja jos oppiainekuvausten tulkinta laaja-alaisesta osaamisesta on keskeinen osa lukion järjestelmää, eivät opettajat osaa tätä järjestelmää. Tästä kritiikistä välittyvään pessimismiini on silti olemassa ratkaisu, jossa opettajat käyvät keskusteluja näistä asioista. Aktiivisella otteella opettajistoissa, tällaisella kehikolla on mahdollisuus osoittautua menestykseksi.

Matematiikassa arvioin oppiaineen kuvauksesta vastanneen työryhmän panostuksen olleen merkittävän ja rakentavan sillan oman henkilökohtaisen matematiikkakäsitykseni ja laaja-alaisen osaamisen osa-aluekuvausten välille. Henkilökohtainen matematiikkakäsitykseni on jokseenkin sama kuin Oikkosen kuvailema. Hän antoi viittaamassani artikkelissa (Oikkonen 2009) ajatukselleni sanat ja varmaankin minuun on vaikuttanut se, että hän oli ensimmäinen opettajani yliopistomatematiikassa. Hän aloitti artikkelissaan kuvailemansa opetusprosessin juuri tuolloin, syksyllä 2002, kun aloitin opintoni hänen kurssillaan. Oikkosen suuri vaikutus minuun on taatusti tekijä, joka sävyttää kaikkea tutkielmassani tekemääni työtä. Oleellisiin tuloksiini tämä ei kuitenkaan vaikuttane paljoa, sillä pääasiallinen sanoma mallintamisesta, eri tavoista ilmaista matemaattista tietoa, muun maailman matematisoinnista ja vastaavista konsepteista ovat läsnä niin opetussuunnitelmissa kuin myös muussa kirjallisuudessa.

Matematiikan oppiainekuvauksessa nousee myös esiin asioita, jotka koen oudoiksi. Esimerkkejä näistä ovat varsinaisen matematiikan opettamisen kannalta erikoiset maininnat ohjaamisesta ymmärtämään "matematiikan merkitys erilaisissa kulttuureissa ja historian kehityksessä" sekä pohdinnassa siitä, kuinka "matematiikan taitoja voidaan hyödyntää kestävään kehitykseen ja ihmiskuntaan liittyvien ongelmien ratkaisussa". Pidän todennäköisenä että tämä lukion opetussuunnitelman laaja-alaisen osaamisen kehikko on asettanut paineita sisällyttää tuollaisia kohtia oppiaineen omaan tulkintaan laaja-alaisesta osaamisesta aineessa. Minä silti korostan, että nämä kohdat eivät ole matematiikkaa sen formaalissa mielessä, Oikkosen mainitsemassa "ihmismielessä", joka on kytköksissä tähän formaaliin matematiikkaan tai missään muussakaan mielessä, minkä juuri minä tulkitsisin matematiikaksi. Sen sijaan pohdinnat ovat kulttuurihistoriallisia ja kenties filosofisia ja sellaisinaan taatusti arvokkaita. Opetus- ja oppimismenetelmät eivät myöskään ole nähdäkseni matematiikalle tyypillisiä.

Pidän todennäköisenä, että noita kohtia toteutetaan tulevan opetussuunnitelman aikana vain hyvin harvassa lukiossa. Mikäli näin kuitenkaan ei olisikaan, on huomioitava, että tässä kohtaa tämä laaja-alaisen osaamisen järjestelmä tosiasiallisesti hyökkää oppiaineen integriteettiä vastaan, velvoittaen matematiikan kehittyvän muuksi kuin Oikkosen mainitseman formaalin puolen ja ihmispuolen vuorovaikutukseksi. Tässähän tätä ei ole. Tämä ei myöskään edusta freudenthalilaista matematisointia, sillä tällaisissa pohdinnoissa ei matematisoida mitään. Tällaiset vaatimukset opetukselle ovat jonkin muun matematiikkakäsityksen mukaisia osia matematiikkaa, jos minkään.

Edellä myös totesin, että vaikka nämä asiat ovat opetussisällöllisiä vaatimuksia, näitä ei vaadita minkään moduulin yhteydessä keskeisinä sisältöinä.

Tutkiessani prosenttilaskentaa, laadin sellaisen oppirungon, joka oppikirjakokemukseni mukaan vastannee melkein mitä tahansa runkoa, jonka aiheesta voi kasata. Tässä pääasiallinen lähteeni oli oma kaksivuotinen kokemukseni lyhyen matematiikan opettajana 2011-2013, joka kattoi sekä prosenttilaskennan alkeet, että sen sovelluksia matemaattisten mallien ensimmäisessä kurssissa ja ennen kaikkea talousmatematiikan myöhemmässä kurssissa. Toin aihepiirin tutkielmaan, koska koin yhteyden laaja-alaiseen osaamiseen luvussa 3. kuvailemallani tavalla keskeiseksi ja erikoislaatuiseksi. Oppikirjojen ja oman näkemykseni seuraaminen toi esiin samat perusongelmat kuin mitä Parker & Leinhardt (1995) kartoitti ja kasaamani oppirakenne on tältä osin pätevä myös kyseisen artikkelin valossa. Oma suurin antini rungossa oli kuitenkin korostaa prosenttikerrointa lopullisena tavoitteena ja nähdä koko prosessi sen hallintaan johtavana. Tämä tavoite ei liity juurikaan tutkielman aiheeseen laaja-alaisesta osaamisesta, vaan enemmän mielipiteseeni järkevästä opetustavoitteesta matematiikassa itsessään.

Laaja-alaiseen osaamiseen liitin prosenttilaskennan ennen kaikkea ajattelua tukevien kuvien, arkisten yhteyksien, prosenttimerkintöjen yleisyyden ja vastaavien syiden takia. On aiemmin esittämäni nojalla tutkimusnäyttöä että "laskennallis-algoritminen" lähestyminen ei johda ymmärrykseen todellisista tilanteista. Lyhyen kirjallisuuskatsaukseni nojalla ei ole varmaa, ovatko nämä ongelmat esimerkiksi suomalaisille kouluille keskeisiä ollenkaan, mutta ilmeistä on että joissain maissa on algoritmisellä toiminnalla saavutettu ymmärryksen kannalta heikkoja tuloksia. Liitinkin prosenttilaskennan oppimisen alkeet kuviin ja vastaaviin apuvälineisiin tavalla, jota ei tässä tarvitse enää toistaa. Sen sijaan pidän itse mielenkiintoisena pohdintana oppirungon jälkeen esittelemääni vaalikysymystä. Uskon, että vastaavia ongelmia on löydettävissä lukuisia melkeinpä milloin vain ja että näiden ongelmien kautta pääsee käsiksi prosenttilaskennan peruskäsitteistöön (prosentti, perusarvo, prosenttiarvo ja prosenttiluku) määrittelemässäni mielessä.

Valitsemani vaaliongelma oli myös vahvasti kontekstisidonnainen, jolloin se vastannee Opetushallituksen viittaamaa Sarvaksen esitystä "tiedosta kontekstissa". Suuri kysymys on, tulisiko prosenttilaskennan opetusta kehittää vahvemmin konteksteihin sidotuksi vai korostaa perusteita? Vaikka minulla ei olekaan vastausta kysymykseen, pitäisin hyvänä asiana viimeistään siinä vaiheessa kun perusasiat ovat hallussa, käsitellä konteksteihin sidottuja kysymyksiä, kuten laatimaani kysymystä Yhdysvaltain presidentinvaaleista tai Koayn (1998) kahta esittelemääni kysymystä täysmehupitoisuudesta ja pähkinöistä. Toinen pohdinta on, että jos prosenttilaskenta haluttaisiin sitoa konteksteihin, olisiko tämä vain matematiikan oppiaineen vastuulla? Vai voisiko prosenttilaskennan sisällyttää muihin oppiaineisiin, kuten vaikkapa vaalien osalta yhteiskuntaoppiin?

Alkeiskinematiikan oppirakenne on jotakuinkin täysin omaa käsialaani, varsinkin suurena kokonaisuutena. Olen törmännyt näkemyksiin joiden mukaan fysiikan opetuksessa kannattaa edetä idealisoidusta yleisempään. Tämä näkemys ohjailee paikoittain joitain yksittäisiä askelia oppirakenteessani, mutta koska kyseessä on nimenomaisesti matematiikan oppirakenne, huomionarvoisempaa on että rakenteessa johdetaan lopulta mallien mukaiset (eli idealisoitujen tilanteiden) yhtälöt yleisistä ja tämä tehdään matematiikan keinoin. Arvelen oppirakenteen mukaisen projektin hyödylliseksi ja voisin suositella sen toteuttamista joko pitkässä matematiikassa integrointikurssilla tai matematiikan ja fysiikan välisenä yhteistyöprojektina. Arvelen hyötyjen olevan suuria analyysin peruslauseen näkemiselle autenttisessa tilanteessa: Nopeuskuvaajan paikallinen korkeus vastaa matkakuvaajan paikallista kaltevuutta ja paikkakuvaajan paikallinen korkeus vastaa nopeuskuvaajan alle kertynyttä pinta-alaa. Arvelen, että tällaiset yhteydet eivät tule lukio-opinnoissa kovin usein esiin, varsinkaan sellaisten funktioiden osalta, joita ei voi ilmentää yksittäisellä yksinkertaisella yhtälöllä. Esimerkkikuvassani vaihtelevan nopeuden tilanteessa, tämä tulee todella vahvasti esiin ja käyttämäni työkalu (Logger Pro) on hyvä demonstraatioväline.

Toisaalta arvelen, että jos oppirakenteen mukaisen opintokokonaisuuden toteuttaisi lukio-opiskelijoille, iso osa opiskelijoista ei ymmärtäisi ihan jokaista osaa rakenteesta. En silti pidä tätä niin suurena uhkana, ettei opintokokonaisuutta kannataisi siksi toteuttaa. Vaikka kaikkea ei ymmärtäisikään, uskon kokonaisuuden välittävän kuvan yhteydestä derivoinnin ja integroinnin välillä ja liittävän nämä toimenpiteet fysiikan kontekstiin.

Oppirunkoa voi myös kritisoida johdonmukaisuuden puutteesta, sen kohdellessa nopeuden ja paikan suhdetta eri tavalla kuin kiihtyvyyden ja nopeuden, vaikka matemaattisesti nämä suhteutuvat toisiinsa vastaavasti. Tämä ratkaisu on silti ollut tietoinen ja perustelenkin sen oppirakennetta käsittelevässä luvussa 4. Tavoitteeni oli luoda runko, jossa matematiikan oppiminen hyötyy fysiikan autenttisuudesta ja jossa sen jälkeen edetään matematiikalla itsellään. (Freudenthalin matematisoinnin molemmat tavat.) Pidän todennäköisenä että tähän tavoitteeseen voisi luoda myös paremman oppirakenteen, mutta nähdäkseni rakenne onnistuu tässä tavoitteessa hyvin. Yksi selkeästi vaihtoehtoinen tapa käsitellä samoja asioita, olisi matematisoida kaikki vertikaalisesti, eli oleellisesti hyödyntää luonnontieteellistä menetelmää ja saapua havainnoista ja mittauksista matemaattisiin malleihin. Vaikka näen omassa mallissani hyveenä sen, että siinä on matematisoinnin molemmat tavat läsnä, pidän mahdollisena että joku voisi oppia matematiikkaa paremmin, toteuttamalla kaikki kohdat horisontaalisella matematisoinnilla.

6 Johtopäätökset

Opetussuunnitelmien laaja-alainen osaaminen liittyy laajempaan liikehdintään, jota ilmentää erilaiset kehikot. Perusopetuksen järjestelmä kytkee laaja-alaisen osaamisen oppiaineiden jokaiseen tavoitteeseen, kun taas lukion opetussuunnitelman perusteet kuvailevat kokonaisen oppiaineen ja laaja-alaisen osaamisen välistä yhteyttä. Lukion laaja-alaisen osaamisen kuvaukset ovat abstraktimpia kuin peruskoulun. Näistä syistä yksittäinen opetussuunnitelman mukaisesti opettava opettaja joutuu lukiossa tulkitsemaan laaja-alaisuutta peruskouluopettajaa aktiivisemmin. Sellainen mielipide on myös perusteltu, että ymmärtääkseen lukion laaja-alaisen osaamisen, tulee ymmärtää peruskoulun vastaava.

Laaja-alaisesta osaamisesta koskettavat matematiikkaa vahvimmin ne, jotka käsittelevät monilukutaitoa sekä ajattelun ja oppimisen taitoa. Näiden lisäksi matematiikkaa koskettaa sellainen yhteiskunnallinen osaaminen, joka liittyy arjen taitoihin ja ajattelun taitoja hyödyntävään eräänlaiseen yrittelijäisyyteen. Näitä käsittelevät osa-alueet ovat lukiossa Monitieteinen ja luova osaaminen, jossain määrin Hyvinvointiosaaminen sekä Yhteiskunnallinen osaaminen. Yhteiskunnallisen osaamisen tulkinta matemaatiikkaan tällä tavoin liittyväksi ei ilmene vahvasti sen osa-aluekuvauksesta. Vuorovaikutusosaaminen liittyy matematiikkaan, mikäli työskentelytavat valitaan vuorovaikutteisiksi. Eettisyys ja ympäristöosaaminen ja Globaali-ja kulttuuriosaaminen eivät liity matematiikkaan suoraan, vaan ne pitää liittää siihen aktiivisesti erikseen, esimerkiksi aihepiirejä käsittelevillä harjoitustehtävillä. Lukion oppiainekuvauksen esittämät yhteydet näihin osa-alueisiin ovat hataria, jos niitä suhteuttaa osa-alueiden kuvauksiin. Perusopetuksessa vastaavia asioita käsittelevät osa-alueet L2 ja L7 kytkeytyvät molemmat vain kahteen tavoitteesen. Tällaiset laaja-alaisen osaamisen teemat eivät siis kytkeydy matematiikkaan ylipäätään vahvasti.

Lukion paikallistasolle vastuuta sysäävän järjestelmän seuraus on, että oppimateriaalien laatijat saavat suuren vastuun tulkintojen luomisesta. Matematiikassa onkin vaikea laatia paikallinen opetussuunnitelma, ilman tietoa siitä, kuinka oppimateriaalit käsittelevät laaja-alaista osaamista. Järjestelmässä osa-alueita yhdistetään opintojaksoihin, varsinkin paikalisen opetussuunnitelman laadintatyökalussa, ePerusteissa. Opetussuunnitelmaa kannattaakin joko päivittää kun oppimateriaalit ovat tutut tai vaihtoehtoisesti kirjoittaa se niin ylimalkaisesti, että sen raameissa voi toteuttaa laaja-alaisuutta edistävää opetusta hyväksi havaitsemallaan tavalla.

Laaja-alaisuuden matematiikkaa koskettavat teemat liityvät tieteellisessä kirjallisuudessa ainakin tieteelliseen tai matemaattiseen lukutaitoon, Freudenthalin ideaan maailman ja matematiikan välisestä suhteesta ja myös pohdintaan siitä, mitä matematiikka on. Juha Oikkosen esittämä ajatus matematiikasta, sen ihmispuolen ja formaalin puolen välisenä vuorovaikutuksena, saa vahvaa vastakaikua opetussuunnitelmien matematiikkatulkinnasta ja siitä, kuinka matematiikka opetussuunnitelmien mukaan suhteutuu laaja-alaiseen osaamiseen.

Olen jaotellut lukiomatematiikan oppiainekuvauksen osion laaja-alaisesta osaamisesta neljään luokkaan. Näitä ovat 1. Työskentely ja oppiminen matematiikassa, 2. Yleiset kaikenlaisen harjoittelun hyödyt, 3. Mallintamistaito, tiedon eheytys ja monilukutaito sekä 4. Matematiikan osaaminen kansalaistaitona ja maailmankansalaisuus. Näistä ensimmäinen ja kolmas ovat vahvimmin suoranaisessa kytköksessä matematiikkaan, toinen koskettaa sen harjoittelun hyötyjä kuten sinnikkyyden kehittymistä ja viimeinen edellyttää matematiikan viemistä otsikon asiayhteyksiin sekä peräti matematiikan olemuksen pohdintaa menetelmin, jotka ovat muille oppiaineille ominaisempia. Tekemäni jaottelu neljään luokkaan luultavasti helpottaa opetussuunnitelman sisällön tulkintaa matematiikan opettajan toimesta.

Prosenttilaskenta liittyy arjen taitoihin, yhteiskunnalliseen osaamiseen ja maailman mallintamiseen matematiikan keinoin. Sen formaalin puolen hallinnasta ei seuraa, että sitä osataan käyttää kontekstiin sidotuissa tilanteissa. Prosenttilaskentaa harjoitellessa on tärkeää käyttää ajattelua tukevia kuvia. Uskon, että prosenttilaskennan saralla voi tehdä didaktista kehitystyötä ja peräänkuulutan prosenttilaskennan kontekstisidonnaisuuden kehittämistä matematiikassa.

Toisaalta, prosenttilaskennassa ja sitä laajemminkin, matematiikan sitominen muiden oppiaineiden konteksteihin voi tapahtua matematiikan opetuksen ohella myös näiden oppiaineiden opetuksessa. Laaja-alaisuuden lisääminen on potentiaalisesti uhka matematiikan integriteetille oppiaineena.

Fysiikan ja matematiikan yhdistävät opintokokonaisuudet tarjoavat loistavia mahdollisuuksia freudenthalilaisen matematisaation molempiin tapoihin, niin horisontaaliseen kuin vertikaaliseen. Autenttisten kuvaajien käsittely mitä luultavimmin vahvistaa analyysin peruslauseen ymmärrystä paremmin ja tuo sen oppimiseen sellaisen lisän, mikä siihen kannattaa tuoda. Tällainen matematiikan ja fysiikan yhdistävä opiskelu koskettaa niitä laaja-alaisen osaamisen osa-alueita hyvin vahvasti, jotka liittyvät matematiikkaan kiinteimmin.

Lähteet

Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.*

Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019.*

Opetushallitus (2018). *Varhaiskasvatussuunnitelman perusteet 2018.*

Opetushallitus (2014). *Esiopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014.*

Lehikoinen P., Mattila P., Pärnänen M., & Mielonen O. (2020). *Uusi LOPS - mikä muuttuu lukiossa?* -esitys, Educa-messut 25.1.2020, Messukeskus, Helsinki. (Tutkielman tekijän muistiinpanot esityksestä.)

Care, E., Vista, A., & Kim, H. (2019). Assessment of transversal competencies: current tools in the Asian region. UNESCO and The Brookings Institution.

Lonka, K., Makkonen, J., Litmanen, T. Berg, M., Hietajärvi, L., Kruskopf, M., . . . Nuorteva, M. (2017). Road to 21st century competence - Evaluation framework for transversal skills. Internet-sivulta (6.11.2020):
https://kirstilonka.files.wordpress.com/2018/08/evaluation_framework_microsoft_final.pdf

Harju, V. & Niemi, H. (2017). Transversal competencies in Finnish basic education.

Opetushallitus (2020). Laaja-alainen osaaminen - mitä sillä pitäisi saada aikaan?. Internet-sivulta (9.11.2020):
https://www.oph.fi/fi/koulutus-ja-tutkinnot/laaja-alainen-osaaminen-mita-silla-pitaisi-saada-aikaan

Dede, C. (2009). Comparing Frameworks for "21st century skills". Harvard Graduate School of Education.

Kuvalähde: P21 (2020). Internet-sivulta (6.11.2020):
https://www.battelleforkids.org/networks/p21

Kuvalähde: Wikimedia Commons (2020). Internet-sivulta (6.11.2020):
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:P21_Skills.jpg

OECD (2005). The Definition and Selection of Key Competencies - Executive Summary (2005). Internet-sivulta (6.11.2020):
https://www.oecd.org/pisa/35070367.pdf

Oikkonen, J. (2009). Ideas and results in teaching beginning maths students, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40:1, 127-138.

Heuvel-Panhuizen, M. (1996). Assessment and realistic mathematics education. Freudenthal Institute, Utrecht.

Roberts, D. A. (2007). Scientific Literacy/Science Literacy. In S.K. Abell & N.G. Lederman (Eds.), *Handbook of Research on Science Education* (pp. 729-780).

Valtanen, E., Laakkonen, P., Viitala, J., & Kettunen, V. (2019). Matemaattisia kaavoja, Genesis-Kirjat.

Ekonen, M., Hassinen, S., Heiskanen, P., Hemmo, K., Kaakinen, P., Tahvanainen, J., & Taskinen, T. (2018). Yhteinen tekijä, Lukion matematiikka 1 - Luvut ja lukujonot. Sanoma Pro Oy.

Peltola M., & Vuorenmaa, S. (2018). Lähihoitajan laskutaito. Sanoma Pro Oy.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research, 65*(4), 421-81.

Rianasari, V., Budayasa, I. K., Patahuddin, S. M. (2012). Supporting Students' Understanding of Percentage. *Journal on Mathematics Education*. 3. 10.22342/jme.3.1.621.29-40.

Koay, P. L. (1998). The knowledge of percent of pre-service teachers. *The Mathematics Educator, 3* (2), 54-69.

Järvinen, J., Mannila, L., Setälä, M., Hiltula, T., Huuska, O., Konttinen, P., . . . Yli-kokko, T. (2019). MAOLs tabeller. Förlagsaktiebolaget Otava, Helsingfors.

Google, & The Associated Press (2020). Internet-sivulta (6.11.2020): http://www.google.fi/

Kilpeläinen, T. (2001-2003). Analyysi 2. (Luentomuistiinpanoja 2001-2003). Internet-sivulta (22.10.2020):
http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA112.pdf